Programme de colle 11

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

Chapitre 4 Séries entières

I Lemme d'Abel et rayon de convergence *I.1 Définitions I.2 Lemme d'Abel I.3 Calculs de rayon de convergence ⋆Invariance ⋆Comparaison des coefficients ⋆Dérivation et primitivation terme à terme ⋆Règle de d'Alembert ⋆Somme de deux séries ⋆Produit de Cauchy de deux séries entières*

II Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle *⋆Convergence normale sur tout segment de l'intervalle de convergence ⋆Continuité ⋆Primitivation d'une série entière ⋆Dérivation d'une série entière III.2 Développements en série entière des fonctions usuelles ⋆Série géométrique ⋆Logarithme ⋆Arctangente ⋆Exponentielle, cosinus et sinus hyperbolique ⋆Cosinus et sinus ⋆Fonction puissance III.3 Extension au cas de la variable complexe*

Rappel sur l'algèbre linéaire : Espaces vectoriels. Produit de SEV. Somme et somme directe de sous-espace vectoriel. Espaces vectoriels supplémentaires. Somme et somme directe de sous-espace vectoriel. Famille libre, famille génératrice. Bases.

Formule de changement de base. Matrices semblables. Calcul matriciel. Utilisation de Newton pour calculer A^n.

Trace (d'une matrice, d'un endomorphisme).

Image et noyau d'une application linéaire.

Techniques:

- Fonctions développables en série entière.
- Montrer qu'une fonction est DSE par des arguments de somme / produit / dérivée / primitive de fonctions DSE.
- Développements en série entière usuels : série géométrique, arctangente, exponentielle, cosinus, sinus, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, $x \mapsto (1+x)^\alpha$
- Montrer que la fonction exponentielle est DSE en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral. (la démonstration doit être connue).
- Montrer que $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est DSE en utilisant une équation différentielle. (la démonstration doit être connue).
- Développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (en particulier calcul du produit des nombres pairs / impairs).
- Fonction DSE et équation différentielle. Plusieurs techniques ont été vues en TD :
  - Montrer que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en vérifiant que f et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sont solution du même problème de Cauchy. Exemple de $x \mapsto (1+x)^\alpha$
  - Montrer que f est DSE, puis trouver les coefficients de ce DSE à partir d'une équation différentielle. Exemple de $x \longmapsto e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$, $x \longmapsto (\arcsin x)^2$
  - Chercher une solution DSE d'une équation différentielle. Exemple de $x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$.

  L'utilisation de l'unicité de la solution du problème de Cauchy et de l'unicité du développement en série entière sont à connaître.

  Voir la fiche sur ce sujet.
- Définitions de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, sous-espaces vetoriels, somme et produit de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Famille libre, génératrice. Théorie de la dimension. Image et noyau d'une application linéaire.
- Montrer qu'une partie F d'un EV E est un SEV : par la définition, en l'écrivant comme un noyau ou une image d'une application linéaire.
- Exemple de SEV supplémentaire en analyse :

$$F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$$

$$G = \text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$$

- Propriété de la trace. Deux démonstrations à connaître :

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2\,,\; Tr(AB) = Tr(BA)$$

$(A,B) \longmapsto Tr(A^T B)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, propriétés de la famille $\mathscr{F} = \Big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\Big)$
- Calcul algébrique :

$$\ker(f) \subset \ker(f^2) \qquad\qquad \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$$

- Changement de base pour les matrices : formules de changement de base. Matrices semblables.
- Calcul matriciel. Formule du produit de deux matrices.
- Calcul algébrique matriciel. Utilisation de $I_n - A^n = (I_n - A)\sum_{k=0}^{n-1} A^k$. Utilisation de Newton pour le calcul de A^n.

Deux cas à connaître :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

- Calcul d'inverse par polynôme annulateur.