Programme de colle 13

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

Rappel sur l'algèbre linéaire : Espaces vectoriels. Produit de SEV. Somme et somme directe de sous-espace vectoriel. Espaces vectoriels supplémentaires. Famille finie de vecteurs.

Formule de changement de base. Matrices semblables. Calcul matriciel. Utilisation de Newton pour calculer A^n.

Trace (d'une matrice, d'un endomorphisme). Image et noyau d'une application linéaire. Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'une matrice. Projecteurs et symétries. Résolution d'équations linéaires. Sous-espace stable. Caractérisation avec les matrices. Produit matriciel par blocs. Hyperplans.

Série génératrice d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Chapitre 5 Réduction des endomorphismes

I Éléments propres ⋆*Rappels I.1 Valeurs et vecteurs propres I.2 Sous-espace propre* ⋆*Exemples* ⋆*Propriétés des sous-espaces propres I.3 Valeurs propres et polynôme d'endomorphisme*

II Polynôme caractéristique *II.1 Définition II.2 Lien avec les valeurs propres* ⋆*Cas d'une matrice triangulaire par bloc II.3 Coefficients* subsection.5.2.3

Techniques:

- Définitions de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, sous-espaces vetoriels, somme et produit de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Famille libre, génératrice. Théorie de la dimension. Image et noyau d'une application linéaire. Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'une matrice. Polynôme appliqué à une matrice, à un endomorphisme. Polynôme annulateur. Sous-espace stable. Hyperplan et forme linéaire.
- Résolution d'équations linéaires.
  Exemple pour trouver les suites vérifiant : (R) : $u_{n+2}+3u_{n+1}+2u_n = n^2+2n+5$
- Sous-espace stable.
  Montrer que si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\ker(P(u))$ sont stables par u.
  Montrer que si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v.
- Équations linéaires : application aux suites qui vérifient la relation $u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n = 5$..
- Montrer qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. La démonstration doit être connue.
- Tout exercice d'algèbre de première année. En particulier, en lien avec les hyperplans, les sous-espace stables, etc.
- Fonctions génératrices. En particulier calcul d'espérance et de variance. Retrouver les résultats connus sur les variables usuelles par leur fonction génératrice. Exemple des lois $\mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$, $\mathscr{B}(p)$, $\mathscr{B}(n,p)$, $\mathscr{G}(p)$, $\mathscr{P}(\lambda)$.
- Définition du chapitre réduction. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espace propres.
- Exemple de calculs d'éléments propres :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \qquad \text{projecteur et symétrie}$$

$$f \in \mathscr{C}^\infty \mapsto f' \qquad (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})$$

- Calcul des éléments propres d'une matrice 3×3.
  Calcul du rang de $A-\lambda I_3$ par des opérations élémentaires (réduction de Gauss avec un paramètre). Exemple de : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$
- Montrer que les sous-espaces propres sont en somme directe. La démonstration doit être connue.
- Informations sur le polynôme caractéristique : $\chi_A = X^n - Tr(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.