Programme de colle 4

Pelletier Sylvain — PSI, LMSC

Cours:

Chapitre 1 Espaces probabilisés

I Un peu de théorie des ensembles *I.1 Rappel sur la notion de famille I.2 Rappel sur les symboles union et intersection I.3 Ensembles dénombrables ✯Retour sur le symbole somme I.4 Tribus*

II Probabilités *II.1 Définition II.2 Propriétés des probabilités II.3 Construction d'une probabilité sur un univers dénombrable*

III Conditionnement et indépendance *III.1 Probabilité conditionnelle III.2 Formule des probabilités composées III.3 Formule des probabilités totales III.4 Formule de Bayes III.5 Indépendance ✯Cas de deux événements ✯Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements*

Rappels et compléments sur les séries numériques. Série géométrique, série téléscopique, critère de comparaison des séries à termes positifs, comparaison à une intégrale, série de Riemann, critère de d'Alembert, série absolument convergente, série alternée, produit de Cauchy.

Techniques:

- Définition d'une tribu. (seule la définition peut être demandée)
- Définition d'une probabilité.
- Propriétés d'une probabilité en particulier continuité croissante / décroissante et sous-additivité.
- Probabilité définie sur $\mathbb{N}$ à partir des probabilités des singletons : calcul d'un paramètre en utilisant $\sum_n p(\{n\}) = 1$. Calcul de la probabilité d'un événement.
  Exemple de : $p(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, calcul de $p(2\mathbb{N})$ de $p(\{k|k \geqslant 10\})$.
- Montrer que la probabilité conditionnelle est une probabilité.
- Tout exercice de calculs de probabilités sur un univers fini ou infini.
- Revoir les exercices et résultats présentés dans les transparents « rappels sur les séries numériques » :
  - les séries géométriques
  - les séries télescopiques.
    Exemples traités en cours :
    $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$
  - les comparaisons pour les séries à termes positifs.
    Exemples traités en cours :
    $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}(\cos^2 n)} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$$
  - Lien série intégrale, en particulier : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $\alpha > 1$. et l'étude de la série harmonique.
    Équivalent de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
  - Les séries de Riemann et la règle du $n^\alpha u_n$.
  - Règle de d'Alembert (avec la démonstration). Exemple de $\displaystyle\sum_n \frac{n!}{n^n}$ et de $\displaystyle\sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$
  - Formule de Stirling : la formule doit être parfaitement connue (pas de démonstration).
    Application à $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n)^n)}{n!}$

Application à $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$.

- Séries absolument convergente.
- Théorème spécial des séries alternées (et sa démonstration).

  Application à $\displaystyle\sum_{n} (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (utilisation indirecte par un développement asymptotique)
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergente. (sans démonstration).

  Application à la série de terme général : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

  Application pour montrer que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{2^n}$$