Programme de colle 22

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

Chapitre 9 EV normés de dimension finie

I Normes et distances *I.1 Définition ✯Cas d'un produit scalaire associé I.2 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ ✯Autres normes usuelles I.3 Propriétés I.4 Distance I.5 Topologie d'un espace vectoriel normé I.6 Parties, suites et fonctions bornées*

II Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie *II.1 Convergence II.2 Propriétés ✯Cas de la dimension finie II.3 Convergence des suites de coordonnées*

III Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie *✯Équivalence topologique avec $\mathbb{K}^n$ III.1 Parties ouvertes III.2 Partie fermée III.3 Propriétés III.4 Frontière*

IV Limite et continuité en un point *IV.1 Définition IV.2 Caractérisation IV.3 Limites et opérations IV.4 Continuité en un point*

V Continuité sur une partie *V.1 Définition et propriétés V.2 Fonctions continues sur un fermé borné V.3 Fonctions lipschitziennes V.4 Continuité des applications linéaires ✯Norme d'application V.5 Continuité des applications multi-linéaires*

Techniques:

- Montrer qu'une application est une norme éventuellement en cherchant le produit scalaire associé. Montrer qu'une application est une distance.
- Démontrer l'inégalité triangulaire renversée.
- Définition d'une norme. Norme usuelle sur $\mathbb{R}^n$ Montrer que les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont des normes. Dessin des boules unités pour les normes usuelles de $\mathbb{R}^2$.
- Définition d'une partie convexe.
- Définition d'une partie bornée, d'une application bornée, d'une suite bornée.
- Définition d'une suite convergente.
- Définition d'une partie ouverte et fermée.
- Définition de l'intérieur, de l'adhérence, de la frontière.
- Montrer que le complémentaire d'un ouvert est un fermé.
- Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert et qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Montrer qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé et qu'une intersection finie de fermés est un fermé.
- Montrer que l'image réciproque par une application continue d'un ouvert est un ouvert que l'image réciproque d'un fermé est un fermé.
- Montrer qu'une partie est ouverte / fermée en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés. Montrer qu'une partie est ouverte / fermée en l'écrivant sous la forme : $\{x \in E | f(x) = 0\}$.
- Montrer qu'une suite de matrices est convergente en regardant la limite de chaque coefficient ou par majoration.
- Définition de la limite d'une fonction. Caractérisation séquentielle. Lien avec les opérations.
- Fonction continue sur un fermé borné en dimension finie.
- Applications lipschitziennes.
- Montrer que si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant kN(x)$.
  La notion de norme d'application est hors-programme mais vous devez savoir démontrer que $|||\cdot|||$ est une norme.
- Limites de suites et de fonctions dans un espace vectoriel normé. Continuité.
- Montrer qu'une application de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue en un point particulier. Exercices traités en TD : limite en $(0,0)$ de

$$\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \qquad \frac{x^4+y^2}{xy} \qquad \frac{x^2y}{x^2+y^2} \qquad \frac{xy}{x^2+y^2}$$

- Utiliser la continuité des applications linéaires / multi-linéaires en dimension finie.