Programme de colle 2

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

Rappels de dénombrements.

Rappels sur le calcul des probabilités, les variables aléatoires réelles et les couples de variables aléatoires.

Chapitre 1 Espaces probabilisés

I Un peu de théorie des ensembles *I.1 Rappel sur la notion de famille* *I.2 Rappel sur les symboles union et intersection* *I.3 Ensembles dénombrables*

Techniques:

- Revoir les exercices présentés dans les diapositives « rappels de dénombrements » et dans les fiches associées :
  - les ensembles dont on connaît le cardinal,
  - les exemples basiques de dénombrements avec les techniques de complémentaire / union disjointe / choix successifs
  - étude des tirages sans remise de B/N : on tire n boules dans une urne contient N boules B/N. X = nombre de blanches. $X_i = 1$ si B_i. Calculer par dénombrements : loi de X, loi de X_i, $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ En déduire $E(X)$ (linéarité de l'espérance) et $V(X)$ (variance de la somme).
  - Les premiers exemples sur le nombres de surjections :
    - nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $\{0,1\}$,
    - nombre de surjection de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$,
    - Montrer que $n^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_i^p$ avec S_n^p le **nombre de surjections** d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments.
  - Montrer que $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ par dénombrement.
  - Montrer la propriété de Pascal par dénombrement.
  - Loi de la i-ième boule blanche dans un tirage sans remise (fait en cours, voir la fiche).
- Revoir les exercices présentés dans les diapositives « rappels de probabilités » :
  - Loi avec paramètres : dé tel que $p(X = i)$ est proportionnel à i.
  - Loi de la première blanche dans un tirage sans remise.
  - Un dé et 6 urnes : si $D = i$ on tire avec remise dans urne i qui contient i B et $6 - i$ N.
  - $X \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$ indépendantes. Loi de $X+Y$?
  - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  - Lois usuelles.
  - Loi du maximum / minimum de variables aléatoires (lien avec la fonction de répartition)
  - Théorème de transfert.
  - On a N jetons numérotés de 1 à N, on tire n jetons simultanément. On note $X_i = 1$ si on tire le jeton i, 0 sinon et Y la somme des valeurs des jetons tirés. Lien entre Y et les (X_i) ? Loi de X_i. Espérance de Y.
  - On lance n boules dans 3 boîtes. X_i = nbr de boules dans la boîte i. Loi de X_1 et $cov(X_1, X_2)$.
  - Variance d'une somme de VARs. Applications : calcul de la variance de la loi binomiale, de la loi hypergéométrique (ie nombre de blanche dans un tirage sans remise).
  - X_i une suite de VAR avec $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ indépendante. On considère la suite $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$. Loi de Y_i. Espérance et variance de $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$
  - Coefficient de corrélation linéaire. Démonstration de $\rho(X,Y) \in [-1,1]$.
- Montrer qu'un ensemble est dénombrable en le découpant en une suite d'ensemble fini. Application à un produit cartésien d'ensemble dénombrable ou à $\mathbb{Z}$.