Séries numériques

Rappels et compléments

Sylvain Pelletier

PSI - LMSC

Généralités

Définition (Série)

Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n est appelé la somme partielle d'ordre n.

- Valable pour une série de réels et de complexes. On élargira aux séries de fonctions.
- La série caractérise la suite puisque :

$$u_0 = S_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$

Généralités

Définition (Série)

Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n est appelé la somme partielle d'ordre n.

- Valable pour une série de réels et de complexes. On élargira aux séries de fonctions.
- La série caractérise la suite puisque :

$$u_0 = S_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$

Généralités

Définition (Série)

Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n est appelé la somme partielle d'ordre n.

- Valable pour une série de réels et de complexes. On élargira aux séries de fonctions.
- La série caractérise la suite puisque :

$$u_0 = S_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$

Convergence d'une série

- On dit que la série $\sum u_k$ converge si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$.
- Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

- C'est une propriété asymptotique cela ne dépends pas des premiers termes.

- Ne pas confondre la série $\left(\sum u_k\right)$ (= la suite des sommes partielles), et le scalaire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (= la limite des sommes partielles)

Convergence d'une série

- On dit que la série $\sum u_k$ converge si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$.
- Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

- C'est une propriété asymptotique cela ne dépends pas des premiers termes.

- Ne pas confondre la série $\left(\sum u_k\right)$ (= la suite des sommes partielles), et le scalaire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (= la limite des sommes partielles)

Convergence d'une série

- On dit que la série $\sum u_k$ converge si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$.
- Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

- C'est une propriété asymptotique cela ne dépends pas des premiers termes.

- Ne pas confondre la série $\left(\sum u_k\right)$ (= la suite des sommes partielles), et le scalaire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (= la limite des sommes partielles)

Convergence d'une série

- On dit que la série $\sum u_k$ converge si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$.
- Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

Si les sommes partielles tendent vers $+\infty$ la série diverge, mais la suite des sommes partielles peut ne pas avoir de limite.

- C'est une propriété asymptotique cela ne dépends pas des premiers termes.

- Ne pas confondre la série $\left(\sum u_k\right)$ (= la suite des sommes partielles), et le scalaire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (= la limite des sommes partielles)

Convergence d'une série

- On dit que la série $\sum u_k$ converge si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$.
- Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

Si les sommes partielles tendent vers $+\infty$ la série diverge, mais la suite des sommes partielles peut ne pas avoir de limite.

- C'est une propriété asymptotique cela ne dépends pas des premiers termes.

- Ne pas confondre la série $\left(\sum u_k\right)$ (= la suite des sommes partielles), et le scalaire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (= la limite des sommes partielles)

Convergence d'une série

- On dit que la série $\sum u_k$ converge si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$.
- Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

Si les sommes partielles tendent vers $+\infty$ la série diverge, mais la suite des sommes partielles peut ne pas avoir de limite.

- C'est une propriété asymptotique cela ne dépends pas des premiers termes.

- Ne pas confondre la série $\left(\sum u_k\right)$ ($=$ la suite des sommes partielles), et le scalaire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ($=$ la limite des sommes partielles)

Généralités

Dans le cas d'une série convergente :

- somme de la série le scalaire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- reste d'ordre n de la série la valeur de :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- La suite des restes $\left(R_n\right)$ converge vers 0.

Dans le cas d'une série convergente :

- somme de la série le scalaire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- reste d'ordre n de la série la valeur de :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- La suite des restes $\left(R_n\right)$ converge vers 0.

Dans le cas d'une série convergente :

- somme de la série le scalaire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- reste d'ordre n de la série la valeur de :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- La suite des restes $\left(R_n\right)$ converge vers 0.

Généralités

Dans le cas d'une série convergente :

- somme de la série le scalaire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- reste d'ordre n de la série la valeur de :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- La suite des restes $\left(R_n\right)$ converge vers 0.

Généralités

- Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite (u_n) tends vers 0. Dans le cas contraire, on parle de divergence grossière.
- Une série à termes positifs converge si le terme général tends « suffisamment vite » vers 0,
- Une série à termes de signe quelconque converge
  - soit parce qu'elle est absolument convergente (ie $\sum |u_k|$ converge),
  - soit parce qu'il y a une compensation entre les termes. (ex : série alternée)

- $\sum \frac{1}{k^2}$ converge car le terme général tends « suffisamment vite » vers 0. Au contraire $\sum \frac{1}{k}$ diverge.
- $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge (série alternée).

Généralités

- Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite (u_n) tends vers 0. Dans le cas contraire, on parle de divergence grossière.
- Une série à termes positifs converge si le terme général tends « suffisamment vite » vers 0,
- Une série à termes de signe quelconque converge
  - soit parce qu'elle est absolument convergente (ie $\sum |u_k|$ converge),
  - soit parce qu'il y a une compensation entre les termes. (ex : série alternée)

- $\sum \frac{1}{k^2}$ converge car le terme général tends « suffisamment vite » vers 0. Au contraire $\sum \frac{1}{k}$ diverge.
- $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge (série alternée).

Généralités

- Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite (u_n) tends vers 0. Dans le cas contraire, on parle de divergence grossière.
- Une série à termes positifs converge si le terme général tends « suffisamment vite » vers 0,
- Une série à termes de signe quelconque converge
  - soit parce qu'elle est absolument convergente (ie $\sum |u_k|$ converge),
  - soit parce qu'il y a une compensation entre les termes. (ex : série alternée)

- $\sum \frac{1}{k^2}$ converge car le terme général tends « suffisamment vite » vers 0. Au contraire $\sum \frac{1}{k}$ diverge.
- $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge (série alternée).

Généralités

- Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite (u_n) tends vers 0. Dans le cas contraire, on parle de divergence grossière.
- Une série à termes positifs converge si le terme général tends « suffisamment vite » vers 0,
- Une série à termes de signe quelconque converge
  - soit parce qu'elle est absolument convergente (ie $\sum |u_k|$ converge),
  - soit parce qu'il y a une compensation entre les termes. (ex : série alternée)

- $\sum \frac{1}{k^2}$ converge car le terme général tends « suffisamment vite » vers 0. Au contraire $\sum \frac{1}{k}$ diverge.
- $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge (série alternée).

Généralités

- Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite (u_n) tends vers 0. Dans le cas contraire, on parle de divergence grossière.
- Une série à termes positifs converge si le terme général tends « suffisamment vite » vers 0,
- Une série à termes de signe quelconque converge
  - soit parce qu'elle est absolument convergente (ie $\sum |u_k|$ converge),
  - soit parce qu'il y a une compensation entre les termes. (ex : série alternée)

- $\sum \frac{1}{k^2}$ converge car le terme général tends « suffisamment vite » vers 0. Au contraire $\sum \frac{1}{k}$ diverge.
- $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge (série alternée).

Généralités

- Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite (u_n) tends vers 0. Dans le cas contraire, on parle de divergence grossière.
- Une série à termes positifs converge si le terme général tends « suffisamment vite » vers 0,
- Une série à termes de signe quelconque converge
  - soit parce qu'elle est absolument convergente (ie $\sum |u_k|$ converge),
  - soit parce qu'il y a une compensation entre les termes. (ex : série alternée)

- $\sum \frac{1}{k^2}$ converge car le terme général tends « suffisamment vite » vers 0. Au contraire $\sum \frac{1}{k}$ diverge.
- $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge (série alternée).

Généralités

- Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite (u_n) tends vers 0. Dans le cas contraire, on parle de divergence grossière.
- Une série à termes positifs converge si le terme général tends « suffisamment vite » vers 0,
- Une série à termes de signe quelconque converge
  - soit parce qu'elle est absolument convergente (ie $\sum |u_k|$ converge),
  - soit parce qu'il y a une compensation entre les termes. (ex : série alternée)

- $\sum \frac{1}{k^2}$ converge car le terme général tends « suffisamment vite » vers 0. Au contraire $\sum \frac{1}{k}$ diverge.
- $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge (série alternée).

Généralités

- Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite (u_n) tends vers 0. Dans le cas contraire, on parle de divergence grossière.
- Une série à termes positifs converge si le terme général tends « suffisamment vite » vers 0,
- Une série à termes de signe quelconque converge
  - soit parce qu'elle est absolument convergente (ie $\sum |u_k|$ converge),
  - soit parce qu'il y a une compensation entre les termes. (ex : série alternée)

- $\sum \frac{1}{k^2}$ converge car le terme général tends « suffisamment vite » vers 0. Au contraire $\sum \frac{1}{k}$ diverge.
- $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge (série alternée).

Généralités

- Pour les séries, on montre souvent la convergence sans être capable de calculer la valeur de la somme !

- Ex : en comparant à une intégrale, on montre facilement que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, mais comment prouver que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$?

Généralités

- Pour les séries, on montre souvent la convergence sans être capable de calculer la valeur de la somme !

- Ex : en comparant à une intégrale, on montre facilement que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, mais comment prouver que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$?

- Pour les séries, on montre souvent la convergence sans être capable de calculer la valeur de la somme !

- Ex : en comparant à une intégrale, on montre facilement que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, mais comment prouver que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$?

Généralités

- Pour les séries, on montre souvent la convergence sans être capable de calculer la valeur de la somme !

- Ex : en comparant à une intégrale, on montre facilement que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, mais comment prouver que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$?

Combinaison linéaire

- Toute combinaison linéaire de deux séries convergentes et convergentes.
- Si on sait que $\sum u_k$ et $\sum v_k$ converge, alors on sait que $\sum u_k + \alpha v_k$ converge avec :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \alpha v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

- Attention : $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \alpha v_k)$ peut converger sans que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ convergent !

Combinaison linéaire

- Toute combinaison linéaire de deux séries convergentes et convergentes.
- Si on sait que $\sum u_k$ et $\sum v_k$ converge, alors on sait que $\sum u_k + \alpha v_k$ converge avec :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \alpha v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

- Attention : $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \alpha v_k)$ peut converger sans que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ convergent !

Combinaison linéaire

- Toute combinaison linéaire de deux séries convergentes et convergentes.
- Si on sait que $\sum u_k$ et $\sum v_k$ converge, alors on sait que $\sum u_k + \alpha v_k$ converge avec :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \alpha v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

- Attention : $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \alpha v_k)$ peut converger sans que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ convergent !

Combinaison linéaire

- Toute combinaison linéaire de deux séries convergentes et convergentes.
- Si on sait que $\sum u_k$ et $\sum v_k$ converge, alors on sait que $\sum u_k + \alpha v_k$ converge avec :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \alpha v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

- Attention : $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \alpha v_k)$ peut converger sans que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ convergent !

Séries à termes complexes

- Pour une série à termes complexes, la convergence est équivalente à la convergence de la partie réelle et de la partie imaginaire.
- La série complexe $\sum(a_k + ib_k)$ converge si et seulement si les deux séries réelles $\sum a_k$ et $\sum b_k$ converge.
- On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + ib_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

- Pour une série à termes complexes, la convergence est équivalente à la convergence de la partie réelle et de la partie imaginaire.
- La série complexe $\sum(a_k + ib_k)$ converge si et seulement si les deux séries réelles $\sum a_k$ et $\sum b_k$ converge.
- On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + ib_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Séries à termes complexes

- Pour une série à termes complexes, la convergence est équivalente à la convergence de la partie réelle et de la partie imaginaire.
- La série complexe $\sum(a_k + ib_k)$ converge si et seulement si les deux séries réelles $\sum a_k$ et $\sum b_k$ converge.
- On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + ib_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Séries à termes complexes

- Pour une série à termes complexes, la convergence est équivalente à la convergence de la partie réelle et de la partie imaginaire.
- La série complexe $\sum(a_k + ib_k)$ converge si et seulement si les deux séries réelles $\sum a_k$ et $\sum b_k$ converge.
- On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + ib_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Série géométrique

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

- La série $\sum \lambda^k$ converge si et seulement si $|\lambda| < 1$.
- on a l'expression des sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \begin{cases} (n+1) & \text{si } \lambda = 1 \\ \dfrac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} & \text{si } \lambda \neq 1. \end{cases}$$

- et l'expression de la somme :

$$\text{si } |\lambda| < 1, \ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda}$$

Série géométrique

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

- La série $\sum \lambda^k$ converge si et seulement si $|\lambda| < 1$.
- on a l'expression des sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \begin{cases} (n+1) & \text{si } \lambda = 1 \\ \dfrac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} & \text{si } \lambda \neq 1. \end{cases}$$

- et l'expression de la somme :

$$\text{si } |\lambda| < 1, \ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda}$$

Série géométrique

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

- La série $\sum \lambda^k$ converge si et seulement si $|\lambda| < 1$.
- on a l'expression des sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \begin{cases} (n+1) & \text{si } \lambda = 1 \\ \dfrac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} & \text{si } \lambda \neq 1. \end{cases}$$

- et l'expression de la somme :

$$\text{si } |\lambda| < 1, \ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda}$$

Série géométrique

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

- La série $\sum \lambda^k$ converge si et seulement si $|\lambda| < 1$.
- on a l'expression des sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \begin{cases} (n+1) & \text{si } \lambda = 1 \\ \dfrac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} & \text{si } \lambda \neq 1. \end{cases}$$

- et l'expression de la somme :

$$\text{si } |\lambda| < 1, \ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda}$$

Série géométrique

- Si la série ne commence pas au premier terme, ne pas l'oublier !
- Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\text{somme partielle} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbr de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

- Si $|\lambda| < 1$:

$$\text{somme} = \text{premier terme} \times \frac{1}{1 - \text{raison}}$$

- C'est un des rares cas où on calcule la valeur de la somme et on montre la convergence !

Série géométrique

- Si la série ne commence pas au premier terme, ne pas l'oublier !
- Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\text{somme partielle} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbr de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

- Si $|\lambda| < 1$:

$$\text{somme} = \text{premier terme} \times \frac{1}{1 - \text{raison}}$$

- C'est un des rares cas où on calcule la valeur de la somme et on montre la convergence !

Série géométrique

- Si la série ne commence pas au premier terme, ne pas l'oublier !
- Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\text{somme partielle} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbr de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

- Si $|\lambda| < 1$:

$$\text{somme} = \text{premier terme} \times \frac{1}{1 - \text{raison}}$$

- C'est un des rares cas où on calcule la valeur de la somme et on montre la convergence !

Série géométrique

- Si la série ne commence pas au premier terme, ne pas l'oublier !
- Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\text{somme partielle} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbr de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

- Si $|\lambda| < 1$:

$$\text{somme} = \text{premier terme} \times \frac{1}{1 - \text{raison}}$$

- C'est un des rares cas où on calcule la valeur de la somme et on montre la convergence !

Série géométrique

- Si la série ne commence pas au premier terme, ne pas l'oublier !
- Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\text{somme partielle} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbr de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

- Si $|\lambda| < 1$:

$$\text{somme} = \text{premier terme} \times \frac{1}{1 - \text{raison}}$$

- C'est un des rares cas où on calcule la valeur de la somme et on montre la convergence !

Série télescopique

Définition

- Une série $\sum u_n$ est dite télescopique lorsque l'on peut trouver une suite (v_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_{n+1} - v_n$$

- les sommes partielles se calculent très facilement :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_0.$$

- Ainsi, la suite (v_n) converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Dans l'autre sens...

Soit (u_n) une suite. Alors la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Série télescopique

Définition

- Une série $\sum u_n$ est dite télescopique lorsque l'on peut trouver une suite (v_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_{n+1} - v_n$$

- les sommes partielles se calculent très facilement :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_0.$$

- Ainsi, la suite (v_n) converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Dans l'autre sens...

Soit (u_n) une suite. Alors la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Série télescopique

Définition

- Une série $\sum u_n$ est dite télescopique lorsque l'on peut trouver une suite (v_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_{n+1} - v_n$$

- les sommes partielles se calculent très facilement :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_0.$$

- Ainsi, la suite (v_n) converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Dans l'autre sens...

Soit (u_n) une suite. Alors la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Série télescopique

Définition

- Une série $\sum u_n$ est dite télescopique lorsque l'on peut trouver une suite (v_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = v_{n+1} - v_n$$

- les sommes partielles se calculent très facilement :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_0.$$

- Ainsi, la suite (v_n) converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Dans l'autre sens...

Soit (u_n) une suite. Alors la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Série télescopique

Définition

- Une série $\sum u_n$ est dite télescopique lorsque l'on peut trouver une suite (v_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_{n+1} - v_n$$

- les sommes partielles se calculent très facilement :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_0.$$

- Ainsi, la suite (v_n) converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Dans l'autre sens...

Soit (u_n) une suite. Alors la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Séries téléscopiques

- $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$$
- $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$
- $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

Chercher les simplifications en particulier pour les fractions.

- C'est un des rares cas où on a l'expression de la somme partielle et où on calcule la limite de la somme partielle pour montrer la convergence et obtenir la somme.

Séries téléscopiques

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
  Il faut écrire :
  $$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

Chercher les simplifications en particulier pour les fractions.

- C'est un des rares cas où on a l'expression de la somme partielle et où

Séries téléscopiques

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

Chercher les simplifications en particulier pour les fractions.

- C'est un des rares cas où on a l'expression de la somme partielle et où on calcule la limite de la somme partielle pour montrer la convergence et obtenir la somme.

Séries téléscopiques

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
  Il faut écrire :
  $$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

Chercher les simplifications en particulier pour les fractions.

- C'est un des rares cas où on a l'expression de la somme partielle et où

Séries téléscopiques

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

Chercher les simplifications en particulier pour les fractions.

- C'est un des rares cas où on a l'expression de la somme partielle et où on calcule la limite de la somme partielle pour montrer la convergence et obtenir la somme.

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

  Il faut écrire :

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \tan\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n+1}$$

Chercher les simplifications en particulier pour les fractions.

Séries téléscopiques

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

Chercher les simplifications en particulier pour les fractions.

- C'est un des rares cas où on a l'expression de la somme partielle et où on calcule la limite de la somme partielle pour montrer la convergence et obtenir la somme.

Séries téléscopiques

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

Chercher les simplifications en particulier pour les fractions.

- C'est un des rares cas où on a l'expression de la somme partielle et où on calcule la limite de la somme partielle pour montrer la convergence et obtenir la somme.

Soit (u_n) une suite à termes positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante.

- La suite des sommes partielles converge ou tends vers $+\infty$.
- La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

- Si la série est à termes négatifs, on étudie $\sum_k (-u_k)$,
- La série peut être à termes positifs seulement à partir d'un certain rang.

Bien vérifier que le terme général de la série est positif !

Soit (u_n) une suite à termes positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante.

- La suite des sommes partielles converge ou tends vers $+\infty$.
- La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

- Si la série est à termes négatifs, on étudie $\sum_k (-u_k)$,
- La série peut être à termes positifs seulement à partir d'un certain rang.

Bien vérifier que le terme général de la série est positif !

Séries à termes positifs

Soit (u_n) une suite à termes positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante.

- La suite des sommes partielles converge ou tends vers $+\infty$.
- La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

- Si la série est à termes négatifs, on étudie $\sum_k (-u_k)$,
- La série peut être à termes positifs seulement à partir d'un certain rang.

Bien vérifier que le terme général de la série est positif !

Séries à termes positifs

Soit (u_n) une suite à termes positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante.

- La suite des sommes partielles converge ou tends vers $+\infty$.
- La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

- Si la série est à termes négatifs, on étudie $\sum_k (-u_k)$,
- La série peut être à termes positifs seulement à partir d'un certain rang.

Bien vérifier que le terme général de la série est positif !

Séries à termes positifs

Soit (u_n) une suite à termes positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante.

- La suite des sommes partielles converge ou tends vers $+\infty$.
- La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

- Si la série est à termes négatifs, on étudie $\sum_k (-u_k)$, En fait c'est série à termes de signe constant qu'il faudrait utiliser.
- La série peut être à termes positifs seulement à partir d'un certain rang.

Bien vérifier que le terme général de la série est positif !

Soit (u_n) une suite à termes positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante.

- La suite des sommes partielles converge ou tends vers $+\infty$.
- La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

- Si la série est à termes négatifs, on étudie $\displaystyle\sum_k (-u_k)$,
- La série peut être à termes positifs seulement à partir d'un certain rang.

Bien vérifier que le terme général de la série est positif !

Séries à termes positifs

Soit (u_n) une suite à termes positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante.

- La suite des sommes partielles converge ou tends vers $+\infty$.
- La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

- Si la série est à termes négatifs, on étudie $\sum_k (-u_k)$,
- La série peut être à termes positifs seulement à partir d'un certain rang.

Bien vérifier que le terme général de la série est positif !

Comparaison par majoration / minoration

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

On a alors :

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et :

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- Si $\sum u_n$ diverge (tends vers $+\infty$) alors $\sum v_n$ diverge (tends vers $+\infty$).

Comparaison par majoration / minoration

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

On a alors :

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et :

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- Si $\sum u_n$ diverge (tends vers $+\infty$) alors $\sum v_n$ diverge (tends vers $+\infty$).

Comparaison par majoration / minoration

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

On a alors :

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et :

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- Si $\sum u_n$ diverge (tends vers $+\infty$) alors $\sum v_n$ diverge (tends vers $+\infty$).

Comparaisons des séries à termes positifs

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs vérifiant :

- $u_n = \underset{n\infty}{O}(v_n)$ alors Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

- On en déduit : $u_n = \underset{n\infty}{o}(v_n)$ alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Cela permet de se ramener aux séries pour lesquelles la convergence est connue (série géométrique / série de Riemann)
- On estime la vitesse à laquelle le terme général (u_n) tends vers 0.

Comparaisons des séries à termes positifs

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs vérifiant :

- $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$ alors Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

- On en déduit : $u_n \underset{n\infty}{=} o(v_n)$ alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Cela permet de se ramener aux séries pour lesquelles la convergence est connue (série géométrique / série de Riemann)
- On estime la vitesse à laquelle le terme général (u_n) tends vers 0.

Comparaisons des séries à termes positifs

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs vérifiant :

- $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$ alors Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

- On en déduit : $u_n \underset{n\infty}{=} o(v_n)$ alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Cela permet de se ramener aux séries pour lesquelles la convergence est connue (série géométrique / série de Riemann)
- On estime la vitesse à laquelle le terme général (u_n) tends vers 0.

Comparaisons des séries à termes positifs

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs vérifiant :

- $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$ alors Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

Il arrive de plus que l'on montre en plus que la série est à termes positifs (à partir d'un certain rang) en utilisant un équivalent !

- On en déduit : $u_n \underset{n\infty}{=} o(v_n)$ alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Cela permet de se ramener aux séries pour lesquelles la convergence est connue (série géométrique / série de Riemann)
- On estime la vitesse à laquelle le terme général (u_n) tends vers 0.

Comparaisons des séries à termes positifs

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs vérifiant :

- $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$ alors Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

Il arrive de plus que l'on montre en plus que la série est à termes positifs (à partir d'un certain rang) en utilisant un équivalent !

- On en déduit : $u_n \underset{n\infty}{=} o(v_n)$ alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Cela permet de se ramener aux séries pour lesquelles la convergence est connue (série géométrique / série de Riemann)
- On estime la vitesse à laquelle le terme général (u_n) tends vers 0.

Comparaisons des séries à termes positifs

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs vérifiant :

- $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$ alors Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

Il arrive de plus que l'on montre en plus que la série est à termes positifs (à partir d'un certain rang) en utilisant un équivalent !

- On en déduit : $u_n \underset{n\infty}{=} o(v_n)$ alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Cela permet de se ramener aux séries pour lesquelles la convergence est connue (série géométrique / série de Riemann)
- On estime la vitesse à laquelle le terme général (u_n) tends vers 0.

Comparaisons des séries à termes positifs

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs vérifiant :

- $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$ alors Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

Il arrive de plus que l'on montre en plus que la série est à termes positifs (à partir d'un certain rang) en utilisant un équivalent !

- On en déduit : $u_n \underset{n\infty}{=} o(v_n)$ alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Cela permet de se ramener aux séries pour lesquelles la convergence est connue (série géométrique / série de Riemann)
- On estime la vitesse à laquelle le terme général (u_n) tends vers 0.

Exemple de comparaison pour les séries à termes positifs

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}(\cos^2 n)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple de comparaison pour les séries à termes positifs

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}(\cos^2 n)}$

  série à termes positifs et $u_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc la série diverge.

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple de comparaison pour les séries à termes positifs

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}(\cos^2 n)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple de comparaison pour les séries à termes positifs

- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}(\cos^2 n)}$
- $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

  Développement asymptotique

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1}{n} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

  cette série est donc à termes positifs (à partir d'un certain rang) et converge.
- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple de comparaison pour les séries à termes positifs

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}(\cos^2 n)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple de comparaison pour les séries à termes positifs

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}(\cos^2 n)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
  Série à termes positifs.
  Si $\alpha \leqslant 0$ la série diverge grossièrement.
  Si $\alpha > 0$, on a :
  $$\frac{1}{n^\alpha + \arctan n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$$
  et donc la série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Lien série intégrale

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante.

On peut alors construire :

la suite d'intégrale : $\left(\int_0^n f(t)dt\right)$ qui est une suite croissante

la série $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ qui est une série à termes positifs

- un dessin des rectangles montre que ces deux suites ont liées.
- Toujours bien avoir en tête ce lien ! Il est plus simple de retrouver la plupart des résultats que de les apprendre.

Lien série intégrale

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante.

On peut alors construire :

la suite d'intégrale : $\left(\int_0^n f(t)dt\right)$ qui est une suite croissante

la série $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ qui est une série à termes positifs

- un dessin des rectangles montre que ces deux suites ont liées.
- Toujours bien avoir en tête ce lien ! Il est plus simple de retrouver la plupart des résultats que de les apprendre.

Lien série intégrale

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante.

On peut alors construire :

la suite d'intégrale : $\left(\int_0^n f(t)dt\right)$ qui est une suite croissante

la série $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ qui est une série à termes positifs

- un dessin des rectangles montre que ces deux suites ont liées.
- Toujours bien avoir en tête ce lien ! Il est plus simple de retrouver la plupart des résultats que de les apprendre.

Lien série intégrale

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante.

On peut alors construire :

la suite d'intégrale : $\left(\int_0^n f(t)dt\right)$ qui est une suite croissante

la série $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ qui est une série à termes positifs

- un dessin des rectangles montre que ces deux suites ont liées.
- Toujours bien avoir en tête ce lien ! Il est plus simple de retrouver la plupart des résultats que de les apprendre.

Lien série intégrale

Soit donc f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante.
Alors la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ ont la même nature.

- Ici il s'agit de suites qui convergent ou tendent vers $+\infty$.
- Précisément, on a le résultat suivant (dans le cas d'une fonction décroissante) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt$$

- Dans les deux cas c'est asymptotique : on peut enlever les premières valeurs !

On verra que la série converge $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Lien série intégrale

Soit donc f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante. Alors la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ ont la même nature.

La même nature, pas la même valeur !

- Ici il s'agit de suites qui convergent ou tendent vers $+\infty$.
- Précisément, on a le résultat suivant (dans le cas d'une fonction décroissante) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt$$

- Dans les deux cas c'est asymptotique : on peut enlever les premières valeurs !

On verra que la série converge $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Lien série intégrale

Soit donc f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante. Alors la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ ont la même nature.

- Ici il s'agit de suites qui convergent ou tendent vers $+\infty$.
- Précisément, on a le résultat suivant (dans le cas d'une fonction décroissante) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt$$

- Dans les deux cas c'est asymptotique : on peut enlever les premières valeurs !

On verra que la série converge $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Lien série intégrale

Soit donc f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante.
Alors la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ ont la même nature.

- Ici il s'agit de suites qui convergent ou tendent vers $+\infty$.
- Précisément, on a le résultat suivant (dans le cas d'une fonction décroissante) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt$$

- Dans les deux cas c'est asymptotique : on peut enlever les premières valeurs !

On verra que la série converge $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Lien série intégrale

Soit donc f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante.
Alors la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ ont la même nature.

- Ici il s'agit de suites qui convergent ou tendent vers $+\infty$.
- Précisément, on a le résultat suivant (dans le cas d'une fonction décroissante) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt$$

Résultat que l'on peut retrouver très rapidement sur un dessin

- Dans les deux cas c'est asymptotique : on peut enlever les premières valeurs !

On verra que la série converge $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Lien série intégrale

Soit donc f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante. Alors la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ ont la même nature.

- Ici il s'agit de suites qui convergent ou tendent vers $+\infty$.
- Précisément, on a le résultat suivant (dans le cas d'une fonction décroissante) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt$$

Résultat que l'on peut retrouver très rapidement sur un dessin

- Dans les deux cas c'est asymptotique : on peut enlever les premières valeurs !

On verra que la série converge $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Lien série intégrale

Soit donc f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante.
Alors la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ ont la même nature.

- Ici il s'agit de suites qui convergent ou tendent vers $+\infty$.
- Précisément, on a le résultat suivant (dans le cas d'une fonction décroissante) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt$$

Résultat que l'on peut retrouver très rapidement sur un dessin

- Dans les deux cas c'est asymptotique : on peut enlever les premières valeurs !

On verra que la série converge $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Lien série intégrale

- Si on veut la somme encadrée par des intégrales :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)dt$$

- Si on veut l'intégrale encadrée par la somme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k+1) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$$

- Puis on somme ces relations.
- Dans tous les cas : `refaire le dessin au brouillon` et attention aux termes extrémaux.

Lien série intégrale

- Si on veut la somme encadrée par des intégrales :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)dt$$

- Si on veut l'intégrale encadrée par la somme :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(k+1) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$$

- Puis on somme ces relations.
- Dans tous les cas : `refaire le dessin au brouillon` et attention aux termes extrémaux.

Lien série intégrale

- Si on veut la somme encadrée par des intégrales :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)dt$$

- Si on veut l'intégrale encadrée par la somme :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(k+1) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$$

- Puis on somme ces relations.
- Dans tous les cas : `refaire le dessin au brouillon` et attention aux termes extrémaux.

Lien série intégrale

- Si on veut la somme encadrée par des intégrales :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)dt$$

- Si on veut l'intégrale encadrée par la somme :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(k+1) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$$

- Puis on somme ces relations.
- Dans tous les cas : `refaire le dessin au brouillon` et attention aux termes extrémaux.

Lien série intégrale

Étudier $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^2}$.

Étudier $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^2}$.

- On a : $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)\,(\ln(\ln t))^2}$ est décroissante pour $t \geqslant 3$.
- On calcule l'intégrale :
- Ainsi la suite $\displaystyle\left(\int_3^n \frac{dt}{t\ln(t)\,(\ln(\ln t))^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^2}$ converge.

Lien série intégrale

Étudier $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^2}$.

- On a : $t\mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)\,(\ln(\ln t))^2}$ est décroissante pour $t\geqslant 3$.
- On calcule l'intégrale :
- Ainsi la suite $\left(\displaystyle\int_3^n \frac{dt}{t\ln(t)\,(\ln(\ln t))^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^2}$ converge.

Lien série intégrale

Étudier $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln n \left(\ln(\ln n)\right)^2}$.

- On a : $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t) \left(\ln(\ln t)\right)^2}$ est décroissante pour $t \geqslant 3$.
  On peut dériver ou raisonner sur le sens de variations d'un produit/ quotient de fonctions positives et de composées.
- On calcule l'intégrale :
- Ainsi la suite $\left(\int_3^n \frac{dt}{t \ln(t) \left(\ln(\ln t)\right)^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln n \left(\ln(\ln n)\right)^2}$ converge.

Étudier $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln n \,(\ln(\ln n))^2}$.

- On a : $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)\,(\ln(\ln t))^2}$ est décroissante pour $t \geqslant 3$.
- On calcule l'intégrale :
- Ainsi la suite $\left(\int_3^n \frac{dt}{t\ln(t)\,(\ln(\ln t))^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln n \,(\ln(\ln n))^2}$ converge.

Lien série intégrale

Étudier $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^2}$.

- On a : $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)\,(\ln(\ln t))^2}$ est décroissante pour $t \geqslant 3$.
- On calcule l'intégrale :

$$\int_3^n \frac{dt}{t\ln(t)\,(\ln(\ln t))^2} = \int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln n)} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln n)}$$
$$= \frac{1}{\ln(\ln(3))} - \frac{1}{\ln(\ln(n))} \to \frac{1}{\ln(\ln(3))}$$

En utilisant le changement de variable $u = \ln(\ln t)$.

- Ainsi la suite $\left(\displaystyle\int_3^n \frac{dt}{t\ln(t)\,(\ln(\ln t))^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^2}$ converge.

Lien série intégrale

Étudier $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^2}$.

- On a : $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)\,(\ln(\ln t))^2}$ est décroissante pour $t \geqslant 3$.
- On calcule l'intégrale :
- Ainsi la suite $\displaystyle\left(\int_3^n \frac{dt}{t\ln(t)\,(\ln(\ln t))^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^2}$ converge.

La série harmonique

$\int_1^n \frac{dt}{t}$ diverge donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.

- Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

- ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

- On en déduit alors : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$

La série harmonique

$\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t}$ diverge donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.

- Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

- ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

- On en déduit alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$

La série harmonique

$\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t}$ diverge donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.

- Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_1^{n+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t}dt$$

Il faut savoir retrouver ce résultat sur un dessin

- ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

- On en déduit alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$

La série harmonique

$\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t}$ diverge donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.

- Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t} dt$$

- ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

- On en déduit alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$

La série harmonique

$\int_1^n \frac{dt}{t}$ diverge donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.

- Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

- ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

- On en déduit alors : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$

La série harmonique

$\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t}$ diverge donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.

- Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_1^{n+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t}dt$$

- ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

- On en déduit alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$ Cet équivalent est à connaître.

On considère $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ où $\alpha > 1$. Montrer la convergence, encadrer le reste R_n, en déduire un équivalent de R_n.

- Pour la convergence, on regarde :
$$\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} dx \text{ en posant } u = \ln(x)$$
- Pour l'encadrement, on retrouve le résultat sur le dessin pour $n \leqslant N$:
$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} \leqslant \int_n^N f(t)dt$$
- Il reste à calculer ces intégrales par le changement de variables puis à faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir :
$$R_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)(\ln n)^{\alpha - 1}}$$

On considère $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ où $\alpha > 1$. Montrer la convergence, encadrer le reste R_n, en déduire un équivalent de R_n.

- Pour la convergence, on regarde :

$$\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} dx \text{ en posant } u = \ln(x)$$

- Pour l'encadrement, on retrouve le résultat sur le dessin pour $n \leqslant N$:

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} \leqslant \int_n^N f(t)dt$$

- Il reste à calculer ces intégrales par le changement de variables puis à faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir :

$$R_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}}$$

On considère $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ où $\alpha > 1$. Montrer la convergence, encadrer le reste R_n, en déduire un équivalent de R_n.

- Pour la convergence, on regarde :

$$\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} dx \text{ en posant } u = \ln(x)$$

- Pour l'encadrement, on retrouve le résultat sur le dessin pour $n \leqslant N$:

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} \leqslant \int_n^N f(t)dt$$

- Il reste à calculer ces intégrales par le changement de variables puis à faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir :

$$R_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}}$$

On considère $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n (\ln n)^{\alpha}}$ où $\alpha > 1$. Montrer la convergence, encadrer le reste R_n, en déduire un équivalent de R_n.

- Pour la convergence, on regarde :

$$\int_2^n \frac{1}{x (\ln x)^{\alpha}} dx \text{ en posant } u = \ln(x)$$

Cette suite converge donc la série est convergente.

- Pour l'encadrement, on retrouve le résultat sur le dessin pour $n \leqslant N$:

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t) dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k (\ln k)^{\alpha}} \leqslant \int_n^N f(t) dt$$

- Il reste à calculer ces intégrales par le changement de variables puis à faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir :

$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha - 1)(\ln n)^{\alpha - 1}}$$

On considère $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $\alpha > 1$. Montrer la convergence, encadrer le reste R_n, en déduire un équivalent de R_n.

- Pour la convergence, on regarde :

$$\int_2^n \frac{1}{x\,(\ln x)^{\alpha}} dx \text{ en posant } u = \ln(x)$$

- Pour l'encadrement, on retrouve le résultat sur le dessin pour $n \leqslant N$:

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} \leqslant \int_n^N f(t)dt$$

- Il reste à calculer ces intégrales par le changement de variables puis à faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir :

$$R_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)\,(\ln n)^{\alpha-1}}$$

On considère $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $\alpha > 1$. Montrer la convergence, encadrer le reste R_n, en déduire un équivalent de R_n.

- Pour la convergence, on regarde :

$$\int_2^n \frac{1}{x\,(\ln x)^{\alpha}} dx \text{ en posant } u = \ln(x)$$

- Pour l'encadrement, on retrouve le résultat sur le dessin pour $n \leqslant N$:

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} \leqslant \int_n^N f(t)dt$$

- Il reste à calculer ces intégrales par le changement de variables puis à faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir :

$$R_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)\,(\ln n)^{\alpha-1}}$$

Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ (qui diverge) est donc un repère :

- toute série dont le terme général tends vers 0 moins vite que $\frac{1}{k}$ diverge
- toute série dont le terme général tends vers 0 plus vite que $\frac{1}{k}$ converge.

$$\text{En effet : la série } \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha} \text{converge}$$

$$\text{SSI la suite } \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) \text{ converge}$$

Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ (qui diverge) est donc un repère :

- toute série dont le terme général tends vers 0 moins vite que $\frac{1}{k}$ diverge
- toute série dont le terme général tends vers 0 plus vite que $\frac{1}{k}$ converge.

$$\text{En effet : la série } \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha} \text{converge}$$

$$\text{SSI la suite } \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) \text{ converge}$$

Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ (qui diverge) est donc un repère :

- toute série dont le terme général tends vers 0 moins vite que $\frac{1}{k}$ diverge
- toute série dont le terme général tends vers 0 plus vite que $\frac{1}{k}$ converge.

$$\text{En effet : la série } \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha} \text{converge}$$

$$\text{SSI la suite } \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) \text{ converge}$$

Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ (qui diverge) est donc un repère :

- toute série dont le terme général tends vers 0 moins vite que $\frac{1}{k}$ diverge
- toute série dont le terme général tends vers 0 plus vite que $\frac{1}{k}$ converge.

En effet : la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$converge

SSI la suite $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$ converge

Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ (qui diverge) est donc un repère :

- toute série dont le terme général tends vers 0 moins vite que $\frac{1}{k}$ diverge
- toute série dont le terme général tends vers 0 plus vite que $\frac{1}{k}$ converge.

$$\text{En effet : la série } \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha} \text{converge}$$

$$\text{SSI la suite } \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) \text{ converge}$$

Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_k$ une série à termes réels positifs.

- Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, ie $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_k$ converge.
- Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{=} o\,(u_n)$, ie $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_k$ diverge.
- Si il existe un réel α et un réel $l \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ ie $n^\alpha u_n \to l \neq 0$, alors $\sum u_k$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- On calcule la limite de $(n^\alpha u_n)$ pour comparer u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ en réfléchissant comment choisir α.
- On compare (u_n) aux repères $\frac{1}{n^\alpha}$.

Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_k$ une série à termes réels positifs.

- Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, ie $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_k$ converge.
- Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{=} o\left(u_n\right)$, ie $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_k$ diverge.
- Si il existe un réel α et un réel $l \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ ie $n^\alpha u_n \to l \neq 0$, alors $\sum u_k$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- On calcule la limite de $(n^\alpha u_n)$ pour comparer u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ en réfléchissant comment choisir α.
- On compare (u_n) aux repères $\frac{1}{n^\alpha}$.

Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_k$ une série à termes réels positifs.

- Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, ie $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_k$ converge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum u_k$ converge
- Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{=} o(u_n)$, ie $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_k$ diverge.
- Si il existe un réel α et un réel $l \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ ie $n^\alpha u_n \to l \neq 0$, alors $\sum u_k$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- On calcule la limite de $(n^\alpha u_n)$ pour comparer u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ en réfléchissant comment choisir α.
- On compare (u_n) aux repères $\frac{1}{n^\alpha}$.

Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_k$ une série à termes réels positifs.

- Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, ie $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_k$ converge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum u_k$ converge
- Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{=} o\,(u_n)$, ie $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_k$ diverge.
- Si il existe un réel α et un réel $l \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ ie $n^\alpha u_n \to l \neq 0$, alors $\sum u_k$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- On calcule la limite de $(n^\alpha u_n)$ pour comparer u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ en réfléchissant comment choisir α.
- On compare (u_n) aux repères $\frac{1}{n^\alpha}$.

Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_k$ une série à termes réels positifs.

- Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, ie $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_k$ converge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum u_k$ converge
- Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{=} o\,(u_n)$, ie $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_k$ diverge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et à partir d'un certain rang $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n$
- Si il existe un réel α et un réel $l \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ ie $n^\alpha u_n \to l \neq 0$, alors $\sum u_k$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- On calcule la limite de $(n^\alpha u_n)$ pour comparer u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ en réfléchissant comment choisir α.
- On compare (u_n) aux repères $\frac{1}{n^\alpha}$.

Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_k$ une série à termes réels positifs.

- Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, ie $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_k$ converge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum u_k$ converge
- Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{=} o\left(u_n\right)$, ie $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_k$ diverge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et à partir d'un certain rang $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n$
- Si il existe un réel α et un réel $l \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ ie $n^\alpha u_n \to l \neq 0$, alors $\sum u_k$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- On calcule la limite de $(n^\alpha u_n)$ pour comparer u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ en réfléchissant comment choisir α.
- On compare (u_n) aux repères $\frac{1}{n^\alpha}$.

Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_k$ une série à termes réels positifs.

- Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, ie $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_k$ converge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum u_k$ converge
- Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{=} o\left(u_n\right)$, ie $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_k$ diverge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et à partir d'un certain rang $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n$
- Si il existe un réel α et un réel $l \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ ie $n^\alpha u_n \to l \neq 0$, alors $\sum u_k$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
  La série $\sum \frac{l}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

- On calcule la limite de $\left(n^\alpha u_n\right)$ pour comparer u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ en réfléchissant comment choisir α.
- On compare $\left(u_n\right)$ aux repères $\frac{1}{n^\alpha}$.

Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_k$ une série à termes réels positifs.

- Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, ie $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_k$ converge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum u_k$ converge
- Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} = \underset{n\infty}{o}(u_n)$, ie $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_k$ diverge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et à partir d'un certain rang $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n$
- Si il existe un réel α et un réel $l \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ ie $n^\alpha u_n \to l \neq 0$, alors $\sum u_k$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
  La série $\sum \frac{l}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

- On calcule la limite de $(n^\alpha u_n)$ pour comparer u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ en réfléchissant comment choisir α.
- On compare (u_n) aux repères $\frac{1}{n^\alpha}$.

Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_k$ une série à termes réels positifs.

- Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, ie $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_k$ converge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum u_k$ converge
- Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{=} o\left(u_n\right)$, ie $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_k$ diverge.
  La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et à partir d'un certain rang $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n$
- Si il existe un réel α et un réel $l \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ ie $n^\alpha u_n \to l \neq 0$, alors $\sum u_k$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
  La série $\sum \frac{l}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

- On calcule la limite de $(n^\alpha u_n)$ pour comparer u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ en réfléchissant comment choisir α.
- On compare (u_n) aux repères $\frac{1}{n^\alpha}$.

Exemples

- Soit $\beta > 1$. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$ est convergente.

- Série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Exemples

- Soit $\beta > 1$. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$ est convergente.

On considère $\alpha \in]1, \beta[$ (par exemple $\alpha = \frac{1+\beta}{2}$), on a alors :

$$\frac{\ln n}{n^\beta} n^\alpha = \ln(n) n^{\alpha-\beta} \to 0$$

donc à partir d'un certain rang :

$$\frac{\ln n}{n^\beta} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

D'où la convergence.

- Série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Exemples

- Soit $\beta > 1$. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$ est convergente.

- Série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Exemples

- Soit $\beta > 1$. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$ est convergente.

- Série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Si $\alpha = 0$, alors $u_n = 1$ et la série diverge grossièrement.
Si $\alpha < 0$, alors $n^\alpha \to 0$ et donc $u_n \to 1$ et la série diverge grossièrement.
Si $\alpha > 0$, alors $e^{-n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc la série converge

Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs.
On suppose que le rapport entre deux termes consécutifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite l lorsque n tends vers $+\infty$.
Alors :

- Si $l < 1$ la série $\sum u_k$ est convergente.
- Si $l > 1$ la série $\sum u_k$ diverge grossièrement.

Si $l = 1$ on ne peut rien dire ! (idem si il n'y a pas de limite)
Très utile si le terme général est une factorielle ou une puissance : le quotient se simplifie !

Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs.

On suppose que le rapport entre deux termes consécutifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite l lorsque n tends vers $+\infty$.

Alors :

- Si $l < 1$ la série $\sum u_k$ est convergente.
- Si $l > 1$ la série $\sum u_k$ diverge grossièrement.

Si $l = 1$ on ne peut rien dire ! (idem si il n'y a pas de limite)

Très utile si le terme général est une factorielle ou une puissance : le quotient se simplifie !

Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs.
On suppose que le rapport entre deux termes consécutifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite l lorsque n tends vers $+\infty$.
Alors :

- Si $l < 1$ la série $\sum u_k$ est convergente.
- Si $l > 1$ la série $\sum u_k$ diverge grossièrement.

Si $l = 1$ on ne peut rien dire ! (idem si il n'y a pas de limite)
Très utile si le terme général est une factorielle ou une puissance : le quotient se simplifie !

Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs.
On suppose que le rapport entre deux termes consécutifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite l lorsque n tends vers $+\infty$.
Alors :

- Si $l < 1$ la série $\sum u_k$ est convergente.
- Si $l > 1$ la série $\sum u_k$ diverge grossièrement.

Si $l = 1$ on ne peut rien dire ! (idem si il n'y a pas de limite)
Très utile si le terme général est une factorielle ou une puissance : le quotient se simplifie !

Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs.
On suppose que le rapport entre deux termes consécutifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite l lorsque n tends vers $+\infty$.
Alors :

- Si $l < 1$ la série $\sum u_k$ est convergente.
- Si $l > 1$ la série $\sum u_k$ diverge grossièrement.

Si $l = 1$ on ne peut rien dire ! (idem si il n'y a pas de limite)
Très utile si le terme général est une factorielle ou une puissance : le quotient se simplifie !

Démonstration du critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$.

- On pose $\lambda = \frac{1+l}{2}$ (entre 1 et l), si bien que $\lambda \in]l, 1[$,
- $\lim_{n\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, donc à partir d'un certain rang n_0 : $u_{n+1} \leqslant \lambda u_n$
- Et par récurrence immédiate : $u_n \leqslant \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, pour $n \geqslant n_0$
- Or $\sum_n \lambda^n$ converge car $0 < \lambda < 1$ donc $\sum_n u_n$ converge.
- On a comparé $\sum u_n$ et la série géométrique $\sum \lambda^n$

- Idem pour $l > 1$.

- Voir les démonstrations des croissances comparées :

$$a^n = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(a^n)$$

Démonstration du critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$.

- On pose $\lambda = \frac{1+l}{2}$ (entre 1 et l), si bien que $\lambda \in]l, 1[$,
- $\lim\limits_{n\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, donc à partir d'un certain rang n_0 : $u_{n+1} \leqslant \lambda u_n$
- Et par récurrence immédiate : $u_n \leqslant \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, pour $n \geqslant n_0$
- Or $\sum\limits_n \lambda^n$ converge car $0 < \lambda < 1$ donc $\sum\limits_n u_n$ converge.
- On a comparé $\sum u_n$ et la série géométrique $\sum \lambda^n$

- Idem pour $l > 1$.

- Voir les démonstrations des croissances comparées :

$$a^n = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(a^n)$$

Démonstration du critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$.

- On pose $\lambda = \frac{1+l}{2}$ (entre 1 et l), si bien que $\lambda \in]l, 1[$,
- $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, donc à partir d'un certain rang n_0 : $u_{n+1} \leqslant \lambda u_n$
- Et par récurrence immédiate : $u_n \leqslant \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, pour $n \geqslant n_0$
- Or $\sum\limits_n \lambda^n$ converge car $0 < \lambda < 1$ donc $\sum\limits_n u_n$ converge.
- On a comparé $\sum u_n$ et la série géométrique $\sum \lambda^n$

- Idem pour $l > 1$.

- Voir les démonstrations des croissances comparées :

$$a^n = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(a^n)$$

Démonstration du critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$.

- On pose $\lambda = \frac{1+l}{2}$ (entre 1 et l), si bien que $\lambda \in]l, 1[$,
- $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, donc à partir d'un certain rang n_0 : $u_{n+1} \leqslant \lambda u_n$
- Et par récurrence immédiate : $u_n \leqslant \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, pour $n \geqslant n_0$
- Or $\sum\limits_n \lambda^n$ converge car $0 < \lambda < 1$ donc $\sum\limits_n u_n$ converge.
- On a comparé $\sum u_n$ et la série géométrique $\sum \lambda^n$

- Idem pour $l > 1$.

- Voir les démonstrations des croissances comparées :

$$a^n = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(a^n)$$

Démonstration du critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$.

- On pose $\lambda = \frac{1+l}{2}$ (entre 1 et l), si bien que $\lambda \in]l, 1[$,
- $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, donc à partir d'un certain rang n_0 : $u_{n+1} \leqslant \lambda u_n$
- Et par récurrence immédiate : $u_n \leqslant \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, pour $n \geqslant n_0$
- Or $\sum\limits_n \lambda^n$ converge car $0 < \lambda < 1$ donc $\sum\limits_n u_n$ converge.
- On a comparé $\sum u_n$ et la série géométrique $\sum \lambda^n$

- Idem pour $l > 1$.

- Voir les démonstrations des croissances comparées :

$$a^n = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(a^n)$$

Démonstration du critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$.

- On pose $\lambda = \frac{1+l}{2}$ (entre 1 et l), si bien que $\lambda \in]l, 1[$,
- $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, donc à partir d'un certain rang n_0 : $u_{n+1} \leqslant \lambda u_n$
- Et par récurrence immédiate : $u_n \leqslant \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, pour $n \geqslant n_0$
- Or $\displaystyle\sum_n \lambda^n$ converge car $0 < \lambda < 1$ donc $\displaystyle\sum_n u_n$ converge.
- On a comparé $\sum u_n$ et la série géométrique $\sum \lambda^n$

- Idem pour $l > 1$.

- Voir les démonstrations des croissances comparées :

$$a^n = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(a^n)$$

Démonstration du critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$.

- On pose $\lambda = \frac{1+l}{2}$ (entre 1 et l), si bien que $\lambda \in]l, 1[$,
- $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, donc à partir d'un certain rang n_0 : $u_{n+1} \leqslant \lambda u_n$
- Et par récurrence immédiate : $u_n \leqslant \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, pour $n \geqslant n_0$
- Or $\sum\limits_n \lambda^n$ converge car $0 < \lambda < 1$ donc $\sum\limits_n u_n$ converge.
- On a comparé $\sum u_n$ et la série géométrique $\sum \lambda^n$

- Idem pour $l > 1$.

- Voir les démonstrations des croissances comparées :

$$a^n = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(a^n)$$

Démonstration du critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$.

- On pose $\lambda = \frac{1+l}{2}$ (entre 1 et l), si bien que $\lambda \in]l, 1[$,
- $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, donc à partir d'un certain rang n_0 : $u_{n+1} \leqslant \lambda u_n$
- Et par récurrence immédiate : $u_n \leqslant \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, pour $n \geqslant n_0$
- Or $\sum\limits_n \lambda^n$ converge car $0 < \lambda < 1$ donc $\sum\limits_n u_n$ converge.
- On a comparé $\sum u_n$ et la série géométrique $\sum \lambda^n$

- Idem pour $l > 1$.

- Voir les démonstrations des croissances comparées :

$$a^n = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(n!) \qquad n^\alpha = \underset{n\infty}{o}(a^n)$$

Démonstration du critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$.

- On pose $\lambda = \frac{1+l}{2}$ (entre 1 et l), si bien que $\lambda \in]l, 1[$,
- $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, donc à partir d'un certain rang n_0 : $u_{n+1} \leqslant \lambda u_n$
- Et par récurrence immédiate : $u_n \leqslant \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, pour $n \geqslant n_0$
- Or $\sum\limits_n \lambda^n$ converge car $0 < \lambda < 1$ donc $\sum\limits_n u_n$ converge.
- On a comparé $\sum u_n$ et la série géométrique $\sum \lambda^n$

- Idem pour $l > 1$.

- Voir les démonstrations des croissances comparées :

$$a^n \underset{n\infty}{=} o(n!) \qquad n^\alpha \underset{n\infty}{=} o(n!) \qquad n^\alpha \underset{n\infty}{=} o(a^n)$$

Démonstration du critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$.

- On pose $\lambda = \frac{1+l}{2}$ (entre 1 et l), si bien que $\lambda \in]l, 1[$,
- $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, donc à partir d'un certain rang n_0 : $u_{n+1} \leqslant \lambda u_n$
- Et par récurrence immédiate : $u_n \leqslant \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, pour $n \geqslant n_0$
- Or $\sum\limits_n \lambda^n$ converge car $0 < \lambda < 1$ donc $\sum\limits_n u_n$ converge.
- On a comparé $\sum u_n$ et la série géométrique $\sum \lambda^n$

- Idem pour $l > 1$.

- Voir les démonstrations des croissances comparées :

$$a^n \underset{n\infty}{=} o\,(n!) \qquad n^\alpha \underset{n\infty}{=} o\,(n!) \qquad n^\alpha \underset{n\infty}{=} o\,(a^n)$$

Exemples pour la règle de d'Alembert

Convergence de $\sum_n \frac{n!}{n^n}$

Convergence de $\sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$

Exemples pour la règle de d'Alembert

Convergence de $\sum_n \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

On met sous forme exponentielle pour obtenir : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to e^{-1} < 1$ La série converge

Convergence de $\sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$

Exemples pour la règle de d'Alembert

Convergence de $\displaystyle\sum_n \frac{n!}{n^n}$

Convergence de $\displaystyle\sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$

Exemples pour la règle de d'Alembert

Convergence de $\sum_n \frac{n!}{n^n}$

Convergence de $\sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{n+1} \to 2.$$

La série diverge.

Formule de Stirling

On a :

$$n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Une des rares formules à connaître par cœur !

- On verra la démonstration en exercice.
- Utile pour les séries : permet de donner un équivalent d'une série lorsqu'il y a des factorielles et que le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure.
- Il y a souvent des factorielles dans les séries à cause de la formule de Taylor !

Formule de Stirling

On a :

$$n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Une des rares formules à connaître par cœur !

- On verra la démonstration en exercice.
- Utile pour les séries : permet de donner un équivalent d'une série lorsqu'il y a des factorielles et que le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure.
- Il y a souvent des factorielles dans les séries à cause de la formule de Taylor !

Formule de Stirling

On a :

$$n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Une des rares formules à connaître par cœur !

- On verra la démonstration en exercice.
- Utile pour les séries : permet de donner un équivalent d'une série lorsqu'il y a des factorielles et que le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure.
- Il y a souvent des factorielles dans les séries à cause de la formule de Taylor !

Formule de Stirling

On a :

$$n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Une des rares formules à connaître par cœur !

- On verra la démonstration en exercice.
- Utile pour les séries : permet de donner un équivalent d'une série lorsqu'il y a des factorielles et que le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure.
- Il y a souvent des factorielles dans les séries à cause de la formule de Taylor !

Formule de Stirling

On a :

$$n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Une des rares formules à connaître par cœur !

- On verra la démonstration en exercice.
- Utile pour les séries : permet de donner un équivalent d'une série lorsqu'il y a des factorielles et que le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure.
- Il y a souvent des factorielles dans les séries à cause de la formule de Taylor !

Comment utiliser la formule de Stirling

- On a : $n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
- Donc : $(2n)! \underset{n\infty}{\sim} 4^n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}$.

- On peut aussi faire :

$$(n+1)! = (n+1)n! \underset{n\infty}{\sim} nn! \underset{n\infty}{\sim} n^{n+1}e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Il est souvent plus simple d'écrire $(n+1)! = (n+1)n!$ plutôt que d'appliquer la formule « en $n+1$ ».

Comment utiliser la formule de Stirling

- On a : $n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
- Donc : $(2n)! \underset{n\infty}{\sim} 4^n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}$.

- On peut aussi faire :

$$(n+1)! = (n+1)n! \underset{n\infty}{\sim} nn! \underset{n\infty}{\sim} n^{n+1}e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Il est souvent plus simple d'écrire $(n+1)! = (n+1)n!$ plutôt que d'appliquer la formule « en $n+1$ ».

Comment utiliser la formule de Stirling

- On a : $n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
- Donc : $(2n)! \underset{n\infty}{\sim} 4^n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}$.

- On peut aussi faire :

$$(n+1)! = (n+1)n! \underset{n\infty}{\sim} nn! \underset{n\infty}{\sim} n^{n+1} e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Il est souvent plus simple d'écrire $(n+1)! = (n+1)n!$ plutôt que d'appliquer la formule « en $n+1$ ».

Comment utiliser la formule de Stirling

- On a : $n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
- Donc : $(2n)! \underset{n\infty}{\sim} 4^n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}$.

- On peut aussi faire :

$$(n+1)! = (n+1)n! \underset{n\infty}{\sim} nn! \underset{n\infty}{\sim} n^{n+1}e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Il est souvent plus simple d'écrire $(n+1)! = (n+1)n!$ plutôt que d'appliquer la formule « en $n+1$ ».

Application de la formule de Stirling

Nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n)^n)}{n!}$

Application de la formule de Stirling

Nature de la série : $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\ln(n)^n)}{n!}$

- Série à termes positifs. Clairement, le $n!$ va « l'emporter » sur $\ln(n)^n$.
- On le montre avec la formule de Stirling :

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{\ln(n)}{e^{-1}n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On regarde ensuite $n^2 u_n$:

$$n^2 u_n \underset{n\infty}{\sim} \left(\underbrace{\frac{\ln(n)}{e^{-1}n}}_{\to 0}\right)^{n-2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{-2}}}_{\text{constant}} \underbrace{\frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}}}_{\to 0}$$

- Ainsi, $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc la série $\sum u_n$ converge.

Nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n)^n)}{n!}$

- Série à termes positifs. Clairement, le $n!$ va « l'emporter » sur $\ln(n)^n$.
- On le montre avec la formule de Stirling :

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{\ln(n)}{e^{-1}n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On regarde ensuite $n^2 u_n$:

$$n^2 u_n \underset{n\infty}{\sim} \left(\underbrace{\frac{\ln(n)}{e^{-1}n}}_{\to 0}\right)^{n-2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{-2}}}_{\text{constant}} \underbrace{\frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}}}_{\to 0}$$

- Ainsi, $u_n = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc la série $\sum u_n$ converge.

Application de la formule de Stirling

Nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n)^n)}{n!}$

- Série à termes positifs. Clairement, le $n!$ va « l'emporter » sur $\ln(n)^n$.
- On le montre avec la formule de Stirling :

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{\ln(n)}{e^{-1}n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On regarde ensuite $n^2 u_n$:

$$n^2 u_n \underset{n\infty}{\sim} \left(\underbrace{\frac{\ln(n)}{e^{-1}n}}_{\to 0}\right)^{n-2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{-2}}}_{\text{constant}} \underbrace{\frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}}}_{\to 0}$$

- Ainsi, $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc la série $\sum u_n$ converge.

Nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n)^n)}{n!}$

- Série à termes positifs. Clairement, le $n!$ va « l'emporter » sur $\ln(n)^n$.
- On le montre avec la formule de Stirling :

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{\ln(n)}{e^{-1}n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On regarde ensuite $n^2 u_n$:

$$n^2 u_n \underset{n\infty}{\sim} \left(\underbrace{\frac{\ln(n)}{e^{-1}n}}_{\to 0}\right)^{n-2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{-2}}}_{\text{constant}} \underbrace{\frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}}}_{\to 0}$$

- Ainsi, $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc la série $\sum u_n$ converge.

Applications de la formule de Stirling

Nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$

Applications de la formule de Stirling

Nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$

Série à termes positifs.

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4n\pi}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}\right)^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

Donc

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

la série $\sum u_n$ converge !

Stirling ou d'Alembert ?

Nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$ avec la règle de d'Alembert.

Stirling ou d'Alembert ?

Nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$ avec la règle de d'Alembert.

rapport de deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2n!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{1}{4} \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{4n^2}{4n^2} \xrightarrow[n\infty]{} 1
\end{aligned}$$

Stirling ou d'Alembert ?

Nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$ avec la règle de d'Alembert.

rapport de deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2n!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{1}{4} \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{4n^2}{4n^2} \xrightarrow[n\infty]{} 1
\end{aligned}$$

La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

Séries absolument convergente

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\sum u_k$ la série de terme général u_n.

On dit que la série $\sum u_k$ converge absolument si et seulement si la série à termes réels positifs $\sum |u_k|$ converge.

- Toute série absolument convergente est convergente.
- On a de plus :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Toujours commencer par essayer de montrer la convergence absolue.

Séries absolument convergente

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\sum u_k$ la série de terme général u_n.

On dit que la série $\sum u_k$ converge absolument si et seulement si la série à termes réels positifs $\sum |u_k|$ converge.

- Toute série absolument convergente est convergente.
- On a de plus :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Toujours commencer par essayer de montrer la convergence absolue.

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\sum u_k$ la série de terme général u_n.

On dit que la série $\sum u_k$ converge absolument si et seulement si la série à termes réels positifs $\sum |u_k|$ converge.

- Toute série absolument convergente est convergente.
- On a de plus :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Toujours commencer par essayer de montrer la convergence absolue.

Séries absolument convergente

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\sum u_k$ la série de terme général u_n.

On dit que la série $\sum u_k$ **converge absolument** si et seulement si la série à termes réels positifs $\sum |u_k|$ converge.

- Toute série **absolument convergente est convergente**.
- On a de plus :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Toujours commencer par essayer de montrer la convergence absolue.

Séries absolument convergente

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\sum u_k$ la série de terme général u_n.

On dit que la série $\sum u_k$ converge absolument si et seulement si la série à termes réels positifs $\sum |u_k|$ converge.

- Toute série absolument convergente est convergente.
- On a de plus :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Valeur absolue ou module !

Toujours commencer par essayer de montrer la convergence absolue.

Séries absolument convergente

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\sum u_k$ la série de terme général u_n.

On dit que la série $\sum u_k$ **converge absolument** si et seulement si la série à termes réels positifs $\sum |u_k|$ converge.

- Toute série **absolument convergente est convergente**.
- On a de plus :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Valeur absolue ou module !

Toujours commencer par essayer de montrer la convergence absolue.

Soit (u_n) une suite complexe, et (v_n) une suite de réels positifs.
Si $u_n \underset{n\infty}{=} O\,(v_n)$ et si la série à termes positifs $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

- Peut être utilisé pour des séries complexes (c'est le module).
- Permet donc d'obtenir des convergence absolue par comparaison aux séries usuelles.

Par exemple : si $\theta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ converge puisque $\displaystyle\frac{e^{in\theta}}{n^2} \underset{n\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Série absolument convergente

Soit (u_n) une suite complexe, et (v_n) une suite de réels positifs.
Si $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$ (ie si $\left|\frac{u_n}{v_n}\right|$ est borné) et si la série à termes positifs $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

- Peut être utilisé pour des séries complexes (c'est le module).
- Permet donc d'obtenir des convergence absolue par comparaison aux séries usuelles.

Par exemple : si $\theta \in \mathbb{R}$, $\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ converge puisque $\frac{e^{in\theta}}{n^2} \underset{n\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Série absolument convergente

Soit (u_n) une suite complexe, et (v_n) une suite de réels positifs.
Si $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$ (ie si $\left|\frac{u_n}{v_n}\right|$ est borné) et si la série à termes positifs $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

- Peut être utilisé pour des séries complexes (c'est le module).
- Permet donc d'obtenir des convergence absolue par comparaison aux séries usuelles.

Par exemple : si $\theta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ converge puisque $\displaystyle\frac{e^{in\theta}}{n^2} \underset{n\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Série absolument convergente

Soit (u_n) une suite complexe, et (v_n) une suite de réels positifs.
Si $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$ (ie si $\left|\frac{u_n}{v_n}\right|$ est borné) et si la série à termes positifs $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

- Peut être utilisé pour des séries complexes (c'est le module).
- Permet donc d'obtenir des convergence absolue par comparaison aux séries usuelles.

Par exemple : si $\theta \in \mathbb{R}$, $\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ converge puisque $\frac{e^{in\theta}}{n^2} \underset{n\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Série absolument convergente

Soit (u_n) une suite complexe, et (v_n) une suite de réels positifs.
Si $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$ (ie si $\left|\frac{u_n}{v_n}\right|$ est borné) et si la série à termes positifs $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

- Peut être utilisé pour des séries complexes (c'est le module).
- Permet donc d'obtenir des convergence absolue par comparaison aux séries usuelles.

Par exemple : si $\theta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ converge puisque $\displaystyle\frac{e^{in\theta}}{n^2} \underset{n\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Série absolument convergente

Soit (u_n) une suite complexe, et (v_n) une suite de réels positifs.
Si $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$ (ie si $\left|\frac{u_n}{v_n}\right|$ est borné) et si la série à termes positifs $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

- Peut être utilisé pour des séries complexes (c'est le module).
- Permet donc d'obtenir des convergence absolue par comparaison aux séries usuelles.

Par exemple : si $\theta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ converge puisque $\displaystyle\frac{e^{in\theta}}{n^2} \underset{n\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Séries absolument convergente

- Convergence de $\sum_n \frac{\sin(n^2)}{n^2}$

Séries absolument convergente

- Convergence de $\sum_n \frac{\sin(n^2)}{n^2}$

Cette série est absolument convergente car :

$$\sum_n \frac{|\sin(n^2)|}{n^2} \text{ converge par comparaison : } \frac{|\sin(n^2)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Séries alternées

Une série réelle $\sum u_k$ est dite alternée si pour tout entier naturel n, les termes u_n et u_{n+1} sont de signe contraire.

Théorème spécial des séries alternées

Une série alternées $\sum u_n$ telle que $\left(|u_n|\right)$ est une suite décroissante qui tends vers 0 est convergente.

De plus :

- On a une estimation du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.
- On connaît le signe du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ a le signe de u_{n+1}.
- La somme a le signe du premier terme.

Séries alternées

Une série réelle $\sum u_k$ est dite alternée si pour tout entier naturel n, les termes u_n et u_{n+1} sont de signe contraire.

Autrement dit la série s'écrit alors $\sum(-1)^k v_k$ ou $\sum(-1)^{k+1} v_k$ avec v_k positif

Théorème spécial des séries alternées

Une série alternées $\sum u_n$ telle que $\left(|u_n|\right)$ est une suite décroissante qui tends vers 0 est convergente.

De plus :

- On a une estimation du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.
- On connaît le signe du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ a le signe de u_{n+1}.
- La somme a le signe du premier terme.

Une série réelle $\sum u_k$ est dite alternée si pour tout entier naturel n, les termes u_n et u_{n+1} sont de signe contraire.

Théorème spécial des séries alternées

Une série alternées $\sum u_n$ telle que $\left(|u_n|\right)$ est une suite décroissante qui tends vers 0 est convergente.

De plus :

- On a une estimation du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.
- On connaît le signe du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ a le signe de u_{n+1}.
- La somme a le signe du premier terme.

Séries alternées

Une série réelle $\sum u_k$ est dite alternée si pour tout entier naturel n, les termes u_n et u_{n+1} sont de signe contraire.

Théorème spécial des séries alternées

Une série alternées $\sum u_n$ telle que $\left(|u_n|\right)$ est une suite décroissante qui tends vers 0 est convergente.

De plus :

- On a une estimation du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.
- On connaît le signe du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ a le signe de u_{n+1}.
- La somme a le signe du premier terme.

Séries alternées

Une série réelle $\sum u_k$ est dite alternée si pour tout entier naturel n, les termes u_n et u_{n+1} sont de signe contraire.

Théorème spécial des séries alternées

Une série alternées $\sum u_n$ telle que $\left(|u_n|\right)$ est une suite décroissante qui tends vers 0 est convergente.

De plus :

- On a une estimation du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.
- On connaît le signe du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ a le signe de u_{n+1}.
- La somme a le signe du premier terme.

Séries alternées

Une série réelle $\sum u_k$ est dite alternée si pour tout entier naturel n, les termes u_n et u_{n+1} sont de signe contraire.

Théorème spécial des séries alternées

Une série alternées $\sum u_n$ telle que $\left(|u_n|\right)$ est une suite décroissante qui tends vers 0 est convergente.

De plus :

- On a une estimation du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.
- On connaît le signe du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ a le signe de u_{n+1}.
- La somme a le signe du premier terme.

$\sum u_k$ est alternée avec $\left(|u_n|\right)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$.

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle

- On a :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= u_{2n+1} \to 0 \\ S_{2n+2} - S_{2n} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \leqslant 0 \quad \text{car } |u_{2n+2}| \leqslant |u_{2n+1}| \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} &= u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0 \quad \text{car } |u_{2n+3}| \leqslant |u_{2n+2}| \end{aligned}$$

- Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ! donc convergente et (S_n) converge, ie la série est convergente.

Résultat important puisqu'il utilise l'axiome fondamental de $\mathbb{R}$.

Séries alternées (démonstration)

$\sum u_k$ est alternée avec $\left(|u_n|\right)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$.

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle

- On a :

$$\begin{aligned}
S_{2n+1} - S_{2n} &= u_{2n+1} \to 0 \\
S_{2n+2} - S_{2n} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \leqslant 0 \quad \text{car } |u_{2n+2}| \leqslant |u_{2n+1}| \\
S_{2n+3} - S_{2n+1} &= u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0 \quad \text{car } |u_{2n+3}| \leqslant |u_{2n+2}|
\end{aligned}$$

- Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ! donc convergente et (S_n) converge, ie la série est convergente.

Résultat important puisqu'il utilise l'axiome fondamental de $\mathbb{R}$.

Séries alternées (démonstration)

$\sum u_k$ est alternée avec $\left(|u_n|\right)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$.

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle

- On a :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= u_{2n+1} \to 0 \\ S_{2n+2} - S_{2n} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \leqslant 0 \quad \text{car } |u_{2n+2}| \leqslant |u_{2n+1}| \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} &= u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0 \quad \text{car } |u_{2n+3}| \leqslant |u_{2n+2}| \end{aligned}$$

- Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ! donc convergente et (S_n) converge, ie la série est convergente.

Résultat important puisqu'il utilise l'axiome fondamental de $\mathbb{R}$.

Séries alternées (démonstration)

$\sum u_k$ est alternée avec $\left(|u_n|\right)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$.

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle

- On a :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= u_{2n+1} \to 0 \\ S_{2n+2} - S_{2n} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \leqslant 0 \quad \text{car } |u_{2n+2}| \leqslant |u_{2n+1}| \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} &= u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0 \quad \text{car } |u_{2n+3}| \leqslant |u_{2n+2}| \end{aligned}$$

- Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ! donc convergente et (S_n) converge, ie la série est convergente.

Résultat important puisqu'il utilise l'axiome fondamental de $\mathbb{R}$.

Séries alternées (démonstration suite)

$\sum u_k$ est alternée avec $\left(|u_n|\right)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle et $S = \lim_{n\infty} S_n$. On a vu que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, avec (S_{2n}) décroissante.

- En étudiant les suites adjacentes, on a $|S_{2n} - S| \leqslant |S_{2n+1} - S_{2n}|$ ie : $|R_{2n}| \leqslant |u_{2n+1}|$
- idem : $|S_{2n+1} - S| \leqslant |S_{2n+2} - S_{2n+1}|$ ie $|R_{2n+1}| \leqslant |u_{2n+2}|$.
- Ainsi on trouve l'estimation du reste :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Séries alternées (démonstration suite)

$\sum u_k$ est alternée avec $\left(|u_n|\right)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle et $S = \lim_{n\infty} S_n$. On a vu que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, avec (S_{2n}) décroissante.

- En étudiant les suites adjacentes, on a $|S_{2n} - S| \leqslant |S_{2n+1} - S_{2n}|$ ie : $|R_{2n}| \leqslant |u_{2n+1}|$
- idem : $|S_{2n+1} - S| \leqslant |S_{2n+2} - S_{2n+1}|$ ie $|R_{2n+1}| \leqslant |u_{2n+2}|$.
- Ainsi on trouve l'estimation du reste :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Séries alternées (démonstration suite)

$\sum u_k$ est alternée avec $\left(|u_n|\right)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle et $S = \lim_{n\infty} S_n$. On a vu que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, avec (S_{2n}) décroissante.

- En étudiant les suites adjacentes, on a $|S_{2n} - S| \leqslant |S_{2n+1} - S_{2n}|$ ie : $|R_{2n}| \leqslant |u_{2n+1}|$
- idem : $|S_{2n+1} - S| \leqslant |S_{2n+2} - S_{2n+1}|$ ie $|R_{2n+1}| \leqslant |u_{2n+2}|$.
- Ainsi on trouve l'estimation du reste :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Séries alternées (démonstration suite)

$\sum u_k$ est alternée avec $\left(|u_n|\right)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle et $S = \lim_{n\infty} S_n$. On a vu que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, avec (S_{2n}) décroissante.

- En étudiant les suites adjacentes, on a $|S_{2n} - S| \leqslant |S_{2n+1} - S_{2n}|$ ie : $|R_{2n}| \leqslant |u_{2n+1}|$
- idem : $|S_{2n+1} - S| \leqslant |S_{2n+2} - S_{2n+1}|$ ie $|R_{2n+1}| \leqslant |u_{2n+2}|$.
- Ainsi on trouve l'estimation du reste :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Séries alternées (démonstration suite)

$\sum u_k$ est alternée avec $\left(|u_n|\right)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle et $S = \lim_{n\infty} S_n$. On a vu que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, avec (S_{2n}) décroissante.

- Comme $S_0 = u_0 > 0$ alors $S_1 = u_0 + u_1 > 0$ or on a $S \in [S_1, S_0]$, ainsi $S > 0$. La somme S est donc du signe du premier terme !
- De même, $S_{2n} \geqslant S$, donc $R_{2n} = S - S_{2n} \leqslant 0$ (du signe de u_{2n+1}). On vérifie aussi que $R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \geqslant 0$ (du signe de u_{2n+2}). Le reste d'ordre n est donc du signe u_{2n+1} (terme suivant).

- Le point important : les sommes partielles de rang pairs et impairs sont adjacentes ! donc la somme S est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques.

Séries alternées (démonstration suite)

$\sum u_k$ est alternée avec $\left(|u_n|\right)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle et $S = \lim_{n\infty} S_n$. On a vu que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, avec (S_{2n}) décroissante.

- Comme $S_0 = u_0 > 0$ alors $S_1 = u_0 + u_1 > 0$ or on a $S \in [S_1, S_0]$, ainsi $S > 0$. La somme S est donc du signe du premier terme !
- De même, $S_{2n} \geqslant S$, donc $R_{2n} = S - S_{2n} \leqslant 0$ (du signe de u_{2n+1}). On vérifie aussi que $R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \geqslant 0$ (du signe de u_{2n+2}). Le reste d'ordre n est donc du signe u_{2n+1} (terme suivant).

- Le point important : les sommes partielles de rang pairs et impairs sont adjacentes ! donc la somme S est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques.

Séries alternées (démonstration suite)

$\sum u_k$ est alternée avec $\left(|u_n|\right)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle et $S = \lim_{n\infty} S_n$. On a vu que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, avec (S_{2n}) décroissante.

- Comme $S_0 = u_0 > 0$ alors $S_1 = u_0 + u_1 > 0$ or on a $S \in [S_1, S_0]$, ainsi $S > 0$. La somme S est donc du signe du premier terme !
- De même, $S_{2n} \geqslant S$, donc $R_{2n} = S - S_{2n} \leqslant 0$ (du signe de u_{2n+1}). On vérifie aussi que $R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \geqslant 0$ (du signe de u_{2n+2}). Le reste d'ordre n est donc du signe u_{2n+1} (terme suivant).

- Le point important : les sommes partielles de rang pairs et impairs sont adjacentes ! donc la somme S est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques.

Exemples de séries alternées

La plus simple : $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Nature de la série : $\sum_{n} (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Les résultats d'encadrement donnent un critère d'arrêt pour les algorithmes de calcul de la somme.

Exemples de séries alternées

La plus simple : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

C'est une série alternée et que $\frac{1}{n} \to 0$ en décroissant

Nature de la série : $\sum_{n} (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Les résultats d'encadrement donnent un critère d'arrêt pour les algorithmes de calcul de la somme.

Exemples de séries alternées

La plus simple : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Nature de la série : $\displaystyle\sum_n (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + (-1)^n \sqrt{n} \underbrace{\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)}_{\underset{n\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

La première série est alternée et convergente, la deuxième est absolument convergente donc convergente.

Les résultats d'encadrement donnent un critère d'arrêt pour les algorithmes de calcul de la somme.

Exemples de séries alternées

La plus simple : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Nature de la série : $\displaystyle\sum_{n} (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Les résultats d'encadrement donnent un critère d'arrêt pour les algorithmes de calcul de la somme.

Des contre exemples

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne converge pas (sinon $\sum \frac{1}{n}$ convergerait).

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ ne converge pas.
Pourtant c'est bien une série alternée, et on a bien :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

Pour le montrer, il suffit de faire :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \text{ série divergente}$$

Des contre exemples

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne converge pas (sinon $\sum \frac{1}{n}$ convergerait).

Les critères de comparaison ne sont valables que pour les séries à termes positifs !

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ ne converge pas.
Pourtant c'est bien une série alternée, et on a bien :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

Pour le montrer, il suffit de faire :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \text{ série divergente}$$

Des contre exemples

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne converge pas (sinon $\sum \frac{1}{n}$ convergerait).

Les critères de comparaison ne sont valables que pour les séries à termes positifs !

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ ne converge pas.
Pourtant c'est bien une série alternée, et on a bien :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

Pour le montrer, il suffit de faire :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \text{ série divergente}$$

Des contre exemples

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne converge pas (sinon $\sum \frac{1}{n}$ convergerait).

Les critères de comparaison ne sont valables que pour les séries à termes positifs !

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ ne converge pas.

Pourtant c'est bien une série alternée, et on a bien :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

Pour le montrer, il suffit de faire :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \text{ série divergente}$$

La monotonie ne passe pas à l'équivalent !

Produit de Cauchy

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries. On appelle produit de Cauchy des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

- Il faut avoir repéré ces termes dans le tableau des valeurs de (u_i, v_j).
- Comme pour le produit de deux polynômes.

Produit de Cauchy

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries. On appelle produit de Cauchy des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

- Il faut avoir repéré ces termes dans le tableau des valeurs de (u_i, v_j).
- Comme pour le produit de deux polynômes.

Produit de Cauchy

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries. On appelle produit de Cauchy des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

- Il faut avoir repéré ces termes dans le tableau des valeurs de (u_i, v_j).
- Comme pour le produit de deux polynômes.

Convergence du produit de Cauchy

On appelle produit de Cauchy la série $\sum w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergente, alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente.
- On a de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration en exercice !

Si on développe les deux sommes, on retrouve ce résultat facilement !

Convergence du produit de Cauchy

On appelle produit de Cauchy la série $\sum w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergente, alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente.
- On a de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration en exercice !

Si on développe les deux sommes, on retrouve ce résultat facilement !

Convergence du produit de Cauchy

On appelle produit de Cauchy la série $\sum w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergente, alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente.
- On a de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration en exercice !

Si on développe les deux sommes, on retrouve ce résultat facilement !

Convergence du produit de Cauchy

On appelle produit de Cauchy la série $\sum w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergente, alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente.
- On a de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration en exercice !

Si on développe les deux sommes, on retrouve ce résultat facilement !

Convergence du produit de Cauchy

On appelle produit de Cauchy la série $\sum w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergente, alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente.
- On a de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration en exercice !

Si on développe les deux sommes, on retrouve ce résultat facilement !

Produit de Cauchy

- Parfois l'une des suites (u_n) et (v_n) (ou les deux) ne sont définies que pour $n \geqslant 1$.
- Il faut alors adapter la formule.
- Sauf indication contraire, le produit de Cauchy est :
  $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$ ie la somme des valeurs le long de la diagonale
- On regroupe donc les termes par valeur de la somme des indices, mais les indices i et j et n varient dans des intervalles à adapter.

Toujours refaire le schéma du tableau (avec les diagonales)

Toujours ré-écrire le produit des premiers termes pour voir le produit de Cauchy.

Le résultat du cours assure la convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries absolument convergente.

Produit de Cauchy

- Parfois l'une des suites (u_n) et (v_n) (ou les deux) ne sont définies que pour $n \geqslant 1$.
- Il faut alors adapter la formule.
- Sauf indication contraire, le produit de Cauchy est :

  $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$ ie la somme des valeurs le long de la diagonale
- On regroupe donc les termes par valeur de la somme des indices, mais les indices i et j et n varient dans des intervalles à adapter.

Toujours refaire le schéma du tableau (avec les diagonales)

Toujours ré-écrire le produit des premiers termes pour voir le produit de Cauchy.

Le résultat du cours assure la convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries absolument convergente.

Produit de Cauchy

- Parfois l'une des suites (u_n) et (v_n) (ou les deux) ne sont définies que pour $n \geqslant 1$.
- Il faut alors adapter la formule.
- Sauf indication contraire, le produit de Cauchy est :
  $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$ ie la somme des valeurs le long de la diagonale
- On regroupe donc les termes par valeur de la somme des indices, mais les indices i et j et n varient dans des intervalles à adapter.

Toujours refaire le schéma du tableau (avec les diagonales)

Toujours ré-écrire le produit des premiers termes pour voir le produit de Cauchy.

Le résultat du cours assure la convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries absolument convergente.

Produit de Cauchy

- Parfois l'une des suites (u_n) et (v_n) (ou les deux) ne sont définies que pour $n \geqslant 1$.
- Il faut alors adapter la formule.
- Sauf indication contraire, le produit de Cauchy est :
  $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$ ie la somme des valeurs le long de la diagonale
- On regroupe donc les termes par valeur de la somme des indices, mais les indices i et j et n varient dans des intervalles à adapter.

Toujours refaire le schéma du tableau (avec les diagonales)

Toujours ré-écrire le produit des premiers termes pour voir le produit de Cauchy.

Le résultat du cours assure la convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries absolument convergente.

Produit de Cauchy

- Parfois l'une des suites (u_n) et (v_n) (ou les deux) ne sont définies que pour $n \geqslant 1$.
- Il faut alors adapter la formule.
- Sauf indication contraire, le produit de Cauchy est :
  $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$ ie la somme des valeurs le long de la diagonale
- On regroupe donc les termes par valeur de la somme des indices, mais les indices i et j et n varient dans des intervalles à adapter.

Toujours refaire le schéma du tableau (avec les diagonales)

Toujours ré-écrire le produit des premiers termes pour voir le produit de Cauchy.

Le résultat du cours assure la convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries absolument convergente.

Produit de Cauchy

- Parfois l'une des suites (u_n) et (v_n) (ou les deux) ne sont définies que pour $n \geqslant 1$.
- Il faut alors adapter la formule.
- Sauf indication contraire, le produit de Cauchy est :
  $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$ ie la somme des valeurs le long de la diagonale
- On regroupe donc les termes par valeur de la somme des indices, mais les indices i et j et n varient dans des intervalles à adapter.

Toujours refaire le schéma du tableau (avec les diagonales)

Toujours ré-écrire le produit des premiers termes pour voir le produit de Cauchy.

Le résultat du cours assure la convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries absolument convergente.

Produit de Cauchy

- Parfois l'une des suites (u_n) et (v_n) (ou les deux) ne sont définies que pour $n \geqslant 1$.
- Il faut alors adapter la formule.
- Sauf indication contraire, le produit de Cauchy est :
  $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$ ie la somme des valeurs le long de la diagonale
- On regroupe donc les termes par valeur de la somme des indices, mais les indices i et j et n varient dans des intervalles à adapter.

Toujours refaire le schéma du tableau (avec les diagonales)

Toujours ré-écrire le produit des premiers termes pour voir le produit de Cauchy.

Le résultat du cours assure la convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries absolument convergente.

Produit de Cauchy

- Parfois l'une des suites (u_n) et (v_n) (ou les deux) ne sont définies que pour $n \geqslant 1$.
- Il faut alors adapter la formule.
- Sauf indication contraire, le produit de Cauchy est :
  $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$ ie la somme des valeurs le long de la diagonale
- On regroupe donc les termes par valeur de la somme des indices, mais les indices i et j et n varient dans des intervalles à adapter.

Toujours refaire le schéma du tableau (avec les diagonales)

Toujours ré-écrire le produit des premiers termes pour voir le produit de Cauchy.

Le résultat du cours assure la convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries absolument convergente.

- Lorsque les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour $n \geqslant 1$, on pose de même :

$$\forall n \geqslant 2,\ w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{i=1}^{n-1} u_{n-i} v_i = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_{n-i}.$$

- Sur le tableau, on voit bien pourquoi la somme va de 1 à $n-1$!

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + \dots)(v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + \dots) =$$
$$\underbrace{(u_1 v_1)}_{w_2} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1)}_{w_3} + \underbrace{(u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1)}_{w_4} + \cdots + \dots$$

- Si les deux séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ sont absolument convergente, alors on a de même : $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ absolument convergente et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right)$$

- Lorsque les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour $n \geqslant 1$, on pose de même :
$$\forall n \geqslant 2,\ w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{i=1}^{n-1} u_{n-i} v_i = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_{n-i}.$$
- Sur le tableau, on voit bien pourquoi la somme va de 1 à $n-1$!

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + \dots)(v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + \dots) =$$
$$\underbrace{(u_1 v_1)}_{w_2} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1)}_{w_3} + \underbrace{(u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1)}_{w_4} + \cdots + \dots$$

- Si les deux séries $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ sont absolument convergente, alors on a de même : $\sum_{n \geqslant 2} w_n$ absolument convergente et
$$\sum_{n=2}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right)$$

- Lorsque les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour $n \geqslant 1$, on pose de même :

$$\forall n \geqslant 2,\ w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{i=1}^{n-1} u_{n-i} v_i = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_{n-i}.$$

- Sur le tableau, on voit bien pourquoi la somme va de 1 à $n-1$!

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + \dots)(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + \dots) =$$
$$\underbrace{(u_1 v_1)}_{w_2} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1)}_{w_3} + \underbrace{(u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1)}_{w_4} + \dots + \dots$$

- Si les deux séries $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ sont absolument convergente, alors on a de même : $\sum_{n \geqslant 2} w_n$ absolument convergente et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right)$$

- Lorsque les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour $n \geqslant 1$, on pose de même :

$$\forall n \geqslant 2,\ w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{i=1}^{n-1} u_{n-i} v_i = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_{n-i}.$$

- Sur le tableau, on voit bien pourquoi la somme va de 1 à $n-1$!

$$\begin{gathered}(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + \dots)(v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + \dots) = \\ \underbrace{(u_1 v_1)}_{w_2} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1)}_{w_3} + \underbrace{(u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1)}_{w_4} + \cdots + \dots\end{gathered}$$

- Si les deux séries $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ sont absolument convergente, alors on a de même : $\sum_{n \geqslant 2} w_n$ absolument convergente et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right)$$

Exemple de produits de Cauchy

- Convergence et valeur de la série de terme général : $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Exemple de produits de Cauchy

- Convergence et valeur de la série de terme général : $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

- Pour $n \geqslant 1$, on considère $u_n = \frac{1}{n^2}$, et pour $n \geqslant 0$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n}$.
- Les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ sont absolument convergentes.
- On écrit :

$$\begin{aligned}&(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)(v_0 + v_1 + v_2 + \dots)\\ &= \underbrace{(u_1 v_0)}_{w_1} + \underbrace{(u_1 v_1 + u_2 v_0)}_{w_2} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0)}_{w_3} + \dots\end{aligned}$$

- Donc la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right) = \frac{\pi^2}{6} \times 2$$

Exemple de produits de Cauchy

- Convergence et valeur de la série de terme général : $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

- Pour $n \geqslant 1$, on considère $u_n = \frac{1}{n^2}$, et pour $n \geqslant 0$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n}$.
- Les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ sont absolument convergentes.
- On écrit :

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)(v_0 + v_1 + v_2 + \dots)$$
$$= \underbrace{(u_1 v_0)}_{w_1} + \underbrace{(u_1 v_1 + u_2 v_0)}_{w_2} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0)}_{w_3} + \dots$$

- Donc la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right) = \frac{\pi^2}{6} \times 2$$

Exemple de produits de Cauchy

- Convergence et valeur de la série de terme général : $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

- Pour $n \geqslant 1$, on considère $u_n = \frac{1}{n^2}$, et pour $n \geqslant 0$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n}$.
- Les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ sont absolument convergentes.
- On écrit :

$$\begin{aligned} &(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)(v_0 + v_1 + v_2 + \dots) \\ &= \underbrace{(u_1 v_0)}_{w_1} + \underbrace{(u_1 v_1 + u_2 v_0)}_{w_2} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0)}_{w_3} + \dots \end{aligned}$$

- Donc la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right) = \frac{\pi^2}{6} \times 2$$

Exemple de produits de Cauchy

- Convergence et valeur de la série de terme général : $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

- Pour $n \geqslant 1$, on considère $u_n = \frac{1}{n^2}$, et pour $n \geqslant 0$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n}$.
- Les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ sont absolument convergentes.
- On écrit :

$$\begin{aligned} &(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)(v_0 + v_1 + v_2 + \dots) \\ &= \underbrace{(u_1 v_0)}_{w_1} + \underbrace{(u_1 v_1 + u_2 v_0)}_{w_2} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0)}_{w_3} + \dots \end{aligned}$$

- Donc la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right) = \frac{\pi^2}{6} \times 2$$

Exemple de produits de Cauchy

- Convergence et valeur de la série de terme général : $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

- Pour $n \geqslant 1$, on considère $u_n = \frac{1}{n^2}$, et pour $n \geqslant 0$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n}$.
- Les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ sont absolument convergentes.
- On écrit :

$$\begin{aligned}&(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)(v_0 + v_1 + v_2 + \dots)\\ =&\underbrace{(u_1 v_0)}_{w_1} + \underbrace{(u_1 v_1 + u_2 v_0)}_{w_2} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0)}_{w_3} + \dots\end{aligned}$$

- Donc la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right) = \frac{\pi^2}{6} \times 2$$

Exemple de produits de Cauchy

Pour $n \geqslant 2$ on pose $u_n = \frac{\ln(n)}{2^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
Montrer la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

- Pour la convergence de la série à termes positifs $\sum u_n$, on utilise par exemple le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$

- Pour $\sum v_n$ c'est une série à termes négatifs avec :

$$-v_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2^n n} = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Ainsi, $\sum v_n$ est absolument convergente.

Exemple de produits de Cauchy

Pour $n \geqslant 2$ on pose $u_n = \frac{\ln(n)}{2^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
Montrer la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

- Pour la convergence de la série à termes positifs $\sum u_n$, on utilise par exemple le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$

- Pour $\sum v_n$ c'est une série à termes négatifs avec :

$$-v_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2^n n} \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Ainsi, $\sum v_n$ est absolument convergente.

Exemple de produits de Cauchy

Pour $n \geqslant 2$ on pose $u_n = \frac{\ln(n)}{2^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
Montrer la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

- Pour la convergence de la série à termes positifs $\sum u_n$, on utilise par exemple le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$

- Pour $\sum v_n$ c'est une série à termes négatifs avec :

$$-v_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2^n n} \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Ainsi, $\sum v_n$ est absolument convergente.

Exemple de produits de Cauchy

Pour $n \geqslant 2$ on pose $u_n = \frac{\ln(n)}{2^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
Montrer la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

- Pour la convergence de la série à termes positifs $\sum u_n$, on utilise par exemple le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$

- Pour $\sum v_n$ c'est une série à termes négatifs avec :

$$-v_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2^n n} \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Ainsi, $\sum v_n$ est absolument convergente.

Pour $n \geqslant 2$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et pour $n \geqslant 2$, $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Calculer le terme général du produit de Cauchy : $\left(\sum\limits_{n \geqslant 2} a_n\right)\left(\sum\limits_{n \geqslant 2} v_n\right)$

- On écrit :

$$\begin{aligned}&(a_2 + a_3 + \cdots +)(v_2 + v_3 + \cdots +)\\ =&\underbrace{(a_2 v_2)}_{w_4} + \underbrace{(a_2 v_3 + a_3 v_2)}_{w_5} + \underbrace{(a_2 v_4 + a_3 v_3 + a_4 v_2)}_{w_6} + \dots\end{aligned}$$

- On utilise donc :

$$\forall n \geqslant 4,\ w_n = \sum_{(i,j)\ i+j=n} a_i v_j = \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j} v_j$$

- les séries $\sum a_n$ et $\sum v_n$ étant absolument convergentes, on peut écrire par produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n \geqslant 2} a_n\right)\left(\sum_{n \geqslant 2} v_n\right) = \sum_{n \geqslant 4} w_n$$

Pour $n \geqslant 2$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et pour $n \geqslant 2$, $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Calculer le terme général du produit de Cauchy : $\left(\sum_{n \geqslant 2} a_n\right)\left(\sum_{n \geqslant 2} v_n\right)$

- On écrit :

$$(a_2 + a_3 + \cdots +)(v_2 + v_3 + \cdots +)$$
$$= \underbrace{(a_2 v_2)}_{w_4} + \underbrace{(a_2 v_3 + a_3 v_2)}_{w_5} + \underbrace{(a_2 v_4 + a_3 v_3 + a_4 v_2)}_{w_6} + \ldots$$

- On utilise donc :

$$\forall n \geqslant 4,\ w_n = \sum_{(i,j)\ i+j=n} a_i v_j = \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j} v_j$$

- les séries $\sum a_n$ et $\sum v_n$ étant absolument convergentes, on peut écrire par produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n \geqslant 2} a_n\right)\left(\sum_{n \geqslant 2} v_n\right) = \sum_{n \geqslant 4} w_n$$

Pour $n \geqslant 2$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et pour $n \geqslant 2$, $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Calculer le terme général du produit de Cauchy : $\left(\sum_{n\geqslant 2} a_n\right)\left(\sum_{n\geqslant 2} v_n\right)$

- On écrit :

$$(a_2 + a_3 + \cdots +)(v_2 + v_3 + \cdots +)$$
$$= \underbrace{(a_2 v_2)}_{w_4} + \underbrace{(a_2 v_3 + a_3 v_2)}_{w_5} + \underbrace{(a_2 v_4 + a_3 v_3 + a_4 v_2)}_{w_6} + \dots$$

- On utilise donc :

$$\forall n \geqslant 4,\ w_n = \sum_{(i,j)\ i+j=n} a_i v_j = \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j} v_j$$

- les séries $\sum a_n$ et $\sum v_n$ étant absolument convergentes, on peut écrire par produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n\geqslant 2} a_n\right)\left(\sum_{n\geqslant 2} v_n\right) = \sum_{n\geqslant 4} w_n$$

Pour $n \geqslant 2$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et pour $n \geqslant 2$, $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Calculer le terme général du produit de Cauchy : $\left(\sum_{n\geqslant 2} a_n\right)\left(\sum_{n\geqslant 2} v_n\right)$

- On écrit :

$$\begin{aligned}&(a_2 + a_3 + \cdots +)(v_2 + v_3 + \cdots +)\\ &= \underbrace{(a_2 v_2)}_{w_4} + \underbrace{(a_2 v_3 + a_3 v_2)}_{w_5} + \underbrace{(a_2 v_4 + a_3 v_3 + a_4 v_2)}_{w_6} + \dots\end{aligned}$$

- On utilise donc :

$$\forall n \geqslant 4,\ w_n = \sum_{(i,j)\ i+j=n} a_i v_j = \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j} v_j$$

- les séries $\sum a_n$ et $\sum v_n$ étant absolument convergentes, on peut écrire par produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n\geqslant 2} a_n\right)\left(\sum_{n\geqslant 2} v_n\right) = \sum_{n\geqslant 4} w_n$$

Pour $n \geqslant 2$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et pour $n \geqslant 2$, $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Calculer le terme général du produit de Cauchy : $\left(\sum_{n \geqslant 2} a_n\right)\left(\sum_{n \geqslant 2} v_n\right)$

- On écrit :

$$\begin{aligned}&(a_2 + a_3 + \cdots +)(v_2 + v_3 + \cdots +)\\ &= \underbrace{(a_2 v_2)}_{w_4} + \underbrace{(a_2 v_3 + a_3 v_2)}_{w_5} + \underbrace{(a_2 v_4 + a_3 v_3 + a_4 v_2)}_{w_6} + \dots\end{aligned}$$

- On utilise donc :

$$\forall n \geqslant 4,\ w_n = \sum_{(i,j)\ i+j=n} a_i v_j = \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j} v_j$$

- les séries $\sum a_n$ et $\sum v_n$ étant absolument convergentes, on peut écrire par produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n \geqslant 2} a_n\right)\left(\sum_{n \geqslant 2} v_n\right) = \sum_{n \geqslant 4} w_n$$

Pour $n \geqslant 2$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $a_n = \frac{1}{2^n}$ et $u_n = \frac{\ln(n)}{2^n}$

Calculer : $w_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\ i+j=n} a_i v_j = \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j} v_j$, en fonction de (u_n).

En déduire une relation entre $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

$$w_n = \sum_{j=2}^{n-2} \frac{1}{2^{n-j}} v_j = \frac{1}{2^n}\sum_{j=2}^{n-2} \ln\left(1-\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=2}^{n-2}\left(\ln(j-1)-\ln(j)\right)$$

$$= -\frac{\ln(n-2)}{2^n} = -\frac{1}{4}u_{n-2} \text{ somme télescopique !}$$

$$\sum_{n\geqslant 4} w_n = -\frac{1}{4}\sum_{n\geqslant 2} u_n$$

$$= \left(\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{n\geqslant 2} v_n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 2} v_n$$

Pour $n \geqslant 2$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $a_n = \frac{1}{2^n}$ et $u_n = \frac{\ln(n)}{2^n}$

Calculer : $w_n = \sum_{(i,j)\ i+j=n} a_i v_j = \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j} v_j$, en fonction de (u_n).

En déduire une relation entre $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

$$w_n = \sum_{j=2}^{n-2} \frac{1}{2^{n-j}} v_j = \frac{1}{2^n}\sum_{j=2}^{n-2} \ln\left(1-\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=2}^{n-2}\left(\ln(j-1)-\ln(j)\right)$$

$$= -\frac{\ln(n-2)}{2^n} = -\frac{1}{4}u_{n-2} \text{ somme télescopique !}$$

$$\sum_{n\geqslant 4} w_n = -\frac{1}{4}\sum_{n\geqslant 2} u_n$$

$$= \left(\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{n\geqslant 2} v_n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 2} v_n$$

Pour $n \geqslant 2$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $a_n = \frac{1}{2^n}$ et $u_n = \frac{\ln(n)}{2^n}$

Calculer : $w_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\ i+j=n} a_i v_j = \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j} v_j$, en fonction de (u_n).

En déduire une relation entre $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

$$w_n = \sum_{j=2}^{n-2} \frac{1}{2^{n-j}} v_j = \frac{1}{2^n}\sum_{j=2}^{n-2} \ln\left(1-\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=2}^{n-2} \left(\ln(j-1) - \ln(j)\right)$$

$$= -\frac{\ln(n-2)}{2^n} = -\frac{1}{4} u_{n-2} \text{ somme télescopique !}$$

$$\sum_{n\geqslant 4} w_n = -\frac{1}{4}\sum_{n\geqslant 2} u_n$$

$$= \left(\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{n\geqslant 2} v_n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 2} v_n$$