Rappels de dénombrements

révisions

Sylvain Pelletier

LMSC - PSI

Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Un ensemble E est fini si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $[\![1, p]\!]$.
On admet qu'un tel p est alors unique, c'est le cardinal de l'ensemble E.

- On peut écrire $E = \{e_1, \dots, e_p\}$.
- Dénombrer c'est écrire processus de construction de l'ensemble E permettant de numéroter les éléments. Ce processus doit construire une et une seule fois chaque éléments.
- Cela n'a rien à voir avec le hasard, ne suit pas l'ordre chronologique et dépend du choix de la modélisation.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Un ensemble E est **fini** si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $[\![1, p]\!]$.
On admet qu'un tel p est alors unique, c'est le **cardinal** de l'ensemble E.

- On peut écrire $E = \{e_1, \ldots, e_p\}$.
- Dénombrer c'est écrire processus de construction de l'ensemble E permettant de numéroter les éléments. Ce processus doit construire une et une seule fois chaque éléments.
- Cela n'a rien à voir avec le hasard, ne suit pas l'ordre chronologique et dépend du choix de la modélisation.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Un ensemble E est **fini** si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $[\![1, p]\!]$.
On admet qu'un tel p est alors unique, c'est le **cardinal** de l'ensemble E.

- On peut écrire $E = \{e_1, \ldots, e_p\}$.
- Dénombrer c'est écrire processus de construction de l'ensemble E permettant de numéroter les éléments. Ce processus doit construire une et une seule fois chaque éléments.
- Cela n'a rien à voir avec le hasard, ne suit pas l'ordre chronologique et dépend du choix de la modélisation.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Un ensemble E est fini si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $[\![1, p]\!]$.
On admet qu'un tel p est alors unique, c'est le cardinal de l'ensemble E.

- On peut écrire $E = \{e_1, \ldots, e_p\}$.
- Dénombrer c'est écrire processus de construction de l'ensemble E permettant de numéroter les éléments. Ce processus doit construire une et une seule fois chaque éléments.
  Cela peut amener à des problèmes d'algorithmique.
- Cela n'a rien à voir avec le hasard, ne suit pas l'ordre chronologique et dépend du choix de la modélisation.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Un ensemble E est **fini** si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $[\![1, p]\!]$.
On admet qu'un tel p est alors unique, c'est le **cardinal** de l'ensemble E.

- On peut écrire $E = \{e_1, \ldots, e_p\}$.
- Dénombrer c'est écrire processus de construction de l'ensemble E permettant de numéroter les éléments. Ce processus doit construire une et une seule fois chaque éléments.
  Cela peut amener à des problèmes d'algorithmique.
- Cela n'a rien à voir avec le hasard, ne suit pas l'ordre chronologique et dépend du choix de la modélisation.

Théorème fondamental

Théorème

Soit E et F deux ensembles finis, alors E et F ont même cardinal, si et seulement si il existe une bijection ϕ de E vers F (on dit que E et F sont en bijection).

- On va donc mettre en bijection l'ensemble E que l'on veut dénombrer avec un ensemble F dont on connaît le cardinal en expliquant comment faire correspondre à un élément de E un et un seul élément de F.
- Bien connaître les ensembles usuels et leur cardinal, repérer les ensembles usuels dans les ensembles de tirages.

Théorème fondamental

Théorème

Soit E et F deux ensembles finis, alors E et F ont même cardinal, si et seulement si il existe une bijection ϕ de E vers F (on dit que E et F sont en bijection).

- On va donc mettre en bijection l'ensemble E que l'on veut dénombrer avec un ensemble F dont on connaît le cardinal en expliquant comment faire correspondre à un élément de E un et un seul élément de F.
- Bien connaître les ensembles usuels et leur cardinal, repérer les ensembles usuels dans les ensembles de tirages.

Théorème fondamental

Théorème

Soit E et F deux ensembles finis, alors E et F ont même cardinal, si et seulement si il existe une bijection ϕ de E vers F (on dit que E et F sont en bijection).

- On va donc mettre en bijection l'ensemble E que l'on veut dénombrer avec un ensemble F dont on connaît le cardinal en expliquant comment faire correspondre à un élément de E un et un seul élément de F.
- Bien connaître les ensembles usuels et leur cardinal, repérer les ensembles usuels dans les ensembles de tirages.

Les ensembles dont on connaît le cardinal

Description	Cardinal	Utilisation
Entiers de $[\![a, b]\!]$	$b - a + 1$	1 tirage
Listes de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	p^n	n tirages avec remise
Listes sans répétitions de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	$\frac{p!}{(p-n)!}$	n tirages sans remise de $[\![1, p]\!]$ n-arrangement de $[\![1, p]\!]$
Permutations $[\![1, p]\!]$	$p!$	tirages sans remise jusqu'à avoir toutes les boules,
Parties de $[\![1, n]\!]$	2^n	tirages simultanés d'un nombre quelconque de boule,
Parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments Combinaisons de k éléments	$\binom{n}{k}$ $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	tirage « en tas » de k boules, de $[\![1, n]\!]$

Les ensembles dont on connaît le cardinal

Description	Cardinal	Utilisation
Entiers de $[\![a, b]\!]$	$b - a + 1$	1 tirage Attention au $+1$
Listes de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	p^n	n tirages avec remise
Listes sans répétitions de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	$\frac{p!}{(p-n)!}$	n tirages sans remise de $[\![1, p]\!]$ n-arrangement de $[\![1, p]\!]$
Permutations $[\![1, p]\!]$	$p!$	tirages sans remise jusqu'à avoir toutes les boules,
Parties de $[\![1, n]\!]$	2^n	tirages simultanés d'un nombre quelconque de boule,
Parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments Combinaisons de k éléments	$\binom{n}{k}$ $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	tirage « en tas » de k boules, de $[\![1, n]\!]$

Les ensembles dont on connaît le cardinal

Description	Cardinal	Utilisation
Entiers de $[\![a, b]\!]$	$b - a + 1$	1 tirage
Listes de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	p^n	n tirages avec remise rangements de n objets dans p tiroirs applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$
Listes sans répétitions de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	$\frac{p!}{(p-n)!}$	n tirages sans remise de $[\![1, p]\!]$ n-arrangement de $[\![1, p]\!]$
Permutations $[\![1, p]\!]$	$p!$	tirages sans remise jusqu'à avoir toutes les boules,
Parties de $[\![1, n]\!]$	2^n	tirages simultanés d'un nombre quelconque de boule,
Parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments Combinaisons de k éléments	$\binom{n}{k}$ $\frac{n!}{k!(n-k)!}$	tirage « en tas » de k boules, de $[\![1, n]\!]$

Les ensembles dont on connaît le cardinal

Description	Cardinal	Utilisation
Entiers de $[\![a, b]\!]$	$b - a + 1$	1 tirage
Listes de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	p^n	n tirages avec remise
Listes sans répétitions de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	$\frac{p!}{(p-n)!}$	n tirages sans remise de $[\![1, p]\!]$ n-arrangement de $[\![1, p]\!]$ rangement de n objets dans p tiroirs, avec au plus un objet par tiroir injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$
Permutations $[\![1, p]\!]$	$p!$	tirages sans remise jusqu'à avoir toutes les boules,
Parties de $[\![1, n]\!]$	2^n	tirages simultanés d'un nombre quelconque de boule,
Parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments Combinaisons de k éléments	$\binom{n}{k}$ $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	tirage « en tas » de k boules, de $[\![1, n]\!]$

Les ensembles dont on connaît le cardinal

Description	Cardinal	Utilisation
Entiers de $[\![a, b]\!]$	$b - a + 1$	1 tirage
Listes de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	p^n	n tirages avec remise
Listes sans répétitions de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	$\frac{p!}{(p-n)!}$	n tirages sans remise de $[\![1, p]\!]$ n-arrangement de $[\![1, p]\!]$
Permutations $[\![1, p]\!]$	$p!$	tirages sans remise jusqu'à avoir toutes les boules, mélange bijection
Parties de $[\![1, n]\!]$	2^n	tirages simultanés d'un nombre quelconque de boule,
Parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments Combinaisons de k éléments	$\binom{n}{k}$ $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	tirage « en tas » de k boules, de $[\![1, n]\!]$

Les ensembles dont on connaît le cardinal

Description	Cardinal	Utilisation
Entiers de $[\![a, b]\!]$	$b - a + 1$	1 tirage
Listes de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	p^n	n tirages avec remise
Listes sans répétitions de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	$\frac{p!}{(p-n)!}$	n tirages sans remise de $[\![1, p]\!]$ n-arrangement de $[\![1, p]\!]$
Permutations $[\![1, p]\!]$	$p!$	tirages sans remise jusqu'à avoir toutes les boules,
Parties de $[\![1, n]\!]$	2^n	tirages simultanés d'un nombre quelconque de boule, contenu possible d'un tiroir
Parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments Combinaisons de k éléments	$\binom{n}{k}$ $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	tirage « en tas » de k boules, de $[\![1, n]\!]$

Les ensembles dont on connaît le cardinal

Description	Cardinal	Utilisation
Entiers de $[\![a, b]\!]$	$b - a + 1$	1 tirage
Listes de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	p^n	n tirages avec remise
Listes sans répétitions de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	$\frac{p!}{(p-n)!}$	n tirages sans remise de $[\![1, p]\!]$ n-arrangement de $[\![1, p]\!]$
Permutations $[\![1, p]\!]$	$p!$	tirages sans remise jusqu'à avoir toutes les boules,
Parties de $[\![1, n]\!]$	2^n	tirages simultanés d'un nombre quelconque de boule,
Parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments Combinaisons de k éléments	$\binom{n}{k}$ $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	tirage « en tas » de k boules, de $[\![1, n]\!]$ places des k B dans n tirages N/B

Les ensembles dont on connaît le cardinal

Description	Cardinal	Utilisation
Entiers de $[\![a, b]\!]$	$b - a + 1$	1 tirage
Listes de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	p^n	n tirages avec remise
Listes sans répétitions de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	$\frac{p!}{(p-n)!}$	n tirages sans remise de $[\![1, p]\!]$ n-arrangement de $[\![1, p]\!]$
Permutations $[\![1, p]\!]$	$p!$	tirages sans remise jusqu'à avoir toutes les boules,
Parties de $[\![1, n]\!]$	2^n	tirages simultanés d'un nombre quelconque de boule,
Parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments Combinaisons de k éléments	$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	tirage « en tas » de k boules, de $[\![1, n]\!]$ choix de k antécédents

Les ensembles dont on connaît le cardinal

Description	Cardinal	Utilisation
Entiers de $[\![a, b]\!]$	$b - a + 1$	1 tirage
Listes de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	p^n	n tirages avec remise
Listes sans répétitions de longueurs n de $[\![1, p]\!]$	$\frac{p!}{(p-n)!}$	n tirages sans remise de $[\![1, p]\!]$ n-arrangement de $[\![1, p]\!]$
Permutations $[\![1, p]\!]$	$p!$	tirages sans remise jusqu'à avoir toutes les boules,
Parties de $[\![1, n]\!]$	2^n	tirages simultanés d'un nombre quelconque de boule,
Parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments Combinaisons de k éléments	$\binom{n}{k}$ $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	tirage « en tas » de k boules, de $[\![1, n]\!]$ Suites strictement croissante de k éléments de $[\![1, n]\!]$

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1,8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1,8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1,8]\!]$ i.e. $[\![1,8]\!]^4$, son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1, 8]\!]$ i.e. $[\![1, 8]\!]^4$, son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1,8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1,8]\!]$ i.e. $[\![1,8]\!]^4$, son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers correspond au 4-arrangements de $[\![1,8]\!]$, son cardinal est $\frac{8!}{(8-4)!}$.
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1, 8]\!]$ i.e. $[\![1, 8]\!]^4$, son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers correspond au 4-arrangements de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $\frac{8!}{(8-4)!}$.
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1, 8]\!]$ i.e. $[\![1, 8]\!]^4$, son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers correspond au 4-arrangements de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $\frac{8!}{(8-4)!}$.
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers correspond au 4-combinaisons de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $\binom{8}{4}$.
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1, 8]\!]$ i.e. $[\![1, 8]\!]^4$, son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers correspond au 4-arrangements de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $\frac{8!}{(8-4)!}$.
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers correspond au 4-combinaisons de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $\binom{8}{4}$.
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1,8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1,8]\!]$ i.e. $[\![1,8]\!]^4$, son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers correspond au 4-arrangements de $[\![1,8]\!]$, son cardinal est $\frac{8!}{(8-4)!}$.
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers correspond au 4-combinaisons de $[\![1,8]\!]$, son cardinal est $\binom{8}{4}$.
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers correspond aux parties quelconques de $[\![1,8]\!]$, cardinal 2^8.
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1, 8]\!]$ i.e. $[\![1, 8]\!]^4$, son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers correspond au 4-arrangements de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $\frac{8!}{(8-4)!}$.
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers correspond au 4-combinaisons de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $\binom{8}{4}$.
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers correspond aux parties quelconques de $[\![1, 8]\!]$, cardinal 2^8.
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1, 8]\!]$ i.e. $[\![1, 8]\!]^4$, son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers correspond au 4-arrangements de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $\frac{8!}{(8-4)!}$.
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers correspond au 4-combinaisons de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $\binom{8}{4}$.
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers correspond aux parties quelconques de $[\![1, 8]\!]$, cardinal 2^8.
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers correspond aux permutations de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $8!$.
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1,8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1,8]\!]$ i.e. $[\![1,8]\!]^4$, son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers correspond au 4-arrangements de $[\![1,8]\!]$, son cardinal est $\frac{8!}{(8-4)!}$.
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers correspond au 4-combinaisons de $[\![1,8]\!]$, son cardinal est $\binom{8}{4}$.
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers correspond aux parties quelconques de $[\![1,8]\!]$, cardinal 2^8.
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers correspond aux permutations de $[\![1,8]\!]$, son cardinal est $8!$.
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- Si on tire une seule boule, alors l'univers est $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1, 8]\!]$ i.e. $[\![1, 8]\!]^4$, son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers correspond au 4-arrangements de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $\frac{8!}{(8-4)!}$.
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers correspond au 4-combinaisons de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est $\binom{8}{4}$.
- Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers correspond aux parties quelconques de $[\![1, 8]\!]$, cardinal 2^8.
- Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers correspond aux permutations de $[\![1, 8]\!]$, son cardinal est 8!.
- Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante correspondent aux parties à 4 éléments distincts, il y en a donc $\binom{8}{4}$.

Techniques de dénombrements

Procéder par complémentaire $\mathrm{Card}(\overline{E}) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(E)$.

Union disjointe on écrit l'ensemble E sous la forme $E = A \cup B$, avec une union disjointe. On a alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

Choix successifs On décompose le processus de construction en plusieurs étapes. Le nombre d'éléments construit est alors le produit du nombre de choix à chaque étape.

Union non disjointe $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.

Lemme des bergers Si chaque élément de F corresponds à λ éléments de E, alors $\lambda \, \mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$.

Techniques de dénombrements

Procéder par complémentaire $\operatorname{Card}(\overline{E}) = \operatorname{Card}(\Omega) - \operatorname{Card}(E)$.

Union disjointe on écrit l'ensemble E sous la forme $E = A \cup B$, avec une union disjointe. On a alors $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B)$.

Choix successifs On décompose le processus de construction en plusieurs étapes. Le nombre d'éléments construit est alors le produit du nombre de choix à chaque étape.

Union non disjointe $\operatorname{Card}(E \cup F) = \operatorname{Card}(E) + \operatorname{Card}(F) - \operatorname{Card}(E \cap F)$.

Lemme des bergers Si chaque élément de F corresponds à λ éléments de E, alors $\lambda \operatorname{Card}(F) = \operatorname{Card}(E)$.

Techniques de dénombrements

Procéder par complémentaire $\mathrm{Card}(\overline{E}) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(E)$.

Union disjointe on écrit l'ensemble E sous la forme $E = A \cup B$, avec une union disjointe. On a alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$. Cela correspond à une partition de l'ensemble E : on construit d'abords une partie des éléments de E, puis une autre.

Choix successifs On décompose le processus de construction en plusieurs étapes. Le nombre d'éléments construit est alors le produit du nombre de choix à chaque étape.

Union non disjointe $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.

Lemme des bergers Si chaque élément de F corresponds à λ éléments de E, alors $\lambda \,\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$.

Techniques de dénombrements

Procéder par complémentaire $\mathrm{Card}(\overline{E}) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(E)$.

Union disjointe on écrit l'ensemble E sous la forme $E = A \cup B$, avec une union disjointe. On a alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$. Cela correspond à une partition de l'ensemble E : on construit d'abords une partie des éléments de E, puis une autre.

Choix successifs On décompose le processus de construction en plusieurs étapes. Le nombre d'éléments construit est alors le produit du nombre de choix à chaque étape.

Union non disjointe $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.

Lemme des bergers Si chaque élément de F corresponds à λ éléments de E, alors $\lambda\,\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$.

Techniques de dénombrements

Procéder par complémentaire $\text{Card}(\overline{E}) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(E)$.

Union disjointe on écrit l'ensemble E sous la forme $E = A \cup B$, avec une union disjointe. On a alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
Cela correspond à une partition de l'ensemble E : on construit d'abords une partie des éléments de E, puis une autre.

Choix successifs On décompose le processus de construction en plusieurs étapes. Le nombre d'éléments construit est alors le produit du nombre de choix à chaque étape.
Cela revient à un produit cartésien.

Union non disjointe $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$.

Lemme des bergers Si chaque élément de F corresponds à λ éléments de E, alors $\lambda \,\text{Card}(F) = \text{Card}(E)$.

Techniques de dénombrements

Procéder par complémentaire $\mathrm{Card}(\overline{E}) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(E)$.

Union disjointe on écrit l'ensemble E sous la forme $E = A \cup B$, avec une union disjointe. On a alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.
Cela correspond à une partition de l'ensemble E : on construit d'abords une partie des éléments de E, puis une autre.

Choix successifs On décompose le processus de construction en plusieurs étapes. Le nombre d'éléments construit est alors le produit du nombre de choix à chaque étape.
Cela revient à un produit cartésien.

Union non disjointe $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.

Lemme des bergers Si chaque élément de F corresponds à λ éléments de E, alors $\lambda\,\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$.

Techniques de dénombrements

Procéder par complémentaire $\mathrm{Card}(\overline{E}) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(E)$.

Union disjointe on écrit l'ensemble E sous la forme $E = A \cup B$, avec une union disjointe. On a alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.
Cela correspond à une partition de l'ensemble E : on construit d'abords une partie des éléments de E, puis une autre.

Choix successifs On décompose le processus de construction en plusieurs étapes. Le nombre d'éléments construit est alors le produit du nombre de choix à chaque étape.
Cela revient à un produit cartésien.

Union non disjointe $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.

Lemme des bergers Si chaque élément de $F` corresponds à λ éléments de E, alors $\lambda \,\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$.

Techniques de dénombrements

Procéder par complémentaire $\mathrm{Card}(\overline{E}) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(E)$.

Union disjointe on écrit l'ensemble E sous la forme $E = A \cup B$, avec une union disjointe. On a alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.
Cela correspond à une partition de l'ensemble E : on construit d'abords une partie des éléments de E, puis une autre.

Choix successifs On décompose le processus de construction en plusieurs étapes. Le nombre d'éléments construit est alors le produit du nombre de choix à chaque étape.
Cela revient à un produit cartésien.

Union non disjointe $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.

Lemme des bergers Si chaque élément de F corresponds à λ éléments de E, alors $\lambda \,\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$. Ce lemme est à la limite du programme, voir la fiche.

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ?
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur).
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ?

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ?
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ? parties / combinaisons
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur).
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ?

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ?
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ? parties / combinaisons
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur).
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ?

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ?
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ? parties / combinaisons
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur). $4 \times \binom{8}{4}$
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ?

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ?
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ? parties / combinaisons
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur). $4 \times \binom{8}{4}$
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ?

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ?
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ? parties / combinaisons
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur). $4 \times \binom{8}{4}$
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ? $\binom{32}{4} - 4\binom{8}{4}$

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ?
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ? parties / combinaisons
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur). $4 \times \binom{8}{4}$
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ? $\binom{32}{4} - 4\binom{8}{4}$

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ?
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ? parties / combinaisons
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur). $4 \times \binom{8}{4}$
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ? $\binom{32}{4} - 4\binom{8}{4}$

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ? Arrangements / liste sans répétition
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ? parties / combinaisons
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur). $4 \times \binom{8}{4}$
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ? $\binom{32}{4} - 4\binom{8}{4}$

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ? Arrangements / liste sans répétition
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ? parties / combinaisons
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur). $4 \times \binom{8}{4}$
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ? $\binom{32}{4} - 4\binom{8}{4}$

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ? Arrangements / liste sans répétition
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
  $20 \times \frac{25!}{(25-5)!}$
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ? parties / combinaisons
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur). $4 \times \binom{8}{4}$
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ? $\binom{32}{4} - 4\binom{8}{4}$

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ? Arrangements / liste sans répétition
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
  $20 \times \frac{25!}{(25-5)!}$
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- Univers ? parties / combinaisons
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur). $4 \times \binom{8}{4}$
- Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ? $\binom{32}{4} - 4\binom{8}{4}$

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Univers ? Arrangements / liste sans répétition
- Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ? $20 \times \frac{25!}{(25-5)!}$
- Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ? $\binom{26}{6}$

Exemples basiques

On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

- Quel est l'univers associé et son cardinal ?
- Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ?
- Combien sont formés de au moins deux « 1 » ?
- Combien sont formés de deux nombres différents et deux seulement ?
- Combien sont formés de cinq nombres (différents) tirés dans l'ordre croissant ?

Exemples basiques

On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

- Quel est l'univers associé et son cardinal ? listes, $[\![1,15]\!]^5$
- Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ?
- Combien sont formés de au moins deux « 1 » ?
- Combien sont formés de deux nombres différents et deux seulement ?
- Combien sont formés de cinq nombres (différents) tirés dans l'ordre croissant ?

Exemples basiques

On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

- Quel est l'univers associé et son cardinal ? listes, $[\![1, 15]\!]^5$
- Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ?
- Combien sont formés de au moins deux « 1 » ?
- Combien sont formés de deux nombres différents et deux seulement ?
- Combien sont formés de cinq nombres (différents) tirés dans l'ordre croissant ?

Exemples basiques

On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

- Quel est l'univers associé et son cardinal ? listes, $[\![1, 15]\!]^5$
- Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ? $\frac{15!}{(15-5)!}$
- Combien sont formés de au moins deux « 1 » ?
- Combien sont formés de deux nombres différents et deux seulement ?
- Combien sont formés de cinq nombres (différents) tirés dans l'ordre croissant ?

Exemples basiques

On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

- Quel est l'univers associé et son cardinal ? listes, $[\![1, 15]\!]^5$
- Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ? $\frac{15!}{(15-5)!}$
- Combien sont formés de au moins deux « 1 » ?
- Combien sont formés de deux nombres différents et deux seulement ?
- Combien sont formés de cinq nombres (différents) tirés dans l'ordre croissant ?

Exemples basiques

On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

- Quel est l'univers associé et son cardinal ? listes, $[\![1, 15]\!]^5$
- Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ? $\frac{15!}{(15-5)!}$
- Combien sont formés de au moins deux « 1 » ? $15^5 - 14^5 - 5 \times 14^4$.
- Combien sont formés de deux nombres différents et deux seulement ?
- Combien sont formés de cinq nombres (différents) tirés dans l'ordre croissant ?

Exemples basiques

On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

- Quel est l'univers associé et son cardinal ? listes, $[\![1, 15]\!]^5$
- Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ? $\frac{15!}{(15-5)!}$
- Combien sont formés de au moins deux « 1 » ? $15^5 - 14^5 - 5 \times 14^4$.
- Combien sont formés de deux nombres différents et deux seulement ?
- Combien sont formés de cinq nombres (différents) tirés dans l'ordre croissant ?

Exemples basiques

On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

- Quel est l'univers associé et son cardinal ? listes, $[\![1, 15]\!]^5$
- Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ? $\frac{15!}{(15-5)!}$
- Combien sont formés de au moins deux « 1 » ? $15^5 - 14^5 - 5 \times 14^4$.
- Combien sont formés de deux nombres différents et deux seulement ? $\binom{15}{2}(2^5 - 2)$, ou $15 \times \left[\binom{5}{3} + \binom{5}{4}\right] \times 14$.
- Combien sont formés de cinq nombres (différents) tirés dans l'ordre croissant ?

Exemples basiques

On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

- Quel est l'univers associé et son cardinal ? listes, $[\![1, 15]\!]^5$
- Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ? $\frac{15!}{(15-5)!}$
- Combien sont formés de au moins deux « 1 » ? $15^5 - 14^5 - 5 \times 14^4$.
- Combien sont formés de deux nombres différents et deux seulement ? $\binom{15}{2}(2^5 - 2)$, ou $15 \times \left[\binom{5}{3} + \binom{5}{4}\right] \times 14$.
- Combien sont formés de cinq nombres (différents) tirés dans l'ordre croissant ?

Exemples basiques

On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

- Quel est l'univers associé et son cardinal ? listes, $[\![1, 15]\!]^5$
- Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ? $\frac{15!}{(15-5)!}$
- Combien sont formés de au moins deux « 1 » ? $15^5 - 14^5 - 5 \times 14^4$.
- Combien sont formés de deux nombres différents et deux seulement ? $\binom{15}{2}(2^5 - 2)$, ou $15 \times \left[\binom{5}{3} + \binom{5}{4}\right] \times 14$.
- Combien sont formés de cinq nombres (différents) tirés dans l'ordre croissant ? C'est une suite strictement croissante : $\binom{15}{5}$

Exemples basiques

- Combien existe-t-il d'anagrammes du mot `abracadabra` ?
- On distribue les 32 cartes d'un jeu de cartes à 4 joueurs, chacun recevant donc 8 cartes. Quel est le cardinal de l'univers associé ?
- On dispose d'une urne contenant trois boules blanches numérotées de 1 à 3 et de deux boules noires numérotées de 4 à 5. On tire une à une successivement les cinq boules de l'urne (sans remise). Combien y a-t-il de façons d'obtenir deux boules blanches lors des deux premiers tirages ?

Exemples basiques

- Combien existe-t-il d'anagrammes du mot `abracadabra` ?
  $\binom{11}{5} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2$ (places des a, des b des r permutation de c et d).
  Cela se simplifie.
- On distribue les 32 cartes d'un jeu de cartes à 4 joueurs, chacun recevant donc 8 cartes. Quel est le cardinal de l'univers associé ?
- On dispose d'une urne contenant trois boules blanches numérotées de 1 à 3 et de deux boules noires numérotées de 4 à 5. On tire une à une successivement les cinq boules de l'urne (sans remise). Combien y a-t-il de façons d'obtenir deux boules blanches lors des deux premiers tirages ?

Exemples basiques

- Combien existe-t-il d'anagrammes du mot `abracadabra` ?
  $\binom{11}{5} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2$ (places des a, des b des r permutation de c et d).
  Cela se simplifie.
- On distribue les 32 cartes d'un jeu de cartes à 4 joueurs, chacun recevant donc 8 cartes. Quel est le cardinal de l'univers associé ?
- On dispose d'une urne contenant trois boules blanches numérotées de 1 à 3 et de deux boules noires numérotées de 4 à 5. On tire une à une successivement les cinq boules de l'urne (sans remise). Combien y a-t-il de façons d'obtenir deux boules blanches lors des deux premiers tirages ?

Exemples basiques

- Combien existe-t-il d'anagrammes du mot `abracadabra` ?
  $\binom{11}{5} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2$ (places des a, des b des r permutation de c et d).
  Cela se simplifie.
- On distribue les 32 cartes d'un jeu de cartes à 4 joueurs, chacun recevant donc 8 cartes. Quel est le cardinal de l'univers associé ?
  $\binom{32}{8} \times \binom{24}{8} \times \binom{16}{8} \times \binom{8}{8}$, ce qui se simplifie.
- On dispose d'une urne contenant trois boules blanches numérotées de 1 à 3 et de deux boules noires numérotées de 4 à 5. On tire une à une successivement les cinq boules de l'urne (sans remise). Combien y a-t-il de façons d'obtenir deux boules blanches lors des deux premiers tirages ?

Exemples basiques

- Combien existe-t-il d'anagrammes du mot `abracadabra` ?
  $\binom{11}{5} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2$ (places des a, des b des r permutation de c et d).
  Cela se simplifie.
- On distribue les 32 cartes d'un jeu de cartes à 4 joueurs, chacun recevant donc 8 cartes. Quel est le cardinal de l'univers associé ?
  $\binom{32}{8} \times \binom{24}{8} \times \binom{16}{8} \times \binom{8}{8}$, ce qui se simplifie.
- On dispose d'une urne contenant trois boules blanches numérotées de 1 à 3 et de deux boules noires numérotées de 4 à 5. On tire une à une successivement les cinq boules de l'urne (sans remise). Combien y a-t-il de façons d'obtenir deux boules blanches lors des deux premiers tirages ?

Exemples basiques

- Combien existe-t-il d'anagrammes du mot `abracadabra` ?
  $\binom{11}{5} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2$ (places des a, des b des r permutation de c et d).
  Cela se simplifie.
- On distribue les 32 cartes d'un jeu de cartes à 4 joueurs, chacun recevant donc 8 cartes. Quel est le cardinal de l'univers associé ?
  $\binom{32}{8} \times \binom{24}{8} \times \binom{16}{8} \times \binom{8}{8}$, ce qui se simplifie.
- On dispose d'une urne contenant trois boules blanches numérotées de 1 à 3 et de deux boules noires numérotées de 4 à 5. On tire une à une successivement les cinq boules de l'urne (sans remise). Combien y a-t-il de façons d'obtenir deux boules blanches lors des deux premiers tirages ?
  $3 \times 2 \times 3 \times 2$ (choix successifs).

Les pièges

- Toujours bien vérifier que l'on compte une et une seule fois chaque élément !
- Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1,
- Autre manière de voir : les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !

- Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
- Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
- Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ?

Les pièges

- Toujours bien vérifier que l'on compte une et une seule fois chaque élément ! Piège du `au moins`
- Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1,
- Autre manière de voir : les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !

- Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
- Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
- Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ?

Les pièges

- Toujours bien vérifier que l'on compte une et une seule fois chaque élément ! Piège du `au moins`
- Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1,
- Autre manière de voir : les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !

- Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
- Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
- Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ?

Les pièges

- Toujours bien vérifier que l'on compte une et une seule fois chaque élément ! Piège du `au moins`
- Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1, même si les choix faits à l'étape 2 peuvent dépendre du choix fait à l'étape 1.
- Autre manière de voir : les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !

- Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
- Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
- Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ?

Les pièges

- Toujours bien vérifier que l'on compte une et une seule fois chaque élément ! Piège du `au moins`
- Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1, même si les choix faits à l'étape 2 peuvent dépendre du choix fait à l'étape 1.
- Autre manière de voir : les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !

- Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
- Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
- Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ?

Les pièges

- Toujours bien vérifier que l'on compte une et une seule fois chaque élément ! Piège du `au moins`
- Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1, même si les choix faits à l'étape 2 peuvent dépendre du choix fait à l'étape 1.
- Autre manière de voir : les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !

- Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
- Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
- Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ?

Les pièges

- Toujours bien vérifier que l'on compte une et une seule fois chaque élément ! Piège du `au moins`
- Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1, même si les choix faits à l'étape 2 peuvent dépendre du choix fait à l'étape 1.
- Autre manière de voir : les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !

- Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
  4 choix pour le roi puis 31 choix est faux !
- Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
- Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ?

Les pièges

- Toujours bien vérifier que l'on compte une et une seule fois chaque élément ! Piège du `au moins`
- Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1, même si les choix faits à l'étape 2 peuvent dépendre du choix fait à l'étape 1.
- Autre manière de voir : les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !

- Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
- Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
- Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ?

Les pièges

- Toujours bien vérifier que l'on compte une et une seule fois chaque élément ! Piège du `au moins`
- Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1, même si les choix faits à l'étape 2 peuvent dépendre du choix fait à l'étape 1.
- Autre manière de voir : les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !

- Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
- Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
  On ne peut pas faire un choix successifs
- Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ?

Les pièges

- Toujours bien vérifier que l'on compte une et une seule fois chaque élément ! Piège du `au moins`
- Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1, même si les choix faits à l'étape 2 peuvent dépendre du choix fait à l'étape 1.
- Autre manière de voir : les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !

- Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
- Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
- Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ?

Les pièges

- Toujours bien vérifier que l'on compte une et une seule fois chaque élément ! Piège du `au moins`
- Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1, même si les choix faits à l'étape 2 peuvent dépendre du choix fait à l'étape 1.
- Autre manière de voir : les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !

- Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
- Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
- Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ? Ne pas suivre l'ordre chronologique !

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : .
- Les boules sont (virtuellement) numérotées : .
- Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : .
- Les boules sont (virtuellement) numérotées : .
- Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ p(Y = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : .
- Les boules sont (virtuellement) numérotées : .
- Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : .
- Les boules sont (virtuellement) numérotées : .
- Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.

$$p(X_i = 1) = \frac{\binom{N-1}{Np-1}}{\binom{N}{Np}} = \frac{Np \times \frac{(N-1)!}{(N-n)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}}$$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : .
- Les boules sont (virtuellement) numérotées : .
- Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

$$p(X_i = 1 \cap X_j = 1) = \frac{\binom{N-2}{Np-2}}{\binom{N}{Np}} = \frac{Np \times (Np-1) \times \frac{(N-2)!}{(N-n)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}}$$
$$= p\frac{Np-1}{N-1}$$

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : .

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : .
- Les boules sont (virtuellement) numérotées : .
- Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : .
- Les boules sont (virtuellement) numérotées : .
- Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : un tirage correspond à la place des blanches.
- Les boules sont (virtuellement) numérotées : .
- Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : un tirage correspond à la place des blanches.
- Les boules sont (virtuellement) numérotées : .
- Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : un tirage correspond à la place des blanches.
- Les boules sont (virtuellement) numérotées : un tirage correspond à un arrangements.
- Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules B et qN boules N, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Donner la loi de Y ?
- Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- On tire (virtuellement) toutes les boules : un tirage correspond à la place des blanches.
- Les boules sont (virtuellement) numérotées : un tirage correspond à un arrangements.
- Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- Si il existe une injection de E vers F, alors .
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors .
- Si il existe une surjection de E vers F, alors .
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors .

Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \to F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- Si il existe une injection de E vers F, alors .
- Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors .
- Si il existe une surjection de E vers F, alors .
- Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors .

Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \to F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- Si il existe une injection de E vers F, alors $\text{Card}(E) \leqslant \text{Card}(F)$.
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors .
- Si il existe une surjection de E vers F, alors .
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors .

Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \to F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- Si il existe une injection de E vers F, alors $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
- Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors .
- Si il existe une surjection de E vers F, alors .
- Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors .

Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \to F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- Si il existe une injection de E vers F, alors $\text{Card}(E) \leqslant \text{Card}(F)$.
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors toute injection de E vers F est bijective.
- Si il existe une surjection de E vers F, alors .
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors .

Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \to F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- Si il existe une injection de E vers F, alors $\text{Card}(E) \leqslant \text{Card}(F)$.
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors toute injection de E vers F est bijective.
- Si il existe une surjection de E vers F, alors .
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors .

Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \to F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- Si il existe une injection de E vers F, alors $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
- Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors toute injection de E vers F est bijective.
- Si il existe une surjection de E vers F, alors $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
- Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors .

Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \to F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- Si il existe une injection de E vers F, alors $\text{Card}(E) \leqslant \text{Card}(F)$.
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors toute injection de E vers F est bijective.
- Si il existe une surjection de E vers F, alors $\text{Card}(F) \leqslant \text{Card}(E)$.
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors .

Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \to F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- Si il existe une injection de E vers F, alors $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
- Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors toute injection de E vers F est bijective.
- Si il existe une surjection de E vers F, alors $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
- Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors toute surjection de E vers F est bijective.

Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \to F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- Si il existe une injection de E vers F, alors $\text{Card}(E) \leqslant \text{Card}(F)$.
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors toute injection de E vers F est bijective.
- Si il existe une surjection de E vers F, alors $\text{Card}(F) \leqslant \text{Card}(E)$.
- Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors toute surjection de E vers F est bijective.

Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \to F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Nombres d'applications entre ensembles finis

Soit E et F deux ensembles finis, avec $p = \mathrm{Card}(E)$, et $n = \mathrm{Card}(F)$.

- L'ensemble des applications de E vers F, notée F^E est fini et :

$$\mathrm{Card}(F^E) = (\mathrm{Card}\, F)^{\mathrm{Card}\, E} = n^p.$$

- On a $\frac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F.
- On a $p!$ bijections de E dans E.

Et le nombre de surjections ?

Nombres d'applications entre ensembles finis

Soit E et F deux ensembles finis, avec $p = \mathrm{Card}(E)$, et $n = \mathrm{Card}(F)$.

- L'ensemble des applications de E vers F, notée F^E est fini et :

$$\mathrm{Card}(F^E) = (\mathrm{Card}\, F)^{\mathrm{Card}\, E} = n^p.$$

- On a $\frac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F.
- On a $p!$ bijections de E dans E.

Et le nombre de surjections ?

Nombres d'applications entre ensembles finis

Soit E et F deux ensembles finis, avec $p = \text{Card}(E)$, et $n = \text{Card}(F)$.

- L'ensemble des applications de E vers F, notée F^E est fini et :

$$\text{Card}(F^E) = (\text{Card}\, F)^{\text{Card}\, E} = n^p.$$

- On a $\frac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F.
- On a $p!$ bijections de E dans E.

Et le nombre de surjections ?

Nombres d'applications entre ensembles finis

Soit E et F deux ensembles finis, avec $p = \text{Card}(E)$, et $n = \text{Card}(F)$.

- L'ensemble des applications de E vers F, notée F^E est fini et :

$$\text{Card}(F^E) = (\text{Card } F)^{\text{Card } E} = n^p.$$

- On a $\frac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F.
- On a $p!$ bijections de E dans E.

Et le nombre de surjections ?

Nombres d'applications entre ensembles finis

Soit E et F deux ensembles finis, avec $p = \mathrm{Card}(E)$, et $n = \mathrm{Card}(F)$.

- L'ensemble des applications de E vers F, notée F^E est fini et :

$$\mathrm{Card}(F^E) = (\mathrm{Card}\, F)^{\mathrm{Card}\, E} = n^p.$$

- On a $\frac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F.
- On a $p!$ bijections de E dans E.

Et le nombre de surjections ?

Exercices à savoir refaire

Nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $\{0, 1\}$:

Nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$:

S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments.

Montrer que $n^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_i^p$.

Exercices à savoir refaire

Nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $\{0, 1\}$: $2^n - 2$

Nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$:

S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments.

Montrer que $n^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_i^p$.

Exercices à savoir refaire

Nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $\{0, 1\}$: $2^n - 2$

Nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$:

S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments.
Montrer que $n^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_i^p$.

Exercices à savoir refaire

Nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $\{0,1\}$: $2^n - 2$

Nombre de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$: $\binom{n+1}{2} n\Big((n-1)!\Big)$

S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments.

Montrer que $n^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_i^p$.

Exercices à savoir refaire

Nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $\{0, 1\}$: $2^n - 2$

Nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$: $\binom{n+1}{2} n\Big((n-1)!\Big)$

S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments.
Montrer que $n^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_i^p$.

Binomiaux et dénombrements

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

E de cardinal n, $P_k(E)$ est l'ensemble des parties à k éléments de E.

$$P(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k(E) \qquad \text{union disjointe}$$

$$\text{Donc : } 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Binomiaux et dénombrements

- $\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a que l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

E de cardinal n, $P_k(E)$ est l'ensemble des parties à k éléments de E.

$$P(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k(E) \qquad \text{union disjointe}$$

$$\text{Donc : } 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Binomiaux et dénombrements

- $\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a que l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

E de cardinal n, $P_k(E)$ est l'ensemble des parties à k éléments de E.

$$P(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k(E) \qquad \text{union disjointe}$$

$$\text{Donc : } 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Binomiaux et dénombrements

- $\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a que l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
- $\binom{n}{1} = n$ car on compte les singletons, `i.e.` les éléments.
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

E de cardinal n, $P_k(E)$ est l'ensemble des parties à k éléments de E.

$$P(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k(E) \qquad \text{union disjointe}$$

$$\text{Donc : } 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Binomiaux et dénombrements

- $\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a que l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
- $\binom{n}{1} = n$ car on compte les singletons, `i.e.` les éléments.
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

E de cardinal n, $P_k(E)$ est l'ensemble des parties à k éléments de E.

$$P(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k(E) \qquad \text{union disjointe}$$

$$\text{Donc : } 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Binomiaux et dénombrements

- $\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a que l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
- $\binom{n}{1} = n$ car on compte les singletons, `i.e.` les éléments.
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ car il y a autant de parties que de complémentaires de parties.

E de cardinal n, $P_k(E)$ est l'ensemble des parties à k éléments de E.

$$P(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k(E) \qquad \text{union disjointe}$$

$$\text{Donc : } 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Binomiaux et dénombrements

- $\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a que l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
- $\binom{n}{1} = n$ car on compte les singletons, `i.e.` les éléments.
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ car il y a autant de parties que de complémentaires de parties.

E de cardinal n, $P_k(E)$ est l'ensemble des parties à k éléments de E.

$$P(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k(E) \qquad \text{union disjointe}$$

$$\text{Donc : } 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Propriété de Pascal

- On considère l'ensemble E des parties de $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$. $\mathrm{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- On découpe E en deux parties disjointes : l'ensemble des parties contenant $n+1$ notée E_1, l'ensemble des parties ne contenant pas $n+1$ notée E_2.
- On a clairement : $E = E_1 \cup E_2$, union disjointe. Ainsi, $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E_1) + \mathrm{Card}(E_2)$.

On a $\mathrm{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$ puisque l'on construit les parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$ ne contenant pas $n+1$, donc les parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n]\!]$.

Propriété de Pascal

- On considère l'ensemble E des parties de $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$. $\text{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- On découpe E en deux parties disjointes : l'ensemble des parties contenant $n+1$ notée E_1, l'ensemble des parties ne contenant pas $n+1$ notée E_2.
- On a clairement : $E = E_1 \cup E_2$, union disjointe. Ainsi, $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2)$.

On a $\text{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$ puisque l'on construit les parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$ ne contenant pas $n+1$, donc les parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n]\!]$.

Propriété de Pascal

- On considère l'ensemble E des parties de $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$. $\text{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- On découpe E en deux parties disjointes : l'ensemble des parties contenant $n+1$ notée E_1, l'ensemble des parties ne contenant pas $n+1$ notée E_2.
- On a clairement : $E = E_1 \cup E_2$, union disjointe. Ainsi, $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2)$.

On a $\text{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$ puisque l'on construit les parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$ ne contenant pas $n+1$, donc les parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n]\!]$.

Propriété de Pascal

- On considère l'ensemble E des parties de $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$.
  $\mathrm{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- On découpe E en deux parties disjointes : l'ensemble des parties contenant $n+1$ notée E_1, l'ensemble des parties ne contenant pas $n+1$ notée E_2.
- On a clairement : $E = E_1 \cup E_2$, union disjointe. Ainsi,
  $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E_1) + \mathrm{Card}(E_2)$.

On a $\mathrm{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$ puisque l'on construit les parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$ ne contenant pas $n+1$, donc les parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n]\!]$.

Propriété de Pascal

On considère l'ensemble E des parties de $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$. On découpe E en deux parties disjointes : l'ensemble des parties contenant $n+1$ notée E_1, l'ensemble des parties ne contenant pas $n+1$ notée E_2.

Une partie de E_1 est une partie de $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$ contenant $n+1$, elle est donc entièrement déterminée par la donnée d'une partie de p éléments de $[\![1, n]\!]$ auquel on ajoute l'élément $n+1$. Ainsi, $\mathrm{Card}(E_1) = \binom{n}{p}$.

Propriété de Pascal

- on sait $\mathrm{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- on a : $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E_1) + \mathrm{Card}(E_2)$.
- on a montré :

$$\mathrm{Card}(E_1) = \binom{n}{p} \text{ et } \mathrm{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$$

Ce qui donne la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Propriété de Pascal

- on sait $\text{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- on a : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2)$.
- on a montré :

$$\text{Card}(E_1) = \binom{n}{p} \text{ et } \text{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$$

Ce qui donne la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Propriété de Pascal

- on sait $\mathrm{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- on a : $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E_1) + \mathrm{Card}(E_2)$.
- on a montré :

$$\mathrm{Card}(E_1) = \binom{n}{p} \text{ et } \mathrm{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$$

Ce qui donne la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Propriété de Pascal

- on sait $\text{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- on a : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2)$.
- on a montré :

$$\text{Card}(E_1) = \binom{n}{p} \text{ et } \text{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$$

Ce qui donne la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Propriété de Pascal

- on sait $\mathrm{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- on a : $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E_1) + \mathrm{Card}(E_2)$.
- on a montré :

$$\mathrm{Card}(E_1) = \binom{n}{p} \text{ et } \mathrm{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$$

Ce qui donne la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$