

Programme de colle 24

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

Cours:

V Continuité sur une partie V.1 Définition et propriétés V.2 Fonctions continues sur un fermé borné V.3 Fonctions lipschitziennes V.4 Continuité des applications linéaires ★Norme d'application V.5 Continuité des applications multilinéaires

Chapitre 10 Calcul différentiel

I Équations différentielles linéaires scalaires ★Écriture sous la forme d'un système d'ordre 1 I.1 Structure de l'ensemble des solutions I.2 Cas des coefficients constants ★Équation homogène ★Cas d'un second membre I.3 Exemples

II Dérivabilité des fonctions vectorielles II.1 Interprétation d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n comme courbe paramétrée ★Définitions ★Tangente aux points réguliers II.2 Dérivabilité en un point ★Rappel sur les limites des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n II.3 Dérivabilité sur un intervalle II.4 Dérivabilité et composition ★Cas d'une application linéaire ★Cas d'une application bilinéaire / multilinéaire ★Composée à droite par une fonction réelle II.5 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

III Fonctions de plusieurs variables ★Représentation d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} III.1 Fonctions de classe \mathcal{C}^1 ★Dérivées selon un vecteur ★Fonctions de classe \mathcal{C}^1 ★Cas des fonctions vectorielles III.2 Propriétés III.3 Développement limité à l'ordre 1 et différentielle III.4 Règle de la chaîne ★Cas général ★Applications aux fonctions constantes sur un ouvert convexe ★Applications aux changements de variables ★Cas particulier des coordonnées en polaire

IV Applications géométriques IV.1 Gradient IV.2 Ligne de niveau ★Rappel de géométrie IV.3 Surface de niveau ★Rappels de géométrie ★Courbe tracée sur une surface

V Fonction de classe \mathcal{C}^2

VI Extremums d'une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}

Techniques:

- Montrer que l'image réciproque par une application continue d'un ouvert est un ouvert que l'image réciproque d'un fermé est un fermé.
- Montrer qu'une partie est ouverte / fermée en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés. Montrer qu'une partie est ouverte / fermée en l'écrivant sous la forme : $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$.
- Montrer qu'une suite de matrices est convergente en regardant la limite de chaque coefficient ou par majoration.
- Limites de suites et de fonctions dans un espace vectoriel normé. Continuité.
- Définition de la limite d'une fonction. Caractérisation séquentielle. Lien avec les opérations.
- Fonction continue sur un fermé borné en dimension finie.
- Applications lipschitziennes.
- Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq kN(x)$.
La notion de norme d'application est hors-programme mais vous devez savoir démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme.
- Structure de l'ensemble de solutions d'un système d'équations différentielles linéaires, en particulier théorème de Cauchy (avec l'unicité) et la dimension de \mathcal{S}_H . Application au cas de système à coefficients non constant lorsqu'une indication est donné.

Exemple traités en cours :

$$y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{3}{t^2}y = -1 + \frac{3}{t^2}$$

Exemple traités en TD :

$$\begin{aligned} u'(t) &= -tu(t) + v(t) + 1 & x'(t) &= 2tx(t) - y(t) + t \cos(t) \\ v'(t) &= (1-t^2)u(t) + tv(t) + 1 & y'(t) &= x(t) + 2ty(t) + t \sin(t) \end{aligned}$$

- Définition de la dérivabilité d'une fonction de $I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Lien avec la dérivabilité des fonctions coordonnées.
- Dérivation et composition (cas des applications linéaires, bilinéaires et multilinéaires). En particulier, exemple avec le déterminant. Traités en TD : dérivation de : $\langle f, \det(g, h)k \rangle$.

- Définition et calcul de dérivées partielles, du gradient en un point. Notion de développement limité d'ordre 1 en un point. Définition de la différentielle en un point.
- Règle de la chaîne. Dérivation de fonction de la forme :

$$t \mapsto f(x_1(t), x_2(t)) \quad (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v)) \quad (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

- Fonction constante sur un ouvert convexe.
- Problème de recollement des solutions d'équations différentielles, exemples sur la fiche associée.

$$3xy'(x) - 4y(x) = x \quad ty' + y = 1$$