Devoir surveillé concours blanc rentrée 2021

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Calculatrice interdite durée 4h
Thèmes: Équations différentielles avec pb de recollement, suites récurrentes, étude de suites d'intégrales, variables aléatoires, espace euclidien de matrice, algèbre linéaire, analyse de fonctions et équations différentielles

Exercice 1 On considère l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E): \qquad x^2y' - y = x^2 - x.$$

1. ☞0.5✓ Vérifier que la fonction identité est solution sur $\mathbb{R}$.
2. ☞1✓ Donner l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_*^+$ et sur $\mathbb{R}_*^-$.
3. ☞3✓ Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. La fonction identité $y : x \mapsto x$ est évidement dérivable avec : $y' : x \mapsto 1$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2y'(x) - y(x) = x^2 - x.$$

La fonction $x \mapsto x$ est donc bien solution.

2. Sur $\mathbb{R}_*^+$, l'équation est équivalente à

$$(E, \mathbb{R}_*^+) \qquad y' - \frac{1}{x^2}y = 1 - \frac{1}{x}$$

L'équation homogène est (H) : $y' - \frac{1}{x^2}y = 0$, une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$ on en déduit que

$$\mathscr{S}_H\left(\mathbb{R}_*^+\right) = \left\{ y : x > 0 \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{x}} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Comme on a vu une solution particulière, on a :

$$\mathscr{S}_E\left(\mathbb{R}_*^+\right) = \left\{ y : x > 0 \mapsto x + \lambda e^{-\frac{1}{x}} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

R Étrangement, beaucoup ne voient pas que la question 1 donne une solution particulière.

On procède de même sur $\mathbb{R}_*^-$. L'équation est encore équivalente à :

$$(E, \mathbb{R}_*^-) \qquad y' - \frac{1}{x^2}y = 1 - \frac{1}{x}$$

On obtient de même :

$$\mathscr{S}_E\left(\mathbb{R}_*^-\right) = \left\{ y : x > 0 \mapsto x + \lambda e^{-\frac{1}{x}} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. **Analyse / conditions nécessaires :** On considère f solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La restriction de f à $\mathbb{R}_*^+$ (respectivement à $\mathbb{R}_*^-$) est alors solution de (E) sur $\mathbb{R}_*^+$ (respectivement sur $\mathbb{R}_*^-$).
On a alors :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \\ x + \lambda_2 e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On sait que f soit continue en 0. On regarde donc :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+\lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

et :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x+\lambda_2 e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_2 = 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda_2 > 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda_2 < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, puisque f admet une limite finie en 0, on a alors $\lambda_2 = 0$. et donc pour $x < 0$, $f(x) = x$. On a alors :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Ainsi, nécessairement $f(0) = 0$.
Regardons la dérivabilité en 0. Pour le taux d'accroissement en 0^+ :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} =& \frac{f(x)}{x} \\ =& 1+\lambda_1\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}.\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t\to +\infty} te^{-t} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1.$$

D'autre part, on a déjà vu : pour $x < 0$, $f(x) = x$ et donc :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1.$$

Ainsi, la fonction f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$
On sait aussi que f vérifie l'équation en tout point. Pour $x > 0$ et $x < 0$, on a bien $x^2 f'(x) - f(x) = x^2 - x$ puisque f est solution sur $\mathbb{R}_*^+$ et sur $\mathbb{R}_*^-$.
En 0, l'équation s'écrit :

$$0^2 f'(0) - f(0) = 0^2 - 0 \text{ ie } f(0) = 0 \text{ ce qui est vrai}$$

Synthèse / conditions suffisantes : on considère donc $\lambda \in \mathbb{R}$, et la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x+\lambda e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Les calculs faits dans l'analyse prouvent :
- que f est continue en 0,
- que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$,
- que la fonction f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 f'(x) - f(x) = x^2 - x.$$

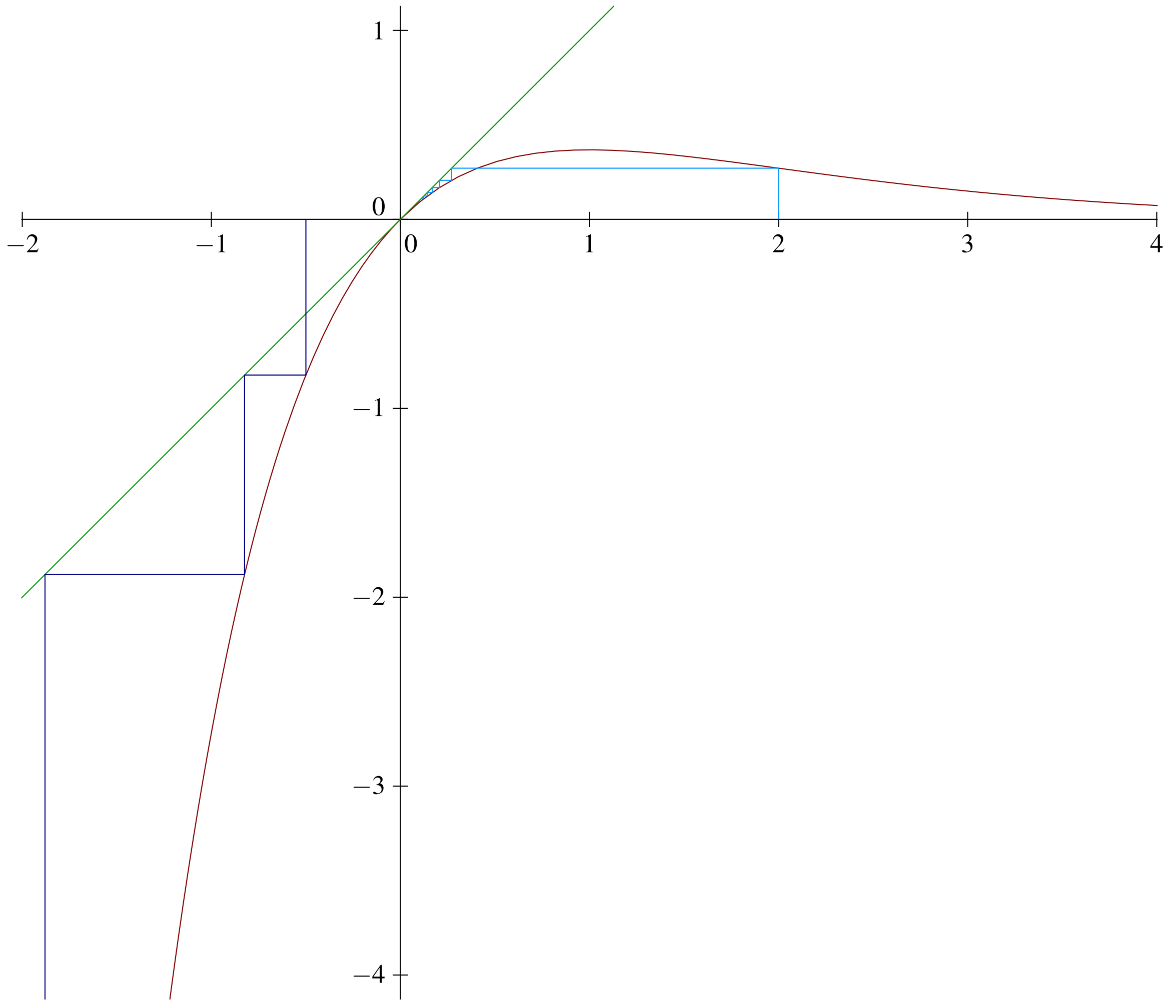
Ainsi f est bien solution :
Conclusion : l'ensemble des solutions est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : x \mapsto \begin{cases} x+\lambda e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 2 On étudie la convergence de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n)$.

1. ☞0.5✓ Montrer que la suite (u_n) est de signe constant.
2. ☞3✓ Si $u_0 < 0$, montrer que la suite (u_n) est monotone. Conclure.
3. ☞3✓ Même question si $u_0 > 0$.

Remarque : étude très classique d'une suite récurrentes réelles, il est important de faire l'étude graphique.



Correction : Déjà il est clair que la suite est bien définie puisque la fonction $x \longmapsto xe^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

1. **NB :** Question très facile, il s'agit juste de vous faire remarque que les intervalles $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ sont stables par f, ce qui sert pour la suite, et de remarquer que 0 est point fixe. C'est une indication détournée.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors $e^{-u_n} > 0$, ce qui montre que le signe de u_n est le signe de u_{n+1}. Par récurrence, on en déduit que la suite (u_n) a un signe constant.
   REM : pour une récurrence, on ne peut pas poser : $\mathscr{P}(n)$: (u_n) est de signe constant, on peut utiliser : $\mathscr{P}(n)$: u_n est du signe de u_0, ou faire une rapide disjonction des cas.
   De plus, si $u_0 = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.
2. Supposons $u_0 < 0$. On a d'après la question précédente alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$, et donc $e^{-u_n} > 1$. On obtient alors en multipliant par $u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n) < u_n$.
   La suite (u_n) est donc décroissante.
   Ainsi, on a deux possibilités : $\lim_{n\infty} u_n = -\infty$ ou la suite (u_n) converge.
   NB : très classique : on examine donc chacun des deux cas et on voit que l'un des cas est impossible.
   Supposons par l'absurde que la suite (u_n) converge vers une limite $l \leqslant 0$. On a alors par continuité : $l = le^{-l}$, et donc $l = 0$. Or la suite étant décroissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0$, donc $l \leqslant u_0$. En particulier $l < 0$, ce qui est donc en contradiction avec $l = 0$.
   NB : la rédaction doit faire apparaître que l'on ne passe pas à la limite dans l'inégalité stricte : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$.

Ainsi, si $u_0 < 0$, on a $\lim_{n\infty} u_n = -\infty$.

barème : 1 pour monotonie, 0.5 pour convergence, 1 pour le raisonnement par l'absurde, -0.5 si passage à la limite dans inégalité pas clair.

3. Supposons maintenant $u_0 > 0$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$, en particulier $e^{-u_n} < 1$. On en déduit par multiplication par $u_n > 0$ que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n) < u_n$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.
Or la suite (u_n) est aussi minorée (par 0). Elle converge donc vers une limite $l \geqslant 0$ On obtient de nouveau $l = le^{-l}$ et donc $l = 0$.
Ainsi, si $u_0 > 0$, on a $\lim_{n\infty} u_n = 0$.
barème : 1 pour monotonie, 0.5 pour convergence, 1.5 pour conclusion.

Exercice 3 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. (a) ☞0.5✓ Calculer u_0
   (b) ☞1✓ Montrer la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.
   (c) ☞1✓ Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$
   (d) ☞0.5✓ En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère les suites (S_n) et (S'_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad S'_n = S_n + \frac{1}{nn!}$$

   (a) ☞1.5✓ Justifier que les suite (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.
   (b) ☞1✓ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!(e - S_n)$.
   (c) ☞0.5✓ Déterminer $\lim_{n\infty} S_n$ et $\lim_{n\infty} S'_n$.
   (d) ☞1✓ Justifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(n+1)!} \leqslant e - S_n \leqslant \frac{1}{nn!}$$

   (e) ☞0.5✓ En déduire un équivalent de u_n.

Correction :

1. (a) On a :

$$u_0 = \int_0^1 e^t dt = e - 1$$

   (b) On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt \\ &= \left[(1-t)^{n+1} e^t\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \\ &= -1 + (n+1)u_n \end{aligned}$$

   en posant :

$$\begin{array}{ll} u(t) = (1-t)^{n+1} & u'(t) = -(n+1)(1-t)^n \\ v'(t) = e^t & v(t) = e^t \end{array} \qquad (u,v) \text{ sont } \mathscr{C}^1$$

   NB : on doit indiquer quelles fonctions sont utilisées pour l'ipp.

   (c) On a :

$$\begin{aligned} &\forall t \in [0,1],\ 1 \leqslant e^t \leqslant e \\ &\qquad \text{donc : } (1-t)^n \leqslant (1-t)^n e^t \leqslant (1-t)^n e \end{aligned}$$

en intégrant :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

(d) Par théorème d'encadrement, on a $\lim_{n\infty} u_n = 0$.

2. (a) On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \text{ donc } S_n \text{ est croissante}$$

et

$$\begin{aligned} S'_{n+1} - S'_n &= S_{n+1} - S_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}\left(n(n+1)+n-(n+1)^2\right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}\left(n^2+2n-(n^2+2n+1)\right) \\ &= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \qquad \text{donc } S'_n \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

Enfin :

$$S'_n - S_n = \frac{1}{nn!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ces trois relations montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

(b) On note pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{P}(n) : \text{"}u_n = n!(e - S_n)\text{"}$$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = e - 1$ et $S_0 = 1$ d'où la relation.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)u_n - 1 \\ &= (n+1)!(e - S_n) - 1 && \text{d'après } \mathscr{P}(n) \\ &= (n+1)!\left(e - S_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - 1 \\ &= (n+1)!\,(e - S_{n+1}) \end{aligned}$$

(c) On écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = e - \frac{u_n}{n!}$$

or $\lim_{n\infty} u_n = 0$ donc $\lim_{n\infty} S_n = e$ et puisque les suites sont adjacentes, $\lim_{n\infty} S'_n = e$

(d) **RMQ :** une idée serait de remplacer u_n par l'encadrement trouvé plus haut, cela donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{(n+1)!} \leqslant e - S_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

ce qui est proche mais n'est pas l'encadrement proposé.
C'est le théorème sur les suites adjacentes :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} \leqslant e \leqslant S'_n \\ &\text{donc : } S_{n+1} - S_n \leqslant e - S_n \leqslant S'_n - S_n \\ &\text{ie : } \frac{1}{(n+1)!} \leqslant e - S_n \leqslant \frac{1}{nn!} \end{aligned}$$

(e) On multiplie par $n!$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$$

et donc $\lim\limits_{n\infty} nu_n = 1$ et $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 4 Oral CCP 2017

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. ☞1.5✓ Déterminer la loi de X.
2. ☞2.5✓ Déterminer la loi de Y .

Correction :

1. On a $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$, puis :

$$\begin{aligned} p(X=1) &= p(B_1) = \frac{n}{n+2} \\ p(X=2) &= p(N_1 \cap B_2) = p(N_1)p_{N_1}(N_2) = \frac{2}{n+2}\frac{n}{n+1} \\ p(X=3) &= p(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = p(N_1)p_{N_1}(N_2)p_{N_1 \cap N_2}(B_3) \\ &= \frac{2}{n+2}\frac{1}{n+1}\frac{n}{n} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

REM : on attend bien sûr un raisonnement !

2. On a : $Y(\Omega) = [\![1,n+1]\!]$.

Soit $k \in [\![1,n+1]\!]$ Pour déterminer la probabilité $p(Y=k)$, on procède par dénombrements.

Il y a plusieurs modélisations possibles.

Modélisation 1 : un tirage est donné par la place des 2 boules numérotées 1 (puisqu'il n'y a quelles qui comptent). Ainsi, Ω est l'ensemble des parties à 2 éléments des $n+2$ places, et donc :

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Un tirage tel que $(Y=k)$ est déterminé par la place de la boule numérotée 1 qui n'est pas en position k, ce qui fait $(n+2)-(k+1)+1$ choix, ie $n+2-k$. Au final :

$$p(Y=k) = \frac{2(n+2-k)}{(n+2)(n+1)}$$

Modélisation 2 : L'univers est la permutation des $n+2$ boules (qui sont toutes discernables), ainsi $\text{Card}(\Omega) = (n+2)!$. Un tirage tel que $(Y=k)$ vérifie les conditions suivantes :

- Aux tirages 1 à $k-1$ il n'y a pas de boules numérotées 1, on a donc une liste sans répétitions de longueur $k-1$ des n boules non numérotées 1. Cette partie correspond donc à un arrangement : $A_n^{k-1} = \frac{n!}{(n-k+1)!}$
- Au tirage k, il y a une boule numérotée 1, donc 2 possibilité (la noire ou la blanche).
- Pour le reste, on a : $n+2-k$ boules restantes et $n+2-k$ places, c'est donc une permutation des $n+2-k$ boules restantes.

Au final :

$$\text{Card}(Y=k) = 2\frac{n!}{(n-k+1)!}(n+2-k)! = 2n!(n+2-k)$$

puis :

$$p(Y=k) = 2(n+2-k)\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{2(n+2-k}{(n+2)(n+1)}$$

Exercice 5 CCP MP 2015 – Espace euclidien des matrices

On considère $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour A et B matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $\left(A|B\right) = \texttt{trace}\,({}^tAB)$.

1. ☞0.5✓ Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, que vaut le réel $(A|A')$?
2. ☞1✓ On note $\mathscr{T}$ le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donner, pour le produit scalaire canonique, une base orthonormée de $\mathscr{T}$ et de son orthogonal $\mathscr{T}^\perp$.
3. ☞1✓ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ donner le projeté orthogonal de la matrice A sur $\mathscr{T}$, ainsi que la distance de A à $\mathscr{T}$.

Commentaire : exercice d'application directe du cours.

Correction :

1. On a :

$$(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$$

2. On sait qu'une base orthonormée de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $\left(E_{11}, E_{12}, E_{22}\right)$ est une base de $\mathscr{T}$ et donc que $\left(E_{21}\right)$ est une base de $\mathscr{T}^\perp$

3. On est dans le cas où l'on dispose d'une base orthonormée de $\mathscr{F}$.
On a donc très facilement les coordonnées du projeté :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{T}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{T}^\perp}$$

Le projeté est donc : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et la distance est :

$$d(A, \mathscr{T}) = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 3$$

Exercice 6 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (3x - y + z, 2x + 2z, x - y + 3z)$.

1. ☞0.5✓ Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. ☞1✓ Calculer A^2 et déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + b\mathrm{I}_3$.
3. ☞1✓ <u>En déduire</u> que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.
4. ☞0.5✓ En déduire que f est un automorphisme, et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id.
5. ☞1.5✓ Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ est de dimension 2 et en déterminer une base (e_1, e_2).
6. ☞1.5✓ On pose $e_3 = (0,0,1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}'$, et déterminer la matrice T de f dans cette base.
7. ☞1✓ Donner explicitement deux matrices inversibles P et Q telles que : $A = PTQ$.

Correction :

1. Par définition, la matrice A est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Simple calcul matriciel :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 4I_3$$

D'où la relation : $A^2 = 4A - 4I_3$.

3. La relation précédente donne :

$$
\begin{aligned}
4I_3 &= -A^2 + 4A \\
I_3 &= A\left(-\frac{1}{4}A + I_3\right) = \left(-\frac{1}{4}A + I_3\right)A
\end{aligned}
$$

D'où A est inversible et :

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}A + I_3$$

4. L'endomorphisme f est inversible car sa matrice l'est. La relation est la même que pour les matrices :

$$f^{-1} = -\frac{1}{4}f + Id$$

5. On passe par le calcul matriciel :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice est 1, donc par le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ est de dimension 2.
De plus, on a les relations :

$$C_1 + C_2 = 0 \qquad C_1 - C_3 = 0$$

ce qui indique que les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (1,0,-1)$ sont dans le noyau.

6. Le plus simple est de vérifier que la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible. Par opération sur les lignes :

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ l_2 - l_1 \\ l_3 \end{matrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 - l_2 \end{matrix}
$$

le rang est 3 la matrice est inversible, donc $\mathscr{B}'$ est une base.
On calcule ensuite :

$$
\begin{aligned}
f(e_1) &= 2e_1 \text{ car } e_1 \in \ker(f - 2Id) \\
f(e_2) &= 2e_2 \text{ idem} \\
f(e_3) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 2e_1 - e_2 + 2e_3
\end{aligned}
$$

On en déduit la matrice T :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. D'après la propriété du changement de base, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice $Q = P^{-1}$, il faut donc calculer l'inverse par Gauss Jordan :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ l_2 - l_1 \\ l_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 + l_2 \\ l_2 \\ l_3 - l_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ -l_2 \\ l_3 \end{matrix}$$

D'où :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Soit

$$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right).$$

1. ☞0.5✓ Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f.
2. ☞0.5✓ Démontrer que f est impaire sur $\mathscr{D}$. Dans la suite, on pose $\mathscr{E} = \mathscr{D} \cap \mathbb{R}_+$.
3. (a) ☞0.5✓ Étudier la continuité de f sur $\mathscr{E}$.
   (b) ☞1✓ Montrer que l'on peut prolonger f par continuité au point 1. On note encore f le prolongement ainsi obtenu.
4. (a) i. ☞1.5✓ Justifier la dérivabilité de f sur $\mathscr{E}$ et calculer f' sur cet ensemble.
   ii. ☞1.5✓ Étudier le signe de la fonction auxiliaire g définie sur $\mathscr{E} \setminus \{0\}$ par :

$$g(x) = \frac{f'(x)}{2x} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad g(x) = \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) - \frac{1}{x}.$$

   On notera a l'unique point d'annulation de g sur $\mathscr{E} \setminus \{0\}$ sans chercher à déterminer sa valeur exacte.
   iii. ☞1✓ Dresser un tableau de variation de la fonction f.
   (b) ☞1.5✓ Étudier la dérivabilité de f en 1. Que peut-on en déduire pour la tangente de f en ce point ?
5. ☞1✓ En utilisant un développement limité, déterminer la tangente de f en 0 et préciser la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.
6. ☞1✓ En utilisant un développement limité, justifier l'existence d'une asymptote en $+\infty$ et préciser la position locale de la courbe de f par rapport à cette asymptote.

Commentaire : exercice simple (c'est essentiellement des calculs), mais qui a été très mal réussi. Il faut s'habituer aux calculs !

De plus, il faut savoir gérer la valeur absolue. Soit on fait deux cas, soit on se souvient que :

la dérivée de $\ln(|u|)$ est $\dfrac{u'}{u}$.

Correction :

1. Considérons $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, *i.e.* $\mathscr{D} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.
   On a déjà : $\forall x \in \mathscr{D}$, $1 - x \neq 0$, et donc $\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ existe. De plus cette expression est strictement positive.
   La fonction $x \mapsto \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$ est alors définie sur $\mathscr{D}$ comme la composée des fonctions suivantes :
$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R}_*^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left|\frac{1+x}{1-x}\right| & & \\ & & y & \mapsto & \ln(y). \end{array}$$
   Par produit avec $x \mapsto x^2 - 1$, la fonction f est définie sur $\mathscr{D}$.
   Ainsi, la fonction f est définie sur $\mathscr{D} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$
2. Déjà $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0. **NB :** toujours vérifier ce point (de plus cela permets de vérifier la question précédente)
   On a de plus :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathscr{D},\ f(-x) =& (x^2 - 1)\ln\left(\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right) \\ =& -(x^2 - 1)\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) && \text{en utilisant } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ =& -f(x). \end{aligned}$$
   La fonction f est donc impaire et on l'étudie donc sur $\mathscr{E} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.
3. (a) La fonction $x \mapsto \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$ est continue sur $\mathscr{E}$, comme la composée des fonctions :
$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{E} & \to & \mathbb{R}_*^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left|\frac{1+x}{1-x}\right| & & \\ & & y & \mapsto & \ln(y). \end{array}$$
   Par produit avec le polynôme $x \mapsto x^2 - 1$, la fonction f est continue sur $\mathscr{E}$.

   (b) On calcule la limite de $f(x)$ pour x qui tends vers 1.
   Pour cela, on se ramène à 0 en posant : $t = x - 1$, *i.e.* $x = 1 + t$. ce qui donne :
$$\begin{aligned} f(x) =& \left((1+t)^2 - 1\right)\ln\left(\left|\frac{2+t}{t}\right|\right) \\ =& (2t + t^2)\ln\left(\left|\frac{2+t}{t}\right|\right) \\ =& (2+t)t\ln\left(\left|\frac{2+t}{t}\right|\right) \end{aligned}$$
   NB : on a clairement une forme indéterminée, et on se doute qu'il va falloir utiliser les croissance comparée. Mais écrire directement « *par croissance comparée* $\lim_{x\to1} f(x) = 0$ » est trop rapide. On n'a pas la forme « exponentiel logarithme » du cours.
   Procédons par équivalent : $(2+t) \underset{t\to0}{\sim} 2$, et
$$\begin{aligned} \ln\left(\left|\frac{2+t}{t}\right|\right) =& \ln|2+t| - \ln|t| \\ =& \ln|t|\left[\underbrace{\frac{\ln|2+t|}{\ln|t|}}_{\to0} - 1\right] \\ \underset{t\to0}{\sim}& -\ln|t|. \end{aligned}$$
   Au final :
$$f(x) \underset{t\to0}{\sim} -2t\ln|t| \xrightarrow[t\to0]{} 0 \qquad \text{par croissance comparée.}$$
   ainsi : $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$, on peut donc prolonger la fonction f en 1 en posant $f(1) = 0$.

4. (a) i. **NB :** Attention à la valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0. 0.5 points pour séparer cette rédaction de la continuité.

Considérons la composition suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{E} & \to & \mathbb{R}_* & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & \frac{1+x}{1-x} & & \\ & & y & \mapsto & |y| \end{array}$$

Ces fonctions sont dérivables donc $x \in \mathscr{E} \mapsto \left|\frac{1+x}{1-x}\right| \in \mathbb{R}_*^+$ est dérivable. Par composée avec $z \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(z)$, on en déduit que la fonction $x \in \mathscr{E} \mapsto \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ est dérivable. Enfin, par produit avec $x \in \mathscr{E} \mapsto (x^2-1)$, la fonction f est dérivable sur $\mathscr{E}$.

Calculons f'. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathscr{E},\ f(x) =& (x^2-1)\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) \\ \text{ainsi, } f'(x) =& 2x\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + (x^2-1)\frac{\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} \\ =& 2x\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + \cancel{(x+1)(x-1)}\frac{2}{\cancel{(1-x)^2}\cancel{\frac{1+x}{1-x}}} \\ =& 2x\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) - 2. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathscr{E},\ f'(x) = 2x\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) - 2.$$

NB : la réponse était bien sûr donné à la question suivante.

ii. On a :

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ g(x) = \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) - \frac{1}{x}$$

La fonction g est dérivable et on a :

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ g'(x) = \frac{2}{(1-x)(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2+(1-x)(1+x)}{x^2(1-x)(1+x)} = \frac{1+x^2}{x^2(1-x)(1+x)}.$$

Au final, g' est du signe de $1-x$. **NB :** très peu prennent la peine de dériver g.

On a de plus les limites :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$$

x	0		a		1		$+\infty$
signe de $g'(x)$	‖		$+$		‖	$-$	
Variations de g	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0
signe de $g(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

iii. Comme $\forall x \in \mathscr{E}\setminus\{0\}$, $f'(x) = 2xg(x)$, on obtient le tableau de variation :

x	0		a		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	-2	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

REM : on peut déduire de $g(a) = 0$ que $f(a) = \frac{a^2-1}{a}$.
On a de plus en $+\infty$:

$$\begin{aligned}\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) =& \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)\\ =& \ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right).\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$, et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, d'où :

$$\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$

Au final

$$f(x) = (x^2-1)\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\frac{2}{x} = 2x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

NB : cette limite n'est pas évidente.

(b) On a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} =& (x+1)\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)\\ =& (x+1)\left(\ln(1+x)-\ln(|1-x|)\right)\\ \underset{x\to 1}{\sim}& -\ln|1-x| \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction n'est pas dérivable en 1, on a une tangente verticale.
NB : on peut aussi vérifier que $\lim_{x\to 1} f'(x) = +\infty$.

5. On fait un DL en 0. Déjà au voisinage de 0, on a $\frac{1+x}{1-x} > 0$, d'où :

$$\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

On a :

$$\begin{aligned}f(x) =& (x^2-1)\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]\\ =& (-1+x^2)\left[\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\right]\\ =& (-1+x^2)\left[2x+2\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]\\ =& -2x+\frac{4x^3}{3}+o(x^3).\end{aligned}$$

On en déduit que la tangente de f en 0 est $\Delta : y = -2x$. De plus, on a : $f(x)-(-2x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4x^3}{3}$, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en 0 (en dessous en 0^-, au dessus en 0^+).

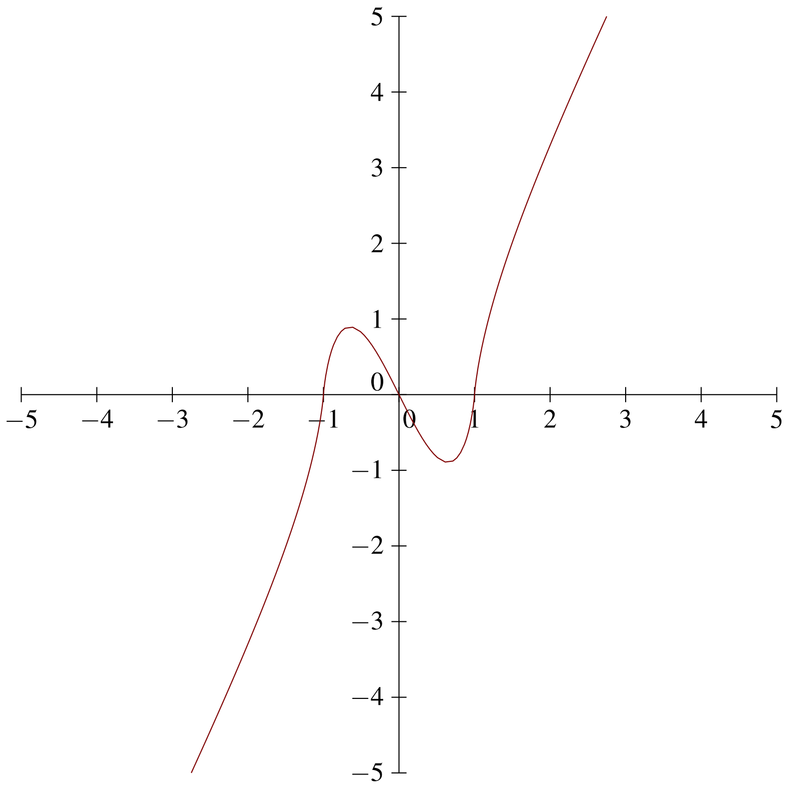
6. Faisons le développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$. On a pour $x > 1$:

$$
\begin{aligned}
f(x) =& (x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = \left(\frac{1}{t^2}-1\right)\ln\left(\frac{1+\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-1}\right) \text{ en posant } t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\
=& \frac{1-t^2}{t^2}\left(\ln\left(\frac{t+1}{1-t}\right)\right) \\
=& \frac{1-t^2}{t^2}\left(\ln(1+t)-\ln(1-t)\right)
\end{aligned}
$$

On utilise alors le DL de la question précédente :

$$
\begin{aligned}
(\ln(1+t)-\ln(1-t)) &\underset{t\to 0}{=} 2t + \frac{2t^3}{3} + o(t^3) \\
\text{ce qui donne : } f(x) &\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t^2}(1-t^2)\left(2t+\frac{2t^3}{3}+o(t^3)\right) \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t^2}\left(2t-\frac{4}{3}t^3+o(t^3)\right) \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{2}{t}-\frac{4}{3}t+o(t) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} 2x-\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi, la droite : $\Delta : y = 2x$ est asymptote à la courbe de la fonction f. De plus, Δ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$. L'allure de la courbe est :



Devoir surveillé Concours blanc d'informatique

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Calculatrice interdite durée 3h

Thèmes: Étude d'une suite récurrente avec Python, Mysql, Résolution numérique d'équations différentielles, Inclusion de sous-liste, Permutation en Python.

Sujet et corrigé faits avec M. Dufour et M. Hubert

Exercice 1 **Étude d'une suite récurrente.**

1. ☞1✓ Soit f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^x - 2$. Écrire une fonction en Python permettant d'obtenir le graphe représentant la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$.
2. On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 2. \end{cases}$$

   Écrire une fonction `suite` prenant pour argument un entier n et retournant la valeur du terme u_n.
3. ☞1✓ On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x - 2$.
   (a) ☞1✓ **[Question mathématique]** Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet sur $]-\infty, 0[$ une solution et une seule. On note α cette solution. Vérifier que : $-2 \leqslant \alpha \leqslant -1$.
   (b) ☞1.5✓ Écrire une fonction `valeur_approchee` en Python retournant par la méthode de dichotomie une valeur approchée par défaut de α à 10^{-4} près.
4. ☞1.5✓ **[Question mathématique]** Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

1. Bien construire la liste des X et la liste des Y pour `plot`.

```python
def f(x):
    return np.exp(x) - 2

def trace()
    X = np.linspace(-3, 0, 100)
    Y = [f(x) for x in X]
    plt.plot(X, Y, label='courbe représentatice de f')
    plt.plot(X, X, label='première bissectrice')
    plt.title("Suite récurrente")
    plt.legend()
    plt.grid(True)
```

   ou encore avec des array :

```python
X = np.linspace(-3, 0, 100)
Y = np.exp(X) - 2
plt.plot(X, Y)
```

2. Simple application de l'instruction $x = f(x)$:

```python
def u(n):
  x = -1
  for i in range(1, n + 1):
    x = f(x)
  return x
```

3. (a) On vérifie que φ est dérivable et $\varphi'(x) = e^x - 1$. Ainsi φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.
   On trouve ensuite $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\varphi(0) = -2$.
   On applique ensuite le théorème des valeurs intermédiaires.
   Bien construire le tableau de variation en mettant le maximum d'information.

(b) On attend l'algorithme de dichotomie.

```python
def phi(x) :
  return np.epx(x) - 2 -x

a,b=-2,-1
eps=1E-4
while b - a > eps:
  c = (a + b) / 2
  if phi(a) * phi(c) < 0:
    b = c
  else:
    a = c
  return a
```

4. On démontre par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 0$$

On a ensuite :

$$\forall x \in]-\infty, 0[,\ \varphi(x) \leqslant 0 \text{ et donc } e^x - 2 \leqslant x$$

on remplace x par u_n (ce qui est bien possible car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$$

Ce qui montre que (u_n) est décroissante. La suite est décroissante et minorée donc converge vers une limite $l \leqslant 0$. Cette limite est solution de $\varphi(l) = 0$, et donc $l = \alpha$.

Exercice 2 La mission Mars Exploration Rovers.

Ce sujet fait référence à la mission Mars Exploration Rovers (MER). Deux robots géologues, Spirit et Opportunity, se sont posés sur cette planète, sur deux sites opposés, en janvier 2004. Spirit a cessé d'émettre le 22 mars 2010. Opportunity fonctionne jusqu'au 10 juin 2018, date à laquelle il est paralysé par une gigantesque tempête de sable à laquelle il ne survit pas. Après 253 tentatives de prise de contact, la NASA déclare officiellement la mission terminée le 13 février 2019.

On s'intéresse donc ici à un robot géologue de la NASA qui a pour mission d'étudier le rôle joué par l'eau dans l'histoire de la planète Mars.

Le robot va faire un certains nombres d'explorations. Lors d'une exploration, il va visiter un certains nombres de points, dits points d'intérêts (PI), et y utiliser un certains nombres d'instruments d'explorations (INSTR). Ces données sont enregistrées dans le schéma de bases de données relationnel suivant constitué de 2 tables (dont on donne les premiers enregistrements ie les premières lignes) :

PI :

numexplo	numpi	pix	piy
1	1	0	0
1	2	1	2
2	1	0	0

Chaque exploration est caractérisée par l'attribut numexplo, et chaque PI par l'attribut numpi.
Chaque enregistrement est caractérisé par le couple (numexplo,numpi). On voit en effet, que l'exploration définie par numexplo=1 est constituée d'au moins deux points. On voit aussi que le point défini par numpi=1 est visité au moins deux fois : lors de l'exploration numéro 1 et numéro 2. Les attributs pix et piy désignent les coordonnées des points d'intérêts.

INSTR :

numexplo	numpi	numinstr
1	1	1
1	1	2
1	2	2

Ce tableau signifie que lors de l'exploration 1 au point 1, le robot doit utiliser les outils 1 et 2. Lors de l'exploration 1 au point 2, le robot doit utiliser l'outil 2.

1. ☞1✓ Donner la liste des numéros des points d'intérêts (numpi) de l'exploration numéro 3.
2. ☞1✓ Donner, pour l'exploration numéro 3, le nombre de fois (ie le nombre de points d'intérêts) où l'instrument numéro 1 doit être utilisé.

3. ☞1✓ Donner, pour l'exploration numéro 3, le nombre de fois (ie le nombre de points d'intérêts) où chaque instrument doit être utilisé.
4. ☞1.5✓ Donner, pour l'exploration numéro 4, les coordonnées des points où l'instrument numéro 2 doit être utilisé.
5. ☞1.5✓ On définit la zone d'exploration d'une exploration donnée comme le plus petit rectangle qui englobe l'ensemble de tous les points d'intérêts de cette exploration et dont les bords sont parallèles aux axes de référence (axes des abscisses et des ordonnées). Pour chaque exploration, donner la surface de la zone d'exploration correspondante.

Correction :

1. Sélection et projection :

```
SELECT numpi
FROM PI
WHERE numexplo=3
```

2. Utilisation de la fonction d'agrégation COUNT

```
SELECT COUNT(*)
FROM INSTR
WHERE numexplo=3 AND numinstr=1
```

3. Utilisation de l'agrégation :

```
SELECT numinstr, COUNT(*)
FROM INSTR
WHERE numexplo=3
GROUP BY numinstr
```

4. Jointure. Attention, ici la jointure se fait sur deux égalités :

```
SELECT pix, piy
FROM PI
JOIN INSTR ON PI.numexplo=INSTR.numexplo AND PI.numpi=INSTR.numpi
WHERE INSTR.numexplo=4 AND numinstr=2
```

5. Question un peu originale, il faut comprendre comment calculer l'aire. Puis regrouper pour faire ce calcul pour toutes les explorations.

```
SELECT numexplo, (MAX(pix)-MIN(pix))*(MAX(piy)-MIN(piy))
FROM PI
GROUP BY numexplo
```

Exercice 3

1. ☞2✓ On considère l'équation différentielle : $y'+y=\cos t+\sin t$ avec la condition initiale : $y(0)=0$. L'unique solution de cette équation est la fonction sin. Écrire une fonction nommée `euler1` qui permette de tracer, sur l'intervalle $[0,2\pi]$ en rouge la solution approchée obtenue par la méthode d'Euler, et en bleu la solution exacte. Cette fonction aura pour paramètre un entier n qui désigne le nombre de subdivisions utilisées dans la méthode d'Euler.
2. ☞2✓ On considère l'équation différentielle : $y''-2y'+y=\mathrm{e}^t$ avec les conditions initiales : $y(0)=0$ et $y'(0)=0$. L'unique solution de cette équation est donnée par $t\mapsto\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t$.
Écrire, comme à la question précédente, une fonction nommée `euler2`, de paramètre n qui permette de tracer, sur l'intervalle $[0,10]$ en rouge la solution approchée obtenue par la méthode d'Euler, et en bleu la solution exacte.

Correction :

1. Méthode d'Euler, classique :

```
def euler1(n):
    t,y=0,0
    T,Y=[t],[y]
    h=2*np.pi/n
    for k in range (n):
        y+=h*(np.cos(t)+np.sin(t)-y)
        Y+=[y]
```

```
        t=t+h
        T+=[t]
    plt.plot(T,Y,'r',label='approximation')
    X=np.linspace(0,2*np.pi,n)
    plt.plot(X,np.sin(X),'b',label='exact')
    plt.legend()
```

ou encore :

```

t = linspace(0,2*np.pi,n) # discrétisation
Y = [0]*n
h=2*np.pi/n
Y[0] = 0 # condition initiale
for i in range(n-1) :
  Y[i+1] = Y[i] + h*( np.cos(t[i])+np.sin(t[i])-y[i] )
```

2. Méthode d'Euler pour une équation de degré 2. Il faut rapidement expliquer la méthode, par exemple en écrivant :

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y'(t) \\ e^t + 2y'(t) - y(t) \end{pmatrix}$$

On applique alors la méthode d'Euler sur ce système.

```
def euler2(n):
    t,y,dy=0,0,0
    T,Y=[t],[y]
    h=10/n
    for k in range (n):
        y,dy=y+h*dy,dy+h*(np.exp(t)+2*dy-y)
        Y+=[y]
        t=t+h
        T+=[t]
    plt.plot(T,Y,'r',label='approximation')
    X=np.linspace(0,10,n)
    plt.plot(X,X**2*np.exp(X)/2,'b',label='exact')
    plt.legend()
```

ou par exemple :

```
t = linspace(0, 10 , n)
Z = array( (n,2) ) # va contenir y et y'
Z[0,:] = 0, 0 # condition initiale
for i in range(n-1):
  # y[i+1] = y[i] + h dy[i]
  Z[i+1, 0] = Z[i, 0] +  h *Z[i,1]
  # dy[i+1] = dy[i] + h ddy[i]
  Z[i+1, 1] =  Z[i,1] + h * (exp(t[i]) + 2 Z[i,1] - Z[i,0]  )

# on récupère la première colonne:
Y = Z[:,0]
```

Exercice 4

Listes et sous-listes.

1. ☞2✓ Écrire une fonction `inclus` prenant pour paramètres deux listes L et M. Cette fonction doit retourner `True` si la liste L est une sous liste de la liste M et `False` sinon. Par exemple, `inclus`([2,3],[1,2,3,4]) retournera `True`, tandis que `inclus`([2,4],[1,2,3,4]) retournera `False`.
2. ☞2✓ Écrire une fonction `commune` prenant pour paramètres deux listes L et M. Cette fonction doit retourner toute les sous-listes contenues à la fois dans L et M. Par exemple, `commune`([5,2,3,7],[7,1,2,3,4]) retournera les listes [2], [2, 3], [3] et [7].
3. ☞2✓ Écrire une fonction `communemax` prenant pour paramètres deux listes L et M. Cette fonction utilisera la fonction `commune` pour retourner une sous-liste contenue à la fois dans L et M et de longueur maximale. Par exemple, `communemax`([5,2,3,7],[7,1,2,3,4]) retournera la liste [2, 3].

Correction :

1. Il faut placer une tête de lecture dans M et extraire de M la partie à comparer :

```
def inclus(L,M):
  n=len(L)
  m=len(M)
  for i in range(m): # i est la position de la tête de lecture
    if i+n<=m and L==M[i:i+n]:
      return True
  return False
```

Bien comprendre que le `return` sort immédiatement de la fonction.
Pour `if i+n<=m and L==M[i:i+n]` l'ordre des tests à de l'importance. On aurait aussi pu modifier la boucle pour éviter le test. Bien noter aussi l'extraction de sous-liste : `M[i:i+n]`.

2. Le plus simple est d'utiliser la fonction précédente :

```
def commune(L,M):
  res = []
  for i in range(n):
    for j in range(i+1, n):
      if inclus( L[i:j], M ) :
        res.append( L[i:j])
```

on peut aussi limiter les calculs avec :

```
def commune(L,M):
    res=[]
    n=len(L)
    m=len(M)
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            k=1
            while (i+k<=n and j+k<=m and L[i:i+k]==M[j:j+k]):
                res+=[L[i:i+k]]
                k+=1
    return(res)
```

3. Il faut faire le lien avec les algorithmes usuels de recherche de maximum :

```
def communemax(L,M):
    res=commune(L,M)
    m=res[0]
    for x in res:
        if len(x)>len(m):
            m=x
    return(m)
```

Exercice 5

Méthode des rectangles.

1. ☞0.5✓ Rappeler la formule donnant la valeur de S_n permettant de calculer par la méthode des rectangles une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
2. ☞0.5✓ Écrire la fonction Python `rectangle` dépendant de n, f, a, b correspondante.
3. ☞1✓ On rappelle que si f de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et si M est un majorant de $|f'|$ sur $[a,b]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left|\int_a^b f(t)\, dt - S_n\right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{2n}.$$
En déduire le calcul d'une valeur approchée à 10^{-3} près de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$; on vérifiera pour cela que la valeur $M=2$ convient.

Correction :

1. On attend simplement :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) \qquad \text{avec } h=\frac{b-a}{n}$$

2. Simple calcul de somme :

```
def somme(a, b, n, f):
    s = 0
    h = (b - a) / n
    for k in range(n):
        s += f(a + k * h)
    return h * s
```

3. La principale difficulté consiste à appliquer la méthode à ce cas particulier. On dérive :

$$f : t \mapsto e^{-t^2}$$
$$f' : t \mapsto -2te^{-t^2}$$

Ensuite on a :

$$\forall t \in [0,1],\ |f'(t)| = 2te^{-t^2}$$

or pour $t \in [0,1]$:

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant 1$$

D'où par produit :

$$\forall t \in [0,1],\ |f'(t)| \leqslant 2$$

$M = 2$ convient ainsi et donc on veut :

$$M\frac{(b-a)^2}{2n} \leqslant 10^{-3} \text{ ce qui s'écrit ici : } \frac{1}{n} \leqslant 10^{-3}$$

et il suffit d'avoir $n \geqslant 10^3$. Par exemple :

```
s = 0
n = 10**3
h = 1/n
for k in range(n):
  s += exp( - (k * h)**2 )
return h * s
```

Exercice 6 Permutations.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cet exercice on appelle permutation toute bijection de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$ dans lui-même. Dans cet exercice nous modéliserons une permutation σ par une liste de taille n contenant les n images des entiers de 0 à $n-1$: $[\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n-1)]$. Ainsi, si σ est modélisé par la liste $[2,1,0]$, cela signifie que $n=3$, $\sigma(0)=2, \sigma(1)=1$ et $\sigma(2)=0$.

R Bien noter, que la taille de la liste nous donne la valeur de l'entier n.

Dans la suite de cet exercice le mot permutation désignera aussi bien une permutation à proprement parler que la liste modélisant cette permutation.

1. ☞0.5✓Écrire une fonction `identite` prenant pour paramètre un entier n et retournant la liste correspondant à l'application identité c'est-à-dire la liste $[0, 1, \dots, n-1]$.
2. ☞1.5✓ Écrire une fonction `compose` prenant pour paramètres deux permutations S et T et retournant leur composée $S \circ T$. Par exemple si $S = [0,2,1]$ et $T = [1,2,0]$, alors la fonction retournera $[2,1,0]$. La fonction `compose` pourra au préalable, vérifier que les deux permutations sont bien de même taille.
3. ☞1.5✓ Écrire une fonction `puissance` prenant pour paramètres une permutation S et un entier k et retournant la

composée S^k. Par exemple si $S = [0,2,1]$ et $k = 2$, alors la fonction retournera [0,1,2].

4. ☞1.5✓ Pour chaque permutation S, on sait qu'il existe un plus petit entier naturel non nul k tel que S^k soit l'application identité. Cet entier k est appelé l'ordre de la permutation. Écrire une fonction `ordre` prenant pour paramètre une permutation S et retournant l'ordre de cette permutation.
5. ☞1.5✓ On considère maintenant une liste quelconque S et on se demande s'il s'agit bien d'une permutation. Écrire une fonction `verifie` prenant pour paramètre une liste S et retournant `True` s'il s'agit bien d'une permutation et `False` sinon.
6. ☞2✓ Écrire une fonction `reciproque` prenant pour paramètre une permutation S et retournant sa réciproque.

Correction :

1. Il suffit de créer la liste :

```
def identite(n):
    R=[]
    for i in range(n):
        R+=[i]
    return(R)
```

ou encore :

```
R = list(range(n))
```

2. Étant donné un $i \in [\![0, n-1]\!]$ il faut que $R(i)$ soit $S(T(i))$.

```
def compose(S,T):
    if len(T)!=len(S):
        return('erreur')
    n=len(T)
    R=[0] * n
    for i in range(n):
        R[i] =  S[ T[i] ]
    return(R)
```

3. Il faut utiliser la fonction précédente !

```
def puissance(S,k):
    R=identite(len(S))
    for i in range(k):
        R=compose(R,S)
    return(R)
```

4. Même idée :

```
def ordre(S):
    k=1
    R=S.copy() # ne pas oublier de copier !
    I=identite(len(S))
    while R!=I:
        R=compose(R,S)
        k+=1
    return(k)
```

5. On peut vérifier que S contient toutes les valeurs de $[\![0, n-1]\!]$. Il les contiendra alors toutes une et une seule fois.

```
def verifie1(S):
    n=len(S)
    for i in range(n):
        if i not in S:
            return False
    return True
```

6. Si T est la réciproque de S, alors $T(S(i) = i$!

```
def reciproque(S):
    n=len(S)
```

```python
    T=n*[0]
    for i in range(n):
        T[S[i]]=i
    return(T)
```

On peut aussi calculer l'ordre k et renvoyer S composé $k-1$ fois.

Devoir surveillé 1 — Samedi 18 septembre

Pelletier Sylvain — PSI, LMSC

Calculatrice interdite — durée 4h
Thèmes: Dénombrements, probabilités sur un univers fini

Exercice 1 CCINP PC 2021 Exercice 1

Faire l'exercice 1 du sujet CCINP PC 2021 en annexe.

Exercice 2 Nombres de coïncidences

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$). On les tire toutes une à une et sans remise.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on dit qu'il y a coïncidence au rang k si le numéro de la k-ième boule est k.

Soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si il y a coïncidence au tirage i et X la variable aléatoire égale au nombre de coïncidences obtenues au cours des tirages.

1. ☞0.5✓ Exprimer X en fonction des X_i.
2. ☞1✓ Soit $i \in [\![1,n]\!]$, déterminer la loi de X_i.
3. ☞0.5✓ Sans déterminer la loi de X , calculer l'espérance de X.
4. ☞1.5✓ Soit $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Donner $cov(X_i,X_j)$.
5. ☞1.5✓ En déduire la variance de X.

Correction :

1. On a : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. On doit calculer, $p(X_i = 1)$ ie la probabilité qu'il y ait coïncidence au tirage i. Plusieurs calculs sont possibles, par exemple par les probabilités composées :
$$\begin{aligned} p(X_i = 1) &= p(T_1 \neq i \cap \cdots \cap T_{i-1} \neq i \cap T_i = i) \\ &= p(T_1 \neq i) p_{T_1 \neq i}(T_2 \neq i) \dots p_{T_1 \neq i \dots T_{i-2} \neq i}(T_{i-1} \neq i) p_{T_1 \neq i \dots T_{i-1} \neq i}(T_i = i) \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n+1-i}{n+2-i} \frac{1}{n+1-i} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$
Ou par dénombrements :
   - l'univers est l'ensemble des permutations il y a $n!$ tirages possibles,
   - un tirage tel que la boule i est tirée en i est donnée par la place des $n-1$ autres boules dans les $n-1$ places restantes, soit $(n-1)!$ choix possibles.

   Ainsi : $p(X_i = 1) = \frac{1}{n}$.
   Ainsi, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{n}\right)$. et donc $E(x_i) = \frac{1}{n}$.
3. On en déduit : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.
   Au final, on obtient $E(X) = 1$.
4. Pour $i < j$, on sait :
$$cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$$
or on a : $E(X_i X_j) = p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$.
Il faut donc calculer la probabilité d'avoir coïncidence aux tirages i et j.
Par exemple par dénombrements :
   - l'univers est l'ensemble des permutations il y a $n!$ tirages possibles,
   - un tirage tel que la boule i est tirée en i et la boule j est tiré en j est donnée par la place des $n-2$ autres boules dans les $n-2$ places restantes, soit $(n-2)!$ choix possibles.

Ainsi :

$$p(X_i = 1 \cap X_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} cov(X_i, X_j) =& \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} \\ =& \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2(n-1)} \end{aligned}$$

5. On utilise ensuite la formule de la variance d'une somme :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j).$$

On a déjà vu :

$$V(X_i) = \frac{1}{n}\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^2}.$$

et

$$cov(X_i, X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} V(X) =& \frac{n-1}{n} + 2\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} \\ =& \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $V(X) = 1$.

Exercice 3 On considère une urne contenant une proportion a de boules rouges $(0 < a < 1)$.

On extrait successivement n fois de suite une boule de l'urne que l'on remet dedans avant chaque nouveau tirage. On désigne par X le nombre de boules rouges obtenues à l'issue de ces n tirages.

Si $X = k$ on effectue alors k tirages successifs d'une boule de l'urne que l'on remet dedans avant chaque tirage. On désigne alors par Y le nombre de boules rouges obtenues dans cette deuxième partie de l'expérience aléatoire.

1. ☞1✓ Déterminer la loi de X. Préciser son espérance et sa variance.
2. ☞1✓ Déterminer l'univers image du couple de variables aléatoires (X, Y).
3. ☞1✓ Soient $i \in [\![0, n]\!]$, et $j \in [\![0, n]\!]$, déterminer la probabilité $p_{(X=i)}(Y = j)$.
4. ☞2✓ Calculer $p(X = Y)$. *(Simplifiez l'expression).*
5. ☞1✓ Déterminer pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, la probabilité $p(X = i \cap Y = j)$.
6. ☞1.5✓ Montrer que $(X - Y) \hookrightarrow \mathscr{B}(n, a - a^2)$. Donner son espérance et sa variance.
7. ☞1.5✓ Montrer que $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, a^2)$. Donner son espérance et sa variance.

Commentaires : aucune difficulté à condition de bien connaître la formule des probabilités totales ! !

Correction :

1. On a clairement $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, a)$. Et donc $E(X) = na$, $V(X) = na(1 - a)$.
2. L'univers images est $[\![0, n]\!]^2$.

> ! Ne pas dire : $[\![0, n]\!] \times [\![0, k]\!]$, où $X = k$ cela n'a pas de sens : l'univers image est le produit des univers image de chacune des variables.

3. Il est clair que si $j > i$, on a : $p_{(X=i)}(Y = j) = 0$. Si $j \leqslant i$, on voit que sachant $X = i$, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(i, a)$. Ainsi :

$$p_{(X=i)}(Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \binom{i}{j} a^j (1-a)^{i-j} & \text{si } j \leqslant i. \end{cases}$$

! Ne pas oublier le cas $j > i$

4. On utilise le système complet d'événement associé à X pour avoir :

$$\begin{aligned}
p(X=Y) &= \sum_{i=0}^{n} p(X=Y \cap X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=i \cap Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=i) p_{X=i}(Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i (1-a)^{n-i} a^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (a^2)^i (1-a)^{n-i} \\
&= (1-a+a^2)^n.
\end{aligned}$$

Il faut voir le binôme de Newton à la fin du calcul (-0.5 dans ce cas).

5. Déjà si $j > i$, on a $p(X=i \cap Y=j) = 0$, sinon :

$$\begin{aligned}
p(X=i \cap Y=j) &= p(X=i) p_{X=i}(Y=j) \\
&= \binom{n}{i} a^i (1-a)^{n-i} \binom{i}{j} a^j (1-a)^{i-j} \\
&= \binom{n}{i} \binom{i}{j} a^{i+j} (1-a)^{n-j}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$p(X=i \cap Y=j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \binom{n}{i} \binom{i}{j} a^{i+j} (1-a)^{n-j} & \text{si } j \leqslant i. \end{cases}$$

! Ne pas oublier le cas $j > i$

6. Déjà $X - Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, soit donc $k \in [\![0, n]\!]$.
On utilise le système complet d'événement associé à Y pour obtenir :

$$\begin{aligned}
p(X-Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} p(X-Y=k \cap Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=k+i \cap Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=k+i) p_{X=k+i}(Y=i)
\end{aligned}$$

! Attention aux indices : $p(X=k+i \cap Y=i)$ est nul si $k+i > n$. Le reste n'est qu'un calcul dont on connaît le résultat (0.5 pour la fin des calculs).

$$
\begin{aligned}
p(X-Y=k) &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{k+i} a^{k+i}(1-a)^{n-(k+i)} \binom{k+i}{i} a^i(1-a)^k \\
&= \frac{n!}{k!} a^k(1-a)^k \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{i!(n-k-i)!} a^{2i}(1-a)^{n-k-i} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k(1-a)^k \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{i!(n-k-i)!} a^{2i}(1-a)^{n-k-i} \\
&= \binom{n}{k} a^k(1-a)^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} a^{2i}(1-a)^{n-k-i} \\
&= \binom{n}{k} a^k(1-a)^k(1-a+a^2)^n \\
&= \binom{n}{k} (a-a^2)^k(1-a+a^2)^n.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $X-Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, a-a^2)$. Et donc : $E(X-Y) = n(a-a^2)$, et $V(X-Y) = n(a-a^2)(1-a+a^2)$.
Autre méthode : on peut aussi passer par le système complet d'événement associé à X :

$$
\begin{aligned}
p(X-Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} p(X-Y=k \cap X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=i \cap Y=i-k) \\
&= \sum_{i=k}^{n} p(X=i) p_{X=i}(Y=i-k) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{i-k} a^{2i-k}(1-a)^{n-i+k} \\
&= \frac{n!}{k!} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{(n-i)!(i-k)!} a^{2i-k}(1-a)^{n-i+k}.
\end{aligned}
$$

On pose alors $j = n-i$ soit $i = n-j$, pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
p(X-y=k) &= \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!(n-j-k)!} a^{2n-2j-k}(1-a)^{j+k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} a^k(1-a)^k \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{j!(n-j-k)!} (a^2)^{k-k-j}(1-a)^j \\
&= \binom{n}{k} (a-a^2)^k(1-a+a^2)^{n-k}
\end{aligned}
$$

On peut aussi dire que l'expérience peut se modéliser d'une manière différente :

- On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, et on recommence.
- On note succès si il y a eu une rouge puis « non rouge ».
- On renouvelle n fois l'expérience.

$X-Y$ correspond alors au nombre de succès de ce schéma de Bernoulli, donc la probabilité de succès est $a(1-a)$.
Néanmoins, même si vous pouvez faire cette remarque, il faut ici le redémontrer par le calcul.

7. On a, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$
\begin{aligned}
p(Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} p(X=i \cap Y=k) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=i) p_{X=i}(Y=k)
\end{aligned}
$$

R Encore une fois attention aux indices, le reste n'est que du calcul

$$\begin{aligned}
p(Y=k) =& \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} a^i (1-a)^{n-i} \binom{i}{k} a^k (1-a)^{i-k}\\
=& (1-a)^{n-k} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} a^{k+i}\\
=& \frac{n!}{k!}(1-a)^{n-k} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{(i-k)!(n-i)!} a^{k+i}\\
=& \frac{n!}{(n-k)!k!}(1-a)^{n-k} \sum_{i=k}^{n} \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} a^{k+i}\\
=& \binom{n}{k}(1-a)^{n-k} a^{2k} \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{i-k} a^{i-k}
\end{aligned}$$

On fait alors le changement de variables : $j = i-k$

$$\begin{aligned}
p(Y=k) =& \binom{n}{k}(1-a)^{n-k} a^{2k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} a^{j}\\
=& \binom{n}{k}(1-a)^{n-k} a^{2k}(1+a)^{n-k}\\
=& \binom{n}{k}\left(1-a^2\right)^{n-k} a^{2k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, a^2)$, et donc $E(Y) = na^2$ et $V(Y) = na^2(1-a^2)$.

Idem ici cela peut se modéliser en : On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, et on recommence, et on note succès : l'événement : *tirer deux rouges*. Mais encore une fois, on attends le calcul.

Exercice 4 ESSEC ECE 2001 (partie II)

1. **Calculs préliminaires**
   (a) ☞1✓ On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geqslant q$.
   En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante :
   $$\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$$
   (b) ☞1✓ En faisant $q = 1,\ 2,\ 3$, en déduire une expression factorisée des sommes suivantes :
   $$\sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k(k-1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$$
   ☞0.5✓En déduire aussi une expression factorisée de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
2. On considère dans toute la suite un nombre entier $n \geqslant 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
   On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :
   - N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré.
   - N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du deuxième jeton tiré.
   - X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés.
   - Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

   Lois conjointes et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2 .
   (a) ☞1✓ Déterminer les probabilités $p(N_1 = i)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $p(N_2 = j | N_1 = i)$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$.
   ☞1✓En déduire $p(N_2 = j)$ pour $j \in [\![1,n]\!]$.
   Comparer les lois de N_1 et de N_2.
   (b) ☞1✓ Calculer les espérances $E(N_1)$ et $E(N_2)$, et les variances $V(N_1)$ et $V(N_2)$.
   (c) ☞0.5✓ Déterminer les probabilités $p(N_1 = i \cap N_2 = j)$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$.

☞1✓En déduire que :

$$E(N_1N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

☞1✓En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2.

(d) ☞1✓ Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $V(N_1+N_2)$.

3. **Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables X et Y**
   (a) ☞0.5✓ Montrer que les probabilités $p(X=i \cap Y=j)$ sont égales à $\frac{2}{n(n-1)}$ pour tout couples (i,j) vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
   ☞0.5✓Donner la valeur de $p(X=i \cap Y=j)$ dans les autres cas.
   (b) ☞1✓ En déduire les probabilités $P(Y=j)$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$ et $P(X=i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.
   (On vérifiera que les formules donnant $P(Y=j)$ et $P(X=i)$ restent valables si $j=1$ ou $i=n$).
   (c) ☞1.5✓ Déterminer les probabilités $P_{Y=j}(X=i)$ et $P_{X=i}(Y=j)$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, puis reconnaître la loi de X conditionnée par $Y=j$ et la loi de Y conditionnée par $X=i$.
   (d) ☞1✓ Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y, autrement dit les deux probabilités $P(n+1-X=j)$ et $P(Y=j)$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$.
   ☞0.5✓En déduire que $E(n+1-X)=E(Y)$ et $V(n+1-X)=V(Y)$, puis en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.
4. **Espérances et variances des variables aléatoires X et Y**
   (a) ☞1✓ Exprimer les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de n.
   (b) ☞1✓ Exprimer sous forme factorisée $E[(Y(Y-2)]$, puis $E(Y^2), V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n.
5. **Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y**
   (a) ☞1✓ Vérifier que $X+Y=N_1+N_2$, puis en déduire sous forme factorisée la variance de $X+Y$ et la covariance de X et Y.
   (b) ☞1✓ En déduire le coefficient de corrélation de X et Y.
   On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.

Correction :

1. **Calculs préliminaires**
   (a) On fixe q eet on procède par récurrence sur n, en notant $\mathscr{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$ ».

   Initialisation : Pour $n=q$ on a :

$$\sum_{k=q}^{q}\binom{k}{q} = \binom{q}{q} = 1 = \binom{q+1}{q+1}$$

   ! L'initialisation se fait à partir de $n=q$! ☞0 si initialisation à partir de 0✓

   Hérédité : Soit $n \geqslant q$ tel que $\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$ alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=q}^{n+1}\binom{k}{q} &= \sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q} + \binom{n+1}{q} \\ &= \binom{n+1}{q+1} + \binom{n+1}{q} \\ &= \binom{n+2}{q+1} && \text{(triangle de Pascal)}\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour } n \geqslant q : \sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}}$

   (b) En faisant $q=1$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

pour $q=2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} &= \sum_{k=2}^{n}\frac{k\,(k-1)}{2}=\binom{n+1}{3}=\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3\cdot 2} \text{ et}\\
\sum_{k=2}^{n}k\,(k-1) &= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3}
\end{aligned}$$

enfin pour $q=3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3} &= \sum_{k=2}^{n}\frac{k\,(k-1)\,(k-2)}{3\cdot 2}=\binom{n+1}{4}=\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{4\cdot 3\cdot 2} \text{ et}\\
\sum_{k=2}^{n}k\,(k-1)\,(k-2) &= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{4}
\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}k(k-1)+\sum_{k=1}^{n}k\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{après calculs.}
\end{aligned}$$

2. **Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2.**

   (a) Les numéros présents dans l'urne sont équiprobables donc $\mathrm{P}\,(N_1=i)=\frac{1}{n}$ pour $1\leqslant i\leqslant n$.
   On a aussi :
   $\mathrm{P}_{N_1=i}\,(N_2=j)=\frac{1}{n-1}$ pour $1\leqslant j\leqslant n,\, j\neq i$ et $\mathrm{P}_{N_1=j}\,(N_2=j)=0$ car la boule j est retirée de l'urne.
   On utilise ensuite la formule des probas totales : $(N_1=i)_{i\in[[1,n]]}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(N_2=j) &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}_{N_1=i}\,(N_2=j)\,\mathrm{P}\,(N_1=i)\\
&= \sum_{i=1:i\neq j}^{n}\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\mathrm{P}_{N_1=j}\,(N_2=j)\,\mathrm{P}\,(N_1=j)\\
&= (n-1)\,\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc la loi de } N_2 \text{ est la même que celle de } N_1.}$
   N.B. On aurait aussi pu raisonner directement : sans conditionnement par le premier tirage, tous les numéros sont possibles et équiprobables pour le second tirage.

   (b) On a $E\,(N_1)=E\,(N_2)=\frac{n+1}{2}$ (loi uniforme sur $[[1,n]]$)

$$\begin{aligned}
E\left(N_1^2\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}=\frac{1}{n}\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\\
&= \frac{(n+1)\,(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}
V\,(N_1) &= E\left(N_1^2\right)-E\,(N_1)^2\\
&= \frac{(n+1)\,(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\\
&= \frac{n+1}{12}\,(4n+2-3n-3)\\
&= \frac{n^2-1}{12}
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{E\,(N_1)=E\,(N_2)=\dfrac{n+1}{2} \text{ et } V\,(N_1)=V\,(N_2)=\dfrac{n^2-1}{12}}$

   (c) On a $\mathrm{P}\,(N_1=i\cap N_2=j)=0$ si $i=j$ (événement impossible) De plus, si $i\neq j$: $\mathrm{P}\,(N_1=i\cap N_2=j)=\mathrm{P}\,(N_1=i)\,\mathrm{P}_{N_1=i}\,(N_2$
   $\frac{1}{n(n-1)}$

On a alors (on ne pense pas que N_1 et N_2 soient indépendantes)

$$\begin{aligned}
E(N_1N_2) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\, j\, \mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \left[\sum_{j=1:j\neq i}^{n} j\, \mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) + 0\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{j=1}^{n} j - i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \frac{n(n+1)}{2n(n-1)} - \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{1}{n(n-1)} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4n(n-1)} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{n(n-1)6} \\
&= \frac{n(n+1)}{n(n-1)12}\left(3\left(n+n^2\right) - 4(2n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)}{(n-1)12}\left(3n^2 - n - 2\right) \text{ que l'on factorise} \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)(n-1)}{(n-1)12}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On a donc bien } E(N_1N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}}$

La covariance de (N_1, N_2) est alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(N_1, N_2) &= E(N_1N_2) - E(N_1)E(N_2) \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)}{12}[3n + 2 - 3n - 3] \\
&= -\frac{n+1}{12} \\
\rho(N_1, N_2) &= \frac{\mathrm{Cov}(N_1, N_2)}{\sqrt{V(N_1)V(N_2)}} \\
&= -\frac{n+1}{12}\frac{12}{n^2-1} \\
&= -\frac{1}{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{le coefficient de corrélation linéaire de } N_1 \text{ et } N_2 \text{ vaut } -\frac{1}{n-1}}$

(Le signe négatif est cohérent : plus l'un est grand, moins l'autre a de chance de l'être).

(d) On a alors

$$\begin{aligned}
V(N_1 + N_2) &= V(N_1) + V(N_2) + 2\mathrm{Cov}(N_1, N_2) \\
&= 2\frac{n^2-1}{12} - 2\frac{n+1}{12} \\
&= \frac{n+1}{6}(n - 1 - 1) \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{6}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V(N_1 + N_2) = \frac{(n+1)(n-2)}{6}}$

3. **Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables** aléatoires X et Y

(a) $1 \leqslant i < j \leqslant n$. on a $(X = i \cap Y = j) =$ " le plus grand vaut j e tle plus petit vaut i" et comme on a bien $i < j$ $(X = i \cap Y = j) =$" l'un vaut i et l'autre j"$=(N_1 = i \cap N_2 = j) \cup (N_1 = j \cap N_2 = i)$ incompatibles donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = i \cap Y = j) &= \mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) + \mathrm{P}(N_1 = j \cap N_2 = i) \\
&= \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Et sinon, l'événement est impossible et la probabilité est nulle.

(b) Les lois de X et de Y sont les lois marginales du couple donc
pour $j \geqslant 2$

$$\begin{aligned} P(Y=j) &= \sum_{i=1}^{n} P(X=i \cap Y=j) \\ &= \sum_{i=1:i<j}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} + 0 \text{ car } j-1 \geqslant 1 \\ &= \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

et pour $j=1$ on $P(Y=1)=0$ (car le numéro 1 sera le plus petit et ne pourra pas être le plus grand), ce que donne encore la formule.
Pour $i \leqslant n-1$

$$\begin{aligned} P(X=i) &= \sum_{j=1}^{n} P(X=i \cap Y=j) \\ &= \sum_{j=i+1:j>i}^{n} \frac{2}{n(n-1)} + 0 \text{ car } i+1 \leqslant n \\ &= \frac{2(n-(i+1)+1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

qui donne bien 0 pour $i=n$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour } i \text{ et } j \text{ de } [[1,n]] : P(Y=j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \text{ et } P(X=i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}}$

(c) Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$:
Quand $Y=j$ le plus petit peut prendre toutes les valeurs de $[[1,j-1]]$ équiprobablement et $P_{Y=j}(X=i) = \frac{1}{j-1}$ pour $i \in [[1,j-1]]$.
Pour plus de sureté, on revient à la définition :

$$P_{Y=j}(X=i) = \frac{P(X=i \cap Y=j)}{P(Y=j)} = \frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{2(j-1)}{n(n-1)}} = \frac{1}{j-1}$$

et de même

$$P_{X=i}(Y=j) = \frac{1}{n-i}$$

(d) On a $X(\Omega) = [[1,n-1]]$ donc $(n+1-X)(\Omega) = [[2,n]] = Y(\Omega)$
Pour $2 \leqslant j \leqslant n$ on a

$$\begin{aligned} P(n+1-X=j) &= P(X=n+1-j) \\ &= \frac{2(n-(n+1-j))}{n(n-1)} \text{ car } 1 \leqslant n+1-j \leqslant n-1 \\ &= \frac{2(j-1)}{n(n-1)} = P(Y=j) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{n+1-X \text{ et } Y \text{ ont la même loi.}}$,
Donc ils ont même espérance et variance. $E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$,
Or $E(n+1-X) = n+1-E(X)$ d'où $E(X) = n+1-E(Y)$
et $V(n+1-X) = (-1)^2 V(X)$ donc
Conclusion : $\boxed{E(X) = n+1-E(Y) \text{ et } V(X) = V(Y)}$

4. **Espérances et variances des variables aléatoires X et Y**

(a) Idée : $X+Y = N_1+N_2$ donc $E(X)+E(Y) = E(N_1)+E(N_2)$ ne conduit à rien ici car on a simplification...
On revient à la défintion :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=2}^{n} j \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^{n} j(j-1) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \\ &= \frac{2}{3}(n+1) \end{aligned}$$

d'après les formules du début.
D'où $E(X) = n+1-E(Y) = \frac{1}{3}(n+1)$

(b) On a :

$$\begin{aligned} E[Y(Y-2)] &= \sum_{j=2}^{n} j(j-2) \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^{n} j(j-1)(j-2) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

Or $E[Y(Y-2)] = E\left[Y^2-2Y\right] = E\left(Y^2\right) - 2E(Y)$ et $E\left(Y^2\right) = E\left[Y^2-2Y\right] + 2E(Y)$ donc

$$\begin{aligned} E\left(Y^2\right) &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \frac{4}{3}(n+1) \\ &= \frac{(n+1)}{6}(3n-6+8) \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left(Y^2\right) - E(Y)^2 \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4}{9}(n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{18}(9n+6-8n-8) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{18} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V(X) = V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}}$

5. **Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y**

(a) Comme X est l'une des deux valeur et Y l'autre alors $X+Y = N_1+N_2$
Donc

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(N_1+N_2) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{6} \end{aligned}$$

D'auter part $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{2}[V(X+Y) - V(X) - V(Y)] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n-2)}{6} - 2\frac{(n+1)(n-2)}{18}\right) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2 \cdot 18} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{36}}$

(b) On a alors

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{36}\frac{18}{(n+1)(n-2)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\rho(X,Y) = \frac{1}{2} \text{ indépendant de } n \text{ (étonnant, non ?)}}$

Devoir non surveillé pour le Vendredi 28 septembre

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Thèmes: probabilités

Exercice 1 On dispose de deux boîtes d'allumettes : la boîte « pile » et la boîte « face », et d'une pièce équilibrée. Au départ, les deux boîtes contiennent 20 allumettes. On tire à pile ou face, si on obtient pile, on enlève une allumette de la boîte « pile », idem si on obtient face.

On s'arrête lorsqu'une boite est vide, et on note X le nombre d'allumettes dans la boîte non vide. Ainsi, X est une valeur aléatoire de $[\![1,20]\!]$.

1. Écrire une fonction `simule` qui ne prend rien en entrée et qui calcule la valeur de X (aléatoire donc). On utilisera la fonction `rand` du module `numpy.random`.
   NB : une fonction qui n'a rien en entrée s'écrit : `def simule():`
2. Écrire une fonction `simuleMFois` qui prend un entier m, qui réalise m expériences et qui sort une liste L, de taille 20, tel que : `L[i]` est le nombre d'expérience parmi les m pour lesquelles le résultat a été $X = i+1$.
3. Réaliser 2000 expériences avec la fonction précédente.
   En utilisant uniquement les fonctions de base de python, estimer la valeur empirique de la moyenne de X et son écart-type.
4. En utilisant la fonction `bar` du module `pylab`, dessiner un diagramme en bâton des valeurs de `L`, c'est-à-dire des valeurs empiriques de $p(X = i)$.

Correction :

```
# -*- coding: utf-8 -*-


"""
Auteur: Sylvain Pelletier
simulation des allumettes de Banach
"""


# Modules et fonctions importés
###############################
from numpy.random import rand
from math import sqrt
from pylab import *

# Fonctions
###########

# il est plus facile d'utiliser un paramètre pour cela.
TAILLE_BOITE = 20

def simule():
    """
    sortie: X = entier
              = nbr d'allumettes dans la boîte non vide lorsque l'une est vide
    """
    nbrPile = TAILLE_BOITE
    nbrFace = TAILLE_BOITE

    while nbrFace >0 and nbrPile >0 :
        alea =rand()
        if alea<0.5 : #pile
            nbrPile = nbrPile -1
```

```
        else :
            nbrFace = nbrFace -1
    if (nbrFace>0):
        return(nbrFace)
    else:
        return(nbrPile)

def simuleMFois(m):
    """
    entrée: m =  entier = nbr d'expériences
    sortie: L = liste de 20 entiers
              = L[i] est le nombre d'expérience telles que X=i+1
    """
    L = [0]*TAILLE_BOITE
    for i in range(m) :
        X = simule()
        L[X-1] += 1
    return(L)

def calculeMoyVar(L, nbr_exp) :
    """
    entrée: L = liste d'entiers
              =  L[i] est l'effectif de l'événemts X=i+1
                 après nbr_exp simulations
            nbr_exp = entier
             = nbr de simulations
             = somme des valeurs de L[i]
    sortie: moyenne = float
            variance = float
            sigma = float = ecart-type
    Attention: L contient les effectifs de X=i+1
    """
    moyenne = 0
    moyenneCarre = 0
    for [i, effectif] in enumerate(L):
        moyenne += (i+1)*effectif
        moyenneCarre += ((i+1)**2) *effectif

    moyenne = moyenne / nbr_exp
    moyenneCarre = moyenneCarre / nbr_exp

    variance = moyenneCarre - moyenne**2
    sigma = sqrt(variance)
    return([moyenne, variance, sigma])



# Code:
#######

NBR_EXP = 2000

L = simuleMFois(NBR_EXP)
print("\n"+"-"*10+"résultats obtenus"+"-"*10)
print(L)

bar(arange(1,TAILLE_BOITE+1), L)
show()

[moyenne, variance, sigma]=calculeMoyVar(L, NBR_EXP)
print("-"*30)
print("moyenne: \t"+str(moyenne))
print("variance: \t"+str(variance)+"\t écart-type: \t"+str(sigma))
```

Exercice 2 Soit N un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant N jetons numérotés de 1 à N dans lequel on effectue une succession de tirages avec remise d'un jeton en notant, à chaque fois, le numéro obtenu. Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n le nombre de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages.

1. Exprimer précisément l'univers image $T_n(\Omega)$ où Ω désigne l'univers de l'expérience. Dans la suite, on considère que $T_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$ quitte à ajouter artificiellement des valeurs possibles à T_n dont la probabilité d'apparition est nulle.
2. Écrire une fonction `simule` prenant en entrée n et N et simulant une expérience en calculant la valeur de T_n.
3. Faire plusieurs expériences pour calculer les fréquences des événements $T_n = k$. On écrira une fonction `loiEmpirique` qui prend en entrée n, N et le nombre d'expériences et qui calcule une liste `T` de taille N, avec `T[i]` la probabilité empirique que $T_n = i+1$.
   On dit que l'on détermine la loi empirique de la variable T_n.
   Représenter cette loi sous forme de diagramme en bâtons.
   Proposer des représentations graphiques dans les cas où $n < N$, $n \approx N$ et n très grand devant N.
   On sauvegardera les images obtenues.
4. Pour un entier naturel non nul tel que $k \leqslant N$, on calcule $p(T_{n+1}) = k$ en utilisant le raisonnement suivant (à savoir faire) :

$$\text{on a : } \left(T_{n+1} = k\right) \subset \left(T_n = k\right) \cup \left(T_n = k-1\right)$$

$$\text{autrement dit : } \left(T_{n+1} = k\right) = \left(\left(T_n = k\right) \cap \left(T_{n+1} = k\right)\right) \cup \left(\left(T_n = k-1\right) \cap \left(T_{n+1} = k\right)\right)$$

$$\text{on conditionne : } p\left(T_{n+1} = k\right) = p\left(T_n = k\right) p_{T_n=k}\left(T_{n+1} = k\right) + p\left(T_n = k-1\right) p_{T_n=k-1}\left(T_{n+1} = k\right)$$

   Or, sachant $T_n = k$, on a N jetons dans l'urne, dont k ont déjà été tirés au moins une fois, l'événement $T_{n+1} = k$ signifie alors que l'on tire l'un de ces k jetons. Ainsi, $p_{T_n=k}\left(T_{n+1} = k\right) = \frac{k}{N}$.
   Sachant, $T_n = k-1$, on a N jetons dans l'urne, dont $k-1$ ont déjà été tirés au moins une fois, l'événement $T_{n+1} = k$ signifie alors que l'on tire un jeton qui n'a pas déjà été tiré, et donc $p_{T_n=k}\left(T_{n+1} = k\right) = \frac{N-k+1}{N}$.
   Cela donne :

$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} \times P(T_n = k) + \frac{N-(k-1)}{N} \times P(T_n = k-1).$$

   On dispose d'une formule de récurrence permettant de calculer la loi de T_{n+1} en connaissant la loi de T_n, comme la variable T_1 est certaine et égale à 1, on peut déterminer la loi exacte de T_n en fonction de n et N.
   Écrire une fonction `loiExacte` prenant en entrées les valeurs de n et de N et calculant la loi de T_n.
   Proposer une représentation graphique sous forme de diagramme en bâtons, et comparer aux représentations obtenues en simulant les expériences.
   Indication : il y a une imprécision dans le raisonnement ci-dessus, la corriger. Attention au décalage : `T[i]` correspond à $p(T_n = i+1)$.
5. Modifier le code pour calculer les moyennes et les variances des lois empiriques et théoriques.
6. Dans cette question, on considère le cas $N = 5$ et $n = 8$.
   Estimer le nombre d'expériences nécessaires pour obtenir par simulation une loi empirique de T_n proche de la loi réelle. Estimer alors le nombre d'opérations nécessaires pour faire ces simulations. Comparer au nombre d'opérations nécessaires pour calculer la loi réelle.

Correction :

```
# -*- coding: utf-8 -*-


"""
Auteur: Sylvain Pelletier
résolution d'un problème de probabilité avec Python
"""

# compatibilité V2 et V3:
from __future__ import print_function, division, unicode_literals
import sys
```

```
if sys.version_info.major <= 2 :
    input = raw_input


# Modules et fonctions importés
###############################
from pylab import *

# Fonctions
###########
def simule(n, N):
    """
    entrée: n = entier = nbr de tirages
            N = entier = taille de l'urne
    sortie: entier = nbr de jetons différents obtenus en n tirages
    """
    dejaTire = [] # liste des jetons deja tiré
    for k in range(n):
        jeton = floor(rand()*N)+1
        if jeton not in dejaTire :
            dejaTire += [ jeton ]
    return(len(dejaTire))

def loiEmpirique(nbrExpe, n, N):
    """
    entrée: n = entier = nbr de tirages
            N = entier = taille de l'urne
            nbrExpe = entier = nbr d'expériences
    sortie: T = liste = T[i] est l'effectif de (T_n = i+1)
    """
    T = [0]*N
    for expe in range(nbrExpe):
        i = simule(n,N)
        T[i-1] += 1
    return(T)

def loiEmpirique2(nbrExpe, n, N):
    """
    entrée: n = entier = nbr de tirages
            N = entier = taille de l'urne
            nbrExpe = entier = nbr d'expériences
    sortie: T = liste = T[i] est la fréquence de (T_n = i+1)
    """
    T = zeros(N) # o utilise un array
    for expe in range(nbrExpe):
        i = simule(n,N)
        T[i-1] += 1
    return(T/nbrExpe)


def loiExacte(n, N):
    """
    entrée: n = entier = nbr de tirages
            N = entier = taille de l'urne
    sortie: T = liste = T[i] est la probabilité exacte de (T_n = i+1)
    méthode utilisant uniquement deux liste Tn et Tnp1
    """

    # on utilise deux listes: Tn et Tnp1 de taille Nx
    Tn= [1] + [0]*(N-1) # initialisation de Tn à 1
    Tnp1= [0]*N # initialisation de Tn à 1
    for n in range(n-1):
        Tnp1[0] = 1/N*Tn[0]
```

```
        for i  in range(1,N):
            k = i+1
            Tnp1[i] = (k/N)*Tn[i] + (N-k+1)/N * Tn[i-1]
        Tn = Tnp1[:] # attention au piège de la copie de liste
    return(Tn)

def loiExacte2(n, N):
    """
    entrée: n = entier = nbr de tirages
            N = entier = taille de l'urne
    sortie: T = liste = T[i] est la probabilité exacte de (T_n = i+1)
    méthode construisant entièrement le tableau Tn
    """
    # on utilise un tableau T
    # T[i,j] = p (Tn=k ) avec n = i+1 et k = j+1
    T = zeros([n,N])
    T[0,0] = 1 # 1ère ligne: loi certaine = 1.
    for i in range(1,n): # boucle ligne
        T[i,0] = 1/N * T[i-1,0] # 1 ère élément de la ligne
        for j in range(1, N) : # boucle colonne
            k=j+1
            T[i,j] = (k/N)*T[i-1,j] + (N-k+1)/N * T[i-1,j-1]
    print(T)
    return(T[n-1,:]) #renvoi la dernière ligne.

# Code:
#######
N = 5
n = 8
nbrExpe = 100000

empirique = False

if empirique:
    L = loiEmpirique(nbrExpe, n, N)
    L = array(L) /nbrExpe #on utilise les fréquences et non les effectifs

    # ou utiliser
    # L = loiEmpirique2(nbrExpe, n, N)
else:
    L = loiExacte(n, N)

# représentation graphique
bar( range(1,N+1), L, align='center')
show(block ='false')

#calcul de la moyenne et de la variance
moy = 0
moyCarre = 0
for i, freq in enumerate(L) :
    result = i+1
    moy += result * freq
    moyCarre += (result**2) * freq
variance = moyCarre - moy**2
print("moyenne obtenue : "+str(moy)+"\t variance obtenue: "+str(variance))
```

Devoir surveillé 2 — Samedi 16 octobre

Pelletier Sylvain — PSI, LMSC

Calculatrice autorisée — durée 4h
Thèmes: Calcul de probabilités, variables aléatoires discrètes, séries numériques

Exercice 1 Oral ESCP

Une urne contient 2^n boules dont $\binom{n}{k}$ portent le numéro k, ceci pour k variant de 0 à n.

Un joueur puise une poignée de R boules dans l'urne. Le joueur gagne alors la somme G des nombres portés par les boules tirées.

1. ☞0.5✓ **Question préliminaire :**
   Montrer que, pour $n \neq 0$, on a
   $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$
2. Déterminer l'espérance et la variance de G pour :
   (a) ☞1.5✓ $R = 1$ (ie le joueur tire une seule boule)
   (b) ☞0.5✓ $R = 2^n$ (ie le joueur tire toutes les boules), .
   Indication : on pourra reconnaître des lois usuelles.

   On considère pour la suite le cas général $1 < R < 2^n$,
   on va monter que $E(G) = \frac{nR}{2}$ par deux méthodes.
   Les deux questions suivantes sont donc indépendantes.
3. **Méthode 1 :** On pose Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées de valeur k.
   (a) ☞0.5✓ Donner l'univers image $Y_k(\Omega)$.
   (b) ☞1✓ Justifier :
   $$\forall i \in Y_k(\Omega),\ p(Y_k = i) = \frac{\binom{\binom{n}{k}}{i}\binom{2^n - \binom{n}{k}}{R-i}}{\binom{2^n}{R}}$$
   (c) ☞0.5✓ Exprimer G en fonction des variables Y_k.
   (d) ☞0.5✓ On admet : $E(Y_k) = \frac{R}{2^n}\binom{n}{k}$. Donner l'espérance de G.
4. **Méthode 2 :** Pour chaque numéro $i \in [\![0, n]\!]$, on numérote les boules portant le numéro i, et on note $B_{i,j}$ la j-ème boule portant le numéro i. L'indice j varie donc entre 1 et $\binom{n}{i}$.
   On note aussi $X_{i,j}$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement on a tiré la boule $B_{i,j}$, c'est-à-dire : $X_{i,j} = 1$ si on a tiré $B_{i,j}$ et $X_{i,j} = 0$ si on ne l'a pas tirée.
   Les variables aléatoire $X_{i,j}$ sont donc des variables de Bernoulli.
   (a) ☞1✓ Calculer la loi de $X_{i,j}$.
   (b) ☞1✓ Exprimer G en fonction des variables $X_{i,j}$.
   Indication : on pourra utiliser une somme double.
   (c) ☞1✓ En déduire $E(G)$.
5. ☞2✓ On considère maintenant que le joueur tire au hasard un nombre R entre 0 et 2^n, la variable aléatoire R suivant alors une loi uniforme. Puis le joueur tire R boules de l'urne précédente. Donner son espérance de gain.

Correction :

1. Lemme assez classique, il existe plusieurs démonstration :

- en dérivant l'égalité de Newton :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$\text{donc} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

$$\text{avec } x=1 \text{ on obtient :} \quad n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

- en utilisant une variable aléatoire $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ et en calculant son espérance :

$$\sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n}{2}$$

- ou en utilisant l'égalité d'Euler sur les binomiaux (ce qui revient à reprendre la démonstration de l'espérance d'une loi binomiale) :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

2. (a) Pour $R=1$, le joueur tire une seule boule, on note donc X le numéro de la boule tirée, et on a : $G=X$. Donc $G(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour $k \in [\![0,n]\!]$,

$$p(G=k) = p(X=k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

L'énoncé dit : cherchez une loi usuelle !!
On reconnaît alors une loi usuelle : $G \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On a alors : $E(G) = \frac{n}{2}$ et $V(G) = \frac{n}{4}$. ☞1 si pas de variance ou si la loi binomiale n'est pas reconnue ✓

(b) Si $R = 2^n$, on tire toutes les boules, donc le gain est égal à la somme des numéros de toutes les boules de l'urne :

$$G = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Ainsi, la variable G est certaine, égale à $n2^{n-1}$. Son espérance est égale à $n2^{n-1}$ et sa variance est nulle.

3. (a) L'univers image est une partie de $\mathbb{N}$ qui vérifie :

$$Y_k(\Omega) \subset \left[\!\left[0, \binom{n}{k}\right]\!\right] \qquad \text{et} \qquad Y_k(\Omega) \subset [\![0,R]\!]$$

Les deux réponses ont été acceptée. La première est la plus naturelle.

(b) On fixe i et k et on procède par dénombrement pour calculer $p(Y_k = i)$.
On commence donc par donner l'univers (**c'est obligatoire et il ne faut pas confondre l'univers et son cardinal**).
Ici on tire R boules parmi les 2^n, ainsi Ω s'identifie aux parties de cardinal R des 2^n boules. En particulier, $card(\Omega) = \binom{2^n}{R}$.
Un tirage tel que $Y_k = i$ se construit par choix successifs :
  - on prend i boules numérotées k parmi les $\binom{n}{k}$ boules de ce numéro,
  - on prend $R-i$ boules parmi les $2^n - \binom{n}{k}$ qui portent un numéro diffférent.

On en déduit le résultat :

$$p(Y=i) = \frac{\binom{\binom{n}{k}}{i}\binom{2^n - \binom{n}{k}}{R-i}}{\binom{2^n}{R}}$$

REM : c'est une application de ce qui a été vu dans la fiche sur les tirages sans remise (et qui doit toujours être redémontré).
Soit $k \in [\![0,n]\!]$, Y_k est le nombre de boules de la valeur k, on distingue donc 2 types de boules :

- celles de valeur k (= les blanches)
- et celles de valeurs différentes (= les noires).

Ainsi, Y_k est le nombre de blanches dans ce tirage sans remise. On tire R boules dans une urne contenant 2^n boules. On en déduit : $Y_k \hookrightarrow \mathscr{H}\left(2^n, R, \frac{\binom{n}{k}}{2^n}\right)$ (**Rappel : cette loi est hors-programme**).

On retrouve en particulier la valeur donnée dans l'énoncé : $E(Y_k) = \dfrac{R}{2^n}\dbinom{n}{k}$.

(c) G est égal à :

- 0 fois le nombre de boules numérotées 0,
- plus 1 fois le nombre de boules numérotées 1,
- plus 2 fois le nombre de boules numérotées 2, etc.
- plus n fois le nombre de boules numérotées n.

Autre rédaction : pour chaque boule numérotées k, on ajoute k à G.

Ainsi : $G = \sum_{k=0}^{n} kY_k$.

(d) On en déduit donc :

$$E(G) = \sum_{k=0}^{n} kE(Y_k) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{R}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{R}{2^n}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{nR}{2}.$$

4. (a) Pour $i \in [\![0, n]\!]$ et $j \in \left[\!\left[1, \binom{n}{i}\right]\!\right]$, $X_{i,j}$ est une variable de Bernoulli. On a $(X_{i,j} = 1)$ est l'événement « la boule $B_{i,j}$ est tirée ». Puisque toutes les boules sont identiques, il s'agit de la probabilité pour une boule d'être tirée, et donc $p(X_{i,j} = 1) = \frac{R}{2^n}$ et donc $X_{i,j} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(1, \frac{R}{2^n}\right)$.

(b) D'autre part, G vérifie :

$$G = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{i}} iX_{i,j},$$

puisqu'à chaque fois que l'on tire la boule (i, j), on ajoute i à la somme.

(c) On en déduit :

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{i}} iE\left(X_{i,j}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{i}} i\frac{R}{2^n} \\ &= \frac{R}{2^n}\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} \\ &= \frac{nR}{2}. \end{aligned}$$

5. L'expérience est maintenant en deux étapes : déterminer R (au hasard) puis tirer les boules et donc obtenir G. Commençons par remarquer que $G(\Omega) = \left[\!\left[0, n2^{n-1}\right]\!\right]$, puisque le cas le plus favorable arrive lorsque l'on tire toutes les boules (ie $R = 2^n$).
Puis pour $k \in G(\Omega)$, on exprime $p(G = k)$ en utilisant le système complet d'événements associé à la variable R :

$$\begin{aligned} p(G = k) &= \sum_{j=0}^{2^n} p\left((R = j) \cap (G = k)\right) \\ &= \frac{1}{2^n + 1}\sum_{j=0}^{2^n} p_{(R=j)}(G = k). \end{aligned}$$

En effet, R suit une loi uniforme donc : $p(R = j) = \frac{1}{2^n+1}$.

Cela donne ensuite :

$$
\begin{aligned}
E(G) &= \sum_{k=0}^{n2^{n-1}} kp(G=k) \\
&= \frac{1}{2^n+1} \sum_{k=0}^{n2^{n-1}} k \sum_{j=0}^{2^n} p_{(R=j)}(G=k) \\
&= \frac{1}{2^n+1} \sum_{j=0}^{2^n} \sum_{k=0}^{n2^{n-1}} kp_{(R=j)}(G=k) && \text{on échange les sommes finies}
\end{aligned}
$$

Pour $j \in [\![1, 2^n]\!]$, la somme $\sum_{k=0}^{n2^{n-1}} kp_{(R=j)}(G=k)$ correspond au calcul de l'espérance avec $R = j$ à la question précédente.
On en déduit :

$$
\sum_{k=0}^{n2^{n-1}} kp_{(R=j)}(G=k) = \frac{jn}{2}.
$$

La relation est aussi vrai pour $j = 0$ (dans ce cas G est nulle).
Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
E(G) &= \frac{n}{2} \frac{1}{2^n+1} \sum_{j=0}^{2^n} j \\
&= \frac{n}{2} \frac{1}{2^n+1} \frac{2^n(2^n+1)}{2} \\
&= \frac{n2^n}{4}.
\end{aligned}
$$

Exercice 2 Centrale TSI 2017

Faire le sujet Centrale TSI 2017 en annexe.

Devoir non surveillé pour le Lundi 15 novembre

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Thèmes: Probabilité

Exercice 1 CCP PSI 2018

Notations et définitions

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbb{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $[-1,1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, $(\mathbb{E}(X) = 0)$, alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q1. ☞0.5✓ On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

Q2. ☞1.5✓ Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

Q3. ☞0.5✓ En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}\big(|X| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big(|X|\big)}{\alpha}.$$

Q4. ☞1✓ Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\big(S_n \geqslant \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\big) \leqslant \frac{\big(\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)\big)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$.

Q5. ☞1.5✓ Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1,1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

Q6. ☞0.5✓ En déduire que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1,1],\ \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}.$$

Q7. ☞1✓ En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leqslant \operatorname{ch} t.$$

Q8. ☞1✓ Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \leqslant e^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q9. ☞1✓ Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q10. ☞1✓ En déduire que $\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que

$$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion

Q11. ☞0.5✓ Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q12. ☞1.5✓ On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geqslant n} \{\omega \in \Omega\,;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement est que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

Q13. ☞1.5✓ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.
Écrire l'ensemble $A = \{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = 0\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

Q14. ☞1✓ Déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Correction :

1. Si $X(\Omega)$ est fini, la variable aléatoire X admet une espérance.
   Supposons donc que $X(\Omega)$ est infini dénombrable, on note $X(\Omega) = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$

   ! Trop d'élèves pensent que $X(\Omega)$ est nécessairement une partie de $\mathbb{N}$. Si c'est vrai pour les lois géométriques et de Poisson, ce n'est pas vrai pour une VARD quelconque.

   L'hypothèse est que $\forall i \in \mathbb{N},\ x_i \in [-1,1]$. On a alors :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n \mathbb{P}(X = x_n)| \leqslant \mathbb{P}(X = x_n)$$

   et $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ est convergente, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$, est absolument convergente. Ce qui signifie que X admet une espérance.
   Le résultat s'étend immédiatement à toute variable aléatoire bornée (par majoration, ou en se ramenant à $[-1,1]$ par normalisation) ; cela sera utile par la suite.
2. **Inégalité de Markov.** *Si Y est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors*

   $$\forall \alpha > 0 \colon \mathbb{P}(Y \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{\alpha}.$$

   ! Il faut l'hypothèse positive (ou utiliser la version avec $|X|$).

Cas où $Y(\Omega)$ est fini. La validité des manipulations sur les sommes finies est immédiate.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y=y) \\
&= \sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y<a}} y\mathbb{P}(Y=y) + \sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y\geqslant a}} y\mathbb{P}(Y=y) \\
&\geqslant \sum_{\substack{y\in X(\Omega)\\ y\geqslant a}} y\mathbb{P}(Y=y) && \text{car } Y(\Omega)\subset\mathbb{R}_+ \\
&\geqslant \sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y\geqslant a}} a\mathbb{P}(Y=y) = a\mathbb{P}(Y\geqslant a).
\end{aligned}$$

Cas où $Y(\Omega)$ est infini dénombrable. La technique est la même. Il faut par contre supposer que Y admet une espérance, la série (à termes positifs) $\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y=y)$ est alors absolument convergente. Les séries : $\sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y<a}} y\mathbb{P}(Y=y)$ et $\sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y\geqslant a}} y\mathbb{P}(Y=y)$ sont alors aussi absolument convergente.

Le calcul ci-desus est validé.

3. Comme X admet une espérance, il en va de même de $|X|$, à qui l'on peut appliquer l'inégalité de Markov, puisqu'elle est positive.

   ! Clairement, la question est faite pour permettre à ceux qui ne savent pas répondre à la question précédente de traiter la suite du sujet. Il faut bien indiquer les hypothèses : $|X|\geqslant 0$ et admet une espérance.

4. Le fait que $tn>0$, la croissance de l'exponentielle donnent :

$$\mathbb{P}(S_n\geqslant\varepsilon) = \mathbb{P}(tnS_n\geqslant tn\varepsilon)$$

puis l'inégalité de Markov, appliquée à la variable aléatoire positive bornée (donc admettant une espérance) e^{tnS_n}, donnent

$$\mathbb{P}(S_n\geqslant\varepsilon) = \mathbb{P}(tnS_n\geqslant tn\varepsilon) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{tnS_n}\geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tnS_n}\right)}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

   ! Beaucoup de confusion ici : $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$ n'a aucune raison d'être $\mathrm{e}^{t\mathbb{E}(X)}$.

Or, $\mathrm{e}^{tnS_n} = \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{tX_i}$ et les variables aléatoires e^{tX_i} sont bornées, donc admettent une espérance. Alors, l'indépendance des X_i donne l'indépendance des variables e^{tX_i} et :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tnS_n}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX_i}\right) = \left[\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right]^n.$$

En effet, à i fixé, les variables e^{tX_i} et e^{tX} ont la même loi.

5. De $g_a(x) = P(x) - a^x$ avec $P\in\mathbb{R}_1[X]$, on tire que g_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que $g_a''(x) = -(\ln a)^2 a^x < 0$, ce qui montre que g_a' est strictement décroissante. Comme

$$g_a(-1) = a^{-1} - a^{-1} = 0 = a - a = g_a(1),$$

le théorème de Rolle entraîne que g_a' s'annule au moins une fois sur $]-1,1[$. Comme g_a' est strictement décroissante, g_a' s'annule une seule fois et est d'abord positive, puis négative. Ainsi, il existe $x_0\in]-1,1[$ tel que g_a est strictement croissante sur $[-1,x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0,1]$.
Bien entendu, le plus simple est de tracer rapidement un tableau de variations.
En particulier, g_a est positive sur $[-1,1]$.

6. Soit $t>0$. En prenant $a=\mathrm{e}^t>1$, l'inégalité $g_a(x)\geqslant 0$ donne

$$\frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{tx} \geqslant 0,$$

d'où l'inégalité demandée en ajoutant e^{tx} des deux côtés.

7. Par croissance de l'espérance et en utilisant le fait que $\mathbb{E}(X)=0$, l'inégalité de la question précédente donne

$$\mathrm{e}^{tX} \leqslant \frac{1-X}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+X}{2}\mathrm{e}^{t} = \operatorname{ch} t + (\operatorname{sh} t)X$$

et donc : $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \operatorname{ch} t + (\operatorname{sh} t)\mathbb{E}(X) = \operatorname{ch} t$.

! Attention à bien comprendre le type d'objet que l'on manipule : $\mathrm{e}^{tX} \leqslant \frac{1-X}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+X}{2}\mathrm{e}^{t}$ est une inégalité entre fonctions (entre VARD).

8. Si $k \geqslant 1$, on a

$$(2k)! = k!\prod_{j=1}^{k}(k+j) \geqslant k!\prod_{j=1}^{k}2 = 2^k k!,$$

et l'inégalité est aussi vraie pour $k=0$ ($1=1$). En en prenant l'inverse, puis en multipliant par la quantité positive t^{2k}, il vient $\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$.
En utilisant alors la question , il vient, en utilisant les développements en série entière du cosinus hyperbolique et de l'exponentielle, lesquels sont de rayon de convergence infini :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \operatorname{ch} t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

9. Posons $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$. Alors, φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\varphi'(t) = n(t-\varepsilon)\varphi(t)$ est du signe de $t-\varepsilon$. Il s'ensuit que φ admet un minimum en ε et que ce minimum vaut $\varphi(\varepsilon) = \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.
10. Les questions précédentes donnent une majoration de $\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon)$ valable pour tout $t>0$:

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-nt\varepsilon}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nt\varepsilon} \times \mathrm{e}^{\frac{nt^2}{2}}.$$

En particulier, pour $t=\varepsilon$, choix optimal en vertu de la question précédente, il vient $\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.

Les v.a. $-X_i$ vérifient les mêmes hypothèses que les X_i (elles sont à valeurs dans $[-1,1]$ et indépendantes). Il s'ensuit que l'on peut appliquer la majoration ci-dessus à $-S_n$, ce qui donne $\mathbb{P}(-S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.

! Attention à ne pas aller trop vite dans ces questions ! Il ne suffit pas de dire « par symétrie... »

Alors,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n \leqslant -\varepsilon) + \mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

11. La croissance des mesures de probabilité et la question 40 donnent la majoration

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Le théorème de comparaison et la convergence de la série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \in]0,1[$ assurent alors la convergence de la série de terme général $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$.
12. $\{\omega \in \Omega;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\} = S_m^{-1}(]-\infty,-\varepsilon[) \cup S_m^{-1}(]\varepsilon,+\infty[)$ est la réunion de deux événements, donc un événement. Alors, B_n est une réunion dénombrable d'événements, donc un événement.
Par ailleurs, $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty}\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}\right)$, avec la sous-additivité.

R B_n n'est bien sûr pas une union disjointe.

C'est le reste d'une série convergente d'après la question précédente.
Comme la suite $(B_n)_n$ est décroissante, il s'ensuit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(B_n) = 0.$$

13. Posons pour plus de clarté $B_n(\varepsilon) = B_n$. On peut écrire

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\,;\, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \geqslant n \colon |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega\,;\, |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n(1/k)}$$

donc Ω_k est une réunion dénombrable d'événements et donc un événement. On peut par ailleurs écrire

$$A = \left\{\omega \in \Omega\,;\, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \geqslant n \colon |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k,$$

ce qui montre que A est un événement.

14. En reprenant l'expression de Ω_k obtenue à la question , le passage au complémentaire donne $\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(1/k)$ et en appliquant ce que l'on a montré aux questions précédentes, on obtient $\mathbb{P}\left(\overline{\Omega_k}\right) = 0$, d'où $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$.
Enfin, $\left(|S_m| \leqslant \frac{1}{k}\right) \supset \left(|S_m| \leqslant \frac{1}{k+1}\right)$, ce qui entraîne que la suite d'événements $(\Omega_k)_k$ est décroissante. On peut alors conclure :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(\Omega_k) = 1.$$

Autrement dit, $(S_n)_n$ converge presque sûrement vers 0. Ce résultat est la *loi forte des grands nombres*.

Exercice 2 CCP TSI 2019 PROBLÈME 3 Optimisation du choix d'une place de parking

Correction :

Q26. ☞0.5✓ On roule sans interruption jusqu'au numéro s avant de choisir la première place disponible (s inclus) d'où :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![s; +\infty[\![}$$

Q27. ☞1✓ Soit $k \geqslant s$. On pose pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i : "la i-ième place est libre."
$[X = k]$ signifie que la k-ième place est la première place libre depuis le numéro s,
donc $[X = k] = \overline{A_s} \cap \overline{A_{s+1}} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.
Sachant que les occupations de places sont indépendantes les unes des autres, que la place numéro i est libre avec une probabilité p et donc qu'elle est occupée avec une probabilité $1-p$, on a :
$p(X = k) = p(\overline{A_s}).p(\overline{A_{s+1}})\ldots(\overline{A_{k-1}}).p(A_k) = \underbrace{(1-p).(1-p)\ldots(1-p)}_{k-1-s+1 \text{ fois}}.p = (1-p)^{k-s}.p$

$$\boxed{X(\Omega) = [\![s; +\infty[\![\quad \text{et} \quad \forall k \geqslant s,\ p(X = k) = (1-p)^{k-s}.p}$$

Q28. ☞0.5✓ $Y = X - s + 1$. Comme $X(\Omega) = [\![s; +\infty[\![$,

$$\boxed{Y(\Omega) = [\![1; +\infty[\![= \mathbb{N}^*}$$

De plus, $\forall k \in Y(\Omega)$, $p(Y = k) = p(X - s + 1 = k) = p(X = k + s - 1) = (1-p)^{k+s-1-s}.p$
Finalement :

$$\boxed{\forall k \in Y(\Omega),\ p(Y = k) = (1-p)^{k-1}.p}$$

$$\boxed{\text{donc } Y \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p.}$$

D'après le cours :

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Q29. ☞0.5✓ Par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(Y + s - 1) = E(Y) + s - 1 = \frac{1}{p} + s - 1$.

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p} + s - 1}$$

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$, d'où $V(X) = 1^2.V(Y) = V(Y)$, c'est à dire :

$$\boxed{V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Q30. ☞0.5✓ $p = \frac{1}{10}$ et on suppose que D_s existe.
D'après le théorème de transfert :

$$D_s = E(|X-d|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - d| p(X = x_n) = \sum_{n=s}^{+\infty} |n-d| p(X = n)$$

car $X(\Omega) = [\![s; +\infty [\![$ et pour $n \geqslant s$, $x_n = n$.
Or $|n-d| = \begin{cases} n-d \text{ si } n > d \\ d-n \text{ si } n \leqslant d \end{cases}$
D'où

$$D_s = \sum_{n=s}^{d} (d-n)\, p(X=n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d)\, p(X=n) = S_1 + S_2$$

$$\boxed{D_s = S_1 + S_2}$$

Q31. ☞0.5✓ $\forall k \geqslant 0$, $u_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i = \underbrace{k+1}_{i=0} + \sum_{i=1}^{k+1} (k-(i-1)) \left(\frac{9}{10}\right)^i$
On effectue le changement d'indice $j = i-1$:
$\forall k \geqslant 0$, $u_{k+1} = k+1+\sum_{j=0}^{k}(k-j)\left(\frac{9}{10}\right)^{j+1} = k+1+\sum_{j=0}^{k}(k-j)\left(\frac{9}{10}\right)^{j} . \left(\frac{9}{10}\right)$
$= k+1+\left(\frac{9}{10}\right)\sum_{j=0}^{k}(k-j)\left(\frac{9}{10}\right)^{j}$, et :

$$\boxed{\forall k \geqslant 0,\ u_{k+1} = k+1+\frac{9}{10}.u_k}$$

Q32. ☞0.5✓ Soit $\mathscr{P}_k$:"$u_k = 10k - 90 + 90\left(\frac{9}{10}\right)^k$".
<u>initialisation :</u> Soit $k = 0$.
$u_0 = \sum_{i=0}^{0}(0-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i = 0 \times 1 = 0$
$10 \times 0 - 90 + 90.\left(\frac{9}{10}\right)^0 = -90+90 = 0$
donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>hérédité :</u> Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathscr{P}_k$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
D'après la question Q31.,
$u_{k+1} = k+1+\frac{9}{10}.u_k = k+1+\frac{9}{10}.\left(10k-90+90\left(\frac{9}{10}\right)^k\right)$ par hypothèse de récurrence.
D'où $u_{k+1} = k+1+9k-\frac{9}{10}.90+90.\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} = 10k+1-81+90.\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1}$
$= 10(k+1)-10+1-81+90.\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} = 10(k+1)-90+90.\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1}$.
donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

<u>conclusion :</u> On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = 10k - 90 + 90\left(\frac{9}{10}\right)^k}$$

Q33. ☞0.5✓ $S_1 = \sum_{n=s}^{d}(d-n)\, p(X=n) = \sum_{n=s}^{d}(d-n)\,(1-p)^{n-s}.p \overset{i=n-s}{=} \sum_{i=0}^{d-s}(d-i-s)\,(1-p)^i.p$
$= p.\sum_{i=0}^{d-s}(d-s-i)\,(1-p)^i = \frac{1}{10}.\sum_{i=0}^{d-s}(d-s-i)\,\left(\frac{9}{10}\right)^i$ car $p = \frac{1}{10}$. Finalement :

$$\boxed{S_1 = \frac{1}{10} u_{d-s}}$$

D'après la question Q32., $S_1 = \frac{1}{10}\left(10(d-s)-90+90\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}\right)$, soit encore :

$$\boxed{S_1 = d-s-9+9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}}$$

Q34. ☞1✓ $S_2 - S_1 = \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)\, p(X=n) - \sum_{n=s}^{d}(d-n)\, p(X=n)$
$= \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)\, p(X=n) + \sum_{n=s}^{d}(n-d)\, p(X=n) = \sum_{n=s}^{+\infty}(n-d)\, p(X=n) = E(X-d)$ d'après le théorème de transfert.

$$\boxed{S_2 - S_1 = E(X-d)}$$

Par linéarité de l'espérance, $E(X-d)=E(X)-d=\frac{1}{p}+s-1-d$
$=10+s-1-d=9+s-d$ car $p=\frac{1}{10}$.
Ainsi $S_2=S_1+9+s-d=d-s-9+9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}+9+s-d=9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}$.

$$\boxed{S_2=9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}}$$

et $D_s=S_1+S_2=d-s-9+18\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}=d-s-9+18.\frac{10}{9}\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}=d-s-9+20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}$.

$$\boxed{D_s=d-s-9+18\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}=d-s-9+20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}}$$

Remarque : On admet que pour $p\in]0;1[$, $D_s=d-s+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

Pour $p=\frac{1}{10}$, cela devient : $D_s=d-s+1-10+20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}=d-s-9+20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}$: on retrouve le résultat de la partie précédente.

Q35. ☞0.5✓ $D_{s+1}-D_s=d-(s+1)+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-(s+1)+1}-(d-s+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1})$
$=d-s-1+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s-1+1}-d+s-1+\frac{1}{p}-\frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$
$=-1+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s}(1-(1-p))=-1+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s}.p=-1+2(1-p)^{d-s}$

$$\boxed{D_{s+1}-D_s=2(1-p)^{d-s}-1}$$

Q36. ☞0.5✓ $D_{s+1}-D_s\geqslant 0\Leftrightarrow(1-p)^{d-s}\geqslant\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow(d-s)\ln(1-p)\geqslant-\ln(2)$ en composant par ln qui est croissante..
$\Leftrightarrow d-s\leqslant\frac{-\ln(2)}{\ln(1-p)}$ car $1-p\in]0;1[$, donc $\ln(1-p)<0$.
$\Leftrightarrow s\geqslant d+\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}$
$\Leftrightarrow s\geqslant\alpha$

s		α	
signe de $D_{s+1}-D_s$	$-$	0	$+$

Si on note Ent la fonction partie entière,
◇ Si $\alpha\in\mathbb{N}$, $D_{\alpha+1}-D_\alpha=0\Leftrightarrow D_{\alpha+1}=D_\alpha$: $D_{\alpha+1}$ est la valeur minimale de la suite et $\alpha+1$ est le plus petit entier strictement supérieur à α.
◇ Si $\alpha\notin\mathbb{N}$, $D_{Ent(\alpha)+1}-D_{Ent(\alpha)}<0\Leftrightarrow D_{Ent(\alpha)+1}<D_{Ent(\alpha)}$
et $D_{Ent(\alpha)+2}-D_{Ent(\alpha)+1}>0\Leftrightarrow D_{Ent(\alpha)+2}>D_{Ent(\alpha)+1}$.
Le minimum de la suite $(D_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est atteint pour $s=Ent(\alpha)+1$, c'est à dire le plus petit entier strictement supérieur à α.

$\boxed{D_s \text{ est minimal lorsque } s \text{ est le plus petit entier strictement supérieur à } \alpha.}$

Q37. ☞0.5✓ $\alpha=d+\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{9}{10})}=d+\frac{\ln(2)}{\ln(0.9)}$.
$2^{-1/6}<0.9<2^{-1/7}\Leftrightarrow-\frac{1}{6}\ln(2)<\ln(0.9)<-\frac{1}{7}\ln(2)$ car ln est croissante.
$\Leftrightarrow-\frac{7}{\ln(2)}<\frac{1}{\ln(0.9)}<-\frac{6}{\ln(2)}$ par passage à l'inverse
$\Leftrightarrow-7<\frac{\ln(2)}{\ln(0.9)}<-6$ car $\ln(2)>0$
$\Leftrightarrow d-7<\alpha<d-6$

On doit commencer à chercher une place 6 numéros avant l'arrivée (à $d-6$) si $d\geqslant 6$, et dès le numéro 0 sinon.

Q38. ☞0.5✓ On peut par exemple faire :

```python
def Bernoulli(q):
  ## renvoie True ou False
  return(random( ) < q)

def distance(d,s,p):
  X=s
  while(Bernoulli(1-p)): # ou encore while(Bernoulli(p)==0):
    X+= 1
  return abs(X-d)
```