Équations différentielles

Rappels

Sylvain Pelletier

PSI -LMSC

- Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées.
- Résoudre une équation différentielle c'est trouver un ensemble de fonctions solutions du problème posé.

Les équations linéaires

- Premier ordre : $y' + a(x)y = b(x)$
- Deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = c(x)$.
- Les autres sont en exercice.

- Interprétation physique : les coefficients de l'équation correspondent aux données interne au système, le second membre à l'excitation.

- Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées.
- Résoudre une équation différentielle c'est trouver un ensemble de fonctions solutions du problème posé.

Les équations linéaires

- Premier ordre : $y' + a(x)y = b(x)$
- Deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = c(x)$.
- Les autres sont en exercice.

- Interprétation physique : les coefficients de l'équation correspondent aux données interne au système, le second membre à l'excitation.

- Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées.
- Résoudre une équation différentielle c'est trouver un ensemble de fonctions solutions du problème posé.

Les équations linéaires

- Premier ordre : $y' + a(x)y = b(x)$
- Deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = c(x)$.
- Les autres sont en exercice.

- Interprétation physique : les coefficients de l'équation correspondent aux données interne au système, le second membre à l'excitation.

- Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées.
- Résoudre une équation différentielle c'est trouver un ensemble de fonctions solutions du problème posé.

Les équations linéaires

- Premier ordre : $y' + a(x)y = b(x)$
- Deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = c(x)$.
- Les autres sont en exercice.

- Interprétation physique : les coefficients de l'équation correspondent aux données interne au système, le second membre à l'excitation.

- Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées.
- Résoudre une équation différentielle c'est trouver un ensemble de fonctions solutions du problème posé.

Les équations linéaires

- Premier ordre : $y' + a(x)y = b(x)$
- Deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = c(x)$.
- Les autres sont en exercice.

- Interprétation physique : les coefficients de l'équation correspondent aux données interne au système, le second membre à l'excitation.

- Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées.
- Résoudre une équation différentielle c'est trouver un ensemble de fonctions solutions du problème posé.

Les équations linéaires

- Premier ordre : $y' + a(x)y = b(x)$
- Deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = c(x)$.
- Les autres sont en exercice.

- Interprétation physique : les coefficients de l'équation correspondent aux données interne au système, le second membre à l'excitation.

- Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées.
- Résoudre une équation différentielle c'est trouver un ensemble de fonctions solutions du problème posé.

Les équations linéaires

- Premier ordre : $y' + a(x)y = b(x)$
- Deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = c(x)$.
- Les autres sont en exercice.

- Interprétation physique : les coefficients de l'équation correspondent aux données interne au système, le second membre à l'excitation.

- Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées.
- Résoudre une équation différentielle c'est trouver un ensemble de fonctions solutions du problème posé.

Les équations linéaires

- Premier ordre : $y' + a(x)y = b(x)$
- Deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = c(x)$.
- Les autres sont en exercice.

- Interprétation physique : les coefficients de l'équation correspondent aux données interne au système, le second membre à l'excitation.

Premier ordre

- On étudie l'équation :
$$y' + a(x)y = b(x)$$
où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Une solution de (E) sur I est une fonction y définie et dérivable sur I telle que :
$$\forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$
- L'équation homogène associée est l'équation :
$$(H) \qquad y' + a(x)y = 0.$$

- I doit être un intervalle.
- En écrivant $\forall x \in I$, $y'(x) = b(x) - a(x)y(x)$, il est clair que y' est continue.

Premier ordre

- On étudie l'équation :
$$y' + a(x)y = b(x)$$
où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Une solution de (E) sur I est une fonction y définie et dérivable sur I telle que :
$$\forall x \in I, \ y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$
- L'équation homogène associée est l'équation :
$$(H) \qquad y' + a(x)y = 0.$$

- I doit être un intervalle.
- En écrivant $\forall x \in I, \ y'(x) = b(x) - a(x)y(x)$, il est clair que y' est continue.

Premier ordre

- On étudie l'équation :
$$y' + a(x)y = b(x)$$
où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Une **solution** de (E) sur I est une fonction y définie et dérivable sur I telle que :
$$\forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$
- L'équation **homogène** associée est l'équation :
$$(H) \qquad y' + a(x)y = 0.$$

- I doit être un intervalle.
- En écrivant $\forall x \in I,\ y'(x) = b(x) - a(x)y(x)$, il est clair que y' est continue.

Premier ordre

- On étudie l'équation :
$$y' + a(x)y = b(x)$$
où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Une **solution** de (E) sur I est une fonction y définie et dérivable sur I telle que :
$$\forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$
- **L'équation homogène** associée est l'équation :
$$(H) \qquad y' + a(x)y = 0.$$

- I doit être un intervalle.
- En écrivant $\forall x \in I,\ y'(x) = b(x) - a(x)y(x)$, il est clair que y' est continue.

Premier ordre

- On étudie l'équation :
$$y' + a(x)y = b(x)$$
où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Une **solution** de (E) sur I est une fonction y définie et dérivable sur I telle que :
$$\forall x \in I, \; y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$
- **L'équation homogène** associée est l'équation :
$$(H) \qquad y' + a(x)y = 0.$$

- I doit être un intervalle.
- En écrivant $\forall x \in I$, $y'(x) = b(x) - a(x)y(x)$, il est clair que y' est continue.

Premier ordre

- On étudie l'équation :
$$y' + a(x)y = b(x)$$
où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Une solution de (E) sur I est une fonction y définie et dérivable sur I telle que :
$$\forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$
- L'équation homogène associée est l'équation :
$$(H) \qquad y' + a(x)y = 0.$$

- I doit être un intervalle. Si l'intervalle n'est pas précisé, c'est l'intervalle le plus grand sur lequel les fonctions a et b sont définies et continues.
- En écrivant $\forall x \in I,\ y'(x) = b(x) - a(x)y(x)$, il est clair que y' est continue.

- On étudie l'équation :
$$y' + a(x)y = b(x)$$
où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Une **solution** de (E) sur I est une fonction y définie et dérivable sur I telle que :
$$\forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$
- **L'équation homogène** associée est l'équation :
$$(H) \qquad y' + a(x)y = 0.$$

- I doit être un intervalle.
- En écrivant $\forall x \in I$, $y'(x) = b(x) - a(x)y(x)$, il est clair que y' est continue.

Premier ordre

- On étudie l'équation :
$$y' + a(x)y = b(x)$$
où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Une solution de (E) sur I est une fonction y définie et dérivable sur I telle que :
$$\forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$
- L'équation homogène associée est l'équation :
$$(H) \qquad y' + a(x)y = 0.$$

- I doit être un intervalle.
- En écrivant $\forall x \in I$, $y'(x) = b(x) - a(x)y(x)$, il est clair que y' est continue. Si a et b sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit par récurrence que y est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Résolution de l'équation homogène

- Si $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et A une primitive de a sur I (qui existe puisqu'on a supposé que a était une fonction continue),
- alors les solutions de l'équation différentielle (H) : $y' + a(x)y = 0$ sont les fonction $y : I \to \mathbb{R}$, telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda e^{-A(x)}$.
- on écrit donc :
$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
- Si a est une fonction de I dans $\mathbb{C}$, on a de même :
$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

- On s'est ramené à un calcul de primitives.

Résolution de l'équation homogène

- Si $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et A une primitive de a sur I (qui existe puisqu'on a supposé que a était une fonction continue),
- alors les solutions de l'équation différentielle $(H) : \; y' + a(x)y = 0$ sont les fonction $y : I \to \mathbb{R}$, telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \; y(x) = \lambda e^{-A(x)}$.
- on écrit donc :
$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
- Si a est une fonction de I dans $\mathbb{C}$, on a de même :
$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

- On s'est ramené à un calcul de primitives.

Résolution de l'équation homogène

- Si $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et A une primitive de a sur I (qui existe puisqu'on a supposé que a était une fonction continue),
- alors les solutions de l'équation différentielle (H) : $y' + a(x)y = 0$ sont les fonction $y : I \to \mathbb{R}$, telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda e^{-A(x)}$.
- on écrit donc :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- Si a est une fonction de I dans $\mathbb{C}$, on a de même :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

- On s'est ramené à un calcul de primitives.

Résolution de l'équation homogène

- Si $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et A une primitive de a sur I (qui existe puisqu'on a supposé que a était une fonction continue),
- alors les solutions de l'équation différentielle $(H) : \; y' + a(x)y = 0$ sont les fonction $y : I \to \mathbb{R}$, telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \; y(x) = \lambda e^{-A(x)}$.
- on écrit donc :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- Si a est une fonction de I dans $\mathbb{C}$, on a de même :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

- On s'est ramené à un calcul de primitives.

Résolution de l'équation homogène

- Si $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et A une primitive de a sur I (qui existe puisqu'on a supposé que a était une fonction continue),
- alors les solutions de l'équation différentielle $(H) : \ y' + a(x)y = 0$ sont les fonction $y : I \to \mathbb{R}$, telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ y(x) = \lambda e^{-A(x)}$.
- on écrit donc :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- Si a est une fonction de I dans $\mathbb{C}$, on a de même :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

- On s'est ramené à un calcul de primitives.

Comment retrouver ce résultat

On considère y solution, on a alors :

$$\frac{y'}{y} = -\, a(x)$$

$$\text{donc } \ln(|y|) = -\, A(x) + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } y = \lambda e^{-A(x)} \qquad \text{en posant } \lambda = \pm e^{C}.$$

Cette démonstration est valable uniquement si on sait par avance que la fonction y solution ne s'annule pas.

Pensez à vérifier !

Comment retrouver ce résultat

On considère y solution, on a alors :

$$\frac{y'}{y} = -\,a(x)$$

$$\text{donc } \ln(|y|) = -\,A(x) + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } y = \lambda e^{-A(x)} \qquad \text{en posant } \lambda = \pm e^{C}.$$

Cette démonstration est valable uniquement si on sait par avance que la fonction y solution ne s'annule pas.

Pensez à vérifier !

Comment retrouver ce résultat

On considère y solution, on a alors :

$$\frac{y'}{y} = -\,a(x)$$

$$\text{donc } \ln(|y|) = -\,A(x) + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } y = \lambda e^{-A(x)} \qquad \text{en posant } \lambda = \pm e^{C}.$$

Cette démonstration est valable uniquement si on sait par avance que la fonction y solution ne s'annule pas.

Pensez à vérifier !

Cas d'un second membre

Structure de l'ensemble des solutions

- Pour l'équation homogène (H) : $y' + a(x)y = 0$, $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, une base est $\left(x \longmapsto e^{-A(x)}\right)$.
- Pour l'équation : (E) : $y' + a(x)y = b(x)$. $\mathcal{S}_E$ est l'ensemble des fonctions de la forme : $y = y_0 + y_h$ où $y_h \in \mathcal{S}_H$, et y_0 est une solution particulière.
- On a aussi le principe de superposition des solutions : lorsque $b = \alpha b_1 + b_2$ on cherche une solution pour b_1 et b_2, par linéarité on obtient une solution de (E).

- Cela correspond à l'équation linéaire $f(x) = b$. C'est pour cela que l'on parle d'équation différentielle linéaire.

Cas d'un second membre

Structure de l'ensemble des solutions

- Pour l'équation homogène (H) : $y' + a(x)y = 0$, $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, une base est $\left(x \longmapsto e^{-A(x)}\right)$.
- Pour l'équation : (E) : $y' + a(x)y = b(x)$. $\mathcal{S}_E$ est l'ensemble des fonctions de la forme : $y = y_0 + y_h$ où $y_h \in \mathcal{S}_H$, et y_0 est une solution particulière.
- On a aussi le principe de superposition des solutions : lorsque $b = \alpha b_1 + b_2$ on cherche une solution pour b_1 et b_2, par linéarité on obtient une solution de (E).

- Cela correspond à l'équation linéaire $f(x) = b$. C'est pour cela que l'on parle d'équation différentielle linéaire.

Cas d'un second membre

Structure de l'ensemble des solutions

- Pour l'équation homogène (H) : $y' + a(x)y = 0$, $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, une base est $\left(x \longmapsto e^{-A(x)}\right)$.
- Pour l'équation : (E) : $y' + a(x)y = b(x)$. $\mathcal{S}_E$ est l'ensemble des fonctions de la forme : $y = y_0 + y_h$ où $y_h \in \mathcal{S}_H$, et y_0 est une solution particulière.
- On a aussi le principe de superposition des solutions : lorsque $b = \alpha b_1 + b_2$ on cherche une solution pour b_1 et b_2, par linéarité on obtient une solution de (E).

- Cela correspond à l'équation linéaire $f(x) = b$. C'est pour cela que l'on parle d'équation différentielle linéaire.

Cas d'un second membre

Structure de l'ensemble des solutions

- Pour l'équation homogène (H) : $y' + a(x)y = 0$, $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, une base est $\left(x \longmapsto e^{-A(x)}\right)$.
- Pour l'équation : (E) : $y' + a(x)y = b(x)$. $\mathcal{S}_E$ est l'ensemble des fonctions de la forme : $y = y_0 + y_h$ où $y_h \in \mathcal{S}_H$, et y_0 est une solution particulière.
- On a aussi le principe de superposition des solutions : lorsque $b = \alpha b_1 + b_2$ on cherche une solution pour b_1 et b_2, par linéarité on obtient une solution de (E).

- Cela correspond à l'équation linéaire $f(x) = b$. C'est pour cela que l'on parle d'équation différentielle linéaire.

Cas d'un second membre

Structure de l'ensemble des solutions

- Pour l'équation homogène (H) : $y' + a(x)y = 0$, $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, une base est $\left(x \longmapsto e^{-A(x)}\right)$.
- Pour l'équation : (E) : $y' + a(x)y = b(x)$. $\mathcal{S}_E$ est l'ensemble des fonctions de la forme : $y = y_0 + y_h$ où $y_h \in \mathcal{S}_H$, et y_0 est une solution particulière.
- On a aussi le principe de superposition des solutions : lorsque $b = \alpha b_1 + b_2$ on cherche une solution pour b_1 et b_2, par linéarité on obtient une solution de (E).

- Cela correspond à l'équation linéaire $f(x) = b$. C'est pour cela que l'on parle d'équation différentielle linéaire.

Second membres particuliers

Pour l'équation $y' + ay = b(x)$, ie a est constant.

- D'une manière générale, il faut chercher une solution particulière de la même forme que le second membre.
- En mélangeant sinus et cosinus,
- Parfois il faut augmenter de 1 le degré des polynômes lorsque le second membre est solution de l'équation homogène (phénomène de résonance).

- Second membre polynôme : $(E): \ y' + ay = P(x)$
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0(x) = Q(x)$ de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Second membres particuliers

Pour l'équation $y' + ay = b(x)$, ie a est constant.

- D'une manière générale, il faut chercher une solution particulière de la même forme que le second membre.
- En mélangeant sinus et cosinus,
- Parfois il faut augmenter de 1 le degré des polynômes lorsque le second membre est solution de l'équation homogène (phénomène de résonance).

- Second membre polynôme : (E) : $y' + ay = P(x)$
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0(x) = Q(x)$ de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Second membres particuliers

Pour l'équation $y' + ay = b(x)$, ie a est constant.

- D'une manière générale, il faut chercher une solution particulière de la même forme que le second membre.
- En mélangeant sinus et cosinus,
- Parfois il faut augmenter de 1 le degré des polynômes lorsque le second membre est solution de l'équation homogène (phénomène de résonance).

- Second membre polynôme : (E) : $y' + ay = P(x)$
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0(x) = Q(x)$ de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Pour l'équation $y' + ay = b(x)$, ie a est constant.

- D'une manière générale, il faut chercher une solution particulière de la même forme que le second membre.
- En mélangeant sinus et cosinus,
- Parfois il faut augmenter de 1 le degré des polynômes lorsque le second membre est solution de l'équation homogène (phénomène de résonance).

- Second membre polynôme : (E) : $y' + ay = P(x)$
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0(x) = Q(x)$ de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Second membres particuliers

Pour l'équation $y' + ay = b(x)$, ie a est constant.

- D'une manière générale, il faut chercher une solution particulière de la même forme que le second membre.
- En mélangeant sinus et cosinus,
- Parfois il faut augmenter de 1 le degré des polynômes lorsque le second membre est solution de l'équation homogène (phénomène de résonance).

- Second membre polynôme : (E) : $y' + ay = P(x)$
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0(x) = Q(x)$ de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Second membres particuliers

Pour l'équation $y' + ay = b(x)$, ie a est constant.

- D'une manière générale, il faut chercher une solution particulière de la même forme que le second membre.
- En mélangeant sinus et cosinus,
- Parfois il faut augmenter de 1 le degré des polynômes lorsque le second membre est solution de l'équation homogène (phénomène de résonance).

- Second membre polynôme : $(E) : \; y' + ay = P(x)$
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0(x) = Q(x)$ de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Second membres particuliers

Pour l'équation $y' + ay = b(x)$, ie a est constant.

- D'une manière générale, il faut chercher une solution particulière de la même forme que le second membre.
- En mélangeant sinus et cosinus,
- Parfois il faut augmenter de 1 le degré des polynômes lorsque le second membre est solution de l'équation homogène (phénomène de résonance).

- Second membre polynôme : (E) : $y' + ay = P(x)$
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0(x) = Q(x)$ de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Second membres particuliers

- Second membre polynôme exponentiel $(E):\ y' + ay = P(x)e^{mx}$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = \begin{cases} Q(x)e^{mx} & \text{si } m \neq -a \\ xQ(x)e^{mx} & \text{si } m = -a \end{cases} \qquad \text{avec } d(Q) = d(P).$$

- i.e. on rajoute un degré lorsque l'exponentiel au second membre est solution de (H).
- En particulier, si on veut résoudre, $(E):\ y' + ay = e^{mx}$, on va chercher une solution sous la forme

$$y_0(x) = \begin{cases} Ce^{mx} & \text{si } m \neq -a \\ Cxe^{mx} & \text{si } m = -a \end{cases} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Second membres particuliers

- Second membre polynôme exponentiel $(E): \; y' + ay = P(x)e^{mx}$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = \begin{cases} Q(x)e^{mx} & \text{si } m \neq -a \\ xQ(x)e^{mx} & \text{si } m = -a \end{cases} \qquad \text{avec } d(Q) = d(P).$$

- i.e. on rajoute un degré lorsque l'exponentiel au second membre est solution de (H).
- En particulier, si on veut résoudre, $(E): \; y' + ay = e^{mx}$, on va chercher une solution sous la forme

$$y_0(x) = \begin{cases} Ce^{mx} & \text{si } m \neq -a \\ Cxe^{mx} & \text{si } m = -a \end{cases} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Second membres particuliers

- Second membre polynôme exponentiel $(E): \; y' + ay = P(x)e^{mx}$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = \begin{cases} Q(x)e^{mx} & \text{si } m \neq -a \\ xQ(x)e^{mx} & \text{si } m = -a \end{cases} \qquad \text{avec } d(Q) = d(P).$$

- i.e. on rajoute un degré lorsque l'exponentiel au second membre est solution de (H).
- En particulier, si on veut résoudre, $(E): \; y' + ay = e^{mx}$, on va chercher une solution sous la forme

$$y_0(x) = \begin{cases} Ce^{mx} & \text{si } m \neq -a \\ Cxe^{mx} & \text{si } m = -a \end{cases} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Second membres particuliers

- Second membre polynôme exponentiel (E) : $y' + ay = P(x)e^{mx}$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :
$$y_0(x) = \begin{cases} Q(x)e^{mx} & \text{si } m \neq -a \\ xQ(x)e^{mx} & \text{si } m = -a \end{cases} \qquad \text{avec } d(Q) = d(P).$$
- i.e. on rajoute un degré lorsque l'exponentiel au second membre est solution de (H).
- En particulier, si on veut résoudre, (E) : $y' + ay = e^{mx}$, on va chercher une solution sous la forme
$$y_0(x) = \begin{cases} Ce^{mx} & \text{si } m \neq -a \\ Cxe^{mx} & \text{si } m = -a \end{cases} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Second membres particuliers

- Second membre polynôme cosinus/sinus si $a \in \mathbb{R}$ et $(E): \; y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $(E): \; y' + ay = P(x)\sin mx$.
- On cherche une solution particulière sous la forme : $y_0(x) = Q_1 \cos mx + Q_2 \sin mx \quad$ avec $\quad d(Q_1) = d(Q_2) = d(P)$
- Comme pour les primitives : il peut y avoir du cosinus ET du sinus

- En particulier, si on veut résoudre, $(E): \; y' + ay = \cos(mx)$, on va chercher une solution sous la forme
$$y_0(x) = A\cos(mx) + B\sin(mx) \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$
- Cela revient à chercher une solution sous la forme, $y_0(x) = \rho\cos(mx + \varphi) \quad \rho$ amplitude $\geqslant 0$ et φ déphasage $\in [0, 2\pi[$ c'est-à-dire une oscillation avec la même pulsation que l'excitation, mais avec une amplitude et un déphasage différents.
- Les calculs sont plus faciles avec la forme : $A\cos(mx) + B\sin(mx)$ qu'avec $\rho\cos(mx + \varphi)$.

Second membres particuliers

- Second membre polynôme cosinus/sinus si $a \in \mathbb{R}$ et $(E): \; y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $(E): \; y' + ay = P(x)\sin mx$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :
$$y_0(x) = Q_1 \cos mx + Q_2 \sin mx \qquad \text{avec} \qquad d(Q_1) = d(Q_2) = d(P)$$
- Comme pour les primitives : il peut y avoir du cosinus ET du sinus

- En particulier, si on veut résoudre, $(E): \; y' + ay = \cos(mx)$, on va chercher une solution sous la forme
$$y_0(x) = A\cos(mx) + B\sin(mx) \qquad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$
- Cela revient à chercher une solution sous la forme,
$y_0(x) = \rho\cos(mx + \varphi)$ $\quad \rho$ amplitude $\geqslant 0$ et φ déphasage $\in [0, 2\pi[$
c'est-à-dire une oscillation avec la même pulsation que l'excitation, mais avec une amplitude et un déphasage différents.
- Les calculs sont plus faciles avec la forme : $A\cos(mx) + B\sin(mx)$ qu'avec $\rho\cos(mx + \varphi)$.

Second membres particuliers

- Second membre polynôme cosinus/sinus si $a \in \mathbb{R}$ et (E) : $y' + ay = P(x)\cos mx$ ou (E) : $y' + ay = P(x)\sin mx$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :
$$y_0(x) = Q_1 \cos mx + Q_2 \sin mx \qquad \text{avec} \qquad d(Q_1) = d(Q_2) = d(P)$$
- Comme pour les primitives : il peut y avoir du cosinus ET du sinus

- En particulier, si on veut résoudre, (E) : $y' + ay = \cos(mx)$, on va chercher une solution sous la forme
$$y_0(x) = A\cos(mx) + B\sin(mx) \qquad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$
- Cela revient à chercher une solution sous la forme,
$y_0(x) = \rho\cos(mx + \varphi)$ $\quad \rho$ amplitude $\geqslant 0$ et φ déphasage $\in [0, 2\pi[$
c'est-à-dire une oscillation avec la même pulsation que l'excitation, mais avec une amplitude et un déphasage différents.
- Les calculs sont plus faciles avec la forme : $A\cos(mx) + B\sin(mx)$ qu'avec $\rho\cos(mx + \varphi)$.

Second membres particuliers

- Second membre polynôme cosinus/sinus si $a \in \mathbb{R}$ et $(E): \; y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $(E): \; y' + ay = P(x)\sin mx$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :
$$y_0(x) = Q_1 \cos mx + Q_2 \sin mx \qquad \text{avec} \qquad d(Q_1) = d(Q_2) = d(P)$$
- Comme pour les primitives : il peut y avoir du cosinus ET du sinus

- En particulier, si on veut résoudre, $(E): \; y' + ay = \cos(mx)$, on va chercher une solution sous la forme
$$y_0(x) = A\cos(mx) + B\sin(mx) \qquad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$
- Cela revient à chercher une solution sous la forme,
$y_0(x) = \rho\cos(mx + \varphi)$ $\quad \rho$ amplitude $\geqslant 0$ et φ déphasage $\in [0, 2\pi[$
c'est-à-dire une oscillation avec la même pulsation que l'excitation, mais avec une amplitude et un déphasage différents.
- Les calculs sont plus faciles avec la forme : $A\cos(mx) + B\sin(mx)$ qu'avec $\rho\cos(mx + \varphi)$.

Second membres particuliers

- Second membre polynôme cosinus/sinus si $a \in \mathbb{R}$ et $(E): \ y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $(E): \ y' + ay = P(x)\sin mx$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :
$$y_0(x) = Q_1 \cos mx + Q_2 \sin mx \qquad \text{avec} \qquad d(Q_1) = d(Q_2) = d(P)$$
- Comme pour les primitives : il peut y avoir du cosinus ET du sinus

- En particulier, si on veut résoudre, $(E): \ y' + ay = \cos(mx)$, on va chercher une solution sous la forme
$$y_0(x) = A\cos(mx) + B\sin(mx) \qquad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$
- Cela revient à chercher une solution sous la forme,
$y_0(x) = \rho\cos(mx + \varphi)$ $\quad \rho$ amplitude $\geqslant 0$ et φ déphasage $\in [0, 2\pi[$
c'est-à-dire une oscillation avec la même pulsation que l'excitation, mais avec une amplitude et un déphasage différents.
- Les calculs sont plus faciles avec la forme : $A\cos(mx) + B\sin(mx)$ qu'avec $\rho\cos(mx + \varphi)$.

Second membres particuliers

- Second membre polynôme cosinus/sinus si $a \in \mathbb{R}$ et $(E): \; y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $(E): \; y' + ay = P(x)\sin mx$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :
$$y_0(x) = Q_1 \cos mx + Q_2 \sin mx \qquad \text{avec} \qquad d(Q_1) = d(Q_2) = d(P)$$
- Comme pour les primitives : il peut y avoir du cosinus ET du sinus

- En particulier, si on veut résoudre, $(E): \; y' + ay = \cos(mx)$, on va chercher une solution sous la forme
$$y_0(x) = A\cos(mx) + B\sin(mx) \qquad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$
- Cela revient à chercher une solution sous la forme,
$y_0(x) = \rho\cos(mx + \varphi)$ $\quad \rho$ amplitude $\geqslant 0$ et φ déphasage $\in [0, 2\pi[$
c'est-à-dire une oscillation avec la même pulsation que l'excitation, mais avec une amplitude et un déphasage différents.
- Les calculs sont plus faciles avec la forme : $A\cos(mx) + B\sin(mx)$ qu'avec $\rho\cos(mx + \varphi)$.

Second membres particuliers

- Second membre cosinus/sinus exponentiel $(E): \; y' + ay = \cos mx e^{\alpha x}$ ou $(E): \; y' + ay = \sin mx e^{\alpha x}$
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = (a \cos mx + b \sin mx) e^{\alpha x}, \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Second membres particuliers

- Second membre cosinus/sinus exponentiel $(E): \ y' + ay = \cos mx e^{\alpha x}$ ou $(E): \ y' + ay = \sin mx e^{\alpha x}$
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = (a \cos mx + b \sin mx)e^{\alpha x}, \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple

On veut résoudre : $y' + 2y = 2x^2 + (2x + 1 + \cos 3x)e^{-2x}$

Exemple

On veut résoudre : $y' + 2y = 2x^2 + (2x + 1 + \cos 3x)e^{-2x}$

- Solution générale de l'équation homogène : $y = \lambda e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = 2x^2$, second membre polynôme de degré 2 : $x^2 - x + \frac{1}{2}$.
- Pour $y' + 2y = (2x + 1)e^{-2x}$, second membre de la forme : $x(ax + b)e^{-2x}$, on obtient : $x(x + 1)e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = \cos 3xe^{-2x}$, second membre de la forme $(a \cos 3x + b \sin 3x)e^{-2x}$, on obtient : $\left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) e^{-2x}$.
- L'ensemble des solutions est :

$$\left\{ x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{2} + x(x+1)e^{-2x} + \left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) e^{-2x} + \lambda e^{-2x} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple

On veut résoudre : $y' + 2y = 2x^2 + (2x + 1 + \cos 3x)e^{-2x}$

- Solution générale de l'équation homogène : $y = \lambda e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = 2x^2$, second membre polynôme de degré 2 : $x^2 - x + \frac{1}{2}$.
- Pour $y' + 2y = (2x + 1)e^{-2x}$, second membre de la forme : $x(ax + b)e^{-2x}$, on obtient : $x(x + 1)e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = \cos 3x e^{-2x}$, second membre de la forme $(a \cos 3x + b \sin 3x)e^{-2x}$, on obtient : $\left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) e^{-2x}$.
- L'ensemble des solutions est :

$$\left\{ x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{2} + x(x+1)e^{-2x} + \left(\frac{1}{3}\sin 3x\right) e^{-2x} + \lambda e^{-2x} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple

On veut résoudre : $y' + 2y = 2x^2 + (2x + 1 + \cos 3x)e^{-2x}$

- Solution générale de l'équation homogène : $y = \lambda e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = 2x^2$, second membre polynôme de degré 2 : $x^2 - x + \frac{1}{2}$.
- Pour $y' + 2y = (2x + 1)e^{-2x}$, second membre de la forme : $x(ax + b)e^{-2x}$, on obtient : $x(x + 1)e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = \cos 3x e^{-2x}$, second membre de la forme $(a \cos 3x + b \sin 3x)e^{-2x}$, on obtient : $\left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) e^{-2x}$.
- L'ensemble des solutions est :

$$\left\{x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{2} + x(x + 1)e^{-2x} + \left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) e^{-2x} + \lambda e^{-2x} \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple

On veut résoudre : $y' + 2y = 2x^2 + (2x + 1 + \cos 3x)e^{-2x}$

- Solution générale de l'équation homogène : $y = \lambda e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = 2x^2$, second membre polynôme de degré 2 : $x^2 - x + \frac{1}{2}$.
- Pour $y' + 2y = (2x + 1)e^{-2x}$, second membre de la forme : $x(ax + b)e^{-2x}$, on obtient : $x(x + 1)e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = \cos 3x e^{-2x}$, second membre de la forme $(a \cos 3x + b \sin 3x)e^{-2x}$, on obtient : $\left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) e^{-2x}$.
- L'ensemble des solutions est :

$$\left\{ x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{2} + x(x + 1)e^{-2x} + \left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) e^{-2x} + \lambda e^{-2x} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple

On veut résoudre : $y' + 2y = 2x^2 + (2x + 1 + \cos 3x)e^{-2x}$

- Solution générale de l'équation homogène : $y = \lambda e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = 2x^2$, second membre polynôme de degré 2 : $x^2 - x + \frac{1}{2}$.
- Pour $y' + 2y = (2x + 1)e^{-2x}$, second membre de la forme : $x(ax + b)e^{-2x}$, on obtient : $x(x + 1)e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = \cos 3x e^{-2x}$, second membre de la forme $(a \cos 3x + b \sin 3x)e^{-2x}$, on obtient : $\left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) e^{-2x}$.
- L'ensemble des solutions est :

$$\left\{ x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{2} + x(x + 1)e^{-2x} + \left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) e^{-2x} + \lambda e^{-2x} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple

On veut résoudre : $y' + 2y = 2x^2 + (2x + 1 + \cos 3x)e^{-2x}$

- Solution générale de l'équation homogène : $y = \lambda e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = 2x^2$, second membre polynôme de degré 2 : $x^2 - x + \frac{1}{2}$.
- Pour $y' + 2y = (2x + 1)e^{-2x}$, second membre de la forme : $x(ax + b)e^{-2x}$, on obtient : $x(x + 1)e^{-2x}$.
- Pour $y' + 2y = \cos 3xe^{-2x}$, second membre de la forme $(a \cos 3x + b \sin 3x)e^{-2x}$, on obtient : $\left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) e^{-2x}$.
- L'ensemble des solutions est :

$$\left\{x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{2} + x(x + 1)e^{-2x} + \left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) e^{-2x} + \lambda e^{-2x} \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Second membres à valeurs complexes

- On veut résoudre : $y' + ay = b(x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- On écrit : $b(x) = b_r(x) + ib_i(x)$.
- On considère y_r (resp. y_i) une solution avec second membre b_r (resp. b_i).
- La fonction $y = y_r + iy_i$ est alors solution et réciproquement.

- Simple conséquence de la linéarité.
- Pour résoudre des équations différentielles dans $\mathbb{R}$, on pourra résoudre dans $\mathbb{C}$ puis considérer la partie réelle et imaginaire du second membre et de la solution.
- Exemple : $y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $y' + ay = P(x)\sin mx$, on résout l'équation $y' + ay = P(x)e^{imx}$ puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

Second membres à valeurs complexes

- On veut résoudre : $y' + ay = b(x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- On écrit : $b(x) = b_r(x) + ib_i(x)$.
- On considère y_r (resp. y_i) une solution avec second membre b_r (resp. b_i).
- La fonction $y = y_r + iy_i$ est alors solution et réciproquement.

- Simple conséquence de la linéarité.
- Pour résoudre des équations différentielles dans $\mathbb{R}$, on pourra résoudre dans $\mathbb{C}$ puis considérer la partie réelle et imaginaire du second membre et de la solution.
- Exemple : $y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $y' + ay = P(x)\sin mx$, on résout l'équation $y' + ay = P(x)e^{imx}$ puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

Second membres à valeurs complexes

- On veut résoudre : $y' + ay = b(x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- On écrit : $b(x) = b_r(x) + ib_i(x)$.
- On considère y_r (resp. y_i) une solution avec second membre b_r (resp. b_i).
- La fonction $y = y_r + iy_i$ est alors solution et réciproquement.

- Simple conséquence de la linéarité.
- Pour résoudre des équations différentielles dans $\mathbb{R}$, on pourra résoudre dans $\mathbb{C}$ puis considérer la partie réelle et imaginaire du second membre et de la solution.
- Exemple : $y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $y' + ay = P(x)\sin mx$, on résout l'équation $y' + ay = P(x)e^{imx}$ puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

Second membres à valeurs complexes

- On veut résoudre : $y' + ay = b(x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- On écrit : $b(x) = b_r(x) + ib_i(x)$.
- On considère y_r (resp. y_i) une solution avec second membre b_r (resp. b_i).
- La fonction $y = y_r + iy_i$ est alors solution et réciproquement.

- Simple conséquence de la linéarité.
- Pour résoudre des équations différentielles dans $\mathbb{R}$, on pourra résoudre dans $\mathbb{C}$ puis considérer la partie réelle et imaginaire du second membre et de la solution.
- Exemple : $y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $y' + ay = P(x)\sin mx$, on résout l'équation $y' + ay = P(x)e^{imx}$ puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

Second membres à valeurs complexes

- On veut résoudre : $y' + ay = b(x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- On écrit : $b(x) = b_r(x) + ib_i(x)$.
- On considère y_r (resp. y_i) une solution avec second membre b_r (resp. b_i).
- La fonction $y = y_r + iy_i$ est alors solution et réciproquement.

- Simple conséquence de la linéarité.
- Pour résoudre des équations différentielles dans $\mathbb{R}$, on pourra résoudre dans $\mathbb{C}$ puis considérer la partie réelle et imaginaire du second membre et de la solution.
- Exemple : $y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $y' + ay = P(x)\sin mx$, on résout l'équation $y' + ay = P(x)e^{imx}$ puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

Second membres à valeurs complexes

- On veut résoudre : $y' + ay = b(x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- On écrit : $b(x) = b_r(x) + ib_i(x)$.
- On considère y_r (resp. y_i) une solution avec second membre b_r (resp. b_i).
- La fonction $y = y_r + iy_i$ est alors solution et réciproquement.

- Simple conséquence de la linéarité.
- Pour résoudre des équations différentielles dans $\mathbb{R}$, on pourra résoudre dans $\mathbb{C}$ puis considérer la partie réelle et imaginaire du second membre et de la solution.
- Exemple : $y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $y' + ay = P(x)\sin mx$, on résout l'équation $y' + ay = P(x)e^{imx}$ puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

Second membres à valeurs complexes

- On veut résoudre : $y' + ay = b(x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- On écrit : $b(x) = b_r(x) + ib_i(x)$.
- On considère y_r (resp. y_i) une solution avec second membre b_r (resp. b_i).
- La fonction $y = y_r + iy_i$ est alors solution et réciproquement.

- Simple conséquence de la linéarité.
- Pour résoudre des équations différentielles dans $\mathbb{R}$, on pourra résoudre dans $\mathbb{C}$ puis considérer la partie réelle et imaginaire du second membre et de la solution.
- Exemple : $y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $y' + ay = P(x)\sin mx$, on résout l'équation $y' + ay = P(x)e^{imx}$ puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

Second membres à valeurs complexes

- On veut résoudre : $y' + ay = b(x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- On écrit : $b(x) = b_r(x) + ib_i(x)$.
- On considère y_r (resp. y_i) une solution avec second membre b_r (resp. b_i).
- La fonction $y = y_r + iy_i$ est alors solution et réciproquement.

- Simple conséquence de la linéarité.
- Pour résoudre des équations différentielles dans $\mathbb{R}$, on pourra résoudre dans $\mathbb{C}$ puis considérer la partie réelle et imaginaire du second membre et de la solution.
- Exemple : $y' + ay = P(x)\cos mx$ ou $y' + ay = P(x)\sin mx$, on résout l'équation $y' + ay = P(x)e^{imx}$ puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

Exemple

On résout : (E) : $y' + 2y = \cos 3x e^{-2x}$.

Exemple

On résout : (E) : $y' + 2y = \cos 3x e^{-2x}$.

- On considère $(E_{\mathbb{C}})$: $y' + 2y = e^{(-2+3i)x}$ car $\cos 3x e^{-2x}$ est la partie réelle de $e^{(-2+3i)x}$.
- on cherche une solution (à valeurs complexes) sous la forme : $\lambda e^{(-2+3i)x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Cela donne une solution particulière : $y_C(x) = -\frac{i}{3} e^{(-2+3i)x}$
- On décompose en partie réelle/ partie imaginaire :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \; y_C(x) &= -\frac{i}{3} e^{-2x} (\cos 3x + i \sin 3x) \\ &= \frac{1}{3} \sin(3x) e^{-2x} - \frac{i}{3} \cos(3x) e^{-2x} \end{aligned}$$

- $y_0 : x \mapsto \frac{1}{3} \sin(3x) e^{-2x}$ est solution particulière de (E).

Exemple

On résout : (E) : $y' + 2y = \cos 3x e^{-2x}$.

- On considère $(E_{\mathbb{C}})$: $y' + 2y = e^{(-2+3i)x}$ car $\cos 3x e^{-2x}$ est la partie réelle de $e^{(-2+3i)x}$.
- on cherche une solution (à valeurs complexes) sous la forme : $\lambda e^{(-2+3i)x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Cela donne une solution particulière : $y_C(x) = -\frac{i}{3} e^{(-2+3i)x}$
- On décompose en partie réelle/ partie imaginaire :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \ y_C(x) &= -\frac{i}{3} e^{-2x} (\cos 3x + i \sin 3x) \\ &= \frac{1}{3} \sin(3x) e^{-2x} - \frac{i}{3} \cos(3x) e^{-2x} \end{aligned}$$

- $y_0 : x \mapsto \frac{1}{3} \sin(3x) e^{-2x}$ est solution particulière de (E).

Exemple

On résout : (E) : $y' + 2y = \cos 3x e^{-2x}$.

- On considère $(E_{\mathbb{C}})$: $y' + 2y = e^{(-2+3i)x}$ car $\cos 3x e^{-2x}$ est la partie réelle de $e^{(-2+3i)x}$.
- on cherche une solution (à valeurs complexes) sous la forme : $\lambda e^{(-2+3i)x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Cela donne une solution particulière : $y_C(x) = -\frac{i}{3} e^{(-2+3i)x}$
- On décompose en partie réelle/ partie imaginaire :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_C(x) &= -\frac{i}{3} e^{-2x} (\cos 3x + i \sin 3x) \\ &= \frac{1}{3} \sin(3x) e^{-2x} - \frac{i}{3} \cos(3x) e^{-2x} \end{aligned}$$
- $y_0 : x \mapsto \frac{1}{3} \sin(3x) e^{-2x}$ est solution particulière de (E).

Exemple

On résout : (E) : $y' + 2y = \cos 3x e^{-2x}$.

- On considère $(E_{\mathbb{C}})$: $y' + 2y = e^{(-2+3i)x}$ car $\cos 3x e^{-2x}$ est la partie réelle de $e^{(-2+3i)x}$.
- on cherche une solution (à valeurs complexes) sous la forme : $\lambda e^{(-2+3i)x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Cela donne une solution particulière : $y_C(x) = -\frac{i}{3} e^{(-2+3i)x}$
- On décompose en partie réelle/ partie imaginaire :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_C(x) &= -\frac{i}{3} e^{-2x} (\cos 3x + i \sin 3x) \\ &= \frac{1}{3} \sin(3x) e^{-2x} - \frac{i}{3} \cos(3x) e^{-2x}\end{aligned}$$

- $y_0 : x \mapsto \frac{1}{3} \sin(3x) e^{-2x}$ est solution particulière de (E).

Exemple

On résout : (E) : $y' + 2y = \cos 3x e^{-2x}$.

- On considère $(E_{\mathbb{C}})$: $y' + 2y = e^{(-2+3i)x}$ car $\cos 3x e^{-2x}$ est la partie réelle de $e^{(-2+3i)x}$.
- on cherche une solution (à valeurs complexes) sous la forme : $\lambda e^{(-2+3i)x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Cela donne une solution particulière : $y_C(x) = -\frac{i}{3} e^{(-2+3i)x}$
- On décompose en partie réelle/ partie imaginaire :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_C(x) &= -\frac{i}{3} e^{-2x} (\cos 3x + i \sin 3x) \\ &= \frac{1}{3} \sin(3x) e^{-2x} - \frac{i}{3} \cos(3x) e^{-2x} \end{aligned}$$
- $y_0 : x \mapsto \frac{1}{3} \sin(3x) e^{-2x}$ est solution particulière de (E).

Cas général

Problème de Cauchy

- Soit une équation différentielle sur I :
$$(E) : \quad y' + a(x)y = b(x),$$
avec a et b sont deux fonctions continues sur I.
- On considère aussi un point $x_0 \in I$, et un réel y_0, alors il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) sur I, qui vérifie $y(x_0) = y_0$.
- On appelle cette solution la solution du problème de Cauchy.
- Vrai aussi en prenant $y_0 \in \mathbb{C}$, et donc $y : I \to \mathbb{C}$.

- Si on fixe les conditions initiales, alors il y a une unique évolution possible du système.

Cas général

Problème de Cauchy

- Soit une équation différentielle sur I :
$$(E): \quad y' + a(x)y = b(x),$$
avec a et b sont deux fonctions continues sur I.
- On considère aussi un point $x_0 \in I$, et un réel y_0, alors il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) sur I, qui vérifie $y(x_0) = y_0$.
- On appelle cette solution la solution du problème de Cauchy.
- Vrai aussi en prenant $y_0 \in \mathbb{C}$, et donc $y : I \to \mathbb{C}$.

- Si on fixe les conditions initiales, alors il y a une unique évolution possible du système.

Problème de Cauchy

- Soit une équation différentielle sur I :
$$(E) : \quad y' + a(x)y = b(x),$$
avec a et b sont deux fonctions continues sur I.
- On considère aussi un point $x_0 \in I$, et un réel y_0, alors il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) sur I, qui vérifie $y(x_0) = y_0$.
- On appelle cette solution la solution du problème de Cauchy.
- Vrai aussi en prenant $y_0 \in \mathbb{C}$, et donc $y : I \to \mathbb{C}$.

- Si on fixe les conditions initiales, alors il y a une unique évolution possible du système.

Cas général

Problème de Cauchy

- Soit une équation différentielle sur I :
$$(E) : \quad y' + a(x)y = b(x),$$
avec a et b sont deux fonctions continues sur I.
- On considère aussi un point $x_0 \in I$, et un réel y_0, alors il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) sur I, qui vérifie $y(x_0) = y_0$.
- On appelle cette solution la solution du problème de Cauchy.
- Vrai aussi en prenant $y_0 \in \mathbb{C}$, et donc $y : I \to \mathbb{C}$.

- Si on fixe les conditions initiales, alors il y a une unique évolution possible du système.

Problème de Cauchy

- Soit une équation différentielle sur I :
$$(E) : \quad y' + a(x)y = b(x),$$
avec a et b sont deux fonctions continues sur I.
- On considère aussi un point $x_0 \in I$, et un réel y_0, alors il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) sur I, qui vérifie $y(x_0) = y_0$.
- On appelle cette solution la solution du problème de Cauchy.
- Vrai aussi en prenant $y_0 \in \mathbb{C}$, et donc $y : I \to \mathbb{C}$.

- Si on fixe les conditions initiales, alors il y a une unique évolution possible du système.

Cas général

Problème de Cauchy

- Soit une équation différentielle sur I :
$$(E): \quad y' + a(x)y = b(x),$$
avec a et b sont deux fonctions continues sur I.
- On considère aussi un point $x_0 \in I$, et un réel y_0, alors il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) sur I, qui vérifie $y(x_0) = y_0$.
- On appelle cette solution la solution du problème de Cauchy.
- Vrai aussi en prenant $y_0 \in \mathbb{C}$, et donc $y : I \to \mathbb{C}$.

- Si on fixe les conditions initiales, alors il y a une unique évolution possible du système.

Méthode de variation de la constante

- On veut résoudre $(E) : y' + a(x)y = b(x)$,
- On commence par résoudre (H) et donc par calculer une primitive A de a sur I.
- On effectue un changement d'inconnue : on cherche y sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, avec λ fonction de x inconnue.
- On a alors :
$$y'(x) = (\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))e^{-A(x)}$$
- Ainsi, $y(x)$ est solution ssi :
$(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = (\lambda'(x))e^{-A(x)} = b(x)$.
c'est-à-dire si $\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$.
- On se ramène donc à calculer une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

- Il faut apprendre la méthode : chercher y sous la forme $\lambda(x)e^{-A(x)}$.

Méthode de variation de la constante

- On veut résoudre $(E) : y' + a(x)y = b(x)$,
- On commence par résoudre (H) et donc par calculer une primitive A de a sur I.
- On effectue un changement d'inconnue : on cherche y sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, avec λ fonction de x inconnue.
- On a alors :
$$y'(x) = \left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right)e^{-A(x)}$$
- Ainsi, $y(x)$ est solution ssi :
$\left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right)e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = \left(\lambda'(x)\right)e^{-A(x)} = b(x)$.
c'est-à-dire si $\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$.
- On se ramène donc à calculer une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

- Il faut apprendre la méthode : chercher y sous la forme $\lambda(x)e^{-A(x)}$.

Méthode de variation de la constante

- On veut résoudre (E) : $y' + a(x)y = b(x)$,
- On commence par résoudre (H) et donc par calculer une primitive A de a sur I.
- On effectue un changement d'inconnue : on cherche y sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, avec λ fonction de x inconnue.
- On a alors :
$$y'(x) = (\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))e^{-A(x)}$$
- Ainsi, $y(x)$ est solution ssi : $(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = (\lambda'(x))e^{-A(x)} = b(x)$. c'est-à-dire si $\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$.
- On se ramène donc à calculer une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

- Il faut apprendre la méthode : chercher y sous la forme $\lambda(x)e^{-A(x)}$.

Méthode de variation de la constante

- On veut résoudre (E) : $y' + a(x)y = b(x)$,
- On commence par résoudre (H) et donc par calculer une primitive A de a sur I.
- On effectue un changement d'inconnue : on cherche y sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, avec λ fonction de x inconnue.
- On a alors :
$$y'(x) = \left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right)e^{-A(x)}$$
- Ainsi, $y(x)$ est solution ssi : $\left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right)e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = \left(\lambda'(x)\right)e^{-A(x)} = b(x)$. c'est-à-dire si $\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$.
- On se ramène donc à calculer une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

- Il faut apprendre la méthode : chercher y sous la forme $\lambda(x)e^{-A(x)}$.

Méthode de variation de la constante

- On veut résoudre (E) : $y' + a(x)y = b(x)$,
- On commence par résoudre (H) et donc par calculer une primitive A de a sur I.
- On effectue un changement d'inconnue : on cherche y sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, avec λ fonction de x inconnue.
- On a alors :
$$y'(x) = (\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))e^{-A(x)}$$
- Ainsi, $y(x)$ est solution ssi :
$(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = (\lambda'(x))e^{-A(x)} = b(x)$.
c'est-à-dire si $\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$.
- On se ramène donc à calculer une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

- Il faut apprendre la méthode : chercher y sous la forme $\lambda(x)e^{-A(x)}$.

Méthode de variation de la constante

- On veut résoudre (E) : $y' + a(x)y = b(x)$,
- On commence par résoudre (H) et donc par calculer une primitive A de a sur I.
- On effectue un changement d'inconnue : on cherche y sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, avec λ fonction de x inconnue.
- On a alors :
$$y'(x) = (\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))e^{-A(x)}$$
- Ainsi, $y(x)$ est solution ssi :
$(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = (\lambda'(x))e^{-A(x)} = b(x)$.
c'est-à-dire si $\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$.
- On se ramène donc à calculer une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

- Il faut apprendre la méthode : chercher y sous la forme $\lambda(x)e^{-A(x)}$.

Méthode de variation de la constante

- On veut résoudre (E) : $y' + a(x)y = b(x)$,
- On commence par résoudre (H) et donc par calculer une primitive A de a sur I.
- On effectue un changement d'inconnue : on cherche y sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, avec λ fonction de x inconnue.
- On a alors :
$$y'(x) = \left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right)e^{-A(x)}$$
- Ainsi, $y(x)$ est solution ssi :
$\left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right)e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = \left(\lambda'(x)\right)e^{-A(x)} = b(x)$.
c'est-à-dire si $\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$.
- On se ramène donc à calculer une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

- Il faut apprendre la méthode : chercher y sous la forme $\lambda(x)e^{-A(x)}$.

Méthode de variation de la constante

- On veut résoudre (E) : $y' + a(x)y = b(x)$,
- On commence par résoudre (H) et donc par calculer une primitive A de a sur I.
- On effectue un changement d'inconnue : on cherche y sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, avec λ fonction de x inconnue.
- On a alors :
$$y'(x) = (\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))e^{-A(x)}$$
- Ainsi, $y(x)$ est solution ssi : $(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = (\lambda'(x))e^{-A(x)} = b(x)$. c'est-à-dire si $\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$.
- On se ramène donc à calculer une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

- Il faut apprendre la méthode : chercher y sous la forme $\lambda(x)e^{-A(x)}$.

Exemple

On veut résoudre (E) : $\quad y' + xy = x$

Exemple

On veut résoudre (E) : $\quad y' + xy = x$

- On résout l'équation homogène associée : (H) : $y' + xy = 0$. La solution générale est $\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Ensuite un utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$
- on a : $y'(x) = (\lambda'(x) - x\lambda(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit : $y' + xy = (\lambda'(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$
- y est solution que si $\lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$, c'est-à-dire $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$
- $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$.
- les solutions sont : $x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Dans ce cas, on aurait pu deviner la solution particulière.

Exemple

On veut résoudre (E) : $\quad y' + xy = x$

- On résout l'équation homogène associée : (H) : $y' + xy = 0$. La solution générale est $\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Ensuite un utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$
- on a : $y'(x) = (\lambda'(x) - x\lambda(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit : $y' + xy = (\lambda'(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$
- y est solution que si $\lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$, c'est-à-dire $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$
- $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$.
- les solutions sont : $x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Dans ce cas, on aurait pu deviner la solution particulière.

Exemple

On veut résoudre (E) : $\quad y' + xy = x$

- On résout l'équation homogène associée : (H) : $y' + xy = 0$. La solution générale est $\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Ensuite un utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme : $y(x) = \lambda(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$
- on a : $y'(x) = (\lambda'(x) - x\lambda(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit : $y' + xy = (\lambda'(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$
- y est solution que si $\lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$, c'est-à-dire $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$
- $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$.
- les solutions sont : $x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Dans ce cas, on aurait pu deviner la solution particulière.

Exemple

On veut résoudre (E) : $\quad y' + xy = x$

- On résout l'équation homogène associée : (H) : $y' + xy = 0$. La solution générale est $\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Ensuite un utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$
- on a : $y'(x) = (\lambda'(x) - x\lambda(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit : $y' + xy = (\lambda'(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$
- y est solution que si $\lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$, c'est-à-dire $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$
- $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$.
- les solutions sont : $x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Dans ce cas, on aurait pu deviner la solution particulière.

Exemple

On veut résoudre (E) : $\quad y' + xy = x$

- On résout l'équation homogène associée : (H) : $y' + xy = 0$. La solution générale est $\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Ensuite un utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$
- on a : $y'(x) = (\lambda'(x) - x\lambda(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit : $y' + xy = (\lambda'(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$
- y est solution que si $\lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$, c'est-à-dire $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$
- $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-\frac{x^2}{2}} = 1.$
- les solutions sont : $x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Dans ce cas, on aurait pu deviner la solution particulière.

Exemple

On veut résoudre (E) : $\quad y' + xy = x$

- On résout l'équation homogène associée : (H) : $y' + xy = 0$. La solution générale est $\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Ensuite un utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme : $y(x) = \lambda(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$
- on a : $y'(x) = (\lambda'(x) - x\lambda(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit : $y' + xy = (\lambda'(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$
- y est solution que si $\lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$, c'est-à-dire $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$
- $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$.
- les solutions sont : $x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Dans ce cas, on aurait pu deviner la solution particulière.

Exemple

On veut résoudre (E) : $\quad y' + xy = x$

- On résout l'équation homogène associée : (H) : $y' + xy = 0$. La solution générale est $\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Ensuite un utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme : $y(x) = \lambda(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$
- on a : $y'(x) = (\lambda'(x) - x\lambda(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit : $y' + xy = (\lambda'(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$
- y est solution que si $\lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$, c'est-à-dire $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$
- $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$.
- les solutions sont : $x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Dans ce cas, on aurait pu deviner la solution particulière.

Exemple

On veut résoudre (E) : $\quad y' + xy = x$

- On résout l'équation homogène associée : (H) : $y' + xy = 0$. La solution générale est $\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Ensuite un utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme : $y(x) = \lambda(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$
- on a : $y'(x) = (\lambda'(x) - x\lambda(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit : $y' + xy = (\lambda'(x))\, e^{-\frac{x^2}{2}}$
- y est solution que si $\lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$, c'est-à-dire $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$
- $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$.
- les solutions sont : $x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Dans ce cas, on aurait pu deviner la solution particulière.

Exemple

Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $y' + (\tan x)y = \cos x + \sin 2x$.

Exemple

Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $y' + (\tan x)y = \cos x + \sin 2x$.

- La solution générale de l'équation homogène est
$$x \mapsto \lambda e^{\ln(\cos(x))} = \lambda cos(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
(attention au signe de cos dans le ln qui est ici positif sur I).
- si on pose $y(x) = \lambda(x)\cos(x)$, alors :
$y'(x) = \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x)$, et donc $y' + \tan xy = \lambda'(x)\cos(x)$
- Donc y n'est solution avec second membre $\cos x$ que si $\lambda'(x)\cos(x) = \cos(x)$, soit $\lambda = x$,
- avec second membre $\sin x$ que si $\lambda'(x)\cos(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, soit $\lambda'(x) = 2\sin(x)$ et donc $\lambda = -2\cos(x)$.
- Ainsi une solution particulière est : $y(x) = -2\cos^2(x) + x\cos(x)$
- et les solutions sont :
$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto -2\cos^2(x) + x\cos(x) + \lambda\cos(x) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple

Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $y' + (\tan x)y = \cos x + \sin 2x$.

- La solution générale de l'équation homogène est
$$x \mapsto \lambda e^{\ln(\cos(x))} = \lambda cos(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
(attention au signe de cos dans le ln qui est ici positif sur I).
- si on pose $y(x) = \lambda(x)\cos(x)$, alors : $y'(x) = \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x)$, et donc $y' + \tan xy = \lambda'(x)\cos(x)$
- Donc y n'est solution avec second membre $\cos x$ que si $\lambda'(x)\cos(x) = \cos(x)$, soit $\lambda = x$,
- avec second membre $\sin x$ que si $\lambda'(x)\cos(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, soit $\lambda'(x) = 2\sin(x)$ et donc $\lambda = -2\cos(x)$.
- Ainsi une solution particulière est : $y(x) = -2\cos^2(x) + x\cos(x)$
- et les solutions sont :
$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto -2\cos^2(x) + x\cos(x) + \lambda\cos(x) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple

Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $y' + (\tan x)y = \cos x + \sin 2x$.

- La solution générale de l'équation homogène est
$$x \mapsto \lambda e^{\ln(\cos(x))} = \lambda cos(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
(attention au signe de cos dans le ln qui est ici positif sur I).
- si on pose $y(x) = \lambda(x)\cos(x)$, alors :
$y'(x) = \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x)$, et donc $y' + \tan xy = \lambda'(x)\cos(x)$
- Donc y n'est solution avec second membre $\cos x$ que si $\lambda'(x)\cos(x) = \cos(x)$, soit $\lambda = x$,
- avec second membre $\sin x$ que si $\lambda'(x)\cos(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, soit $\lambda'(x) = 2\sin(x)$ et donc $\lambda = -2\cos(x)$.
- Ainsi une solution particulière est : $y(x) = -2\cos^2(x) + x\cos(x)$
- et les solutions sont :
$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto -2\cos^2(x) + x\cos(x) + \lambda\cos(x) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple

Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $y' + (\tan x)y = \cos x + \sin 2x$.

- La solution générale de l'équation homogène est
$$x \mapsto \lambda e^{\ln(\cos(x))} = \lambda cos(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
(attention au signe de cos dans le ln qui est ici positif sur I).
- si on pose $y(x) = \lambda(x)\cos(x)$, alors :
$y'(x) = \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x)$, et donc $y' + \tan xy = \lambda'(x)\cos(x)$
- Donc y n'est solution avec second membre $\cos x$ que si
$\lambda'(x)\cos(x) = \cos(x)$, soit $\lambda = x$,
- avec second membre $\sin x$ que si
$\lambda'(x)\cos(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, soit $\lambda'(x) = 2\sin(x)$ et donc
$\lambda = -2\cos(x)$.
- Ainsi une solution particulière est : $y(x) = -2\cos^2(x) + x\cos(x)$
- et les solutions sont :
$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto -2\cos^2(x) + x\cos(x) + \lambda\cos(x) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple

Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $y' + (\tan x)y = \cos x + \sin 2x$.

- La solution générale de l'équation homogène est
$$x \mapsto \lambda e^{\ln(\cos(x))} = \lambda cos(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
(attention au signe de cos dans le ln qui est ici positif sur I).
- si on pose $y(x) = \lambda(x)\cos(x)$, alors :
$y'(x) = \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x)$, et donc $y' + \tan xy = \lambda'(x)\cos(x)$
- Donc y n'est solution avec second membre $\cos x$ que si
$\lambda'(x)\cos(x) = \cos(x)$, soit $\lambda = x$,
- avec second membre $\sin x$ que si
$\lambda'(x)\cos(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, soit $\lambda'(x) = 2\sin(x)$ et donc
$\lambda = -2\cos(x)$.
- Ainsi une solution particulière est : $y(x) = -2\cos^2(x) + x\cos(x)$
- et les solutions sont :
$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto -2\cos^2(x) + x\cos(x) + \lambda\cos(x) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple

Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $y' + (\tan x)y = \cos x + \sin 2x$.

- La solution générale de l'équation homogène est
$$x \mapsto \lambda e^{\ln(\cos(x))} = \lambda cos(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
(attention au signe de cos dans le ln qui est ici positif sur I).
- si on pose $y(x) = \lambda(x)\cos(x)$, alors :
$y'(x) = \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x)$, et donc $y' + \tan xy = \lambda'(x)\cos(x)$
- Donc y n'est solution avec second membre $\cos x$ que si $\lambda'(x)\cos(x) = \cos(x)$, soit $\lambda = x$,
- avec second membre $\sin x$ que si $\lambda'(x)\cos(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, soit $\lambda'(x) = 2\sin(x)$ et donc $\lambda = -2\cos(x)$.
- Ainsi une solution particulière est : $y(x) = -2\cos^2(x) + x\cos(x)$
- et les solutions sont :
$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto -2\cos^2(x) + x\cos(x) + \lambda\cos(x) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple

Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $y' + (\tan x)y = \cos x + \sin 2x$.

- La solution générale de l'équation homogène est
$$x \mapsto \lambda e^{\ln(\cos(x))} = \lambda cos(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
(attention au signe de cos dans le ln qui est ici positif sur I).
- si on pose $y(x) = \lambda(x)\cos(x)$, alors :
$y'(x) = \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x)$, et donc $y' + \tan xy = \lambda'(x)\cos(x)$
- Donc y n'est solution avec second membre $\cos x$ que si
$\lambda'(x)\cos(x) = \cos(x)$, soit $\lambda = x$,
- avec second membre $\sin x$ que si
$\lambda'(x)\cos(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, soit $\lambda'(x) = 2\sin(x)$ et donc
$\lambda = -2\cos(x)$.
- Ainsi une solution particulière est : $y(x) = -2\cos^2(x) + x\cos(x)$
- et les solutions sont :
$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto -2\cos^2(x) + x\cos(x) + \lambda\cos(x) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Second ordre à coefficients constants

- On appelle équation différentielle linéaire à coefficient constant du deuxième ordre sur I, une équation différentielle qui s'écrit :
$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c(x),$$
où a, b sont des réels ou des complexes, c une fonction continue sur l'intervalle I (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et y est la fonction inconnue.
- L'équation homogène associée est :
$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$
- On appelle solution de cette équation une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie :
$$\forall x \in I,\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

Second ordre à coefficients constants

- On appelle **équation différentielle linéaire à coefficient constant du deuxième ordre** sur I, une équation différentielle qui s'écrit :
$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c(x),$$
où a, b sont des réels ou des complexes, c une fonction continue sur l'intervalle I (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et y est la fonction inconnue.
- **L'équation homogène associée** est :
$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$
- On appelle **solution** de cette équation une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie :
$$\forall x \in I,\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

- On appelle **équation différentielle linéaire à coefficient constant du deuxième ordre** sur I, une équation différentielle qui s'écrit :

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c(x),$$

où a, b sont des réels ou des complexes, c une fonction continue sur l'intervalle I (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et y est la fonction inconnue.

- **L'équation homogène associée** est :

$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$

- On appelle **solution** de cette équation une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie :

$$\forall x \in I, \; y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

Second ordre à coefficients constants

- On appelle **équation différentielle linéaire à coefficient constant du deuxième ordre** sur I, une équation différentielle qui s'écrit :
$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c(x),$$
où a, b sont des réels ou des complexes, c une fonction continue sur l'intervalle I (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et y est la fonction inconnue.
- **L'équation homogène associée** est :
$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$
- On appelle **solution** de cette équation une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie :
$$\forall x \in I,\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

Résolution dans le cas homogène

- Pour résoudre l'équation différentielle homogène :
$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0,$$
dans le cas où a et b sont réels.

- On forme l'équation caractéristique :
$$(e): \qquad r^2 + ar + b = 0 \qquad \Delta = a^2 - 4b$$

- Si $\Delta > 0$, il y a deux racines r_1 et r_2, la solution générale est :
$$x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r, la solution générale est :
$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{rx}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta < 0$, il y a deux racines réelles conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, et $r_2 = \alpha - i\beta$ la solution générale est :
$$x \mapsto e^{\alpha x}\left(\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)\right), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Résolution dans le cas homogène

- Pour résoudre l'équation différentielle homogène :
$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0,$$
dans le cas où a et b sont réels.
- On forme l'équation caractéristique :
$$(e) : \qquad r^2 + ar + b = 0 \qquad \Delta = a^2 - 4b$$
- Si $\Delta > 0$, il y a deux racines r_1 et r_2, la solution générale est :
$$x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r, la solution générale est :
$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{rx}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si $\Delta < 0$, il y a deux racines réelles conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, et $r_2 = \alpha - i\beta$ la solution générale est :
$$x \mapsto e^{\alpha x}\left(\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)\right), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Résolution dans le cas homogène

- Pour résoudre l'équation différentielle homogène :
$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0,$$
dans le cas où a et b sont réels.
- On forme l'équation caractéristique :
$$(e) : \qquad r^2 + ar + b = 0 \qquad \Delta = a^2 - 4b$$
- Si $\Delta > 0$, il y a deux racines r_1 et r_2, la solution générale est :
$$x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r, la solution générale est :
$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{rx}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si $\Delta < 0$, il y a deux racines réelles conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, et $r_2 = \alpha - i\beta$ la solution générale est :
$$x \mapsto e^{\alpha x} \left(\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)\right), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Résolution dans le cas homogène

- Pour résoudre l'équation différentielle homogène :
$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0,$$
dans le cas où a et b sont réels.
- On forme l'équation caractéristique :
$$(e) : \qquad r^2 + ar + b = 0 \qquad \Delta = a^2 - 4b$$
- Si $\Delta > 0$, il y a deux racines r_1 et r_2, la solution générale est :
$$x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r, la solution générale est :
$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{rx}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si $\Delta < 0$, il y a deux racines réelles conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, et $r_2 = \alpha - i\beta$ la solution générale est :
$$x \mapsto e^{\alpha x}\left(\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)\right), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Résolution dans le cas homogène

- Pour résoudre l'équation différentielle homogène :
$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0,$$
dans le cas où a et b sont réels.

- On forme l'équation caractéristique :
$$(e) : \qquad r^2 + ar + b = 0 \qquad \Delta = a^2 - 4b$$

- Si $\Delta > 0$, il y a deux racines r_1 et r_2, la solution générale est :
$$x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r, la solution générale est :
$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{rx}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta < 0$, il y a deux racines réelles conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, et $r_2 = \alpha - i\beta$ la solution générale est :
$$x \mapsto e^{\alpha x}\left(\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)\right), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Cas complexe

- Pour résoudre l'équation différentielle homogène :
$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0,$$
dans le cas où a et b sont réels (on cherche des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$).
- Si $\Delta \neq 0$, il y a deux racines distinctes r_1 et r_2 :
$$x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$
- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r :
$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{rx}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Cas complexe

- Pour résoudre l'équation différentielle homogène :
$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0,$$
dans le cas où a et b sont réels (on cherche des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$).
- Si $\Delta \neq 0$, il y a deux racines distinctes r_1 et r_2 :
$$x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$
- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r :
$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x) e^{rx}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Cas complexe

- Pour résoudre l'équation différentielle homogène :
$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0,$$
dans le cas où a et b sont réels (on cherche des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$).
- Si $\Delta \neq 0$, il y a deux racines distinctes r_1 et r_2 :
$$x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$
- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r :
$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x) e^{rx}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Du point de vue algébrique

- On veut résoudre : $y'' + ay' + by = 0$, a et b complexes.
- L'ensemble des solutions est un SEV de dimension 2.
- Si $\Delta \neq 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{r_1 x}, x \longmapsto e^{r_2 x}\right)$$

- Si $\Delta = 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{rx}, x \longmapsto xe^{rx}\right)$$

- Dans le cas où a et b sont réels et $\Delta < 0$, une base est :

$$\left(x \longmapsto e^{\alpha x} \cos\left(\beta x\right),\ x \longmapsto e^{\alpha x} \sin\left(\beta x\right)\right)$$

Du point de vue algébrique

- On veut résoudre : $y'' + ay' + by = 0$, a et b complexes.
- L'ensemble des solutions est un SEV de dimension 2.
- Si $\Delta \neq 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{r_1 x}, x \longmapsto e^{r_2 x}\right)$$

- Si $\Delta = 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{rx}, x \longmapsto xe^{rx}\right)$$

- Dans le cas où a et b sont réels et $\Delta < 0$, une base est :

$$\left(x \longmapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,,\ x \longmapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right)$$

Du point de vue algébrique

- On veut résoudre : $y'' + ay' + by = 0$, a et b complexes.
- L'ensemble des solutions est un SEV de dimension 2.
- Si $\Delta \neq 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{r_1 x}, x \longmapsto e^{r_2 x}\right)$$

- Si $\Delta = 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{rx}, x \longmapsto xe^{rx}\right)$$

- Dans le cas où a et b sont réels et $\Delta < 0$, une base est :

$$\left(x \longmapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x \longmapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right)$$

Du point de vue algébrique

- On veut résoudre : $y'' + ay' + by = 0$, a et b complexes.
- L'ensemble des solutions est un SEV de dimension 2.
- Si $\Delta \neq 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{r_1 x}, x \longmapsto e^{r_2 x}\right)$$

- Si $\Delta = 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{rx}, x \longmapsto xe^{rx}\right)$$

- Dans le cas où a et b sont réels et $\Delta < 0$, une base est :

$$\left(x \longmapsto e^{\alpha x} \cos\left(\beta x\right),\ x \longmapsto e^{\alpha x} \sin\left(\beta x\right)\right)$$

Du point de vue algébrique

- On veut résoudre : $y'' + ay' + by = 0$, a et b complexes.
- L'ensemble des solutions est un SEV de dimension 2.
- Si $\Delta \neq 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{r_1 x}, x \longmapsto e^{r_2 x}\right)$$

- Si $\Delta = 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{rx}, x \longmapsto xe^{rx}\right)$$

- Dans le cas où a et b sont réels et $\Delta < 0$, une base est :

$$\left(x \longmapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x \longmapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right)$$

Du point de vue algébrique

- On veut résoudre : $y'' + ay' + by = 0$, a et b complexes.
- L'ensemble des solutions est un SEV de dimension 2.
- Si $\Delta \neq 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{r_1 x}, x \longmapsto e^{r_2 x}\right)$$

- Si $\Delta = 0$, une base est

$$\left(x \longmapsto e^{rx}, x \longmapsto xe^{rx}\right)$$

- Dans le cas où a et b sont réels et $\Delta < 0$, une base est :

$$\left(x \longmapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x \longmapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right)$$

Exemples

$(H_1): \; y'' - y' - 2y = 0$

$(H_2): \; y'' + 2y' + y = 0$

$(H_3): \; y'' + 2y' + 5y = 0$

Exemples

(H_1) : $y'' - y' - 2y = 0$

on a alors : (e) : $r^2 - r - 2 = 0$ a deux racines : -1 et 2. D'où la solution générale :

$$x \mapsto \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(H_2) : $y'' + 2y' + y = 0$

(H_3) : $y'' + 2y' + 5y = 0$

Exemples

$(H_1):\ y'' - y' - 2y = 0$

$(H_2):\ y'' + 2y' + y = 0$

$(H_3):\ y'' + 2y' + 5y = 0$

Exemples

(H_1) : $y'' - y' - 2y = 0$

(H_2) : $y'' + 2y' + y = 0$

on a alors : (e) : $r^2 + 2r + 1 = 0$ a une racine double : -1 D'où la solution générale :

$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(H_3) : $y'' + 2y' + 5y = 0$

Exemples

$$(H_1) : \; y'' - y' - 2y = 0$$

$$(H_2) : \; y'' + 2y' + y = 0$$

$$(H_3) : \; y'' + 2y' + 5y = 0$$

Exemples

(H_1) : $y'' - y' - 2y = 0$

(H_2) : $y'' + 2y' + y = 0$

(H_3) : $y'' + 2y' + 5y = 0$

on a alors : (e) : $r^2 + r + 5 = 0$ a deux racines complexes conjugués : $-1 \pm 2i$. D'où la solution générale :

$$x \mapsto e^{-x}\big(\lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x)\big), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Résolution de l'équation avec second membre

- On a la même structure que pour le premier ordre.
  - Structure de l'ensemble des solutions,
  - Principe de superposition des solutions,
  - Passage aux complexes.
- On se restreint aux équations à coefficients constants (dans le programme).
- En particulier, pas de variations de la constante, il faut connaître les seconds membres particuliers.

- Second membre polynôme (E) : $y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Résolution de l'équation avec second membre

- On a la même structure que pour le premier ordre.
  - Structure de l'ensemble des solutions,
  - Principe de superposition des solutions,
  - Passage aux complexes.
- On se restreint aux équations à coefficients constants (dans le programme).
- En particulier, pas de variations de la constante, il faut connaître les seconds membres particuliers.

- Second membre polynôme (E) : $y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Résolution de l'équation avec second membre

- On a la même structure que pour le premier ordre.
  - Structure de l'ensemble des solutions,
  - Principe de superposition des solutions,
  - Passage aux complexes.
- On se restreint aux équations à coefficients constants (dans le programme).
- En particulier, pas de variations de la constante, il faut connaître les seconds membres particuliers.

- Second membre polynôme (E) : $y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Résolution de l'équation avec second membre

- On a la même structure que pour le premier ordre.
  - Structure de l'ensemble des solutions,
  - Principe de superposition des solutions,
  - Passage aux complexes.
- On se restreint aux équations à coefficients constants (dans le programme).
- En particulier, pas de variations de la constante, il faut connaître les seconds membres particuliers.

- Second membre polynôme (E) : $y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Résolution de l'équation avec second membre

- On a la même structure que pour le premier ordre.
  - Structure de l'ensemble des solutions,
  - Principe de superposition des solutions,
  - Passage aux complexes.
- On se restreint aux équations à coefficients constants (dans le programme).
- En particulier, pas de variations de la constante, il faut connaître les seconds membres particuliers.

- Second membre polynôme (E) : $y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Résolution de l'équation avec second membre

- On a la même structure que pour le premier ordre.
  - Structure de l'ensemble des solutions,
  - Principe de superposition des solutions,
  - Passage aux complexes.
- On se restreint aux équations à coefficients constants (dans le programme).
- En particulier, pas de variations de la constante, il faut connaître les seconds membres particuliers.

- Second membre polynôme (E) : $y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Résolution de l'équation avec second membre

- On a la même structure que pour le premier ordre.
  - Structure de l'ensemble des solutions,
  - Principe de superposition des solutions,
  - Passage aux complexes.
- On se restreint aux équations à coefficients constants (dans le programme).
- En particulier, pas de variations de la constante, il faut connaître les seconds membres particuliers.

- Second membre polynôme (E) : $y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Résolution de l'équation avec second membre

- On a la même structure que pour le premier ordre.
  - Structure de l'ensemble des solutions,
  - Principe de superposition des solutions,
  - Passage aux complexes.
- On se restreint aux équations à coefficients constants (dans le programme).
- En particulier, pas de variations de la constante, il faut connaître les seconds membres particuliers.

- Second membre polynôme (E) : $y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Résolution de l'équation avec second membre

- On a la même structure que pour le premier ordre.
  - Structure de l'ensemble des solutions,
  - Principe de superposition des solutions,
  - Passage aux complexes.
- On se restreint aux équations à coefficients constants (dans le programme).
- En particulier, pas de variations de la constante, il faut connaître les seconds membres particuliers.

- Second membre polynôme (E) : $y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Résolution de l'équation avec second membre

- On a la même structure que pour le premier ordre.
  - Structure de l'ensemble des solutions,
  - Principe de superposition des solutions,
  - Passage aux complexes.
- On se restreint aux équations à coefficients constants (dans le programme).
- En particulier, pas de variations de la constante, il faut connaître les seconds membres particuliers.

- Second membre polynôme (E) : $y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Résolution de l'équation avec second membre

- On a la même structure que pour le premier ordre.
  - Structure de l'ensemble des solutions,
  - Principe de superposition des solutions,
  - Passage aux complexes.
- On se restreint aux équations à coefficients constants (dans le programme).
- En particulier, pas de variations de la constante, il faut connaître les seconds membres particuliers.

- Second membre polynôme (E) : $y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.
- On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.
- En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Second membres particuliers

- Second membre exponentiel (E) : $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda x}$, avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\begin{aligned} y_0(x) =& Ce^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\ & \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } r^2 + ar + b = 0 \\ y_0(x) =& Cxe^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\ & \text{si } \lambda \text{ est racine simple de } r^2 + ar + b = 0 \\ y_0(x) =& Cx^2e^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\ & \text{si } \lambda \text{ est racine double de } r^2 + ar + b = 0 \end{aligned}$$

- On rajoute un degré ou deux lorsque l'exponentiel au second membre est la même que dans la solution générale de (H).
- Toujours la même interprétation : résonance.

Second membres particuliers

- Second membre exponentiel (E) : $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda x}$, avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= Ce^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\ &\qquad \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } r^2 + ar + b = 0 \\ y_0(x) &= Cxe^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\ &\qquad \text{si } \lambda \text{ est racine simple de } r^2 + ar + b = 0 \\ y_0(x) &= Cx^2e^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\ &\qquad \text{si } \lambda \text{ est racine double de } r^2 + ar + b = 0 \end{aligned}$$

- On rajoute un degré ou deux lorsque l'exponentiel au second membre est la même que dans la solution générale de (H).
- Toujours la même interprétation : résonance.

Second membres particuliers

- Second membre exponentiel (E) : $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda x}$, avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\begin{aligned} y_0(x) =& Ce^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\ & \qquad \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } r^2 + ar + b = 0 \\ y_0(x) =& Cxe^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\ & \qquad \text{si } \lambda \text{ est racine simple de } r^2 + ar + b = 0 \\ y_0(x) =& Cx^2e^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\ & \qquad \text{si } \lambda \text{ est racine double de } r^2 + ar + b = 0 \end{aligned}$$

- On rajoute un degré ou deux lorsque l'exponentiel au second membre est la même que dans la solution générale de (H).
- Toujours la même interprétation : résonance.

Second membres particuliers

- Second membre exponentiel (E) : $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda x}$, avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\begin{aligned}
y_0(x) =& Ce^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\
& \quad \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } r^2 + ar + b = 0 \\
y_0(x) =& Cxe^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\
& \quad \text{si } \lambda \text{ est racine simple de } r^2 + ar + b = 0 \\
y_0(x) =& Cx^2e^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\
& \quad \text{si } \lambda \text{ est racine double de } r^2 + ar + b = 0
\end{aligned}$$

- On rajoute un degré ou deux lorsque l'exponentiel au second membre est la même que dans la solution générale de (H).
- Toujours la même interprétation : résonance.

Second membres particuliers

- Second membre exponentiel (E) : $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda x}$, avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\begin{aligned}
y_0(x) =& Ce^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\
& \quad \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } r^2 + ar + b = 0 \\
y_0(x) =& Cxe^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\
& \quad \text{si } \lambda \text{ est racine simple de } r^2 + ar + b = 0 \\
y_0(x) =& Cx^2e^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\
& \quad \text{si } \lambda \text{ est racine double de } r^2 + ar + b = 0
\end{aligned}$$

- On rajoute un degré ou deux lorsque l'exponentiel au second membre est la même que dans la solution générale de (H).
- Toujours la même interprétation : résonance.

- **Second membre cosinus/sinus** $(E): \ y'' + ay' + by = A\cos(\omega x)$, ou $(E): \ y'' + ay' + by = A\sin(\omega x)$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(A,\omega) \in \mathbb{R}^2$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x \text{ avec } (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ &\quad \text{si } i\omega \text{ n'est pas racine de } r^2+ar+b=0 \\ y_0(x) &= \alpha x\cos\omega x + \beta x\sin\omega x \text{ avec } (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ &\quad \text{si } i\omega \text{ est racine (simple) de } r^2+ar+b=0 \end{aligned}$$

Seconds membres particuliers

- Second membre cosinus/sinus $(E): \ y'' + ay' + by = A\cos(\omega x)$, ou $(E): \ y'' + ay' + by = A\sin(\omega x)$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(A, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
- On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\begin{aligned}
y_0(x) =& \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\
& \text{si } i\omega \text{ n'est pas racine de } r^2 + ar + b = 0 \\
y_0(x) =& \alpha x \cos \omega x + \beta x \sin \omega x \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\
& \text{si } i\omega \text{ est racine (simple) de } r^2 + ar + b = 0
\end{aligned}$$

Principe général

- La solution particulière est de la même forme que le second membre.
- Si le second membre contient une partie oscillante à une pulsation ω alors on recherche une solution oscillante à la même pulsation, mais avec un déphasage et une amplitude à déterminer.
- Si le second membre est solution de l'équation homogène, alors il y a résonance et il faut donc « augmenter d'un degré » voire de 2.

Principe général

- La solution particulière est de la même forme que le second membre.
- Si le second membre contient une partie oscillante à une pulsation ω alors on recherche une solution oscillante à la même pulsation, mais avec un déphasage et une amplitude à déterminer.
- Si le second membre est solution de l'équation homogène, alors il y a résonance et il faut donc « augmenter d'un degré » voire de 2.

Principe général

- La solution particulière est de la même forme que le second membre.
- Si le second membre contient une partie oscillante à une pulsation ω alors on recherche une solution oscillante à la même pulsation, mais avec un déphasage et une amplitude à déterminer.
- Si le second membre est solution de l'équation homogène, alors il y a résonance et il faut donc « augmenter d'un degré » voire de 2.

Exemple

$$(E): \; y'' + 2y' + y = 4$$

Exemple

$(E):\ y'' + 2y' + y = 4$

- L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$, dont la racine double est -1.
- On cherche la solution sous la forme d'une constante, on voit que 4 est solution,
- donc les solutions sont :

$$x \mapsto 4 + (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$$(E) : \; y'' + 2y' + y = 4$$

- L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$, dont la racine double est -1.
- On cherche la solution sous la forme d'une constante, on voit que 4 est solution,
- donc les solutions sont :

$$x \mapsto 4 + (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$$(E): \ y'' + 2y' + y = 4$$

- L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$, dont la racine double est -1.
- On cherche la solution sous la forme d'une constante, on voit que 4 est solution,
- donc les solutions sont :

$$x \mapsto 4 + (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

(E) : $y'' + 2y' + y = 4$

- L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$, dont la racine double est -1.
- On cherche la solution sous la forme d'une constante, on voit que 4 est solution,
- donc les solutions sont :

$$x \mapsto 4 + (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$$(E) : \; y'' - y' - 2y = x$$

Exemple

$(E): \; y'' - y' - 2y = x$

- L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et 2
- On cherche la solution sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y(x) = ax + b$. On alors $y' = a$ et $y'' = 0$, donc l'équation : $-2ax - 2b - a = x$, soit $a = -\frac{1}{2}$, et $b = \frac{1}{4}$
- donc les solutions sont :

$$x \mapsto -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$(E):\ y'' - y' - 2y = x$

- L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et 2
- On cherche la solution sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y(x) = ax + b$. On alors $y' = a$ et $y'' = 0$, donc l'équation : $-2ax - 2b - a = x$, soit $a = -\frac{1}{2}$, et $b = \frac{1}{4}$
- donc les solutions sont :

$$x \mapsto -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$$(E) : \; y'' - y' - 2y = x$$

- L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et 2
- On cherche la solution sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y(x) = ax + b$. On alors $y' = a$ et $y'' = 0$, donc l'équation : $-2ax - 2b - a = x$, soit $a = -\frac{1}{2}$, et $b = \frac{1}{4}$
- donc les solutions sont :

$$x \mapsto -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$(E): \ y'' - y' - 2y = x$

- L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et 2
- On cherche la solution sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y(x) = ax + b$. On alors $y' = a$ et $y'' = 0$, donc l'équation : $-2ax - 2b - a = x$, soit $a = -\frac{1}{2}$, et $b = \frac{1}{4}$
- donc les solutions sont :

$$x \mapsto -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$$(E) : \; y'' - y' - 2y = e^{2x}$$

Exemple

$(E):\ y'' - y' - 2y = e^{2x}$

- L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et 2
- On voit bien qu'il est inutile de chercher des solutions sous la forme : $x \mapsto Ce^{2x}$ vu les solutions de l'équation homogène. Il faut augmenter d'un degré.
- On cherche des solutions sous la forme $y(x) = Cxe^{2x}$. On a alors :

$$y'(x) = C(1+2x)e^{2x} \qquad y''(x) = C(4+4x)e^{2x}$$

  donc on obtient : l'équation : $3Cxe^{2x} = e^{2x}$ soit $C = \frac{1}{3}$.
- donc les solutions sont :

$$x \mapsto \frac{x}{3}e^{2x} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$(E) : \; y'' - y' - 2y = e^{2x}$

- L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et 2
- On voit bien qu'il est inutile de chercher des solutions sous la forme : $x \mapsto Ce^{2x}$ vu les solutions de l'équation homogène. Il faut augmenter d'un degré.
- On cherche des solutions sous la forme $y(x) = Cxe^{2x}$. On a alors :

$$y'(x) = C(1 + 2x)e^{2x} \qquad y''(x) = C(4 + 4x)e^{2x}$$

donc on obtient : l'équation : $3Cxe^{2x} = e^{2x}$ soit $C = \frac{1}{3}$.

- donc les solutions sont :

$$x \mapsto \frac{x}{3}e^{2x} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$$(E) : \ y'' - y' - 2y = e^{2x}$$

- L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et 2
- On voit bien qu'il est inutile de chercher des solutions sous la forme : $x \mapsto Ce^{2x}$ vu les solutions de l'équation homogène. Il faut augmenter d'un degré.
- On cherche des solutions sous la forme $y(x) = Cxe^{2x}$. On a alors :

$$y'(x) = C(1+2x)e^{2x} \qquad y''(x) = C(4+4x)e^{2x}$$

donc on obtient : l'équation : $3Cxe^{2x} = e^{2x}$ soit $C = \frac{1}{3}$.

- donc les solutions sont :

$$x \mapsto \frac{x}{3}e^{2x} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$(E) : \; y'' - y' - 2y = e^{2x}$

- L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et 2
- On voit bien qu'il est inutile de chercher des solutions sous la forme : $x \mapsto Ce^{2x}$ vu les solutions de l'équation homogène. Il faut augmenter d'un degré.
- On cherche des solutions sous la forme $y(x) = Cxe^{2x}$. On a alors :

$$y'(x) = C(1+2x)e^{2x} \qquad y''(x) = C(4+4x)e^{2x}$$

donc on obtient : l'équation : $3Cxe^{2x} = e^{2x}$ soit $C = \frac{1}{3}$.

- donc les solutions sont :

$$x \mapsto \frac{x}{3}e^{2x} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$(E): \; y'' - y' - 2y = e^{2x}$

- L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et 2
- On voit bien qu'il est inutile de chercher des solutions sous la forme : $x \mapsto Ce^{2x}$ vu les solutions de l'équation homogène. Il faut augmenter d'un degré.
- On cherche des solutions sous la forme $y(x) = Cxe^{2x}$. On a alors :

$$y'(x) = C(1+2x)e^{2x} \qquad y''(x) = C(4+4x)e^{2x}$$

donc on obtient : l'équation : $3Cxe^{2x} = e^{2x}$ soit $C = \frac{1}{3}$.

- donc les solutions sont :

$$x \mapsto \frac{x}{3}e^{2x} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$$(E): \; y'' + y = \cos x + \sin 2x.$$

Exemple

$(E): \; y'' + y = \cos x + \sin 2x.$

- L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, donc les solutions sont i et $-i$, la solution générale de l'équation homogène est alors : $x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$.
- Pour $(E_1): \; y'' + y = \cos x$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha x \cos(x) + \beta x \sin(x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$. La solution particulière de (E_1) est : $x \mapsto \frac{1}{2} x \sin(x)$.
- Pour $(E_2): \; y'' + y = \sin(2x)$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{1}{3}$. La solution particulière de (E_2) est : $x \mapsto -\frac{1}{3} \sin(2x)$.
- On déduit par le principe de superposition une solution particulière de $(E): \; y_0(x) = \frac{x}{2} \sin x - \frac{\sin 2x}{3}$.
- On déduit que les solutions de (E) sont de la forme :

$$x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \lambda_1 \cos(x) + \left(\lambda_2 + \frac{x}{2}\right) \sin(x), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$(E): \; y'' + y = \cos x + \sin 2x.$

- L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, donc les solutions sont i et $-i$, la solution générale de l'équation homogène est alors : $x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$.
- Pour $(E_1): \; y'' + y = \cos x$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha x \cos(x) + \beta x \sin(x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$. La solution particulière de (E_1) est : $x \mapsto \frac{1}{2} x \sin(x)$.
- Pour $(E_2): \; y'' + y = \sin(2x)$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{1}{3}$. La solution particulière de (E_2) est : $x \mapsto -\frac{1}{3} \sin(2x)$.
- On déduit par le principe de superposition une solution particulière de $(E): \; y_0(x) = \frac{x}{2} \sin x - \frac{\sin 2x}{3}$.
- On déduit que les solutions de (E) sont de la forme :

$$x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \lambda_1 \cos(x) + \left(\lambda_2 + \frac{x}{2}\right) \sin(x), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$(E): \ y'' + y = \cos x + \sin 2x.$

- L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, donc les solutions sont i et $-i$, la solution générale de l'équation homogène est alors : $x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$.
- Pour $(E_1): \ y'' + y = \cos x$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha x \cos(x) + \beta x \sin(x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$. La solution particulière de (E_1) est : $x \mapsto \frac{1}{2} x \sin(x)$.
- Pour $(E_2): \ y'' + y = \sin(2x)$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{1}{3}$. La solution particulière de (E_2) est : $x \mapsto -\frac{1}{3} \sin(2x)$.
- On déduit par le principe de superposition une solution particulière de $(E): \ y_0(x) = \frac{x}{2} \sin x - \frac{\sin 2x}{3}$.
- On déduit que les solutions de (E) sont de la forme :

$$x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \lambda_1 \cos(x) + \left(\lambda_2 + \frac{x}{2}\right) \sin(x), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

(E) : $y'' + y = \cos x + \sin 2x$.

- L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, donc les solutions sont i et $-i$, la solution générale de l'équation homogène est alors : $x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$.
- Pour (E_1) : $y'' + y = \cos x$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha x \cos(x) + \beta x \sin(x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$. La solution particulière de (E_1) est : $x \mapsto \frac{1}{2} x \sin(x)$.
- Pour (E_2) : $y'' + y = \sin(2x)$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{1}{3}$. La solution particulière de (E_2) est : $x \mapsto -\frac{1}{3} \sin(2x)$.
- On déduit par le principe de superposition une solution particulière de (E) : $y_0(x) = \frac{x}{2} \sin x - \frac{\sin 2x}{3}$.
- On déduit que les solutions de (E) sont de la forme :

$$x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \lambda_1 \cos(x) + \left(\lambda_2 + \frac{x}{2}\right) \sin(x), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

(E) : $y'' + y = \cos x + \sin 2x$.

- L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, donc les solutions sont i et $-i$, la solution générale de l'équation homogène est alors : $x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$.
- Pour (E_1) : $y'' + y = \cos x$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha x \cos(x) + \beta x \sin(x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$. La solution particulière de (E_1) est : $x \mapsto \frac{1}{2} x \sin(x)$.
- Pour (E_2) : $y'' + y = \sin(2x)$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{1}{3}$. La solution particulière de (E_2) est : $x \mapsto -\frac{1}{3} \sin(2x)$.
- On déduit par le principe de superposition une solution particulière de (E) : $y_0(x) = \frac{x}{2} \sin x - \frac{\sin 2x}{3}$.
- On déduit que les solutions de (E) sont de la forme :

$$x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \lambda_1 \cos(x) + \left(\lambda_2 + \frac{x}{2}\right) \sin(x), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$(E): \; y'' + y = \cos x + \sin 2x.$

- L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, donc les solutions sont i et $-i$, la solution générale de l'équation homogène est alors : $x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$.
- Pour $(E_1): \; y'' + y = \cos x$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha x \cos(x) + \beta x \sin(x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$. La solution particulière de (E_1) est : $x \mapsto \frac{1}{2} x \sin(x)$.
- Pour $(E_2): \; y'' + y = \sin(2x)$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$. Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{1}{3}$. La solution particulière de (E_2) est : $x \mapsto -\frac{1}{3} \sin(2x)$.
- On déduit par le principe de superposition une solution particulière de $(E): \; y_0(x) = \frac{x}{2} \sin x - \frac{\sin 2x}{3}$.
- On déduit que les solutions de (E) sont de la forme :

$$x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \lambda_1 \cos(x) + \left(\lambda_2 + \frac{x}{2}\right) \sin(x), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

$(E): \; y'' + y = \cos x + \sin 2x$ en passant par les fonctions complexes.

Exemple

(E) : $y'' + y = \cos x + \sin 2x$ en passant par les fonctions complexes.

- On résout l'équation $y'' + y = e^{ix}$. On cherche une solution sous la forme $y(x) = Cxe^{ix}$, cela donne :
$$y'(x) = C\left(1 + ix\right)e^{ix} \qquad y''(x) = C\left(i + i(1+ix)\right)e^{ix}$$
ainsi : $y'' + y = 2Cie^{ix}$, et $C = -\frac{i}{2}$.
Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{i}{2}xe^{ix}$.
- On prend la partie réelle $x \mapsto \frac{x}{2}\sin(x)$
- On recommence avec $y'' + y = e^{i2x}$. On cherche une solution sous la forme $y = Ce^{i2x}$, on a alors :
$$y'' + y = (-4+1)\,Ce^{i2x} = -3Ce^{i2x} \qquad \text{d'où } C = -\frac{1}{3}$$
et une solution particulière est $x \mapsto -\frac{1}{3}e^{i2x}$
- On prend la partie imaginaire $x \mapsto -\frac{1}{3}\sin(2x)$.
- Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \frac{x}{2}\sin(x)$

Exemple

(E) : $y'' + y = \cos x + \sin 2x$ en passant par les fonctions complexes.

- On résout l'équation $y'' + y = e^{ix}$. On cherche une solution sous la forme $y(x) = Cxe^{ix}$, cela donne :
$$y'(x) = C\,(1 + ix)\,e^{ix} \qquad y''(x) = C\,(i + i(1 + ix))\,e^{ix}$$
ainsi : $y'' + y = 2Cie^{ix}$, et $C = -\frac{i}{2}$.
Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{i}{2}xe^{ix}$.
- On prend la partie réelle $x \mapsto \frac{x}{2}\sin(x)$
- On recommence avec $y'' + y = e^{i2x}$. On cherche une solution sous la forme $y = Ce^{i2x}$, on a alors :
$$y'' + y = (-4 + 1)\,Ce^{i2x} = -3Ce^{i2x} \qquad \text{d'où } C = -\frac{1}{3}$$
et une solution particulière est $x \mapsto -\frac{1}{3}e^{i2x}$
- On prend la partie imaginaire $x \mapsto -\frac{1}{3}\sin(2x)$.
- Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \frac{x}{2}\sin(x)$

Exemple

(E) : $y'' + y = \cos x + \sin 2x$ en passant par les fonctions complexes.

- On résout l'équation $y'' + y = e^{ix}$. On cherche une solution sous la forme $y(x) = Cxe^{ix}$, cela donne :
$$y'(x) = C\left(1 + ix\right)e^{ix} \qquad y''(x) = C\left(i + i(1 + ix)\right)e^{ix}$$
ainsi : $y'' + y = 2Cie^{ix}$, et $C = -\frac{i}{2}$.
Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{i}{2}xe^{ix}$.
- On prend la partie réelle $x \mapsto \frac{x}{2}\sin(x)$
- On recommence avec $y'' + y = e^{i2x}$. On cherche une solution sous la forme $y = Ce^{i2x}$, on a alors :
$$y'' + y = (-4 + 1)\,Ce^{i2x} = -3Ce^{i2x} \qquad \text{d'où } C = -\frac{1}{3}$$
et une solution particulière est $x \mapsto -\frac{1}{3}e^{i2x}$
- On prend la partie imaginaire $x \mapsto -\frac{1}{3}\sin(2x)$.
- Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \frac{x}{2}\sin(x)$

Exemple

$(E): \ y'' + y = \cos x + \sin 2x$ en passant par les fonctions complexes.

- On résout l'équation $y'' + y = e^{ix}$. On cherche une solution sous la forme $y(x) = Cxe^{ix}$, cela donne :
$$y'(x) = C\,(1+ix)\,e^{ix} \qquad y''(x) = C\,(i + i(1+ix))\,e^{ix}$$
ainsi : $y'' + y = 2Cie^{ix}$, et $C = -\frac{i}{2}$.
Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{i}{2}xe^{ix}$.
- On prend la partie réelle $x \mapsto \frac{x}{2}\sin(x)$
- On recommence avec $y'' + y = e^{i2x}$. On cherche une solution sous la forme $y = Ce^{i2x}$, on a alors :
$$y'' + y = (-4+1)\,Ce^{i2x} = -3Ce^{i2x} \qquad \text{d'où } C = -\frac{1}{3}$$
et une solution particulière est $x \mapsto -\frac{1}{3}e^{i2x}$
- On prend la partie imaginaire $x \mapsto -\frac{1}{3}\sin(2x)$.
- Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \frac{x}{2}\sin(x)$

Exemple

(E) : $y'' + y = \cos x + \sin 2x$ en passant par les fonctions complexes.

- On résout l'équation $y'' + y = e^{ix}$. On cherche une solution sous la forme $y(x) = Cxe^{ix}$, cela donne :
$$y'(x) = C\left(1 + ix\right)e^{ix} \qquad y''(x) = C\left(i + i(1 + ix)\right)e^{ix}$$
ainsi : $y'' + y = 2Cie^{ix}$, et $C = -\frac{i}{2}$.
Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{i}{2}xe^{ix}$.
- On prend la partie réelle $x \mapsto \frac{x}{2}\sin(x)$
- On recommence avec $y'' + y = e^{i2x}$. On cherche une solution sous la forme $y = Ce^{i2x}$, on a alors :
$$y'' + y = (-4 + 1)\,Ce^{i2x} = -3Ce^{i2x} \qquad \text{d'où } C = -\frac{1}{3}$$
et une solution particulière est $x \mapsto -\frac{1}{3}e^{i2x}$
- On prend la partie imaginaire $x \mapsto -\frac{1}{3}\sin(2x)$.
- Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \frac{x}{2}\sin(x)$

Exemple

(E) : $y'' + y = \cos x + \sin 2x$ en passant par les fonctions complexes.

- On résout l'équation $y'' + y = e^{ix}$. On cherche une solution sous la forme $y(x) = Cxe^{ix}$, cela donne :
$$y'(x) = C(1 + ix)\,e^{ix} \qquad y''(x) = C(i + i(1 + ix))\,e^{ix}$$
ainsi : $y'' + y = 2Cie^{ix}$, et $C = -\frac{i}{2}$.
Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{i}{2}xe^{ix}$.
- On prend la partie réelle $x \mapsto \frac{x}{2}\sin(x)$
- On recommence avec $y'' + y = e^{i2x}$. On cherche une solution sous la forme $y = Ce^{i2x}$, on a alors :
$$y'' + y = (-4 + 1)\,Ce^{i2x} = -3Ce^{i2x} \qquad \text{d'où } C = -\frac{1}{3}$$
et une solution particulière est $x \mapsto -\frac{1}{3}e^{i2x}$
- On prend la partie imaginaire $x \mapsto -\frac{1}{3}\sin(2x)$.
- Une solution particulière est donc : $x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3} + \frac{x}{2}\sin(x)$