Rappels de probabilités

univers fini

Sylvain Pelletier

LMSC - PSI

Définitions

Une probabilité p sur l'univers fini Ω est une application $p : P(\Omega) \to [0,1]$, qui vérifie :

$$p(\emptyset) = 0 \quad p(\Omega) = 1 \qquad \text{si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Les événements sont les éléments de $p(\Omega)$, `i.e.` les parties de Ω.
Un système complet d'événements est une liste d'événements qui forment une partition de Ω :

$$\left(A_i\right)_{i=1\dots n} \text{ est un SCE si } \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ union disjointe}$$

Définitions

Une probabilité p sur l'univers fini Ω est une application $p : P(\Omega) \to [0,1]$, qui vérifie :

$$p(\emptyset) = 0 \quad p(\Omega) = 1 \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$
$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Les événements sont les éléments de $p(\Omega)$, `i.e.` les parties de Ω.
Un système complet d'événements est une liste d'événements qui forment une partition de Ω :

$$\left(A_i\right)_{i=1\dots n} \text{ est un SCE si } \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ union disjointe}$$

Détermination d'une probabilité par les images des singletons

- Une probabilité p est entièrement déterminée par les $\mathrm{Card}(\Omega)$ valeurs donnant la probabilité des singletons $p\left(\left\{w_i\right\}\right)$ pour $w_i \in \Omega$.
- On a de plus :

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(\left\{w_i\right\}\right) = 1 \text{ avec } n = \mathrm{Card}(\Omega).$$

- Utile lorsque la probabilité dépends d'un paramètre à déterminer.
- Exemple : un dé où $p(D = i)$ est proportionnel à i.
- Permet de définir la probabilité uniforme comme l'unique probabilité telle que chaque singleton a la probabilité $\frac{1}{n}$.

Détermination d'une probabilité par les images des singletons

- Une probabilité p est entièrement déterminée par les $\mathrm{Card}(\Omega)$ valeurs donnant la probabilité des singletons $p\left(\left\{w_i\right\}\right)$ pour $w_i \in \Omega$.
- On a de plus :

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(\left\{w_i\right\}\right) = 1 \text{ avec } n = \mathrm{Card}(\Omega).$$

- Utile lorsque la probabilité dépends d'un paramètre à déterminer.
- Exemple : un dé où $p(D = i)$ est proportionnel à i.
- Permet de définir la probabilité uniforme comme l'unique probabilité telle que chaque singleton a la probabilité $\frac{1}{n}$.

Détermination d'une probabilité par les images des singletons

- Une probabilité p est entièrement déterminée par les $\text{Card}(\Omega)$ valeurs donnant la probabilité des singletons $p\left(\left\{w_i\right\}\right)$ pour $w_i \in \Omega$.
- On a de plus :

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(\left\{w_i\right\}\right) = 1 \text{ avec } n = \text{Card}(\Omega).$$

- Utile lorsque la probabilité dépends d'un paramètre à déterminer.
- Exemple : un dé où $p(D = i)$ est proportionnel à i.
- Permet de définir la probabilité uniforme comme l'unique probabilité telle que chaque singleton a la probabilité $\frac{1}{n}$.

Détermination d'une probabilité par les images des singletons

- Une probabilité p est entièrement déterminée par les $\text{Card}(\Omega)$ valeurs donnant la probabilité des singletons $p\left(\left\{w_i\right\}\right)$ pour $w_i \in \Omega$.
- On a de plus :

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(\left\{w_i\right\}\right) = 1 \text{ avec } n = \text{Card}(\Omega).$$

- Utile lorsque la probabilité dépends d'un paramètre à déterminer.
- Exemple : un dé où $p(D = i)$ est proportionnel à i.
- Permet de définir la probabilité uniforme comme l'unique probabilité telle que chaque singleton a la probabilité $\frac{1}{n}$.

Détermination d'une probabilité par les images des singletons

- Une probabilité p est entièrement déterminée par les $\text{Card}(\Omega)$ valeurs donnant la probabilité des singletons $p\left(\left\{w_i\right\}\right)$ pour $w_i \in \Omega$.
- On a de plus :

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(\left\{w_i\right\}\right) = 1 \text{ avec } n = \text{Card}(\Omega).$$

- Utile lorsque la probabilité dépends d'un paramètre à déterminer.
- Exemple : un dé où $p(D = i)$ est proportionnel à i.
- Permet de définir la probabilité uniforme comme l'unique probabilité telle que chaque singleton a la probabilité $\frac{1}{n}$.

Probabilités conditionnelles

La probabilité de B sachant A est

$$p(B|A) = p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \text{ avec } p(A) \neq 0.$$

On peut écrire :

$$p(A \cap B) = p(A) p_A(B).$$

- La probabilité conditionnelle sachant A est une probabilité et vérifie donc toutes les propriétés d'une probabilité.
  Par exemple : $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.
- Souvent A est chronologiquement avant B si ce n'est pas le cas, c'est la formule de Bayes !

Probabilités conditionnelles

La probabilité de B sachant A est

$$p(B|A) = p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \text{ avec } p(A) \neq 0.$$

On peut écrire :

$$p(A \cap B) = p(A)p_A(B).$$

- La probabilité conditionnelle sachant A est une probabilité et vérifie donc toutes les propriétés d'une probabilité.
  Par exemple : $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.
- Souvent A est chronologiquement avant B si ce n'est pas le cas, c'est la formule de Bayes !

Probabilités conditionnelles

La probabilité de B sachant A est

$$p(B|A) = p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \text{ avec } p(A) \neq 0.$$

On peut écrire :

$$p(A \cap B) = p(A)p_A(B).$$

- La probabilité conditionnelle sachant A est une probabilité et vérifie donc toutes les propriétés d'une probabilité.
  Par exemple : $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.
- Souvent A est chronologiquement avant B si ce n'est pas le cas, c'est la formule de Bayes !

Probabilités composées

(A_i) une suite d'événements vérifiant : $p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1) p_{A_1}(A_2) p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots p_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

- L'hypothèse est souvent vérifiée sous la forme : « la modélisation assure que ... »
- Souvent A_i concerne chronologiquement l'étape i.
- Utile pour considérer la probabilités d'une suite de tirage.

Exemple : loi de la première blanche dans un tirage sans remise.

Probabilités composées

(A_i) une suite d'événements vérifiant : $p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1) p_{A_1}(A_2) p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots p_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

- L'hypothèse est souvent vérifiée sous la forme : « la modélisation assure que ... »
- Souvent A_i concerne chronologiquement l'étape i.
- Utile pour considérer la probabilités d'une suite de tirage.

Exemple : loi de la première blanche dans un tirage sans remise.

Probabilités composées

(A_i) une suite d'événements vérifiant : $p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) p_{A_1}(A_2) p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots p_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

- L'hypothèse est souvent vérifiée sous la forme : « la modélisation assure que ... »
- Souvent A_i concerne chronologiquement l'étape i.
- Utile pour considérer la probabilités d'une suite de tirage.

Exemple : loi de la première blanche dans un tirage sans remise.

Probabilités composées

(A_i) une suite d'événements vérifiant : $p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1) p_{A_1}(A_2) p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots p_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

- L'hypothèse est souvent vérifiée sous la forme : « la modélisation assure que ... »
- Souvent A_i concerne chronologiquement l'étape i.
- Utile pour considérer la probabilités d'une suite de tirage.

Exemple : loi de la première blanche dans un tirage sans remise.

Probabilités composées

(A_i) une suite d'événements vérifiant : $p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \\ p(A_1) p_{A_1}(A_2) p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots p_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

- L'hypothèse est souvent vérifiée sous la forme : « la modélisation assure que ... »
- Souvent A_i concerne chronologiquement l'étape i.
- Utile pour considérer la probabilités d'une suite de tirage.

Exemple : loi de la première blanche dans un tirage sans remise.

Probabilités composées

(A_i) une suite d'événements vérifiant : $p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1) p_{A_1}(A_2) p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots p_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

- L'hypothèse est souvent vérifiée sous la forme : « la modélisation assure que ... »
- Souvent A_i concerne chronologiquement l'étape i.
- Utile pour considérer la probabilités d'une suite de tirage.

Exemple : loi de la première blanche dans un tirage sans remise.

Probabilités totales

Soit B un événements, et $\left(A_i\right)$ un SCE. On a alors :

$$p(B)=\sum_{i=1}^{m} p(A_i\cap B)=\sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i).$$

- Sans doute la formule la plus utile du cours de probabilité
- On découpe l'événement B selon le SCE $\left(A_i\right)$.
  Souvent B concerne la deuxième étape, et (A_i) est l'ensemble des résultats possibles d'une première étape.
- Si on veut déterminer la loi de Y à partir de la loi du couple (X, Y), on écrit :

$$\forall j \in Y(\Omega),\ p(Y=j)=\sum_{k=1}^{n} p(Y=j\cap X=k).$$

Probabilités totales

Soit B un événements, et $\left(A_i\right)$ un SCE. On a alors :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{m} p(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B) p(A_i).$$

- Sans doute la formule la plus utile du cours de probabilité
- On découpe l'événement B selon le SCE $\left(A_i\right)$.

  Souvent B concerne la deuxième étape, et (A_i) est l'ensemble des résultats possibles d'une première étape.
- Si on veut déterminer la loi de Y à partir de la loi du couple (X, Y), on écrit :

$$\forall j \in Y(\Omega),\ p(Y = j) = \sum_{k=1}^{n} p(Y = j \cap X = k).$$

Probabilités totales

Soit B un événements, et $\left(A_i\right)$ un SCE. On a alors :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{m} p(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i).$$

- Sans doute la formule la plus utile du cours de probabilité
- On découpe l'événement B selon le SCE $\left(A_i\right)$.
  Souvent B concerne la deuxième étape, et (A_i) est l'ensemble des résultats possibles d'une première étape.
- Si on veut déterminer la loi de Y à partir de la loi du couple (X, Y), on écrit :

$$\forall j \in Y(\Omega),\ p(Y = j) = \sum_{k=1}^{n} p(Y = j \cap X = k).$$

Probabilités totales

Soit B un événements, et $\left(A_i\right)$ un SCE. On a alors :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{m} p(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i).$$

- Sans doute la formule la plus utile du cours de probabilité
- On découpe l'événement B selon le SCE $\left(A_i\right)$.
  Souvent B concerne la deuxième étape, et (A_i) est l'ensemble des résultats possibles d'une première étape.
- Si on veut déterminer la loi de Y à partir de la loi du couple (X, Y), on écrit :

$$\forall j \in Y(\Omega),\ p(Y = j) = \sum_{k=1}^{n} p(Y = j \cap X = k).$$

Probabilités totales

Soit B un événements, et $\left(A_i\right)$ un SCE. On a alors :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{m} p(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i).$$

- Sans doute la formule la plus utile du cours de probabilité
- On découpe l'événement B selon le SCE $\left(A_i\right)$.
  Souvent B concerne la deuxième étape, et (A_i) est l'ensemble des résultats possibles d'une première étape.
- Si on veut déterminer la loi de Y à partir de la loi du couple (X, Y), on écrit :

$$\forall j \in Y(\Omega),\ p(Y = j) = \sum_{k=1}^{n} p(Y = j \cap X = k).$$

Formule de Bayes

- Soit (A_i) un système complet d'événements et B un autre événement, alors :

$$\forall j \in [\![1, m]\!]\,,\ p_B(A_j) = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{p(B)} = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{\sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i)}$$

- En particulier soit A un événement avec $0 < p(A) < 1$ et B un autre événement, alors

$$p_B(A) = \frac{p_A(B)p(A)}{p(B)} = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\overline{A}}(B)p(\overline{A})}$$

- Formule des causes : on constate l'événement B de la deuxième étape et on se demande quel est la probabilité que la première étape ait donné A.

Formule de Bayes

- Soit (A_i) un système complet d'événements et B un autre événement, alors :

$$\forall j \in [\![1, m]\!]\,,\ p_B(A_j) = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{p(B)} = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i)}$$

- En particulier soit A un événement avec $0 < p(A) < 1$ et B un autre événement, alors

$$p_B(A) = \frac{p_A(B)p(A)}{p(B)} = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\overline{A}}(B)p(\overline{A})}$$

- Formule des causes : on constate l'événement B de la deuxième étape et on se demande quel est la probabilité que la première étape ait donné A.

Formule de Bayes

- Soit (A_i) un système complet d'événements et B un autre événement, alors :

$$\forall j \in [\![1, m]\!]\,,\ p_B(A_j) = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{p(B)} = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{\sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i)}$$

- En particulier soit A un événement avec $0 < p(A) < 1$ et B un autre événement, alors

$$p_B(A) = \frac{p_A(B)p(A)}{p(B)} = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\overline{A}}(B)p(\overline{A})}$$

- Formule des causes : on constate l'événement B de la deuxième étape et on se demande quel est la probabilité que la première étape ait donné A.

Formule de Bayes

- Soit (A_i) un système complet d'événements et B un autre événement, alors :

$$\forall j \in [\![1, m]\!]\,,\ p_B(A_j) = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{p(B)} = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i)}$$

- En particulier soit A un événement avec $0 < p(A) < 1$ et B un autre événement, alors

$$p_B(A) = \frac{p_A(B)p(A)}{p(B)} = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\overline{A}}(B)p(\overline{A})}$$

- Formule des causes : on constate l'événement B de la deuxième étape et on se demande quel est la probabilité que la première étape ait donné A.

Exemple fondamental

- On a un dé et 6 urnes, l'urne numéro i contient i B et $6 - i$ N. Si $D = i$ on tire plusieurs fois dans l'urne i avec remise.

- $p(B_1)$?
- B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
- Sachant B_1 quelle est la probabilité que le dé a donné i ?

Exemple fondamental

- On a un dé et 6 urnes, l'urne numéro i contient i B et $6-i$ N. Si $D=i$ on tire plusieurs fois dans l'urne i avec remise.

- $p(B_1)$?
- B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
- Sachant B_1 quelle est la probabilité que le dé a donné i ?

Exemple fondamental

- On a un dé et 6 urnes, l'urne numéro i contient i B et $6-i$ N. Si $D=i$ on tire plusieurs fois dans l'urne i avec remise.

- $p(B_1)$? Expérience aléatoire en deux étapes : formule des probabilités totales sur la première étape !
- B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
- Sachant B_1 quelle est la probabilité que le dé a donné i ?

Exemple fondamental

- On a un dé et 6 urnes, l'urne numéro i contient i B et $6-i$ N. Si $D=i$ on tire plusieurs fois dans l'urne i avec remise.

- $p(B_1)$? Expérience aléatoire en deux étapes : formule des probabilités totales sur la première étape !
- B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
- Sachant B_1 quelle est la probabilité que le dé a donné i ?

Exemple fondamental

- On a un dé et 6 urnes, l'urne numéro i contient i B et $6-i$ N. Si $D=i$ on tire plusieurs fois dans l'urne i avec remise.

- $p(B_1)$? Expérience aléatoire en deux étapes : formule des probabilités totales sur la première étape !
- B_1 et B_2 sont-ils indépendants ? NON ! Même si les tirages se font avec remise, le résultat du première tirage donne de l'information sur le numéro du dé et donc sur le deuxième tirage
- Sachant B_1 quelle est la probabilité que le dé a donné i ?

Exemple fondamental

- On a un dé et 6 urnes, l'urne numéro i contient i B et $6 - i$ N. Si $D = i$ on tire plusieurs fois dans l'urne i avec remise.

- $p(B_1)$? Expérience aléatoire en deux étapes : formule des probabilités totales sur la première étape !
- B_1 et B_2 sont-ils indépendants ? NON ! Même si les tirages se font avec remise, le résultat du première tirage donne de l'information sur le numéro du dé et donc sur le deuxième tirage
- Sachant B_1 quelle est la probabilité que le dé a donné i ?

Exemple fondamental

- On a un dé et 6 urnes, l'urne numéro i contient i B et $6 - i$ N. Si $D = i$ on tire plusieurs fois dans l'urne i avec remise.

- $p(B_1)$? Expérience aléatoire en deux étapes : formule des probabilités totales sur la première étape !
- B_1 et B_2 sont-ils indépendants ? NON ! Même si les tirages se font avec remise, le résultat du première tirage donne de l'information sur le numéro du dé et donc sur le deuxième tirage
- Sachant B_1 quelle est la probabilité que le dé a donné i ? C'est la formule de Bayes !

Loi d'une somme de VARs

- On considère $X \sim \mathcal{U}(n)$ et $Y \sim \mathcal{U}(n)$ indépendantes. Loi de $Z = X + Y$?

Bien retenir la méthode

- Les probabilités totales.
- Exprimer $(X + Y = k \cap X = l)$ par $(X = l \cap Y = k - l)$
- Identifier les valeurs de l telles que $(X = l \cap Y = k - l)$ est impossible. Les enlever de la somme.
- Conditionner si besoin pour se ramener à $p(X = l)p_{X=l}(Y = k - l)$
- Simplifier la somme.

Loi d'une somme de VARs

- On considère $X \sim \mathcal{U}(n)$ et $Y \sim \mathcal{U}(n)$ indépendantes. Loi de $Z = X + Y$?

Bien retenir la méthode

- Les probabilités totales.
- Exprimer $(X + Y = k \cap X = l)$ par $(X = l \cap Y = k - l)$
- Identifier les valeurs de l telles que $(X = l \cap Y = k - l)$ est impossible. Les enlever de la somme.
- Conditionner si besoin pour se ramener à $p(X = l)p_{X=l}(Y = k - l)$
- Simplifier la somme.

Loi d'une somme de VARs

- On considère $X \sim \mathcal{U}(n)$ et $Y \sim \mathcal{U}(n)$ indépendantes. Loi de $Z = X + Y$?

Bien retenir la méthode

- Les probabilités totales.
- Exprimer $(X + Y = k \cap X = l)$ par $(X = l \cap Y = k - l)$
- Identifier les valeurs de l telles que $(X = l \cap Y = k - l)$ est impossible. Les enlever de la somme.
- Conditionner si besoin pour se ramener à $p(X = l)p_{X=l}(Y = k - l)$
- Simplifier la somme.

Loi d'une somme de VARs

- On considère $X \sim \mathcal{U}(n)$ et $Y \sim \mathcal{U}(n)$ indépendantes. Loi de $Z = X + Y$?

Bien retenir la méthode

- Les probabilités totales.
- Exprimer $(X + Y = k \cap X = l)$ par $(X = l \cap Y = k - l)$
- Identifier les valeurs de l telles que $(X = l \cap Y = k - l)$ est impossible. Les enlever de la somme.
- Conditionner si besoin pour se ramener à $p(X = l)p_{X=l}(Y = k - l)$
- Simplifier la somme.

Loi d'une somme de VARs

- On considère $X \sim \mathcal{U}(n)$ et $Y \sim \mathcal{U}(n)$ indépendantes. Loi de $Z = X + Y$?

Bien retenir la méthode

- Les probabilités totales.
- Exprimer $(X + Y = k \cap X = l)$ par $(X = l \cap Y = k - l)$
- Identifier les valeurs de l telles que $(X = l \cap Y = k - l)$ est impossible. Les enlever de la somme.
- Conditionner si besoin pour se ramener à $p(X = l)p_{X=l}(Y = k - l)$
- Simplifier la somme.

Loi d'une somme de VARs

- On considère $X \sim \mathcal{U}(n)$ et $Y \sim \mathcal{U}(n)$ indépendantes. Loi de $Z = X + Y$?

Bien retenir la méthode

- Les probabilités totales.
- Exprimer $(X + Y = k \cap X = l)$ par $(X = l \cap Y = k - l)$
- Identifier les valeurs de l telles que $(X = l \cap Y = k - l)$ est impossible. Les enlever de la somme.
- Conditionner si besoin pour se ramener à $p(X = l)p_{X=l}(Y = k - l)$
- Simplifier la somme.

Loi d'une somme de VARs

- On considère $X \sim \mathcal{U}(n)$ et $Y \sim \mathcal{U}(n)$ indépendantes. Loi de $Z = X + Y$?

Bien retenir la méthode

- Les probabilités totales.
- Exprimer $(X + Y = k \cap X = l)$ par $(X = l \cap Y = k - l)$
- Identifier les valeurs de l telles que $(X = l \cap Y = k - l)$ est impossible. Les enlever de la somme.
- Conditionner si besoin pour se ramener à $p(X = l)p_{X=l}(Y = k - l)$
- Simplifier la somme.

Variables aléatoires

- Une VAR est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- L'univers image $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs possibles de X.
- La famille d'événements $\Big((X = k)\Big)_{k \in X(\Omega)}$ forme un SCE.

- Mesure le gain d'une expérience. Exemple valeur d'un dé.
- On utilise des variables caractéristiques (de bernoulli) pour certains événements. Exemple tirage B/N, $X_i = 1$ si B_i. Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est le nombre de blanches.
- Autre exemple : N jetons, on en tire n au hasard. $X_i = 1$ si on tire le jeton i. Alors :

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} iX_i \text{ est la valeur des jetons tirés.}$$

Variables aléatoires

- Une VAR est une fonction $X: \Omega \to \mathbb{R}$.
- L'univers image $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs possibles de X.
- La famille d'événements $\big((X = k)\big)_{k \in X(\Omega)}$ forme un SCE.

- Mesure le gain d'une expérience. Exemple valeur d'un dé.
- On utilise des variables caractéristiques (de bernoulli) pour certains événements. Exemple tirage B/N, $X_i = 1$ si B_i. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est le nombre de blanches.
- Autre exemple : N jetons, on en tire n au hasard. $X_i = 1$ si on tire le jeton i. Alors :

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} iX_i \text{ est la valeur des jetons tirés.}$$

Variables aléatoires

- Une VAR est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- L'univers image $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs possibles de X.
- La famille d'événements $\Big((X = k)\Big)_{k \in X(\Omega)}$ forme un SCE.

- Mesure le gain d'une expérience. Exemple valeur d'un dé.
- On utilise des variables caractéristiques (de bernoulli) pour certains événements. Exemple tirage B/N, $X_i = 1$ si B_i. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est le nombre de blanches.
- Autre exemple : N jetons, on en tire n au hasard. $X_i = 1$ si on tire le jeton i. Alors :

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} iX_i \text{ est la valeur des jetons tirés.}$$

Variables aléatoires

- Une VAR est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- L'univers image $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs possibles de X.
- La famille d'événements $\Big((X = k)\Big)_{k \in X(\Omega)}$ forme un SCE.

- Mesure le gain d'une expérience. Exemple valeur d'un dé.
- On utilise des variables caractéristiques (de bernoulli) pour certains événements. Exemple tirage B/N, $X_i = 1$ si B_i. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est le nombre de blanches.
- Autre exemple : N jetons, on en tire n au hasard. $X_i = 1$ si on tire le jeton i. Alors :

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} iX_i \text{ est la valeur des jetons tirés.}$$

Variables aléatoires

- Une VAR est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- L'univers image $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs possibles de X.
- La famille d'événements $\big((X = k)\big)_{k \in X(\Omega)}$ forme un SCE.

- Mesure le gain d'une expérience. Exemple valeur d'un dé.
- On utilise des variables caractéristiques (de bernoulli) pour certains événements. Exemple tirage B/N, $X_i = 1$ si B_i. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est le nombre de blanches.
- Autre exemple : N jetons, on en tire n au hasard. $X_i = 1$ si on tire le jeton i. Alors :

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} iX_i \text{ est la valeur des jetons tirés.}$$

Variables aléatoires

- Une VAR est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- L'univers image $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs possibles de X.
- La famille d'événements $\big((X = k)\big)_{k \in X(\Omega)}$ forme un SCE.

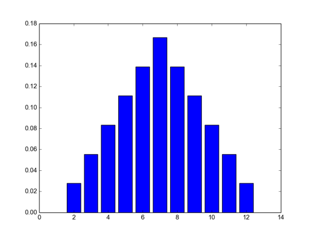
- Mesure le gain d'une expérience. Exemple valeur d'un dé.
- On utilise des variables caractéristiques (de bernoulli) pour certains événements. Exemple tirage B/N, $X_i = 1$ si B_i. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est le nombre de blanches.
- Autre exemple : N jetons, on en tire n au hasard. $X_i = 1$ si on tire le jeton i. Alors :

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} iX_i \text{ est la valeur des jetons tirés.}$$

Lois et fonction de répartition

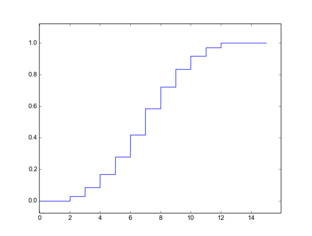
Loi de X :

$$f_X : \left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & p(X = x) \end{array} \right. .$$



Fonction de répartition

$$F_X : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & p(X \leqslant x) \end{array} \right.$$



La fonction de répartition détermine la loi. Exemple : maximum / minimum.

Espérance

C'est le gain moyen

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p(X = x).$$

- L'espérance est linéaire :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ E(aX + b) = aE(X) + b \text{ et } E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- Soit U une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$E(U(X)) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i) p(X = x_i)$$

- Utile pour avoir l'espérance d'une composée sans calculer sa loi : la loi de $U(X)$ est dure à calculer mais son espérance se calcule facilement.

Espérance

C'est le gain moyen

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} xp(X = x).$$

- L'espérance est linéaire :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ E(aX + b) = aE(X) + b \text{ et } E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- Soit U une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$E(U(X)) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i)p(X = x_i)$$

- Utile pour avoir l'espérance d'une composée sans calculer sa loi : la loi de $U(X)$ est dure à calculer mais son espérance se calcule facilement.

Espérance

C'est le gain moyen

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p(X = x).$$

- L'espérance est linéaire :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \ E(aX + b) = aE(X) + b \text{ et } E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- Soit U une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$E(U(X)) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i) p(X = x_i)$$

- Utile pour avoir l'espérance d'une composée sans calculer sa loi : la loi de $U(X)$ est dure à calculer mais son espérance se calcule facilement.

Espérance

C'est le gain moyen

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p(X = x).$$

- L'espérance est linéaire :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \ E(aX + b) = aE(X) + b \text{ et } E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- Soit U une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$E(U(X)) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i) p(X = x_i)$$

- Utile pour avoir l'espérance d'une composée sans calculer sa loi : la loi de $U(X)$ est dure à calculer mais son espérance se calcule facilement.

Variance

Mesure de l'écart quadratique moyen à la moyenne

$$V(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big) = E(X^2) - (E(X))^2$$

L'écart-type est :$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \ V(aX+b) = a^2 V(X) \text{ et } \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y).$$

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall A \in \mathbb{R}^+,\ \ p(|X-m| \geq A) \leq \frac{\sigma^2}{A^2}$$

donne la probabilité qu'une variable s'éloigne de sa moyenne.

Variance

Mesure de l'écart quadratique moyen à la moyenne

$$V(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big) = E(X^2) - (E(X))^2$$

L'écart-type est :$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ V(aX+b) = a^2 V(X) \text{ et } \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$
$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y).$$

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall A \in \mathbb{R}^+,\ p(|X-m| \geqslant A) \leqslant \frac{\sigma^2}{A^2}$$

donne la probabilité qu'une variable s'éloigne de sa moyenne.

Variance

Mesure de l'écart quadratique moyen à la moyenne

$$V(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big) = E(X^2) - (E(X))^2$$

L'écart-type est :$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ V(aX+b) = a^2 V(X) \text{ et } \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$
$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y).$$

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall A \in \mathbb{R}^+,\ p(|X-m| \geqslant A) \leqslant \frac{\sigma^2}{A^2}$$

donne la probabilité qu'une variable s'éloigne de sa moyenne.

Lois usuelles

Variables	Univers images	Loi	Modèle	E	V
Certaine	$\{a\}$	$P(X=a)=1$	issue certaine	a	0
$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$ Uniforme sur $[\![1,n]\!]$	$[\![1,n]\!]$	$P(X=k)=\frac{1}{n}$	issues équiprobables, lancer de dé	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$ (*)
$\mathcal{B}(1,p)$ Bernoulli	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$, $P(X=0)=q=1-p$	Choix binaires, succés ou échec	p	pq
$\mathcal{B}(n,p)$ Binomial	$[\![0,n]\!]$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$	Nombre de succés dans un schéma de Bernouilli, tirage avec remise	np	npq

Couples de VAR

- C'est la donnée de deux VAR (X, Y). L'univers image est $(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
- Loi conjointe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0, 1] \\ (x, y) & \mapsto & p\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = p\Big([Z = (x, y)]\Big) \end{array} \right.$$

- Toujours commencer par identifier les valeurs tels que $p(X = x \cap Y = y) = 0$.
- Vocabulaire : lois marginales ($=$ loi de X seul), lois conditionnelles.

- La loi du couple détermine les lois marginales par la formule des probabilités totales.

Couples de VAR

- C'est la donnée de deux VAR (X, Y). L'univers image est $(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
- Loi conjointe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0, 1] \\ (x, y) & \mapsto & p\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = p\Big([Z = (x, y)]\Big) \end{array} \right.$$

- Toujours commencer par identifier les valeurs tels que $p(X = x \cap Y = y) = 0$.
- Vocabulaire : lois marginales ($=$ loi de X seul), lois conditionnelles.

- La loi du couple détermine les lois marginales par la formule des probabilités totales.

Couples de VAR

- C'est la donnée de deux VAR (X, Y). L'univers image est $(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
- Loi conjointe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ (x, y) & \mapsto & p\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = p\Big([Z = (x, y)]\Big) \end{array} \right.$$

- Toujours commencer par identifier les valeurs tels que $p(X = x \cap Y = y) = 0$.
- Vocabulaire : lois marginales ($=$ loi de X seul), lois conditionnelles.

- La loi du couple détermine les lois marginales par la formule des probabilités totales.

Couples de VAR

- C'est la donnée de deux VAR (X, Y). L'univers image est $(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
- Loi conjointe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0, 1] \\ (x, y) & \mapsto & p\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = p\Big([Z = (x, y)]\Big) \end{array} \right.$$

- Toujours commencer par identifier les valeurs tels que $p(X = x \cap Y = y) = 0$.
- Vocabulaire : lois marginales (= loi de X seul), lois conditionnelles.

- La loi du couple détermine les lois marginales par la formule des probabilités totales.

Couples de VAR

- C'est la donnée de deux VAR (X, Y). L'univers image est $(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
- Loi conjointe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0, 1] \\ (x, y) & \mapsto & p\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = p\Big([Z = (x, y)]\Big) \end{array} \right.$$

- Toujours commencer par identifier les valeurs tels que $p(X = x \cap Y = y) = 0$.
- Vocabulaire : lois marginales ($=$ loi de X seul), lois conditionnelles.

- La loi du couple détermine les lois marginales par la formule des probabilités totales.

Couples de VAR

- C'est la donnée de deux VAR (X, Y). L'univers image est $(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
- Loi conjointe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0, 1] \\ (x, y) & \mapsto & p\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = p\Big([Z = (x, y)]\Big) \end{array} \right.$$

- Toujours commencer par identifier les valeurs tels que $p(X = x \cap Y = y) = 0$.
- Vocabulaire : lois marginales ($=$ loi de X seul), lois conditionnelles.

- La loi du couple détermine les lois marginales par la formule des probabilités totales.

Théorème de transfert

Soit U une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} E\Big(U(X,Y)\Big) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} U(x_i,y_j)p\Big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\Big) \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} U(x,y)p\Big([X=x]\cap[Y=y]\Big) \end{aligned}$$

- On peut ainsi calculer l'espérance de la composée sans connaître la loi de $U(X,Y)$.

Théorème de transfert

Soit U une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} E\Big(U(X,Y)\Big) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} U(x_i,y_j)p\Big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\Big) \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} U(x,y)p\Big([X=x]\cap[Y=y]\Big) \end{aligned}$$

- On peut ainsi calculer l'espérance de la composée sans connaître la loi de $U(X,Y)$.

Covariance

- Mesure l'influence d'une variable sur une autre

$$cov(X,Y) = E\Big([X - E(X)][Y - E(Y)]\Big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- Interprétation du signe.
- Propriétés :

$$\begin{aligned}
&cov(X,Y) = cov(Y,X)\\
&cov(\lambda X + X', Y) = \lambda cov(X,Y) + cov(X',Y)\\
&cov(X, Y + \mu Y') = cov(X,Y) + \mu cov(X,Y')\\
&cov(X,X) = V(X) \geqslant 0
\end{aligned}$$

- Si les variables aléatoires sont indépendantes, alors la covariance est nulle, mais la réciproque est fausse !

Covariance

- Mesure l'influence d'une variable sur une autre

$$cov(X, Y) = E\Big([X - E(X)][Y - E(Y)]\Big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- Interprétation du signe.
- Propriétés :

$$cov(X, Y) = cov(Y, X)$$
$$cov(\lambda X + X', Y) = \lambda cov(X, Y) + cov(X', Y)$$
$$cov(X, Y + \mu Y') = cov(X, Y) + \mu cov(X, Y')$$
$$cov(X, X) = V(X) \geqslant 0$$

- Si les variables aléatoires sont indépendantes, alors la covariance est nulle, mais la réciproque est fausse !

Covariance

- Mesure l'influence d'une variable sur une autre

$$cov(X, Y) = E\Big([X - E(X)][Y - E(Y)]\Big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- Interprétation du signe.
- Propriétés :

$$\begin{aligned}
&cov(X, Y) = cov(Y, X)\\
&cov(\lambda X + X', Y) = \lambda cov(X, Y) + cov(X', Y)\\
&cov(X, Y + \mu Y') = cov(X, Y) + \mu cov(X, Y')\\
&cov(X, X) = V(X) \geqslant 0
\end{aligned}$$

- Si les variables aléatoires sont indépendantes, alors la covariance est nulle, mais la réciproque est fausse !

Covariance

- Mesure l'influence d'une variable sur une autre

$$cov(X,Y) = E\Big([X - E(X)][Y - E(Y)]\Big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- Interprétation du signe.
- Propriétés :

$$\begin{aligned} &cov(X,Y) = cov(Y,X) \\ &cov(\lambda X + X', Y) = \lambda cov(X,Y) + cov(X',Y) \\ &cov(X, Y + \mu Y') = cov(X,Y) + \mu cov(X,Y') \\ &cov(X,X) = V(X) \geqslant 0 \end{aligned}$$

- Si les variables aléatoires sont indépendantes, alors la covariance est nulle, mais la réciproque est fausse !

Variance d'une somme

Avec la définition, on constate :

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$$

Deux utilisations

- on connaît $cov(X,Y)$ on en déduit la variance de la somme.
- on connaît $X+Y$ qui suit une loi usuelle, on en déduit la covariance.

- on lance n boules au hasard qui tombent dans 3 boîtes. On note X_i nombre de boules dans la boîte i.
- Loi de X_i ?
- $cov(X_1, X_2)$?

Variance d'une somme

Avec la définition, on constate :

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$$

Deux utilisations

- on connaît $cov(X,Y)$ on en déduit la variance de la somme.
- on connaît $X+Y$ qui suit une loi usuelle, on en déduit la covariance.

- on lance n boules au hasard qui tombent dans 3 boîtes. On note X_i nombre de boules dans la boîte i.
- Loi de X_i ?
- $cov(X_1, X_2)$?

Variance d'une somme

Avec la définition, on constate :

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$$

Deux utilisations

- on connaît $cov(X,Y)$ on en déduit la variance de la somme.
- on connaît $X+Y$ qui suit une loi usuelle, on en déduit la covariance.

- on lance n boules au hasard qui tombent dans 3 boîtes. On note X_i nombre de boules dans la boîte i.
- Loi de X_i ?
- $cov(X_1, X_2)$?

Variance d'une somme

Avec la définition, on constate :

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$$

Deux utilisations

- on connaît $cov(X,Y)$ on en déduit la variance de la somme.
- on connaît $X+Y$ qui suit une loi usuelle, on en déduit la covariance.

- on lance n boules au hasard qui tombent dans 3 boîtes. On note X_i nombre de boules dans la boîte i.
- Loi de X_i ?
- $cov(X_1, X_2)$?

Variance d'une somme

Avec la définition, on constate :

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$$

Deux utilisations

- on connaît $cov(X,Y)$ on en déduit la variance de la somme.
- on connaît $X+Y$ qui suit une loi usuelle, on en déduit la covariance.

- on lance n boules au hasard qui tombent dans 3 boîtes. On note X_i nombre de boules dans la boîte i.
- Loi de X_i ?
- $cov(X_1, X_2)$?

Variance d'une somme

Avec la définition, on constate :

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$$

Deux utilisations

- on connaît $cov(X,Y)$ on en déduit la variance de la somme.
- on connaît $X+Y$ qui suit une loi usuelle, on en déduit la covariance.

- on lance n boules au hasard qui tombent dans 3 boîtes. On note X_i nombre de boules dans la boîte i.
- Loi de X_i ?
- $cov(X_1, X_2)$?

Variance d'une somme

Avec la définition, on constate :

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$$

Deux utilisations

- on connaît $cov(X,Y)$ on en déduit la variance de la somme.
- on connaît $X+Y$ qui suit une loi usuelle, on en déduit la covariance.

- on lance n boules au hasard qui tombent dans 3 boîtes. On note X_i nombre de boules dans la boîte i.
- Loi de X_i ?
- $cov(X_1, X_2)$?

Variance d'une somme

Avec la définition, on constate :

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$$

Deux utilisations

- on connaît $cov(X,Y)$ on en déduit la variance de la somme.
- on connaît $X+Y$ qui suit une loi usuelle, on en déduit la covariance.

- on lance n boules au hasard qui tombent dans 3 boîtes. On note X_i nombre de boules dans la boîte i.
- Loi de X_i ? $X_i \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$
- $cov(X_1, X_2)$?

Variance d'une somme

Avec la définition, on constate :

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$$

Deux utilisations

- on connaît $cov(X,Y)$ on en déduit la variance de la somme.
- on connaît $X+Y$ qui suit une loi usuelle, on en déduit la covariance.

- on lance n boules au hasard qui tombent dans 3 boîtes. On note X_i nombre de boules dans la boîte i.
- Loi de X_i ?
- $cov(X_1, X_2)$?

Variance d'une somme

Avec la définition, on constate :

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$$

Deux utilisations

- on connaît $cov(X,Y)$ on en déduit la variance de la somme.
- on connaît $X+Y$ qui suit une loi usuelle, on en déduit la covariance.

- on lance n boules au hasard qui tombent dans 3 boîtes. On note X_i nombre de boules dans la boîte i.
- Loi de X_i ?
- $cov(X_1, X_2)$?on a $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$

Variance d'une somme

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + 2cov(X_1, X_2) + V(X_2)$$

Variance d'une somme

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + 2cov(X_1, X_2) + V(X_2)$$

$$\begin{aligned} V(X_1 + X_2 + X_3) = & V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) \\ & + 2cov(X_1, X_2) + 2cov(X_1, X_3) + 2cov(X_2, X_3) \end{aligned}$$

Variance d'une somme

$$V(X_1+X_2) = V(X_1) + 2cov(X_1,X_2) + V(X_2)$$

$$\begin{aligned} V(X_1+X_2+X_3) = & V(X_1)+V(X_2)+V(X_3) \\ & + 2cov(X_1,X_2) + 2cov(X_1,X_3) + 2cov(X_2,X_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & V(X_1+\cdots+X_n) \\ = & V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(X_i,X_j) \\ = & V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n) + \sum_{i\neq j} cov(X_i,X_j) \\ = & \sum_{(i,j)} cov(X_i,X_j) \end{aligned}$$

Variance d'une somme

$$
\begin{aligned}
& V(X_1+\cdots+X_n) \\
={} & V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(X_i,X_j) \\
={} & V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)+\sum_{i\neq j} cov(X_i,X_j) \\
={} & \sum_{(i,j)} cov(X_i,X_j)
\end{aligned}
$$

- Il faut avoir compris les trois expressions de cette formule (les double produit). En particulier le nombre de termes.
  Toujours écrire dans un tableau les valeurs de $cov(X_i, X_j)$.
- Très souvent la somme double se simplifie (beaucoup de termes sont nuls, $cov(X_i, X_j)$ constant, $cov(X_i, X_j)$ est nul si j est « loin » de i).

Variance d'une somme

$$
\begin{aligned}
& V(X_1 + \cdots + X_n) \\
=& V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j) \\
=& V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) + \sum_{i \neq j} cov(X_i, X_j) \\
=& \sum_{(i,j)} cov(X_i, X_j)
\end{aligned}
$$

- Il faut avoir compris les trois expressions de cette formule (les double produit). En particulier le nombre de termes.
  Toujours écrire dans un tableau les valeurs de $cov(X_i, X_j)$.
- Très souvent la somme double se simplifie (beaucoup de termes sont nuls, $cov(X_i, X_j)$ constant, $cov(X_i, X_j)$ est nul si j est « loin » de i).

Variance d'une somme

$$
\begin{aligned}
& V(X_1 + \cdots + X_n) \\
= & V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j) \\
= & V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) + \sum_{i \neq j} cov(X_i, X_j) \\
= & \sum_{(i,j)} cov(X_i, X_j)
\end{aligned}
$$

- Il faut avoir compris les trois expressions de cette formule (les double produit). En particulier le nombre de termes.
  Toujours écrire dans un tableau les valeurs de $cov(X_i, X_j)$.
- Très souvent la somme double se simplifie (beaucoup de termes sont nuls, $cov(X_i, X_j)$ constant, $cov(X_i, X_j)$ est nul si j est « loin » de i).

Vecteurs de variables aléatoires

- Un vecteur aléatoire est n VARs : $(X_1, \ldots, X_n)$.
- $E(X_1 + X_2 + \ldots X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$ dans tous les cas.
- Si les VARs $\left(X_i\right)$ sont indépendantes :

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

Dans le cas général, c'est la variance d'une somme :

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j)$$

Vecteurs de variables aléatoires

- Un vecteur aléatoire est n VARs : $(X_1, \ldots, X_n)$.
- $E(X_1 + X_2 + \ldots X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$ dans tous les cas.
- Si les VARs $\left(X_i\right)$ sont indépendantes :

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

Dans le cas général, c'est la variance d'une somme :

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j)$$

Vecteurs de variables aléatoires

- Un vecteur aléatoire est n VARs : $(X_1, \dots, X_n)$.
- $E(X_1 + X_2 + \dots X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$ dans tous les cas.
- Si les VARs $\left(X_i\right)$ sont indépendantes :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

Dans le cas général, c'est la variance d'une somme :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{i<j} cov(X_i, X_j)$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
& V(X_1 + \cdots + X_n) \\
= & V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j)
\end{aligned}
$$

- Espérance et variance d'une VAR binomiale (= cas de variables indépendantes).
- Espérance et variance du nbr de B dans un tirage sans remise (=cas sans indépendance).

Exemples

$$
\begin{aligned}
& V(X_1 + \cdots + X_n) \\
= & V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j)
\end{aligned}
$$

- Espérance et variance d'une VAR binomiale (= cas de variables indépendantes).
- Espérance et variance du nbr de B dans un tirage sans remise (=cas sans indépendance).

Exemples

$$\begin{aligned}&V(X_1+\cdots+X_n)\\=&V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(X_i,X_j)\end{aligned}$$

- Espérance et variance d'une VAR binomiale (= cas de variables indépendantes).
- Espérance et variance du nbr de B dans un tirage sans remise (=cas sans indépendance).

Coefficient de corrélation linéaire

Soit X et Y non constantes. On appelle **coefficient de corrélation**, le nombre :

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On a :

$$\rho(X, Y) \in [-1, 1], \qquad \text{ie} \qquad |cov(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\exists (a, b) \in \mathbb{R},\ Y = aX + b$. (sauf pour des valeurs de probabilités nulles).

Démonstration à connaître (lien avec les produits scalaires).

Coefficient de corrélation linéaire

Soit X et Y non constantes. On appelle **coefficient de corrélation**, le nombre :

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On a :

$$\rho(X,Y) \in [-1,1], \qquad \text{ie} \qquad |cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\exists (a,b) \in \mathbb{R},\ Y = aX + b$. (sauf pour des valeurs de probabilités nulles).

Démonstration à connaître (lien avec les produits scalaires).

Coefficient de corrélation linéaire

Soit X et Y non constantes. On appelle **coefficient de corrélation**, le nombre :

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On a :

$$\rho(X,Y) \in [-1,1], \qquad \text{ie} \qquad |cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\exists (a,b) \in \mathbb{R},\ Y = aX + b$. (sauf pour des valeurs de probabilités nulles).

Démonstration à connaître (lien avec les produits scalaires).

On considère

$$P : t \longmapsto V(tX + Y) = t^2 V(X) + 2t cov(X, Y) + V(Y)$$

- P est un polynôme de degré 2.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) \geqslant 0,$
- donc $\Delta \leqslant 0$, ce qui donne : $|cov(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$

- Si $\Delta = 0$, alors $\exists t_0 \in \mathbb{R},\ V(t_0 X + Y) = 0$
- et donc $t_0 X + Y$ est une constante.
- Réciproque à rédiger.

On considère

$$P : t \longmapsto V(tX + Y) = t^2 V(X) + 2t cov(X, Y) + V(Y)$$

- P est un polynôme de degré 2.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) \geqslant 0,$
- donc $\Delta \leqslant 0$, ce qui donne : $|cov(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$

- Si $\Delta = 0$, alors $\exists t_0 \in \mathbb{R},\ V(t_0 X + Y) = 0$
- et donc $t_0 X + Y$ est une constante.
- Réciproque à rédiger.

On considère

$$P : t \longmapsto V(tX + Y) = t^2 V(X) + 2t cov(X, Y) + V(Y)$$

- P est un polynôme de degré 2.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) \geqslant 0,$
- donc $\Delta \leqslant 0$, ce qui donne : $|cov(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$

- Si $\Delta = 0$, alors $\exists t_0 \in \mathbb{R},\ V(t_0 X + Y) = 0$
- et donc $t_0 X + Y$ est une constante.
- Réciproque à rédiger.

On considère

$$P : t \longmapsto V(tX+Y) = t^2 V(X) + 2t cov(X,Y) + V(Y)$$

- P est un polynôme de degré 2.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) \geqslant 0,$
- donc $\Delta \leqslant 0$, ce qui donne : $|cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$

- Si $\Delta = 0$, alors $\exists t_0 \in \mathbb{R},\ V(t_0X+Y) = 0$
- et donc t_0X+Y est une constante.
- Réciproque à rédiger.

On considère

$$P : t \longmapsto V(tX + Y) = t^2 V(X) + 2t cov(X, Y) + V(Y)$$

- P est un polynôme de degré 2.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) \geqslant 0,$
- donc $\Delta \leqslant 0$, ce qui donne : $|cov(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$

- Si $\Delta = 0$, alors $\exists t_0 \in \mathbb{R},\ V(t_0 X + Y) = 0$
- et donc $t_0 X + Y$ est une constante.
- Réciproque à rédiger.

On considère

$$P : t \longmapsto V(tX+Y) = t^2V(X) + 2t\,cov(X,Y) + V(Y)$$

- P est un polynôme de degré 2.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ \ P(t) \geqslant 0,$
- donc $\Delta \leqslant 0$, ce qui donne : $|cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$

- Si $\Delta = 0$, alors $\exists t_0 \in \mathbb{R},\ \ V(t_0X+Y) = 0$
- et donc t_0X+Y est une constante.
- Réciproque à rédiger.

On considère

$$P : t \longmapsto V(tX+Y) = t^2 V(X) + 2t cov(X,Y) + V(Y)$$

- P est un polynôme de degré 2.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) \geqslant 0,$
- donc $\Delta \leqslant 0$, ce qui donne : $|cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$

- Si $\Delta = 0$, alors $\exists t_0 \in \mathbb{R},\ V(t_0X+Y) = 0$
- et donc t_0X+Y est une constante.
- Réciproque à rédiger.

Indépendance des événements

A et B deux événements

- Indépendance de deux événements :

$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

$(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux de n événements :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$

$$\text{ie } p(A_i \cap A_j) = p(A_i)p(A_j)$$

- Indépendance mutuelle de n événements :

$$\forall J \subset [\![1,n]\!],\ J \neq \emptyset \implies p(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} p(A_j)$$

Indépendance des événements

A et B deux événements

- Indépendance de deux événements :
$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

$(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux de n événements :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
$$\text{ie } p(A_i \cap A_j) = p(A_i)p(A_j)$$
- Indépendance mutuelle de n événements :
$$\forall J \subset [\![1,n]\!],\ J \neq \emptyset \implies p(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} p(A_j)$$

Indépendance des événements

A et B deux événements

- Indépendance de deux événements :
$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

$(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux de n événements :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
$$\text{ie } p(A_i \cap A_j) = p(A_i)p(A_j)$$
- Indépendance mutuelle de n événements :
$$\forall J \subset [\![1,n]\!],\ J \neq \emptyset \implies p(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} p(A_j)$$

Indépendance des événements

A et B deux événements

- Indépendance de deux événements :
$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

$(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux de n événements :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
$$\text{ie } p(A_i \cap A_j) = p(A_i)p(A_j)$$
- Indépendance mutuelle de n événements :
$$\forall J \subset [\![1,n]\!],\ J \neq \emptyset \implies p(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} p(A_j)$$

Indépendance des événements

A et B deux événements

- Indépendance de deux événements :

$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

$(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux de n événements :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$

$$\text{ie } p(A_i \cap A_j) = p(A_i)p(A_j)$$

- Indépendance mutuelle de n événements :

$$\forall J \subset [\![1,n]\!],\ J \neq \emptyset \implies p(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} p(A_j)$$

Indépendance d'une famille finie d'événements

$(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux :
$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
- Indépendance mutuelle :
$$\forall J\subset [\![1,n]\!],\ J\neq\emptyset \implies p(\bigcap_{j\in J} A_j)=\prod_{j\in J} p(A_j)$$

- Ce n'est pas la même chose
- Quand on ne précise pas, c'est l'indépendance mutuelle.
- C'est souvent une conséquence de la modélisation,
- Parfois c'est contre intuitif !

Indépendance d'une famille finie d'événements

$(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
- Indépendance mutuelle :
$$\forall J \subset [\![1,n]\!],\ J \neq \emptyset \implies p(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} p(A_j)$$

- Ce n'est pas la même chose
- Quand on ne précise pas, c'est l'indépendance mutuelle.
- C'est souvent une conséquence de la modélisation,
- Parfois c'est contre intuitif !

Indépendance d'une famille finie d'événements

$(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
- Indépendance mutuelle :
$$\forall J \subset [\![1,n]\!],\ J \neq \emptyset \implies p(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} p(A_j)$$

- Ce n'est pas la même chose
- Quand on ne précise pas, c'est l'indépendance mutuelle.
- C'est souvent une conséquence de la modélisation,
- Parfois c'est contre intuitif !

Indépendance d'une famille finie d'événements

$(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$

- Indépendance mutuelle :

$$\forall J\subset [\![1,n]\!],\ J\neq\emptyset \implies p(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} p(A_j)$$

- Ce n'est pas la même chose
- Quand on ne précise pas, c'est l'indépendance mutuelle.
- C'est souvent une conséquence de la modélisation,
- Parfois c'est contre intuitif !

Indépendance d'une famille finie d'événements

$(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
- Indépendance mutuelle :
$$\forall J \subset [\![1,n]\!],\ J \neq \emptyset \implies p(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} p(A_j)$$

- Ce n'est pas la même chose
indépendance mutuelle $\implies$ indépendance deux à deux
- Quand on ne précise pas, c'est l'indépendance mutuelle.
- C'est souvent une conséquence de la modélisation,
- Parfois c'est contre intuitif !

Indépendance d'une famille finie d'événements

$(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux :
$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
- Indépendance mutuelle :
$$\forall J\subset [\![1,n]\!],\ J\neq\emptyset \implies p(\bigcap_{j\in J} A_j)=\prod_{j\in J} p(A_j)$$

- Ce n'est pas la même chose
  indépendance mutuelle $\implies$ indépendance deux à deux
  A : "le Dé 1 est pair" , B : "le Dé 2 est pair", C : "le Dé 1 et le Dé 2 ont même parité"
  les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants mais sont indépendants 2 à 2.
- Quand on ne précise pas, c'est l'indépendance mutuelle.
- C'est souvent une conséquence de la modélisation,

Indépendance d'une famille finie d'événements

$(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux :
$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
- Indépendance mutuelle :
$$\forall J\subset [\![1,n]\!]\,,\ J\neq\emptyset \implies p\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)=\prod_{j\in J} p(A_j)$$

- Ce n'est pas la même chose
indépendance mutuelle $\implies$ indépendance deux à deux
- Quand on ne précise pas, c'est l'indépendance mutuelle.
- C'est souvent une conséquence de la modélisation,
- Parfois c'est contre intuitif !

Indépendance d'une famille finie d'événements

$(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
- Indépendance mutuelle :
$$\forall J \subset [\![1,n]\!]\ ,\ J \neq \emptyset \implies p(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} p(A_j)$$

- Ce n'est pas la même chose
indépendance mutuelle $\implies$ indépendance deux à deux
- Quand on ne précise pas, c'est l'indépendance mutuelle.
- C'est souvent une conséquence de la modélisation,
- Parfois c'est contre intuitif !

Indépendance d'une famille finie d'événements

$(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
- Indépendance mutuelle :
$$\forall J \subset [\![1,n]\!],\ J \neq \emptyset \implies p\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} p(A_j)$$

- Ce n'est pas la même chose
  indépendance mutuelle $\implies$ indépendance deux à deux
- Quand on ne précise pas, c'est l'indépendance mutuelle.
- C'est souvent une conséquence de la modélisation,
  rarement il faut le démontrer, en considérant $k \in [\![2,n]\!]$ et $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ et en montrant :
$$p\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = p\left(A_{i_1}\right) \ldots p\left(A_{i_k}\right)$$
- Parfois c'est contre intuitif !

Indépendance d'une famille finie d'événements

$(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n évenements.

- Indépendance deux à deux :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants}$$
- Indépendance mutuelle :
$$\forall J \subset [\![1,n]\!]\,,\ J \neq \emptyset \implies p(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} p(A_j)$$

- Ce n'est pas la même chose
  indépendance mutuelle $\implies$ indépendance deux à deux
- Quand on ne précise pas, c'est l'indépendance mutuelle.
- C'est souvent une conséquence de la modélisation,
- Parfois c'est contre intuitif !

Indépendance de VARs

X et Y deux VARs

- Indépendance de deux VARs :
$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ p(X = x \cap Y = y) = p(X = x)p(Y = y).$$

$(X_i)_{i=1\dots n}$ un vecteur de n VARs

- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont deux à deux indépendantes si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$
- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :
$$\forall (x_1, x_2 \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),$$
$$p\Big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big)$$
$$= p(X_1 = x_1)p(X_2 = x_2)\dots p(X_n = x_n)$$

Indépendance de VARs

X et Y deux VARs

- **Indépendance de deux VARs :**
  $$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ p(X = x \cap Y = y) = p(X = x)p(Y = y).$$

$(X_i)_{i=1\dots n}$ un vecteur de n VARs

- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont deux à deux indépendantes si :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$
- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :
  $$\forall (x_1, x_2 \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),$$
  $$p\Big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big)$$
  $$= p(X_1 = x_1)p(X_2 = x_2) \dots p(X_n = x_n)$$

Indépendance de VARs

X et Y deux VARs

- Indépendance de deux VARs :
  $$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ p(X = x \cap Y = y) = p(X = x)p(Y = y).$$

$(X_i)_{i=1\dots n}$ un vecteur de n VARs

- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont deux à deux indépendantes si :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$
- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :
  $$\forall (x_1, x_2 \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega),$$
  $$p\Big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \dots \cap (X_n = x_n)\Big)$$
  $$= p(X_1 = x_1)p(X_2 = x_2)\dots p(X_n = x_n)$$

Indépendance de VARs

X et Y deux VARs

- Indépendance de deux VARs :
$$\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ p(X=x\cap Y=y)=p(X=x)p(Y=y).$$

$(X_i)_{i=1\dots n}$ un vecteur de n VARs

- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont deux à deux indépendantes si :
$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$
- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :
$$\forall (x_1,x_2\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega),$$
$$p\Big((X_1=x_1)\cap(X_2=x_2)\cap\dots\cap(X_n=x_n)\Big)$$
$$=p(X_1=x_1)p(X_2=x_2)\dots p(X_n=x_n)$$

Indépendance de VARs

X et Y deux VARs

- Indépendance de deux VARs :
$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ p(X = x \cap Y = y) = p(X = x)p(Y = y).$$

$(X_i)_{i=1\dots n}$ un vecteur de n VARs

- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont deux à deux indépendantes si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$
- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :
$$\forall (x_1, x_2 \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega),$$
$$p\Big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \dots \cap (X_n = x_n)\Big)$$
$$= p(X_1 = x_1)p(X_2 = x_2) \dots p(X_n = x_n)$$

Indépendance de VARs

$(X_i)_{i=1\dots n}$ un vecteur de n VARs

- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont deux à deux indépendantes si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$
En conséquence $cov(X_i, X_j) = 0$.
- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :
$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),$$
$$p\Big((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big) = p(X_1 = x_1) \dots p(X_n = x_n)$$

- Ce n'est pas la même chose
- Dès que l'on a indépendance deux à deux, la variance de la somme est la somme des variances.

Indépendance de VARs

$(X_i)_{i=1\dots n}$ un vecteur de n VARs

- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont deux à deux indépendantes si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$
En conséquence $cov(X_i, X_j) = 0$.
- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega),$$
$$p\Big((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)\Big) = p(X_1 = x_1) \dots p(X_n = x_n)$$

- Ce n'est pas la même chose
- Dès que l'on a indépendance deux à deux, la variance de la somme est la somme des variances.

$(X_i)_{i=1\dots n}$ un vecteur de n VARs

- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont deux à deux indépendantes si :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$
  En conséquence $cov(X_i, X_j) = 0$.
- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :
  $$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega),$$
  $$p\Big((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)\Big) = p(X_1 = x_1) \dots p(X_n = x_n)$$

- Ce n'est pas la même chose
- Dès que l'on a indépendance deux à deux, la variance de la somme est la somme des variances.

Indépendance de VARs

$(X_i)_{i=1\dots n}$ un vecteur de n VARs

- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont deux à deux indépendantes si :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$
  En conséquence $cov(X_i, X_j) = 0$.
- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :
  $$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega),$$
  $$p\Big((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)\Big) = p(X_1 = x_1) \dots p(X_n = x_n)$$

- Ce n'est pas la même chose
- Dès que l'on a indépendance deux à deux, la variance de la somme est la somme des variances.

Indépendance de VARs

$(X_i)_{i=1\dots n}$ un vecteur de n VARs

- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont deux à deux indépendantes si :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$
  En conséquence $cov(X_i, X_j) = 0$.
- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :
  $$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega),$$
  $$p\Big((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)\Big) = p(X_1 = x_1) \dots p(X_n = x_n)$$

- Ce n'est pas la même chose
  (mutuellement indépendante $\implies$ indépendantes 2 à 2)
- Dès que l'on a indépendance deux à deux, la variance de la somme est la somme des variances.

Indépendance de VARs

$(X_i)_{i=1\dots n}$ un vecteur de n VARs

- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont deux à deux indépendantes si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$
En conséquence $cov(X_i, X_j) = 0$.
- Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),$$
$$p\Big((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big) = p(X_1 = x_1) \dots p(X_n = x_n)$$

- Ce n'est pas la même chose
(mutuellement indépendante $\implies$ indépendantes 2 à 2)
- Dès que l'on a indépendance deux à deux, la variance de la somme est la somme des variances.

Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),$$

$$p\Big((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big) = p(X_1 = x_1) \dots p(X_n = x_n)$$

- Si on ne précise pas, indépendantes signifie mutuellement indépendantes
- Souvent c'est la modélisation qui donne l'indépendance mutuelle. On le démontre très rarement.
- suite de VAR i.i.d. = indépendantes et identiquement distribuées.

- Si $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes.
- si la VAR Y est construite avec certaines variables (X_i) et la VAR Z est construite avec d'autres variables (X_i) (aucune variable ne sert à la fois pour Y et Z)
- alors Y et Z sont indépendantes.

Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),$$

$$p\Big((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big) = p(X_1 = x_1) \dots p(X_n = x_n)$$

- Si on ne précise pas, indépendantes signifie mutuellement indépendantes
- Souvent c'est la modélisation qui donne l'indépendance mutuelle. On le démontre très rarement.
- suite de VAR i.i.d. = indépendantes et identiquement distribuées.

- Si $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes.
- si la VAR Y est construite avec certaines variables (X_i) et la VAR Z est construite avec d'autres variables (X_i) (aucune variable ne sert à la fois pour Y et Z)
- alors Y et Z sont indépendantes.

Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),$$

$$p\Big((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big) = p(X_1 = x_1) \dots p(X_n = x_n)$$

- Si on ne précise pas, indépendantes signifie mutuellement indépendantes
- Souvent c'est la modélisation qui donne l'indépendance mutuelle. On le démontre très rarement.
- suite de VAR i.i.d. = indépendantes et identiquement distribuées.

- Si $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes.
- si la VAR Y est construite avec certaines variables (X_i) et la VAR Z est construite avec d'autres variables (X_i) (aucune variable ne sert à la fois pour Y et Z)
- alors Y et Z sont indépendantes.

Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),$$

$$p\Big((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big) = p(X_1 = x_1) \dots p(X_n = x_n)$$

- Si on ne précise pas, indépendantes signifie mutuellement indépendantes
- Souvent c'est la modélisation qui donne l'indépendance mutuelle. On le démontre très rarement.
- suite de VAR i.i.d. = indépendantes et identiquement distribuées.

- Si $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes.
- si la VAR Y est construite avec certaines variables (X_i) et la VAR Z est construite avec d'autres variables (X_i) (aucune variable ne sert à la fois pour Y et Z)
- alors Y et Z sont indépendantes.

Les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),$$

$$p\Big((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big) = p(X_1 = x_1) \dots p(X_n = x_n)$$

- Si on ne précise pas, indépendantes signifie mutuellement indépendantes
- Souvent c'est la modélisation qui donne l'indépendance mutuelle. On le démontre très rarement.
- suite de VAR i.i.d. = indépendantes et identiquement distribuées.

- Si $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes.
- si la VAR Y est construite avec certaines variables (X_i) et la VAR Z est construite avec d'autres variables (X_i) (aucune variable ne sert à la fois pour Y et Z)
- alors Y et Z sont indépendantes.

Exemple d'exercice de synthèse

- Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on considère $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ des VAR indépendantes
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.
- Loi de Y_i ?
- $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, interpréter Z.
- Donner $E(Z)$.
- Donner $V(Z)$.

Exemple d'exercice de synthèse

- Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on considère $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ des VAR indépendantes
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.
- Loi de Y_i ?
- $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, interpréter Z.
- Donner $E(Z)$.
- Donner $V(Z)$.

Exemple d'exercice de synthèse

- Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on considère $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ des VAR indépendantes
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.
- Loi de Y_i ?
- $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, interpréter Z.
- Donner $E(Z)$.
- Donner $V(Z)$.

Exemple d'exercice de synthèse

- Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on considère $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ des VAR indépendantes
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.
- Loi de Y_i ? $Y_i = 1$ si $X_i \neq X_{i+1}$, on obtient $Y_i \sim \mathcal{B}(2pq)$
- $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, interpréter Z.
- Donner $E(Z)$.
- Donner $V(Z)$.

Exemple d'exercice de synthèse

- Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on considère $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ des VAR indépendantes
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.
- Loi de Y_i ? $Y_i = 1$ si $X_i \neq X_{i+1}$, on obtient $Y_i \sim \mathcal{B}(2pq)$
- $Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$, interpréter Z.
- Donner $E(Z)$.
- Donner $V(Z)$.

Exemple d'exercice de synthèse

- Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on considère $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ des VAR indépendantes
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.
- Loi de Y_i ? $Y_i = 1$ si $X_i \neq X_{i+1}$, on obtient $Y_i \sim \mathcal{B}(2pq)$
- $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, interpréter Z. C'est le nombre de changement.
- Donner $E(Z)$.
- Donner $V(Z)$.

Exemple d'exercice de synthèse

- Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on considère $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ des VAR indépendantes
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.
- Loi de Y_i ? $Y_i = 1$ si $X_i \neq X_{i+1}$, on obtient $Y_i \sim \mathcal{B}(2pq)$
- $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, interpréter Z. C'est le nombre de changement.
- Donner $E(Z)$.
- Donner $V(Z)$.

Exemple d'exercice de synthèse

- Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on considère $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ des VAR indépendantes
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.
- Loi de Y_i ? $Y_i = 1$ si $X_i \neq X_{i+1}$, on obtient $Y_i \sim \mathcal{B}(2pq)$
- $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, interpréter Z. C'est le nombre de changement.
- Donner $E(Z)$. L'espérance est linéaire, il n'y a pas de difficulté.
- Donner $V(Z)$.

Exemple d'exercice de synthèse

- Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on considère $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ des VAR indépendantes
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.
- Loi de Y_i ? $Y_i = 1$ si $X_i \neq X_{i+1}$, on obtient $Y_i \sim \mathcal{B}(2pq)$
- $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, interpréter Z. C'est le nombre de changement.
- Donner $E(Z)$. L'espérance est linéaire, il n'y a pas de difficulté.
- Donner $V(Z)$.

Exemple d'exercice de synthèse

- Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on considère $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ des VAR indépendantes
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.
- Loi de Y_i ? $Y_i = 1$ si $X_i \neq X_{i+1}$, on obtient $Y_i \sim \mathcal{B}(2pq)$
- $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, interpréter Z. C'est le nombre de changement.
- Donner $E(Z)$. L'espérance est linéaire, il n'y a pas de difficulté.
- Donner $V(Z)$. C'est la variance d'une somme, on doit d'abords calculer $cov(Y_i, Y_j)$.
  Si $j > i+1$, on a Y_i et Y_j indépendantes.
  On écrit le tableau des covariances et il ne reste plus qu'à faire la somme.