Programme de colle 15

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

Chapitre 5 Réduction des endomorphismes

I Éléments propres ✯*Rappels I.1 Valeurs et vecteurs propres I.2 Sous-espace propre* ✯*Exemples* ✯*Propriétés des sous-espaces propres I.3 Valeurs propres et polynôme d'endomorphisme*

II Polynôme caractéristique *II.1 Définition II.2 Lien avec les valeurs propres* ✯*Cas d'une matrice triangulaire par bloc II.3 Coefficients II.4 Mutliplicité d'une valeur propre*

III Diagonalisation en dimension finie *III.1 Définitions* ✯*Théorème spectral III.2 Lien avec la dimension des sous-espaces propres III.3 Lien avec le polynôme caractéristique III.4 Calcul effectif de la diagonalisation*

IV Diagonalisation et polynômes annulateurs *IV.1 Théorème de Cayley-Hamilton IV.2 Condition de diagonalisation et polynôme annulateur IV.3 Application aux endomorphisme induit*

V Trigonalisation *V.1 Définitions V.2 Lien avec le polynôme caractéristique V.3 Exemple de réalisation de la trigonalisation*

Rappels sur les déterminants. Déterminants de Van der monde. Calcul du polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.

Rappels sur les équations différentielles. (1er ordre).

Techniques:

- Lien entre la dimension des sous-espaces propres et l'ordre de multiplicité d'une valeur propre. Relation : $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda$.
- Condition de diagonalisation : diagonalisation et dimension des sous-espace propre, diagonalisation et polynôme caractéristique. Théorème Spectral.
- Calcul effectif de la réduction d'une matrice de taille 3×3 : calculer χ_A, les valeurs propres, les sous-espaces propres, faire la réduction. En déduire A^n.
  Pour le calcul des sous-espace propre, on attend une résolution rapide des systèmes linéaires homogènes : d'une relation sur les colonnes, on trouve facilement un ou des vecteurs solutions.
  Exemple de : $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$
- Calcul de χ_A en utilisant les coefficients connus et quelques racines connues.
  Exemple de raisonnement :
  - Certaines valeurs propres peuvent être « vues » sur la matrice (en particulier 1 et 0). Certaines sont trouvées avec une équation que vérifie A.
  - On trouve alors la dimension des sous-espaces propres et on utilise $\dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda$.
  - On utilise les relations « produit des valeurs propres » et « somme des valeurs propres » (lorsqu'on travaille sur $\mathbb{C}$ ou lorsqu'on sait que le polynôme est scindé).
  - On en déduit χ_A.

  Exemple de $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$.

  Exemple de la matrice $M = (m_{ij})$ définie par $m_{i,j} = 1$ si $j = 1, j = i$ ou $j = n$, $m_{i,j} = 0$ sinon.
- Triagonalisation. Condition de tragonalisation. Lien avec le polynôme caractéristique.
- Calcul effectif de la trigonalisation sur des matrices de petites tailles avec indication. Exemple de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Rappels sur les déterminants.

En particulier :
- le déterminant de Vandermonde (démonstration à connaître),
- le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon (démonstration à connaître),
- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par blocs. (le résultat sans démonstration).

• Équations matricielles et réduction. Exemple de raisonnement pour résoudre l'équation $P(X) = A$, d'inconnue une matrice X (v est l'endomorphisme associé) avec A une matrice connue A (u est l'endomorphisme associé) :
  - Vérifier que X et A commutent.
  - Les sous-espaces propres de u sont stables par v. On en déduit certains vecteurs propres de X.
  - On travaille sur la base $\mathscr{B}$ telle que $Mat_{\mathscr{B}}(u)$ est « simple » on trouve alors $Mat_{\mathscr{B}}(v)$ (ou le même raisonnement matriciellement).

  Exemples des exercices faits en TD. (pour l'instant uniquement le cas où les sous-espace propre sont des droites).

• Rappels de MPSI : équation différentielle de premier ordre.
  Résolution dans le cas homogène, seconds membres particuliers, passage aux complexes, variation de la constante.
  Exercices traités en cours :

$$y' + 2y = 2x^2 + (2x + 1 + \cos 3x)e^{-2x} \qquad y' + xy = x \qquad y' + (\tan x)y = \cos x + \sin 2x$$