Programme de colle 10

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

Rappels d'analyse : formule de Taylor avec reste intégrale, accroissements finis. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

Chapitre 4 Séries entières

I Lemme d'Abel et rayon de convergence *I.1 Définitions I.2 Lemme d'Abel I.3 Calculs de rayon de convergence ✯Invariance ✯Comparaison des coefficients ✯Dérivation et primitivation terme à terme ✯Règle de d'Alembert ✯Somme de deux séries ✯Produit de Cauchy de deux séries entières*

II Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle *✯Convergence normale sur tout segment de l'intervalle de convergence ✯Continuité ✯Primitivation d'une série entière ✯Dérivation d'une série entière III.2 Développements en série entière des fonctions usuelles ✯Série géométrique ✯Logarithme ✯Arctangente ✯Exponentielle, cosinus et sinus hyperbolique ✯Cosinus et sinus ✯Fonction puissance III.3 Extension au cas de la variable complexe*

Rappel sur l'algèbre linéaire : Espaces vectoriels.

Produit de SEV. Somme et somme directe de sous-espace vectoriel. Espaces vectoriels supplémentaires. Somme et somme directe de sous-espace vectoriel.

Techniques:

- Application des DLs pour étudier des fonctions au voisinage d'un point ou de l'infini.
  Exemple de $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ au voisinage de 0.
  Exemple de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$.
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral pour obtenir des inégalités.
  Exemple pour comparer :
  $$\cos(x) \quad \text{et} \quad 1-\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Application du théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ à la fonction $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.
- Théorème des accroissements finis.
- Notion de Rayon de convergence pour une série entière.
- Techniques pour estimer le rayon de convergence. Les résultats de la forme : « si on trouve $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z^n$ converge alors $|z| \leqslant R$ », doivent être connus et compris.
- Invariance du rayon de convergence.
- Utilisation de la comparaison des coefficients.
- Règle de d'Alembert pour les séries entières. Cas des séries lacunaires.
- Dérivation et primitivation termes à termes d'une série entière. Dérivation successives.
- Fonctions développables en série entière.
- Montrer qu'une fonction est DSE par des arguments de somme / produit / dérivée / primitive de fonctions DSE.
- Développements en série entière usuels : série géométrique, arctangente, exponentielle, cosinus, sinus, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, $x \mapsto (1+x)^\alpha$
- Montrer que la fonction exponentielle est DSE en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral. (la démonstration doit être connue).
- Montrer que $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est DSE en utilisant une équation différentielle. (la démonstration doit être connue).
- Développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (en particulier calcul du produit des nombres pairs / impairs).
- Définitions de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, sous-espaces vetoriels, somme et produit de sous-espaces vectoriels. Somme directe.
- Montrer qu'une partie F d'un EV E est un SEV : par la définition, en l'écrivant comme un noyau ou une image

d'une application linéaire.

- Exemple de SEV supplémentaire en analyse :

$$F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$$
$$G = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$$