Espaces euclidiens

Rappels et compléments

Sylvain Pelletier

PSI - LMSC

Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** est une application φ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.

- pour tout couple (x, y) de E, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie)
- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (bilinéarité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geqslant 0$ (positivité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$ (définie positive).

On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, **espace vectoriel euclidien** si il est de dimension finie.
On peut associer la norme : $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ et la distance : $d(x, y) = \|x - y\|$ à un produit scalaire.

Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** est une application φ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.

- pour tout couple (x, y) de E, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie)
- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (bilinéarité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geqslant 0$ (positivité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$ (définie positive).

On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, **espace vectoriel euclidien** si il est de dimension finie.
On peut associer la norme : $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ et la distance : $d(x, y) = \|x - y\|$ à un produit scalaire.

Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** est une application φ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.

- pour tout couple (x, y) de E, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie)
- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (bilinéarité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geqslant 0$ (positivité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$ (définie positive).

On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, **espace vectoriel euclidien** si il est de dimension finie.
On peut associer la norme : $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ et la distance : $d(x, y) = \|x - y\|$ à un produit scalaire.

Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** est une application φ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.

- pour tout couple (x, y) de E, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie)
- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (bilinéarité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geqslant 0$ (positivité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$ (définie positive).

On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, **espace vectoriel euclidien** si il est de dimension finie.
On peut associer la norme : $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ et la distance : $d(x, y) = \|x - y\|$ à un produit scalaire.

Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** est une application φ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.

- pour tout couple (x, y) de E, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie)
- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (bilinéarité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geqslant 0$ (positivité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$ (définie positive).

On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, **espace vectoriel euclidien** si il est de dimension finie.
On peut associer la norme : $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ et la distance : $d(x, y) = \|x - y\|$ à un produit scalaire.

Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** est une application φ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.

- pour tout couple (x, y) de E, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie)
- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (bilinéarité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geqslant 0$ (positivité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$ (définie positive).

On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, **espace vectoriel euclidien** si il est de dimension finie.
On peut associer la norme : $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ et la distance : $d(x, y) = \|x - y\|$ à un produit scalaire.

Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** est une application φ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.

- pour tout couple (x, y) de E, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie)
- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (bilinéarité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geqslant 0$ (positivité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$ (définie positive).

On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, **espace vectoriel euclidien** si il est de dimension finie.
On peut associer la norme : $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ et la distance : $d(x, y) = \|x - y\|$ à un produit scalaire.

Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** est une application φ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.

- pour tout couple (x, y) de E, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie)
- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (bilinéarité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geqslant 0$ (positivité).
- pour $x \in E$, on a $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$ (définie positive).

On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, **espace vectoriel euclidien** si il est de dimension finie.
On peut associer la norme : $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ et la distance : $d(x, y) = \|x - y\|$ à un produit scalaire.

Les exemples de références sont :

$$\text{dans } \mathbb{R}^n : \Big\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\text{dans } \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) : \ \Big\langle f, g \Big\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\text{dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)$$

Pour montrer qu'une application est un produit scalaire, on utilise :

- la forme canonique : $x^2 + bxy + cxz + \ldots = (x + \frac{b}{2}y + \frac{c}{2}z)^2 + \ldots$, en éliminant les variables une par une.
- La somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls,
- L'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si la fonction est nulle.
- l'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Les exemples de références sont :

$$\text{dans } \mathbb{R}^n : \left\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\text{dans } \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) : \ \left\langle f, g \right\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\text{dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)$$

Pour montrer qu'une application est un produit scalaire, on utilise :

- la forme canonique : $x^2 + bxy + cxz + ... = (x + \frac{b}{2}y + \frac{c}{2}z)^2 + ...$, en éliminant les variables une par une.
- La somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls,
- L'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si la fonction est nulle.
- l'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Les exemples de références sont :

$$\text{dans } \mathbb{R}^n : \left\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\text{dans } \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) : \left\langle f, g \right\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\text{dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)$$

Pour montrer qu'une application est un produit scalaire, on utilise :

- la forme canonique : $x^2 + bxy + cxz + ... = (x + \frac{b}{2}y + \frac{c}{2}z)^2 + ...$, en éliminant les variables une par une.
- La somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls,
- L'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si la fonction est nulle.
- l'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Les exemples de références sont :

$$\text{dans } \mathbb{R}^n : \Big\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\text{dans } \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) : \ \Big\langle f, g \Big\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\text{dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)$$

Pour montrer qu'une application est un produit scalaire, on utilise :

- la forme canonique : $x^2 + bxy + cxz + ... = (x + \frac{b}{2}y + \frac{c}{2}z)^2 + ...$, en éliminant les variables une par une.
- La somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls,
- L'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si la fonction est nulle.
- l'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Les exemples de références sont :

$$\text{dans } \mathbb{R}^n : \left\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\text{dans } \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) : \ \left\langle f, g \right\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\text{dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)$$

Pour montrer qu'une application est un produit scalaire, on utilise :

- la forme canonique : $x^2 + bxy + cxz + \ldots = (x + \frac{b}{2}y + \frac{c}{2}z)^2 + \ldots$, en éliminant les variables une par une.
- La somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls,
- L'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si la fonction est nulle.
- l'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Les exemples de références sont :

$$\text{dans } \mathbb{R}^n : \left\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\text{dans } \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) : \ \left\langle f, g \right\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\text{dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)$$

Pour montrer qu'une application est un produit scalaire, on utilise :

- la forme canonique : $x^2 + bxy + cxz + ... = (x + \frac{b}{2}y + \frac{c}{2}z)^2 + ...$, en éliminant les variables une par une.
- La somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls,
- L'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si la fonction est nulle.
- l'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Montrer qu'une application est un produit scalaire

- $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$
- dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}&\Big\langle (x,y,z),(x',y',z')\Big\rangle\\ =&xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}\left(xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z\right)\end{aligned}$$

- $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer qu'une application est un produit scalaire

- $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$
- dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}&\Big\langle (x,y,z),(x',y',z')\Big\rangle\\ =&xx'+yy'+zz'+\frac{1}{2}\left(xy'+x'y+xz'+x'z+yz'+y'z\right)\end{aligned}$$

- $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer qu'une application est un produit scalaire

- $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$
- dans $\mathbb{R}^3$:
$$\left\langle (x,y,z),(x',y',z') \right\rangle$$
$$= xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}\left(xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z\right)$$
- $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Cas des fonctions de carré intégrable

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

Le produit de deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est une fonction intégrable.

Cas des fonctions de carré intégrable

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

Le produit de deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est une fonction intégrable.

Cas des fonctions de carré intégrable

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

Le produit de deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est une fonction intégrable.

- Provient de $\forall (a, b) \in \mathbb{R},\ |ab| \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.
- Ainsi : $\forall t \in I,\ |f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right)$
- f et g étant de carré intégrable fg est intégrable.

Cas des fonctions de carré intégrable

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

Le produit de deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est une fonction intégrable.

- Provient de $\forall (a, b) \in \mathbb{R},\ |ab| \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.
- Ainsi : $\forall t \in I,\ |f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right)$
- f et g étant de carré intégrable fg est intégrable.

Cas des fonctions de carré intégrable

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

Le produit de deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est une fonction intégrable.

- Provient de $\forall (a, b) \in \mathbb{R},\ |ab| \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.
- Ainsi : $\forall t \in I,\ |f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right)$
- f et g étant de carré intégrable fg est intégrable.

Cas des fonctions de carré intégrable

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

Le produit de deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est une fonction intégrable.

- Provient de $\forall (a, b) \in \mathbb{R},\ |ab| \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.
- Ainsi : $\forall t \in I,\ |f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right)$
- f et g étant de carré intégrable fg est intégrable.

Cas des fonctions de carré intégrable

On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Cas des fonctions de carré intégrable

On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Cas des fonctions de carré intégrable

On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Provient de
  $$\forall t \in I,\ |f(t) + \alpha g(t)|^2 \leqslant |f(t)|^2 + 2|\alpha||f(t)||g(t)| + |\alpha|^2|g(t)|^2$$
- f et g étant de carré intégrable, fg est intégrable
- ainsi, par comparaison $|f + \alpha g|^2$ est intégrable.

Cas des fonctions de carré intégrable

On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Provient de
$$\forall t \in I,\ |f(t) + \alpha g(t)|^2 \leqslant |f(t)|^2 + 2|\alpha||f(t)||g(t)| + |\alpha|^2|g(t)|^2$$
- f et g étant de carré intégrable, fg est intégrable
- ainsi, par comparaison $|f + \alpha g|^2$ est intégrable.

Cas des fonctions de carré intégrable

On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Provient de
$$\forall t \in I,\ |f(t) + \alpha g(t)|^2 \leqslant |f(t)|^2 + 2|\alpha||f(t)||g(t)| + |\alpha|^2|g(t)|^2$$
- f et g étant de carré intégrable, fg est intégrable
- ainsi, par comparaison $|f + \alpha g|^2$ est intégrable.

Cas des fonctions de carré intégrable

On dit que f est de carrée intégrable sur l'intervalle I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur un intervalle I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Provient de
$$\forall t \in I,\ |f(t) + \alpha g(t)|^2 \leqslant |f(t)|^2 + 2|\alpha||f(t)||g(t)| + |\alpha|^2|g(t)|^2$$
- f et g étant de carré intégrable, fg est intégrable
- ainsi, par comparaison $|f + \alpha g|^2$ est intégrable.

produit scalaire sur les fonctions de carré intégrable

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrable sur un intervalle I à valeurs réelles.
L'application :

$$\left\{\begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \langle f,g\rangle = \int_I fg \end{array}\right.$$

est un produit scalaire sur E.

- E est un espace pré-hilbertien.
- Il faut la continuité ! (pour avoir définie positive).
- La norme associée est :

$$\|f\| = \sqrt{\int_I (f(t))^2\, dt}$$

produit scalaire sur les fonctions de carré intégrable

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrable sur un intervalle I à valeurs réelles.
L'application :

$$\begin{cases} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_I fg \end{cases}$$

est un produit scalaire sur E.

- E est un espace pré-hilbertien.
- Il faut la continuité ! (pour avoir définie positive).
- La norme associée est :

$$\|f\| = \sqrt{\int_I (f(t))^2\,dt}$$

produit scalaire sur les fonctions de carré intégrable

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrable sur un intervalle I à valeurs réelles.
L'application :

$$\begin{cases} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \langle f,g\rangle = \int_I fg \end{cases}$$

est un produit scalaire sur E.

- E est un espace pré-hilbertien.
- Il faut la continuité ! (pour avoir définie positive).
- La norme associée est :

$$\|f\| = \sqrt{\int_I (f(t))^2\,dt}$$

produit scalaire sur les fonctions de carré intégrable

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrable sur un intervalle I à valeurs réelles.
L'application :

$$\begin{cases} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_I fg \end{cases}$$

est un produit scalaire sur E.

- E est un espace pré-hilbertien.
- Il faut la continuité ! (pour avoir définie positive).
- La norme associée est :

$$\|f\| = \sqrt{\int_I (f(t))^2\,dt}$$

Norme associée à un produit scalaire

- $\|x\|^2 = < x, x >$, ie $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.
- On peut exprimer la norme au carré d'une somme à l'aide du produit scalaire :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2 < x, y > + \|y\|^2$$
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

- On peut aussi exprimer le produit scalaire à l'aide de la norme au carrée :

$$\begin{aligned} < x, y > &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2\right) \end{aligned}$$

Norme associée à un produit scalaire

- $\|x\|^2 = < x, x >$, ie $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.
- On peut exprimer la norme au carré d'une somme à l'aide du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 =& \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 =& \|x\|^2 - 2 < x, y > + \|y\|^2 \\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =& 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\end{aligned}$$

- On peut aussi exprimer le produit scalaire à l'aide de la norme au carrée :

$$\begin{aligned}< x, y > =& \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(-\|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2\right)\end{aligned}$$

Norme associée à un produit scalaire

- $\|x\|^2 = < x, x >$, ie $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.
- On peut exprimer la norme au carré d'une somme à l'aide du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 =& \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2 \\
\|x-y\|^2 =& \|x\|^2 - 2 < x, y > + \|y\|^2 \\
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =& 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)
\end{aligned}$$

- On peut aussi exprimer le produit scalaire à l'aide de la norme au carrée :

$$\begin{aligned}
< x, y > =& \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(-\|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2\right)
\end{aligned}$$

Norme associée à un produit scalaire

- $\|x\|^2 = <x, x>$, ie $\|x\| = \sqrt{<x, x>}$.
- On peut exprimer la norme au carré d'une somme à l'aide du produit scalaire :
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 =& \|x\|^2 + 2<x,y> + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 =& \|x\|^2 - 2<x,y> + \|y\|^2 \\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =& 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \end{aligned}$$
- On peut aussi exprimer le produit scalaire à l'aide de la norme au carrée :
$$\begin{aligned} <x,y> =& \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(-\|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2\right) \end{aligned}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ |< x, y >| \leqslant \|x\| \|y\|$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ |< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$$

- On fixe x et y non nuls (sinon c'est évident).
- On considère pour $t \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} P(t) &= \|x+ty\|^2 = < x+ty, x+ty > \\ &= \|x\|^2 + 2t < x, y > + t^2\|y\|^2 \end{aligned}$$
- P est un polynôme de degré 2, toujours positif donc son discriminant est négatif, ce qui donne :
$$4\left(< x, y >\right)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$$
- ainsi : $|< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\forall (x,y) \in E^2, \; |< x, y >| \leqslant \|x\| \|y\|$$

- On fixe x et y non nuls (sinon c'est évident).
- On considère pour $t \in \mathbb{R}$
$$P(t) = \|x + ty\|^2 = < x + ty, x + ty >$$
$$= \|x\|^2 + 2t < x, y > + t^2 \|y\|^2$$
- P est un polynôme de degré 2, toujours positif donc son discriminant est négatif, ce qui donne :
$$4 \left(< x, y >\right)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$$
- ainsi : $|< x, y >| \leqslant \|x\| \|y\|$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ |< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$$

- On fixe x et y non nuls (sinon c'est évident).
- On considère pour $t \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} P(t) &= \|x + ty\|^2 = < x + ty, x + ty > \\ &= \|x\|^2 + 2t < x, y > + t^2\|y\|^2 \end{aligned}$$
- P est un polynôme de degré 2, toujours positif donc son discriminant est négatif, ce qui donne :
$$4\left(< x, y >\right)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$$
- ainsi : $|< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\forall (x,y)\in E^2,\ |<x,y>|\leqslant \|x\|\|y\|$$

- On fixe x et y non nuls (sinon c'est évident).
- On considère pour $t\in\mathbb{R}$
$$\begin{aligned}P(t) &= \|x+ty\|^2 = <x+ty, x+ty> \\ &= \|x\|^2 + 2t<x,y> + t^2\|y\|^2\end{aligned}$$
- P est un polynôme de degré 2, toujours positif donc son discriminant est négatif, ce qui donne :
$$4\left(<x,y>\right)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$$
- ainsi : $|<x,y>|\leqslant \|x\|\|y\|$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |< x, y >| \leqslant \|x\| \|y\|$$

- On fixe x et y non nuls (sinon c'est évident).
- On considère pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(t) &= \|x + ty\|^2 = < x + ty, x + ty > \\ &= \|x\|^2 + 2t < x, y > + t^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

- P est un polynôme de degré 2, toujours positif donc son discriminant est négatif, ce qui donne :

$$4 \left(< x, y >\right)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$$

- ainsi : $|< x, y >| \leqslant \|x\| \|y\|$.

Cas d'égalité

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ |< x, y >| \leqslant \|x\| \|y\|$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont proportionnels

Cas d'égalité

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont proportionnels

- On suppose que $|< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$,
- cela signifie que le polynôme $P(t) = \|x + ty\|^2$ admet une racine.
- il existe donc $t_0 \in \mathbb{R}$, tel que $P(t_0) = 0$ ie $x + t_0 y = 0$ ou encore x et y proportionnels.
- Réciproque évidente.

Cas d'égalité

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x,y) \in E^2, \; |< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont proportionnels

- On suppose que $|< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$,
- cela signifie que le polynôme $P(t) = \|x + ty\|^2$ admet une racine.
- il existe donc $t_0 \in \mathbb{R}$, tel que $P(t_0) = 0$ ie $x + t_0 y = 0$ ou encore x et y proportionnels.
- Réciproque évidente.

Cas d'égalité

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2, |< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont proportionnels

- On suppose que $|< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$,
- cela signifie que le polynôme $P(t) = \|x + ty\|^2$ admet une racine.
- il existe donc $t_0 \in \mathbb{R}$, tel que $P(t_0) = 0$ ie $x + t_0 y = 0$ ou encore x et y proportionnels.
- Réciproque évidente.

Cas d'égalité

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall(x,y) \in E^2,\ |< x,y >| \leqslant \|x\|\|y\|$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont proportionnels

- On suppose que $|< x,y >| \leqslant \|x\|\|y\|$,
- cela signifie que le polynôme $P(t) = \|x+ty\|^2$ admet une racine.
- il existe donc $t_0 \in \mathbb{R}$, tel que $P(t_0) = 0$ ie $x + t_0 y = 0$ ou encore x et y proportionnels.
- Réciproque évidente.

Cas d'égalité

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont proportionnels

- On suppose que $|< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|$,
- cela signifie que le polynôme $P(t) = \|x + ty\|^2$ admet une racine.
- il existe donc $t_0 \in \mathbb{R}$, tel que $P(t_0) = 0$ ie $x + t_0 y = 0$ ou encore x et y proportionnels.
- Réciproque évidente.

Inégalité triangulaire

- En conséquence, on a l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

- avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés

Inégalité triangulaire

- En conséquence, on a l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

- avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés

Inégalité triangulaire

- En conséquence, on a l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

- avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés

Inégalité triangulaire

- En conséquence, on a l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

- avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés

$$\begin{aligned}
& \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \\
\iff & \|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \\
\iff & \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
\iff & < x, y > \leqslant \|x\|\|y\| \\
& \text{VRAI car } < x, y > \leqslant | < x, y > | \leqslant \|x\|\|y\|
\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire

- En conséquence, on a l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

- avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés

$$\begin{aligned}
& \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \\
\Longleftrightarrow\ & \|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
\Longleftrightarrow\ & < x, y > \leqslant \|x\|\|y\| \\
& \text{VRAI car } < x, y > \leqslant |< x, y >| \leqslant \|x\|\|y\|
\end{aligned}$$

- égalité ssi égalité dans Cauchy schwartz (donc colinéaire) et $|<,x,y>| = <x,y>$ (donc dans le même sens).

Inégalité triangulaire

- En conséquence, on a l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

- avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés

$$\begin{aligned}
&\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \\
\iff &\|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \\
\iff &\|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
\iff & < x, y > \leqslant \|x\|\|y\| \\
&\text{VRAI car } < x, y > \leqslant | < x, y > | \leqslant \|x\|\|y\|
\end{aligned}$$

- égalité ssi égalité dans Cauchy schwartz (donc colinéaire) et $| <, x, y > | = < x, y >$ (donc dans le même sens).

Propriété de la norme

- On a aussi l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \left| \|x\| - \|y\| \right| \leqslant \|x - y\|.$$

- le Théorème de Pythagore : deux vecteurs (x, y) de E sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Propriété de la norme

- On a aussi l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x - y\|.$$

- le Théorème de Pythagore : deux vecteurs (x, y) de E sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Propriété de la norme

- On a aussi l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x - y\|.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire à $(x - y) + y$ et $(y - x) + x$.

- le Théorème de Pythagore : deux vecteurs (x, y) de E sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Propriété de la norme

- On a aussi l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x-y\|.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire à $(x-y)+y$ et $(y-x)+x$.

- le Théorème de Pythagore : deux vecteurs (x,y) de E sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Propriété de la norme

- On a aussi l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x - y\|.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire à $(x - y) + y$ et $(y - x) + x$.

- le Théorème de Pythagore : deux vecteurs (x, y) de E sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Propriété de la norme

- On a aussi l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \left| \|x\| - \|y\| \right| \leqslant \|x - y\|.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire à $(x - y) + y$ et $(y - x) + x$.

- le Théorème de Pythagore : deux vecteurs (x, y) de E sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Provient de $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >$.

Exemple d'utilisation de Cauchy-Schwarz

Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients tous positifs et pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a :

$$\left(P\left(\sqrt{xy}\right)\right)^2 \leqslant P(x)P(y)$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\ R)$.
Montrer que :

$$\left|\int_0^1 tf(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}\int_0^1 f^2(t)dt}$$

Exemple d'utilisation de Cauchy-Schwarz

Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients tous positifs et pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a :

$$(P(\sqrt{xy}))^2 \leqslant P(x)P(y)$$

$$(P(\sqrt{xy}))^2 = \left(\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{a_k}\sqrt{x}^k)(\sqrt{a_k}\sqrt{y}^k)\right)^2$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\ R)$.
Montrer que :

$$\left|\int_0^1 tf(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}\int_0^1 f^2(t)dt}$$

Exemple d'utilisation de Cauchy-Schwarz

Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients tous positifs et pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a :

$$\left(P\left(\sqrt{xy}\right)\right)^2 \leqslant P(x)P(y)$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\ R)$.
Montrer que :

$$\left|\int_0^1 tf(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}\int_0^1 f^2(t)dt}$$

Exemple d'utilisation de Cauchy-Schwarz

Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients tous positifs et pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a :

$$\left(P\left(\sqrt{xy}\right)\right)^2 \leqslant P(x)P(y)$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\ R)$.
Montrer que :

$$\left|\int_0^1 tf(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}\int_0^1 f^2(t)dt}$$

$$\int_0^1 tf(t)dt = \langle f, g\rangle \text{ avec } g : t \longmapsto t$$

Orthogonalité

- On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $< x, y >= 0$. On note : $x \perp y$.
- $x \perp x$ si et seulement si $x = 0$.
- L'orthogonal d'une partie A de E est :

$$A^{\perp} = \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\} = \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, a \perp x \right\}$$

C'est un SEV de E. Si $A \subset B$, on a alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

- On dit que deux SEV F et G de E sont orthogonaux si

$$\forall (x, y) \in F \times G, \ < x, y >= 0 \qquad \text{ie } F \subset G^{\perp}$$

Orthogonalité

- On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $< x, y >= 0$. On note : $x \perp y$.
- $x \perp x$ si et seulement si $x = 0$.
- L'orthogonal d'une partie A de E est :

$$A^{\perp} = \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\} = \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, a \perp x \right\}$$

  C'est un SEV de E. Si $A \subset B$, on a alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- On dit que deux SEV F et G de E sont orthogonaux si

$$\forall (x, y) \in F \times G, \ < x, y >= 0 \qquad \text{ie } F \subset G^{\perp}$$

Orthogonalité

- On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $< x, y >= 0$. On note : $x \perp y$.
- $x \perp x$ si et seulement si $x = 0$.
- L'orthogonal d'une partie A de E est :

$$A^{\perp} = \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\} = \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, a \perp x \right\}$$

C'est un SEV de E. Si $A \subset B$, on a alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

- On dit que deux SEV F et G de E sont orthogonaux si

$$\forall (x, y) \in F \times G, \ < x, y >= 0 \qquad \text{ie } F \subset G^{\perp}$$

Orthogonalité

- On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $< x, y >= 0$. On note : $x \perp y$.
- $x \perp x$ si et seulement si $x = 0$.
- L'orthogonal d'une partie A de E est :

$$A^{\perp} = \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\} = \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, a \perp x \right\}$$

  C'est un SEV de E. Si $A \subset B$, on a alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- On dit que deux SEV F et G de E sont orthogonaux si

$$\forall (x, y) \in F \times G, \; < x, y >= 0 \qquad \text{ie } F \subset G^{\perp}$$

Orthogonalité

- On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $< x, y >= 0$. On note : $x \perp y$.
- $x \perp x$ si et seulement si $x = 0$.
- L'orthogonal d'une partie A de E est :

$$A^{\perp} = \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\} = \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, a \perp x \right\}$$

  C'est un SEV de E. Si $A \subset B$, on a alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- On dit que deux SEV F et G de E sont orthogonaux si

$$\forall (x, y) \in F \times G, \ < x, y >= 0 \qquad \text{ie } F \subset G^{\perp}$$

Famille orthogonale et orthonormale

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de E est dite orthogonale si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de E est dite orthonormale ou orthonormée si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux et si ils sont unitaires. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \|u_i\| = 1.$$

ou encore :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ < u_i, u_j >= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Famille orthogonale et orthonormale

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de E est dite orthogonale si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de E est dite orthonormale ou orthonormée si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux et si ils sont unitaires. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \|u_i\| = 1.$$

ou encore :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ < u_i, u_j >= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Famille orthogonale et orthonormale

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de E est dite orthogonale si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de E est dite orthonormale ou orthonormée si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux et si ils sont unitaires. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \|u_i\| = 1.$$

ou encore :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!],\ < u_i, u_j >= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Famille orthogonale et orthonormale

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de E est dite **orthogonale** si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de E est dite **orthonormale** ou **orthonormée** si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux et si ils sont unitaires. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!], \|u_i\| = 1.$$

ou encore :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!],\ < u_i, u_j >= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Famille orthogonale et orthonormale

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de E est dite **orthogonale** si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de E est dite **orthonormale** ou **orthonormée** si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux et si ils sont unitaires. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \|u_i\| = 1.$$

ou encore :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!],\ < u_i, u_j >= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Famille orthogonale et orthonormale

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de E est dite orthogonale si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

- Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de E est dite orthonormale ou orthonormée si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux et si ils sont unitaires. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \|u_i\| = 1.$$

ou encore :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ < u_i, u_j >= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple de la famille des cosinus / sinus

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et on munit cet espace du produit scalaire :

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

On note alors les fonctions :

$$f_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad f_k : x \mapsto \cos(kx) \qquad g_k : x \mapsto \sin(kx) \text{ pour } k \in [\![1, n]\!]$$

La famille :

$$\mathcal{F} = \left\{f_0, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n\right\}$$

est alors une famille orthonormale.

Famille orthogonale et orthonormale

- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.
- En particulier, toute famille orthonormale de E est libre.

On appelle **base orthonormale** (ou base orthonormée) de E toute base de E qui est une famille orthonormale.

Avantage de travailler avec une BON

$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ BON, $x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$ alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \; x_i = \langle x, u_i \rangle$$

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Famille orthogonale et orthonormale

- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.
- En particulier, toute famille orthonormale de E est libre.

On appelle base orthonormale (ou base orthonormée) de E toute base de E qui est une famille orthonormale.

Avantage de travailler avec une BON

$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ BON, $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ et $y = (y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{B}}$ alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \,,\ x_i = \langle x, u_i \rangle$$

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Famille orthogonale et orthonormale

- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.
- En particulier, toute famille orthonormale de E est libre.

On appelle **base orthonormale** (ou base orthonormée) de E toute base de E qui est une famille orthonormale.

Avantage de travailler avec une BON

$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ BON, $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ et $y = (y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{B}}$ alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \langle x, u_i \rangle$$

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Famille orthogonale et orthonormale

- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.
- En particulier, toute famille orthonormale de E est libre.

On appelle **base orthonormale** (ou base orthonormée) de E toute base de E qui est une famille orthonormale.

Avantage de travailler avec une BON

$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ BON, $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ et $y = (y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{B}}$ alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] ,\ x_i = \langle x, u_i \rangle$$

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Famille orthogonale et orthonormale

- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.
- En particulier, toute famille orthonormale de E est libre.

On appelle **base orthonormale** (ou base orthonormée) de E toute base de E qui est une famille orthonormale.

Avantage de travailler avec une BON

$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ BON, $x = (x_1, \ldots, x_n)_\mathcal{B}$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)_\mathcal{B}$ alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ x_i = \langle x, u_i \rangle$$

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E. Alors, on peut construire une famille orthonormale $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_p)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i).$$

On procède vecteur par vecteurs :

- on construit v_1 en divisant u_1 par sa norme,
- on construit v_2 en cherchant un vecteur $x = u_2 + \alpha v_1$ avec α tel que $< x, v_1 >= 0$, puis on divise par la norme.
- on construit v_i, à partir des précédent, en cherchant un vecteur

$$x = u_i + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \dots + \alpha_1 v_1 = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k v_k$$

  en choisissant les α_k pour que $< x, v_k >= 0$. On divise ensuite par la norme.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E. Alors, on peut construire une famille orthonormale $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_p)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i).$$

On procède vecteur par vecteurs :

- on construit v_1 en divisant u_1 par sa norme,
- on construit v_2 en cherchant un vecteur $x = u_2 + \alpha v_1$ avec α tel que $< x, v_1 >= 0$, puis on divise par la norme.
- on construit v_i, à partir des précédent, en cherchant un vecteur
$$x = u_i + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \cdots + \alpha_1 v_1 = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k v_k$$
en choisissant les α_k pour que $< x, v_k >= 0$. On divise ensuite par la norme.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E. Alors, on peut construire une famille orthonormale $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_p)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i).$$

On procède vecteur par vecteurs :

- on construit v_1 en divisant u_1 par sa norme,
- on construit v_2 en cherchant un vecteur $x = u_2 + \alpha v_1$ avec α tel que $< x, v_1 >= 0$, puis on divise par la norme.
- on construit v_i, à partir des précédent, en cherchant un vecteur
$$x = u_i + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \cdots + \alpha_1 v_1 = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k v_k$$
en choisissant les α_k pour que $< x, v_k >= 0$. On divise ensuite par la norme.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E. Alors, on peut construire une famille orthonormale $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_p)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i).$$

On procède vecteur par vecteurs :

- on construit v_1 en divisant u_1 par sa norme,
- on construit v_2 en cherchant un vecteur $x = u_2 + \alpha v_1$ avec α tel que $< x, v_1 >= 0$, puis on divise par la norme.
- on construit v_i, à partir des précédent, en cherchant un vecteur
$$x = u_i + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \cdots + \alpha_1 v_1 = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k v_k$$
en choisissant les α_k pour que $< x, v_k >= 0$. On divise ensuite par la norme.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E. Alors, on peut construire une famille orthonormale $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_p)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \ \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i).$$

On procède vecteur par vecteurs :

- on construit v_1 en divisant u_1 par sa norme,
- on construit v_2 en cherchant un vecteur $x = u_2 + \alpha v_1$ avec α tel que $< x, v_1 >= 0$, puis on divise par la norme.
- on construit v_i, à partir des précédent, en cherchant un vecteur
$$x = u_i + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \dots + \alpha_1 v_1 = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k v_k$$
 en choisissant les α_k pour que $< x, v_k >= 0$. On divise ensuite par la norme.

Exemple d'othonormalisation

On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

On cherche une base (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est orthonormée.

On a : $\|1\| = 1$ donc le premier vecteur 1 n'a pas besoin d'être changé : $P_0 = 1$.

Exemple d'othonormalisation

On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et le produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

On cherche une base (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est orthonormée.

Ensuite, on cherche un polynôme Q sous la forme $Q = X + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que : $\langle Q, 1\rangle = 0$, cela donne :

$$\int_0^1 (x+\alpha)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \alpha x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \alpha = 0$$

D'où $\alpha = -\frac{1}{2}$.

On pose donc $Q = X - \frac{1}{2}$, puis $P_1 = \frac{Q}{\|Q\|}$.

Exemple d'othonormalisation

On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

On cherche une base (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est orthonormée.

On calcule donc la norme de $Q = X - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q^2(x)dx &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{4-6+3}{12} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Ainsi, on pose $P_1 = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right)$.

Exemple d'othonormalisation

On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

On cherche une base (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est orthonormée.

On recommence ensuite pour P_2.
On commence par chercher un polynôme Q de la forme :
$Q = X^2 + \alpha P_1 + \beta P_0$ vérifiant :

$$\langle Q, P_0 \rangle = 0 \text{ et } \langle Q, P_1 \rangle = 0$$

Cela donne :

$$\left\langle X^2, P_0 \right\rangle + \beta = 0 \text{ donc } \beta = -\int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{3}$$

$$\left\langle X^2, P_1 \right\rangle + \alpha = 0 \text{ donc } \alpha = -\sqrt{12}\int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$

Conséquences théoriques :

- Dans un espace euclidien, il existe des bases orthonormales.
- Plus précisément, si on considère une base $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E, alors on peut construire une base orthonormale $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ vérifiant :
$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_p\right) = \mathrm{Vect}\left(v_1, \ldots, v_p\right).$$
- Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale : si les premiers vecteurs forment une famille orthonormale, il ne sont pas modifiés par le procédé d'orthonormalisation.

Conséquences théoriques :

- Dans un espace euclidien, il existe des bases orthonormales.
- Plus précisément, si on considère une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E, alors on peut construire une base orthonormale $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ vérifiant :
$$\forall p \in [\![1, n]\!]\,,\ \mathrm{Vect}\left(u_1, \dots, u_p\right) = \mathrm{Vect}\left(v_1, \dots, v_p\right).$$
- Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale : si les premiers vecteurs forment une famille orthonormale, il ne sont pas modifiés par le procédé d'orthonormalisation.

Conséquences théoriques :

- Dans un espace euclidien, il existe des bases orthonormales.
- Plus précisément, si on considère une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E, alors on peut construire une base orthonormale $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ vérifiant :
$$\forall p \in [\![1, n]\!], \ \mathrm{Vect}\left(u_1, \dots, u_p\right) = \mathrm{Vect}\left(v_1, \dots, v_p\right).$$
- Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale : si les premiers vecteurs forment une famille orthonormale, il ne sont pas modifiés par le procédé d'orthonormalisation.

Supplémentaire orthogonal

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si F est un SEV de E alors $F^\perp$ est un SEV et F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
  Le SEV $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.
- $\dim(F) + \dim\left(F^\perp\right) = \dim(E)$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$

Soit E un espace euclidien de dimension finie n et $p \in [\![0, n]\!]$.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E, alors on construit :
  $$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \qquad G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$$
  Alors $G = F^\perp$ et $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$ (somme orthogonale).
- Soit F un SEV de E on construit les familles suivantes :
  $$(e_1, \ldots, e_p) \text{ base orthonormale de } F$$
  $$(e_{p+1}, \ldots, e_n) \text{ base orthonormale de } F^\perp$$
  Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E.

Supplémentaire orthogonal

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si F est un SEV de E alors $F^\perp$ est un SEV et F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
  Le SEV $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.
- $\dim(F) + \dim\left(F^\perp\right) = \dim(E)$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$

Soit E un espace euclidien de dimension finie n et $p \in [\![0, n]\!]$.

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E, alors on construit :
  $$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \qquad G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$$
  Alors $G = F^\perp$ et $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$ (somme orthogonale).
- Soit F un SEV de E on construit les familles suivantes :
  $$(e_1, \dots, e_p) \text{ base orthonormale de } F$$
  $$(e_{p+1}, \dots, e_n) \text{ base orthonormale de } F^\perp$$
  Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E.

Supplémentaire orthogonal

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si F est un SEV de E alors $F^\perp$ est un SEV et F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
  Le SEV $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.
- $\dim(F) + \dim\left(F^\perp\right) = \dim(E)$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$

Soit E un espace euclidien de dimension finie n et $p \in [\![0, n]\!]$.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E, alors on construit :
  $$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \qquad G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$$
  Alors $G = F^\perp$ et $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$ (somme orthogonale).
- Soit F un SEV de E on construit les familles suivantes :
  $$(e_1, \ldots, e_p) \text{ base orthonormale de } F$$
  $$(e_{p+1}, \ldots, e_n) \text{ base orthonormale de } F^\perp$$
  Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E.

Supplémentaire orthogonal

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si F est un SEV de E alors $F^\perp$ est un SEV et F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
  Le SEV $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.
- $\dim(F) + \dim\left(F^\perp\right) = \dim(E)$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$

Soit E un espace euclidien de dimension finie n et $p \in [\![0, n]\!]$.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E, alors on construit :
  $$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \qquad G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$$
  Alors $G = F^\perp$ et $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$ (somme orthogonale).
- Soit F un SEV de E on construit les familles suivantes :
  $$(e_1, \ldots, e_p) \text{ base orthonormale de } F$$
  $$(e_{p+1}, \ldots, e_n) \text{ base orthonormale de } F^\perp$$
  Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E.

Supplémentaire orthogonal

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si F est un SEV de E alors $F^{\perp}$ est un SEV et F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.
  Le SEV $F^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de F.
- $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$

Soit E un espace euclidien de dimension finie n et $p \in [\![0, n]\!]$.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E, alors on construit :
  $$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \qquad G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$$
  Alors $G = F^{\perp}$ et $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$ (somme orthogonale).
- Soit F un SEV de E on construit les familles suivantes :
  $$(e_1, \ldots, e_p) \text{ base orthonormale de } F$$
  $$(e_{p+1}, \ldots, e_n) \text{ base orthonormale de } F^{\perp}$$
  Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E.

Supplémentaire orthogonal

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si F est un SEV de E alors $F^{\perp}$ est un SEV et F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.
  Le SEV $F^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de F.
- $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$

Soit E un espace euclidien de dimension finie n et $p \in [\![0, n]\!]$.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E, alors on construit :
  $$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \qquad G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$$
  Alors $G = F^{\perp}$ et $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$ (somme orthogonale).
- Soit F un SEV de E on construit les familles suivantes :
  $$(e_1, \ldots, e_p) \text{ base orthonormale de } F$$
  $$(e_{p+1}, \ldots, e_n) \text{ base orthonormale de } F^{\perp}$$
  Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E.

Projection orthogonale

- On appelle **projection orthogonale** sur F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
- L'image d'un vecteur x de E par cette projection est appelée le **projeté orthogonal** de x sur F.
- C'est l'élément de F le plus proche de x : $d(x, F) = d(x, P_F(x)) = \inf_{y \in F} d(x, y)$.
- autrement dit :

$$\forall y \in F,\ d(x, y) \geqslant d(x, P_F(x))$$

$$\text{avec égalité si et seulement si } y = P_F(x).$$

- Le calcul du projeté orthogonal permet ainsi d'obtenir des valeurs de borne inférieure dont l'existence n'est que théorique.

Projection orthogonale

- On appelle **projection orthogonale** sur F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
- L'image d'un vecteur x de E par cette projection est appelée le **projeté orthogonal** de x sur F.
- C'est l'élément de F le plus proche de x : $d(x, F) = d(x, P_F(x)) = \inf_{y \in F} d(x, y)$.
- autrement dit :

$$\forall y \in F,\ d(x,y) \geqslant d(x, P_F(x))$$

avec égalité si et seulement si $y = P_F(x)$.

- Le calcul du projeté orthogonal permet ainsi d'obtenir des valeurs de borne inférieure dont l'existence n'est que théorique.

Projection orthogonale

- On appelle **projection orthogonale** sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
- L'image d'un vecteur x de E par cette projection est appelée le **projeté orthogonal** de x sur F.
- C'est l'élément de F le plus proche de x : $d(x, F) = d(x, P_F(x)) = \inf_{y \in F} d(x, y)$.
- autrement dit :

$$\forall y \in F, \ d(x, y) \geqslant d(x, P_F(x))$$

avec égalité si et seulement si $y = P_F(x)$.

- Le calcul du projeté orthogonal permet ainsi d'obtenir des valeurs de borne inférieure dont l'existence n'est que théorique.

Projection orthogonale

- On appelle **projection orthogonale** sur F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
- L'image d'un vecteur x de E par cette projection est appelée le **projeté orthogonal** de x sur F.
- C'est l'élément de F le plus proche de x :
  $d(x, F) = d(x, P_F(x)) = \inf_{y \in F} d(x, y)$.
- autrement dit :
  $$\forall y \in F,\ d(x, y) \geqslant d(x, P_F(x))$$
  avec égalité si et seulement si $y = P_F(x)$.

- Le calcul du projeté orthogonal permet ainsi d'obtenir des valeurs de borne inférieure dont l'existence n'est que théorique.

Projection orthogonale

- On appelle **projection orthogonale** sur F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
- L'image d'un vecteur x de E par cette projection est appelée le **projeté orthogonal** de x sur F.
- C'est l'élément de F le plus proche de x :
  $d(x, F) = d(x, P_F(x)) = \inf_{y \in F} d(x, y)$.
- autrement dit :

$$\forall y \in F,\ d(x, y) \geqslant d(x, P_F(x))$$

avec égalité si et seulement si $y = P_F(x)$.

- Le calcul du projeté orthogonal permet ainsi d'obtenir des valeurs de borne inférieure dont l'existence n'est que théorique.

Calcul du projeté orthogonal

On a deux moyens de calculer le projeté orthogonal :

- Si on connaît une BON $(u_1, \ldots, u_p)$ de F, alors :
$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < u_i, x > u_i.$$
- Sinon on résout un système d'équations : si $\mathcal{G} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une famille génératrice de F.
  Alors $P_F(x)$ est l'unique vecteur y vérifiant :
$$\begin{cases} y \in F, & \text{puisque le projeté sur } F \text{ est un vecteur de } F \\ \forall i \in [\![1, n]\!], & < x - y, e_i >= 0 \end{cases}$$

Calcul du projeté orthogonal

On a deux moyens de calculer le projeté orthogonal :

- Si on connaît une BON $(u_1, \ldots, u_p)$ de F, alors :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < u_i, x > u_i.$$

- Sinon on résout un système d'équations : si $\mathcal{G} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une famille génératrice de F.

  Alors $P_F(x)$ est l'unique vecteur y vérifiant :

$$\begin{cases} y \in F, & \text{puisque le projeté sur } F \text{ est un vecteur de } F \\ \forall i \in [\![1, n]\!], & < x - y, e_i >= 0 \end{cases}$$

Calcul du projeté orthogonal

On a deux moyens de calculer le projeté orthogonal :

- Si on connaît une BON $(u_1, \dots, u_p)$ de F, alors :
$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < u_i, x > u_i.$$
- Sinon on résout un système d'équations : si $\mathcal{G} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une famille génératrice de F.
  Alors $P_F(x)$ est l'unique vecteur y vérifiant :
$$\begin{cases} y \in F, & \text{puisque le projeté sur } F \text{ est un vecteur de } F \\ \forall i \in [\![1, n]\!], & < x - y, e_i >= 0 \end{cases}$$

Cas de la dimension infinie

Soit E un espace pré-hilbertien de dimension infinie et F un SEV de E de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de F. Soit x un élément de E

- On définit alors le projeté de x sur F par $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.
- On a : $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.
  De plus : $P_F(x)$ est toujours le point de F le plus proche de x.
- On peut donc toujours projeter sur un espace de dimension finie.

Soit E un espace pré-hilbertien et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille finie orthonormale de E. Alors pour $x \in E$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (\langle x, e_i \rangle)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Cas de la dimension infinie

Soit E un espace pré-hilbertien de dimension infinie et F un SEV de E de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de F. l'existence de cette BON est donnée par le procédé d'orthonormalisation. Soit x un élément de E

- On définit alors le projeté de x sur F par $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.
- On a : $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.
  De plus : $P_F(x)$ est toujours le point de F le plus proche de x.
- On peut donc toujours projeter sur un espace de dimension finie.

Soit E un espace pré-hilbertien et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille finie orthonormale de E. Alors pour $x \in E$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (\langle x, e_i \rangle)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Cas de la dimension infinie

Soit E un espace pré-hilbertien de dimension infinie et F un SEV de E de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de F. Soit x un élément de E

- On définit alors le projeté de x sur F par $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.
- On a : $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.
  De plus : $P_F(x)$ est toujours le point de F le plus proche de x.
- On peut donc toujours projeter sur un espace de dimension finie.

Soit E un espace pré-hilbertien et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille finie orthonormale de E. Alors pour $x \in E$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (\langle x, e_i \rangle)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Cas de la dimension infinie

Soit E un espace pré-hilbertien de dimension infinie et F un SEV de E de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de F. Soit x un élément de E

- On définit alors le projeté de x sur F par $P_F(x) = \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i$.
- On a : $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$.
  De plus : $P_F(x)$ est toujours le point de F le plus proche de x.
- On peut donc toujours projeter sur un espace de dimension finie.

Soit E un espace pré-hilbertien et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille finie orthonormale de E. Alors pour $x \in E$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (\langle x, e_i \rangle)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Cas de la dimension infinie

Soit E un espace pré-hilbertien de dimension infinie et F un SEV de E de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de F. Soit x un élément de E

- On définit alors le projeté de x sur F par $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.
- On a : $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$. car
  $\forall i \in [\![1, n]\!], \langle x - P_F(x), e_i \rangle = 0$.
  De plus : $P_F(x)$ est toujours le point de F le plus proche de x.
- On peut donc toujours projeter sur un espace de dimension finie.

Soit E un espace pré-hilbertien et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille finie orthonormale de E. Alors pour $x \in E$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (\langle x, e_i \rangle)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Cas de la dimension infinie

Soit E un espace pré-hilbertien de dimension infinie et F un SEV de E de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de F. Soit x un élément de E

- On définit alors le projeté de x sur F par $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.
- On a : $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.
  De plus : $P_F(x)$ est toujours le point de F le plus proche de x. Même démonstration que dans le cas où E est de dimension finie.
- On peut donc toujours projeter sur un espace de dimension finie.

Soit E un espace pré-hilbertien et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille finie orthonormale de E. Alors pour $x \in E$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (\langle x, e_i \rangle)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Cas de la dimension infinie

Soit E un espace pré-hilbertien de dimension infinie et F un SEV de E de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de F. Soit x un élément de E

- On définit alors le projeté de x sur F par $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.
- On a : $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.
  De plus : $P_F(x)$ est toujours le point de F le plus proche de x.
- On peut donc toujours projeter sur un espace de dimension finie.

Soit E un espace pré-hilbertien et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille finie orthonormale de E. Alors pour $x \in E$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (\langle x, e_i \rangle)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Cas de la dimension infinie

Soit E un espace pré-hilbertien de dimension infinie et F un SEV de E de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de F. Soit x un élément de E

- On définit alors le projeté de x sur F par $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.
- On a : $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.
  De plus : $P_F(x)$ est toujours le point de F le plus proche de x.
- On peut donc toujours projeter sur un espace de dimension finie.

Soit E un espace pré-hilbertien et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille finie orthonormale de E. Alors pour $x \in E$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (\langle x, e_i \rangle)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Cas de la dimension infinie

Soit E un espace pré-hilbertien de dimension infinie et F un SEV de E de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de F. Soit x un élément de E

- On définit alors le projeté de x sur F par $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.
- On a : $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.
  De plus : $P_F(x)$ est toujours le point de F le plus proche de x.
- On peut donc toujours projeter sur un espace de dimension finie.

Soit E un espace pré-hilbertien et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille finie orthonormale de E. Alors pour $x \in E$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (\langle x, e_i \rangle)^2 \leqslant \|x\|^2$$

`on applique Pythagore sur` $x = P_F(x) + (x - P_f(x))$

Exemple de calcul de projeté orthogonal

Calculer le projeté de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

Exemple de calcul de projeté orthogonal

Calculer le projeté de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

On a calculé une BON :

$$P_0 = 1 \qquad P_1 = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right) \qquad P_2 = 6\sqrt{5}X^2 - 6\sqrt{5}X + \sqrt{5}$$

On en déduit le projeté par calcul direct :

$$P_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \left\langle X^3, P_0\right\rangle P_0 + \left\langle X^3, P_1\right\rangle P_1 + \left\langle X^3, P_2\right\rangle P_2$$

Après calculs :

$$P_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \frac{1}{4} + 12\frac{3}{40}\left(X - \frac{1}{2}\right) + \frac{30}{20}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)$$

Exemple de calcul de projeté orthogonal

Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \Big(x - a\cos x - b\sin x\Big)^2 dx$$

Exemple de calcul de projeté orthogonal

Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \Big(x - a\cos x - b\sin x\Big)^2 dx$$

C'est la meilleur approximation de x par une fonction du type $a\cos x + b\sin x$.

Exemple de calcul de projeté orthogonal

Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \left(x - a\cos x - b\sin x\right)^2 dx$$

On doit chercher a et b, tels que :

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\left(x - a\cos(x) - b\sin(x)\right) dx = 0$$

$$\text{et} \int_0^{2\pi} \sin(x)\left(x - a\cos(x) - b\sin(x)\right) dx = 0$$

Pour obtenir un système, on calcule rapidement :

$$\int_0^{2\pi} x\cos(x)dx = 0 \quad \int_0^{2\pi} x\sin(x)dx = -2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx = \pi \quad \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin(x)dx = 0 \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \pi$$

le projeté est $x \longmapsto -2\sin(x)$.

Exemple de calcul de projeté orthogonal

- Montrer que
$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
- Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exemple de calcul de projeté orthogonal

- Montrer que
$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
- Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exemple de calcul de projeté orthogonal

- Montrer que
$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire. Prenons la base canonique et calculons l'orthonormalisation de Gramm-schmidt :
  - 1 est déjà normé, on pose donc $P_1 = 1$.
  - $< X, 1 >= 1$, on pose donc $Q = X - 1$, qui est normé donc $P_2 = X - 1$.
  - $< X^2, 1 >= 1$, $< X^2, X - 1 >= 2$ donc $Q = X^2 - 2(X - 1) - 1 = (X - 1)^2$, sa norme est $\|Q\|^2 = 4$, ainsi : $P_3 = \frac{1}{2}(X - 1)^2$
- Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exemple de calcul de projeté orthogonal

- Montrer que

$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

  définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
- Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exemple de calcul de projeté orthogonal

- Montrer que
$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
- Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

$$P_{\mathbb{R}_1[X]}\left(X^2\right) = < X^2, 1 > 1 + < X^2, X-1 > (X-1) = 2X - 1$$