Programme de colle 16

Pelletier Sylvain — PSI, LMSC

Cours:

Chapitre 5 Réduction des endomorphismes

I Éléments propres ✯*Rappels I.1 Valeurs et vecteurs propres I.2 Sous-espace propre* ✯*Exemples* ✯*Propriétés des sous-espaces propres I.3 Valeurs propres et polynôme d'endomorphisme*

II Polynôme caractéristique *II.1 Définition II.2 Lien avec les valeurs propres* ✯*Cas d'une matrice triangulaire par bloc II.3 Coefficients II.4 Mutliplicité d'une valeur propre*

III Diagonalisation en dimension finie *III.1 Définitions* ✯*Théorème spectral III.2 Lien avec la dimension des sous-espaces propres III.3 Lien avec le polynôme caractéristique III.4 Calcul effectif de la diagonalisation*

IV Diagonalisation et polynômes annulateurs *IV.1 Théorème de Cayley-Hamilton IV.2 Condition de diagonalisation et polynôme annulateur IV.3 Application aux endomorphisme induit*

V Trigonalisation *V.1 Définitions V.2 Lien avec le polynôme caractéristique V.3 Exemple de réalisation de la trigonalisation*

Rappels sur le calcul des déterminants.

Rappels sur les équations différentielles.

Chapitre 6 Intégration sur un intervalle

I Fonctions continues par morceaux *I.1 Fonctions continues par morceaux sur un segment I.2 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle*

II Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment *II.1 Fonctions en escalier et intégrale d'une fonction en escalier II.2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux II.3 Lien avec les primitives*

III Intégrales généralisées *III.1 Intégrales généralisées sur* $[a,+\infty[$ *III.2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque III.3 Intégrale généralisée de référence III.4 Propriété III.5 Manipulation* ✯*Changement de variables* ✯*Intégration par parties*

IV Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables *IV.1 Définitions IV.2 Manipulation et propriété* ✯*Intégrabilité en une borne*

Techniques:

- Équations matricielles et réduction. Exemple de raisonnement pour résoudre l'équation $P(X) = A$, d'inconnue une matrice X (v est l'endomorphisme associé) avec A une matrice connue A (u est l'endomorphisme associé) :
  - Vérifier que X et A commutent.
  - Les sous-espaces propres de u sont stables par v. On en déduit certains vecteurs propres de X.
  - On travaille sur la base $\mathscr{B}$ telle que $Mat_{\mathscr{B}}(u)$ est « simple » on trouve alors $Mat_{\mathscr{B}}(v)$ (ou le même raisonnement matriciellement).

  Exemples des exercices faits en TD.
- Trigonalisation. Condition de trigonalisation. Lien avec le polynôme caractéristique.
- Calcul effectif de la trigonalisation sur des matrices de petites tailles avec indication. Exemple de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Rappels sur les déterminants.
  En particulier :
  - le déterminant de Vandermonde
  - le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon
  - Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par blocs.
- Technique de calculs de déterminants (voir les exercices de TD).
- Rappels de MPSI : équation différentielle de premier ordre.
  Résolution dans le cas homogène, seconds membres particuliers, passage aux complexes, variation de la constante.

Exercices traités en cours :

$$y' + 2y = 2x^2 + (2x+1+\cos 3x)e^{-2x} \qquad y' + xy = x \qquad y' + (\tan x)y = \cos x + \sin 2x$$

- Rappels de MPSI : équation différentielle de second ordre.
  Résolution dans le cas homogène, seconds membres particuliers, passage aux complexes. Exercices traités en cours :

$$y'' + 2y' + y = 4 \qquad y'' - y' - 2y = x + e^{2x} \qquad y'' + y = \cos x + \sin 2x$$

- Changement de variables pour résoudre une équation différentielle. Voir les exemples faits en TD.
- Démontrer qu'une intervalle converge en connaissant sa primitive.
- Intégrales généralisées de référence : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ $\int_0^1 \ln(t)dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$
- Changement de variable dans le cas d'intégrale généralisée.
  Exemple

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx = \int_0^1 \sin\frac{1}{t}dt$$
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(2-\sin^2(t))} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du \text{ avec indications.}$$

  Intégration par parties dans le cas d'intégrale généralisée. Exemple de

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$$

- Intégrale absolument convergente et fonction intégrable.
- Montrer qu'une intégrale est convergente ou qu'une fonction est intégrable en utilisant des comparaisons.