Fonctions génératrices

d'une VAR à valeurs dans $\mathbb{N}$

Sylvain Pelletier

PSI - LMSC

Série génératrice d'une VAR à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
La **série génératrice de X** est la série entière $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n\right)$ notée G_X.

Propriétés

La série génératrice de X a un rayon de convergence noté R_X au moins égal à 1. On a de plus :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[, \ G_X(t) = E(t^X)$$

Enfin, la série entière G_X converge normalement sur $[-1, 1]$.

Série génératrice d'une VAR à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
La **série génératrice de X** est la série entière $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n\right)$ notée G_X.

Propriétés

La série génératrice de X a un rayon de convergence noté R_X au moins égal à 1. On a de plus :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X(t) = E(t^X)$$

Enfin, la série entière G_X converge normalement sur $[-1, 1]$.

La série $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n\right)$ a un rayon de convergence noté R_X au moins égal à 1. On a de plus :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X(t) = E(t^X)$$

Enfin, la série entière G_X converge normalement sur $[-1,1]$.

On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n) = 1$ ainsi, le rayon de convergence est au moins égal à 1.

La formule $G_X(t) = E(t^X)$ provient directement du théorème de transfert (t^X est une variable aléatoire composée).

Comme le rayon est a moins égal à 1, on sait qu'il y a convergence normale sur tout segment de $]-1,1[$, on va montrer qu'il y a convergence normale sur $[-1,1]$:

$$\forall t \in [-1,1],\ |p(X=n)t^n| \leqslant p(X=n)$$

et $\sum p(X=n)$ converge, d'où la convergence normale sur $[-1,1]$.

La série $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n\right)$ a un rayon de convergence noté R_X au moins égal à 1. On a de plus :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[, \; G_X(t) = E(t^X)$$

Enfin, la série entière G_X converge normalement sur $[-1,1]$.

On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n) = 1$ ainsi, le rayon de convergence est au moins égal à 1.

La formule $G_X(t) = E(t^X)$ provient directement du théorème de transfert (t^X est une variable aléatoire composée).

Comme le rayon est a moins égal à 1, on sait qu'il y a convergence normale sur tout segment de $]-1,1[$, on va montrer qu'il y a convergence normale sur $[-1,1]$:

$$\forall t \in [-1,1], \; |p(X=n)t^n| \leqslant p(X=n)$$

et $\sum p(X=n)$ converge, d'où la convergence normale sur $[-1,1]$.

Fonction génératrice

- On appelle fonction génératrice de la variable aléatoire X la fonction $t \longmapsto G_X(t)$.
- Cette fonction est au moins définie sur $[-1,1]$ puisque le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1 et que $G_X(1) = 1$ et que la série $G_X(-1)$ converge absolument.
- Comme il y a convergence normale sur $[-1,1]$, la fonction génératrice est continue sur $[-1,1]$.
- Notons aussi que $G_X(0) = p(X = 0)$.
- On peut aussi définir la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, c'est alors un polynôme.

Fonction génératrice

- On appelle **fonction génératrice** de la variable aléatoire X la fonction $t \longmapsto G_X(t)$.
- Cette fonction est au moins définie sur $[-1, 1]$ puisque le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1 et que $G_X(1) = 1$ et que la série $G_X(-1)$ converge absolument.
- Comme il y a convergence normale sur $[-1, 1]$, la fonction génératrice est continue sur $[-1, 1]$.
- Notons aussi que $G_X(0) = p(X = 0)$.
- On peut aussi définir la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, c'est alors un polynôme.

Fonction génératrice

- On appelle **fonction génératrice** de la variable aléatoire X la fonction $t \longmapsto G_X(t)$.
- Cette fonction est au moins définie sur $[-1, 1]$ puisque le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1 et que $G_X(1) = 1$ et que la série $G_X(-1)$ converge absolument.
- Comme il y a convergence normale sur $[-1, 1]$, la fonction génératrice est continue sur $[-1, 1]$.
- Notons aussi que $G_X(0) = p(X = 0)$.
- On peut aussi définir la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, c'est alors un polynôme.

- On appelle **fonction génératrice** de la variable aléatoire X la fonction $t \longmapsto G_X(t)$.
- Cette fonction est au moins définie sur $[-1, 1]$ puisque le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1 et que $G_X(1) = 1$ et que la série $G_X(-1)$ converge absolument.
- Comme il y a convergence normale sur $[-1, 1]$, la fonction génératrice est continue sur $[-1, 1]$.
- Notons aussi que $G_X(0) = p(X = 0)$.
- On peut aussi définir la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, c'est alors un polynôme.

Fonction génératrice

- On appelle **fonction génératrice** de la variable aléatoire X la fonction $t \longmapsto G_X(t)$.
- Cette fonction est au moins définie sur $[-1, 1]$ puisque le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1 et que $G_X(1) = 1$ et que la série $G_X(-1)$ converge absolument.
- Comme il y a convergence normale sur $[-1, 1]$, la fonction génératrice est continue sur $[-1, 1]$.
- Notons aussi que $G_X(0) = p(X = 0)$.
- On peut aussi définir la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, c'est alors un polynôme.

Fonction génératrice

- On appelle **fonction génératrice** de la variable aléatoire X la fonction $t \longmapsto G_X(t)$.
- Cette fonction est au moins définie sur $[-1, 1]$ puisque le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1 et que $G_X(1) = 1$ et que la série $G_X(-1)$ converge absolument.
- Comme il y a convergence normale sur $[-1, 1]$, la fonction génératrice est continue sur $[-1, 1]$.
- Notons aussi que $G_X(0) = p(X = 0)$.
- On peut aussi définir la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, c'est alors un polynôme.

La fonction génératrice caractérise la loi

Proposition

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X. Autrement dit, deux variables aléatoires qui ont la même fonction génératrice ont la même loi.

C'est l'unicité du développement en série entière de la fonction $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p(X = n)t^n$, puisqu'on a vu que le rayon est strictement positif.

Ainsi, on calcule parfois la fonction génératrice pour avoir la loi.

La fonction génératrice caractérise la loi

Proposition

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X. Autrement dit, deux variables aléatoires qui ont la même fonction génératrice ont la même loi.

C'est l'unicité du développement en série entière de la fonction $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p(X = n)t^n$, puisqu'on a vu que le rayon est strictement positif.

Ainsi, on calcule parfois la fonction génératrice pour avoir la loi.

La fonction génératrice caractérise la loi

Proposition

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X. Autrement dit, deux variables aléatoires qui ont la même fonction génératrice ont la même loi.

C'est l'unicité du développement en série entière de la fonction $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n$, puisqu'on a vu que le rayon est strictement positif.

Ainsi, on calcule parfois la fonction génératrice pour avoir la loi.

Lien avec l'espérance et la variance

Proposition

La variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si : G_X est dérivable en 1.
Dans ce cas on a : $E(X) = G'_X(1)$.
La variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ si et seulement si : G_X est deux fois dérivable en 1.
Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= G''_X(1) \\ \text{et donc} \qquad V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 \end{aligned}$$

Démonstration

On retrouve très facilement ces résultats

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n$$

$$\text{donc } \forall t \in]-R_X, R_X[,\ G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(X=n)t^{n-1}$$

$$\text{en particulier } G'_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(X=n) = E(X) \quad \text{si } R_X > 1.$$

La seule difficulté de la démonstration est de prouver que l'on peut faire ces dérivations dans le cas où $R_X = 1$. Conformément au programme, on admet ces démonstrations.

Démonstration

On retrouve très facilement ces résultats

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n$$

$$\text{donc } \forall t \in]-R_X, R_X[,\ G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(X=n)t^{n-1}$$

$$\text{en particulier } G'_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(X=n) = E(X) \quad \text{si } R_X > 1.$$

La seule difficulté de la démonstration est de prouver que l'on peut faire ces dérivations dans le cas où $R_X = 1$. Conformément au programme, on admet ces démonstrations.

De même :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n$$

$$\text{donc } \forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} p(X=n)n(n-1)t^n$$

$$\text{en particulier } G_X''(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p(X=n) \qquad \text{si } R_X > 1$$

$$= E(X(X-1))$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} V(X) =& E(X^2) - (E(X))^2 \\ =& E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ =& G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2 \end{aligned}$$

Même difficulté lorsque $R_X = 1$.

De même :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[, \; G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n$$

$$\text{donc } \forall t \in]-R_X, R_X[, \; G_X''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} p(X=n)n(n-1)t^n$$

$$\text{en particulier } G_X''(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p(X=n) \qquad \text{si } R_X > 1$$

$$= E(X(X-1))$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2 \end{aligned}$$

Même difficulté lorsque $R_X = 1$.

La variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si : G_X est dérivable en 1.
Dans ce cas on a : $E(X) = G'_X(1)$.
La variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ si et seulement si : G_X est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= G''_X(1) \\ \text{et donc} \qquad V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2 \end{aligned}$$

- Cette proposition a un intérêt que si on écrit la fonction génératrice G_X sans le symbole somme (ie si on a reconnu le développement d'une série entière d'une fonction usuelle). Dans ce cas, on dérive l'expression obtenue pour avoir l'espérance.
- Bien retenir la relation : $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$.

La variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si : G_X est dérivable en 1.
Dans ce cas on a : $E(X) = G'_X(1)$.
La variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ si et seulement si : G_X est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= G''_X(1) \\ \text{et donc} \qquad V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2 \end{aligned}$$

- Cette proposition a un intérêt que si on écrit la fonction génératrice G_X sans le symbole somme (ie si on a reconnu le développement d'une série entière d'une fonction usuelle). Dans ce cas, on dérive l'expression obtenue pour avoir l'espérance.
- Bien retenir la relation : $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$.

La variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si : G_X est dérivable en 1.
Dans ce cas on a : $E(X) = G'_X(1)$.
La variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ si et seulement si : G_X est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= G''_X(1) \\ \text{et donc} \qquad V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2 \end{aligned}$$

- Cette proposition a un intérêt que si on écrit la fonction génératrice G_X sans le symbole somme (ie si on a reconnu le développement d'une série entière d'une fonction usuelle). Dans ce cas, on dérive l'expression obtenue pour avoir l'espérance.
- Bien retenir la relation : $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$.

La variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si : G_X est dérivable en 1.
Dans ce cas on a : $E(X) = G'_X(1)$.
La variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ si et seulement si : G_X est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas on a :

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= G''_X(1) \\
\text{et donc} \qquad V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\
&= G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2
\end{aligned}
$$

- Cette proposition a un intérêt que si on écrit la fonction génératrice G_X sans le symbole somme (ie si on a reconnu le développement d'une série entière d'une fonction usuelle). Dans ce cas, on dérive l'expression obtenue pour avoir l'espérance.
- Bien retenir la relation : $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$.

Cas d'une somme de variables indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes. On a alors : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$ au sens où $R_{X+Y} \geqslant \min(R_X, R_Y)$ et

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_X, R_Y) \implies G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

On a en utilisant les probas totales avec le SCE associé à X :

$$\begin{aligned}
\forall t \in]-R_{X+Y}, R_{X+Y}[,\ G_{X+Y}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p(X+Y=n)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p(X=k \cap Y=n-k) \right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p(X=k)p(Y=n-k) \right) t^n
\end{aligned}$$

Cas d'une somme de variables indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes. On a alors : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$ au sens où $R_{X+Y} \geqslant \min(R_X, R_Y)$ et
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_X, R_Y) \implies G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

On a en utilisant les probas totales avec le SCE associé à X :
$$\begin{aligned}\forall t \in \left]-R_{X+Y}, R_{X+Y}\right[,\ G_{X+Y}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p(X+Y=n)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p(X=k \cap Y=n-k)\right)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p(X=k)p(Y=n-k)\right)t^n\end{aligned}$$

$$\forall t \in]-R_{X+Y}, R_{X+Y}[,\ G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p(X=k)p(Y=n-k) \right) t^n$$

C'est donc le produit de Cauchy des deux séries entières :

$$G_X = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n \qquad \text{et} \qquad G_Y = \sum_{n=0}^{+\infty} p(Y=n)t^n$$

D'après les propriétés du produit de Cauchy des séries entières, on obtient que le rayon de convergence R_{X+Y} de la série entière G_{X+Y} vérifie : $R_{X+Y} \geqslant \min(R_X, R_Y)$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_X, R_Y) \implies G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

La réciproque est fausse : on peut avoir $G_{X+Y} = G_X G_Y$ et X et Y non indépendante !

Autre démonstration :

$$E\left(t^{X+Y}\right) = E\left(t^X\right) E\left(t^X\right) = G_X(t)G_Y(t)$$

$$\forall t \in \left]-R_{X+Y}, R_{X+Y}\right[,\ G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p(X=k)p(Y=n-k) \right) t^n$$

C'est donc le produit de Cauchy des deux séries entières :

$$G_X = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n \qquad \text{et} \qquad G_Y = \sum_{n=0}^{+\infty} p(Y=n)t^n$$

D'après les propriétés du produit de Cauchy des séries entières, on obtient que le rayon de convergence R_{X+Y} de la série entière G_{X+Y} vérifie : $R_{X+Y} \geqslant \min(R_X, R_Y)$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_X, R_Y) \implies G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

La réciproque est fausse : on peut avoir $G_{X+Y} = G_X G_Y$ et X et Y non indépendante !

Autre démonstration :

$$E\left(t^{X+Y}\right) = E\left(t^X\right) E\left(t^X\right) = G_X(t)G_Y(t)$$

$$\forall t \in]-R_{X+Y}, R_{X+Y}[, \; G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p(X=k)p(Y=n-k) \right) t^n$$

C'est donc le produit de Cauchy des deux séries entières :

$$G_X = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n \qquad \text{et} \qquad G_Y = \sum_{n=0}^{+\infty} p(Y=n)t^n$$

D'après les propriétés du produit de Cauchy des séries entières, on obtient que le rayon de convergence R_{X+Y} de la série entière G_{X+Y} vérifie : $R_{X+Y} \geqslant \min(R_X, R_Y)$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \; |z| < \min(R_X, R_Y) \implies G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

La réciproque est fausse : on peut avoir $G_{X+Y} = G_X G_Y$ et X et Y non indépendante !

Autre démonstration :

$$E\left(t^{X+Y}\right) = E\left(t^X\right) E\left(t^X\right) = G_X(t)G_Y(t)$$

Généralisation au cas d'une somme finie de VAR indépendantes

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes. On a alors :

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = G_{X_1} \dots G_{X_n}$$

au sens où :

$$R_{X_1+\cdots+X_n} \geqslant \min\left(R_{X_1}, \dots, R_{X_n}\right)$$

et :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_{X_1}, \dots, R_{X_n}) \implies G_{X_1+\cdots+X_n}(z) = G_{X_1}(z) \dots G_{X_n}(z)$$

Cette proposition est très utile dans le cas où on cherche la loi de la somme.

Généralisation au cas d'une somme finie de VAR indépendantes

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes. On a alors :

$$G_{X_1+\dots+X_n} = G_{X_1} \dots G_{X_n}$$

au sens où :

$$R_{X_1+\dots+X_n} \geqslant \min\left(R_{X_1}, \dots, R_{X_n}\right)$$

et :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_{X_1}, \dots, R_{X_n}) \implies G_{X_1+\dots+X_n}(z) = G_{X_1}(z) \dots G_{X_n}(z)$$

Cette proposition est très utile dans le cas où on cherche la loi de la somme.

Cas des variables aléatoires finie

Pour les variables aléatoires finies, la fonction caractéristique est un polynôme.

Loi uniforme

Soit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ G_X(t) = \frac{1}{n}(t + t^2 + \cdots + t^n) = \begin{cases} \dfrac{t}{n}\left(\dfrac{1-t^n}{1-t}\right) & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

démonstration

$\forall t \in \mathbb{R},\ \ G_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k$

Pour les variables aléatoires finies, la fonction caractéristique est un polynôme.

Loi uniforme

Soit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \frac{1}{n}(t + t^2 + \cdots + t^n) = \begin{cases} \dfrac{t}{n}\left(\dfrac{1-t^n}{1-t}\right) & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

démonstration

$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k$

Cas des variables aléatoires finie

Pour les variables aléatoires finies, la fonction caractéristique est un polynôme.

Loi uniforme

Soit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \frac{1}{n}(t + t^2 + \cdots + t^n) = \begin{cases} \frac{t}{n}\left(\frac{1 - t^n}{1 - t}\right) & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

démonstration

$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} t^k$

Variable de Bernouilli

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = 1 - p + pt$$

On retrouve en particulier $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

Démonstration

On a $p(X=0) = 1-p$ et $p(X=1) = p$, d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1-p) + pt$$

Ainsi, $G'_X(1) = p$, $G''_X(1) = 0$.

Donc $E(X) = p$ et

$$\begin{aligned} V(X) =& E\left(X(X-1)\right) + E(X) - \left(E(X)\right)^2 \\ =& p - p^2 = pq \end{aligned}$$

Variable de Bernouilli

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \;\; G_X(t) = 1 - p + pt$$

On retrouve en particulier $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

Démonstration

On a $p(X=0) = 1-p$ et $p(X=1) = p$, d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \;\; G_X(t) = (1-p) + pt$$

Ainsi, $G_X'(1) = p$, $G_X''(1) = 0$.

Donc $E(X) = p$ et

$$\begin{aligned} V(X) =& E\left(X(X-1)\right) + E(X) - \left(E(X)\right)^2 \\ =& p - p^2 = pq \end{aligned}$$

Variable binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1 - p + pt)^n$$

On retrouve en particulier $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = (1 - p + pt)^n$$

On en déduit : $G'_X(t) = pn(1 - p + pt)^{n-1}$ et donc $G'_X(1) = np$.
On a aussi : $G''_X(t) = p^2 n(n-1)(1 - p + pt)^{n-2}$. Donc :

$$\begin{aligned} V(X) &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\ &= np\left((n-1)p + 1 - np\right) \\ &= npq \end{aligned}$$

Variable binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1-p+pt)^n$$

On retrouve en particulier $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = (1-p+pt)^n$$

On peut aussi écrire $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ sont indépendantes. En conséquence :

$$G_X(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = (G_{X_1}(t))^n = (1-p+pt)^n$$

On en déduit : $G'_X(t) = pn(1-p+pt)^{n-1}$ et donc $G'_X(1) = np$.
On a aussi : $G''_X(t) = p^2 n(n-1)(1-p+pt)^{n-2}$. Donc :

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

Variable binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1 - p + pt)^n$$

On retrouve en particulier $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = (1 - p + pt)^n$$

On en déduit : $G'_X(t) = pn(1 - p + pt)^{n-1}$ et donc $G'_X(1) = np$.
On a aussi : $G''_X(t) = p^2 n(n-1)(1 - p + pt)^{n-2}$. Donc :

$$\begin{aligned} V(X) &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\ &= np\left((n-1)p + 1 - np\right) \\ &= npq \end{aligned}$$

Loi géométrique

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors sa série génératrice est :

$G_X(t) = \dfrac{pt}{1-t(1-p)}$ de rayon de convergence $R_X = \dfrac{1}{1-p} > 1$

On a :

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(X=n)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n$$

Série géométrique de raison : $t(1-p)$ et de premier terme pt.

Le rayon est donc : $R_X = \frac{1}{1-p}$, et :

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-t(1-p)} = \frac{pt}{1-qt}$$

Loi géométrique (espérance et variance)

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$

En dérivant, $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$, on a :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G'_X(t) = \frac{p(1-qt)+pqt}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2}$$

et donc : $G'_X(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} = E(X)$.

On a aussi :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G''_X(t) = p(-2)(-q)\frac{1}{(1-qt)^3} = 2pq\frac{1}{(1-qt)^3}$$

et donc : $G''_X(1) = 2pq\frac{1}{(1-q)^3} = 2\frac{q}{p^2}$.

Puis :

$$V(X) = 2\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}(2q+p-1) = \frac{q}{p^2}$$

Loi géométrique (espérance et variance)

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$

En dérivant, $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$, on a :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X'(t) = \frac{p(1-qt)+pqt}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2}$$

et donc : $G_X'(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} = E(X)$.

On a aussi :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X''(t) = p(-2)(-q)\frac{1}{(1-qt)^3} = 2pq\frac{1}{(1-qt)^3}$$

et donc : $G_X''(1) = 2pq\frac{1}{(1-q)^3} = 2\frac{q}{p^2}$.

Puis :

$$V(X) = 2\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}(2q+p-1) = \frac{q}{p^2}$$

Loi de Poisson

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors sa série génératrice est :

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \qquad \text{de rayon de convergence } R_X = +\infty.$$

On retrouve en particulier $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

En dérivant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)} \qquad G'_X(1) = \lambda = E(X)$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)} \qquad G''_X(1) = \lambda^2 = E(X(X-1))$$

On obtient ensuite :

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Loi de Poisson

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors sa série génératrice est :

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \qquad \text{de rayon de convergence } R_X = +\infty.$$

On retrouve en particulier $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

En dérivant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)} \qquad G_X'(1) = \lambda = E(X)$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)} \qquad G_X''(1) = \lambda^2 = E(X(X-1))$$

On obtient ensuite :

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Somme de deux lois de Poisson indépendantes

On retrouve aussi que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et si $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

On utilise le résultat sur la fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Ainsi : $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.