

Programme de colle 23

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

Cours:

III Topologie d'un espace vectoriel normé *★Équivalence topologique avec \mathbb{K}^n* III.1 Parties ouvertes III.2 Partie fermée *★Caractérisation séquentielle* III.3 Propriétés *★Stabilité par union et intersection* III.4 Partie dense

IV Limite et continuité en un point IV.1 Définition IV.2 Caractérisation IV.3 Limites et opérations IV.4 Continuité en un point

V Continuité sur une partie V.1 Définition et propriétés V.2 Fonctions continues sur un fermé borné V.3 Fonctions lipschitziennes V.4 Continuité des applications linéaires *★Norme d'application* V.5 Continuité des applications multilinéaires

Chapitre 10 Calcul différentiel

I Équations différentielles linéaires scalaires *★Écriture sous la forme d'un système d'ordre 1* I.1 Structure de l'ensemble des solutions I.2 Cas des coefficients constants *★Équation homogène* *★Cas d'un second membre* I.3 Exemples

II Dérivabilité des fonctions vectorielles II.1 Interprétation d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n comme courbe paramétrée *★Définitions* *★Tangente aux points réguliers* II.2 Dérivabilité en un point *★Rappel sur les limites des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n* II.3 Dérivabilité sur un intervalle II.4 Dérivabilité et composition *★Cas d'une application linéaire* *★Cas d'une application bilinéaire / multilinéaire* *★Composée à droite par une fonction réelle* II.5 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

III Fonctions de plusieurs variables *★Représentation d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}* III.1 Fonctions de classe \mathcal{C}^1 *★Dérivées selon un vecteur* *★Fonctions de classe \mathcal{C}^1* *★Cas des fonctions vectorielles* III.2 Propriétés III.3 Développement limité à l'ordre 1 et différentielle III.4 Règle de la chaîne *★Cas général* *★Applications aux fonctions constantes sur un ouvert convexe* *★Applications aux changements de variables*

Techniques:

- Définition d'une partie ouverte et fermée.
- Définition de l'intérieur, de l'adhérence, de la frontière.
- Montrer que le complémentaire d'un ouvert est un fermé.
- Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert et qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Montrer qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé et qu'une intersection finie de fermés est un fermé.
- Montrer que l'image réciproque par une application continue d'un ouvert est un ouvert que l'image réciproque d'un fermé est un fermé.
- Montrer qu'une partie est ouverte / fermée en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés. Montrer qu'une partie est ouverte / fermée en l'écrivant sous la forme : $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$.
- Montrer qu'une suite de matrices est convergente en regardant la limite de chaque coefficient ou par majoration.
- Limites de suites et de fonctions dans un espace vectoriel normé. Continuité.
- Définition de la limite d'une fonction. Caractérisation séquentielle. Lien avec les opérations.
- Fonction continue sur un fermé borné en dimension finie.
- Applications lipschitziennes.
- Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq kN(x)$.
La notion de norme d'application est hors-programme mais vous devez savoir démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme.
- Limites de suites et de fonctions dans un espace vectoriel normé. Continuité.
- Montrer qu'une application de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en un point particulier. Exercices traités en TD : limite en $(0, 0)$ de

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad \frac{x^4 + y^2}{xy} \quad \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

- Structure de l'ensemble de solutions d'un système d'équations différentielles linéaires, en particulier théorème de Cauchy (avec l'unicité) et la dimension de \mathcal{S}_H . Application au cas de système à coefficients non constant lorsqu'une indication est donné.

Exemple traités en cours :

$$y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{3}{t^2}y = -1 + \frac{3}{t^2}$$

- Définition de la dérivabilité d'une fonction de $I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Lien avec la dérivabilité des fonctions coordonnées.
- Dérivation et composition (cas des applications linéaires, bilinéaires et multilinéaires). En particulier, exemple avec le déterminant.
- Définition et calcul de dérivées partielles, du gradient en un point. Notion de développement limité d'ordre 1 en un point. Définition de la différentielle en un point.
- Règle de la chaîne. Dérivation de fonction de la forme :

$$t \mapsto f(x_1(t), x_2(t)) \quad (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v)) \quad (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

- Fonction constante sur un ouvert convexe.