Programme de colle 19

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

Cours:

Chapitre 7 Espaces euclidiens

I Hyperplan et produit scalaire ✯*Projeté et distance à un hyperplan*

II Isométries vectorielles *II.1 Définition et caractérisation II.2 Propriétés II.3 Groupe orthogonal*

III Matrices orthogonales *III.1 Définition et caractérisation III.2 Propriétés* ✯*Groupe spécial orthogonal*

IV Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3 *IV.1 Orientation* ✯*Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3 IV.2 Produit mixte IV.3 Produit vectoriel dans* $\mathbb{R}^3$ *IV.4 Interprétation géométrique*

V Isométries vectorielles du plan euclidien *V.1 Matrice de* $O_2(\mathbb{R})$ *V.2 Interprétation géométrique*

VI Isométries vectorielles de l'espace euclidien *VI.1 Matrice de* $O_3(E)$ *VI.2 Intreprétation géométrique*

VII Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles *VII.1 Définition* ✯*Caractérisation des projecteurs orthogonaux VII.2 Matrices symétriques VII.3 Théorème spectral VII.4 Endomorphisme autoadjoint positif*

Application de la réduction à l'analyse (pour les systèmes d'équation différentielle et pour les suites récurrentes linéaires).

Chapitre 8 Interversion de symboles

I Rappels *I.1 Limite de la dérivée I.2 Continuité de la limite / somme d'une suite de fonctions I.3 Interversion limite et intégrale I.4 Interversion dérivation / limite ou somme*

II Convergence dominée pour une suite de fonctions

III Intégration terme à terme sur un intervalle

IV Continuité sous le signe intégrale ✯*Version avec des hypothèses plus faibles*

Techniques:

- Projection et distance à un hyperplan.
- Isométries vectorielles du plan : définition et propriété. Matrices orthogonales.
- Orientation de l'espace. Produit mixte et produit vectoriel. Expression du produit vectoriel dans une BON.
- Détermination des matrices de $O_2(\mathbb{R})$.
- Détermination des endomorphismes de l'espace euclidien.
- Étant donné une matrice de $\mathbb{R}^3$, déterminer géométriquement l'endomorphisme associé. On attend :
  - Réflexion sur le déterminant,
  - Calcul des sous-espace propre,
  - Calcul de l'angle « au signe près » par la trace,
  - Fin du calcul de l'angle.

  Exemple des exercices de TDs.
- Endomorphisme symétrique et théorème spectral.
- Caractérisation des endomorphismes de $\mathscr{S}^+$ et de $\mathscr{S}^{++}$ par les valeurs propres.
- Application de la réduction pour traiter des suites récurrentes linéaires. Exemples de :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

- Application de la réduction à l'analyse :
  - Application aux systèmes différentiels : réduction de la matrice et changement d'inconnue pour se ramener à un système diagonal ou triangulaire.
    Exemple de :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 3z \\ y' = 2y \\ z' = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

- Endomorphisme symétrique et théorème spectral.

- Les rappels sur les inversions de symboles :
  - théorème de la limite de la dérivée,
  - continuité et limite uniforme d'une suite / série de fonctions
  - intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite / série de fonctions.
  - dérivation d'une suite / série de fonctions (si convergence uniforme de la suite / série des dérivées).
- Convergence dominée pour une suite de fonctions : l'énoncé doit être parfaitement connu.

  Application à $\lim_{n\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$
- Intégration terme à terme sur un intervalle : l'énoncé doit être parfaitement connu.

  Application à $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt}\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$
- Continuité sous le signe intégrale : l'énoncé doit être parfaitement connu.

  Application à la transformée de Fourrier. $\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} dt.$
- Théorème de convergence dominé à paramètre continu.
- Dérivation sous le signe intégrale : l'énoncé doit être parfaitement connu.

  Application à la dérivation de : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t^2)^n}$