Programme de colle 8

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

Rappels sur les formules de Taylor et les développements limités : Formule de Taylor pour les polynômes et DLs usuels. Rappels d'analyse : formule de Taylor avec reste intégrale, accroissements finis. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

Chapitre 4 Séries entières

I Lemme d'Abel et rayon de convergence *I.1 Définitions I.2 Lemme d'Abel I.3 Calculs de rayon de convergence ✭Invariance ✭Comparaison des coefficients ✭Dérivation et primitivation terme à terme ✭Règle de d'Alembert ✭Somme de deux séries ✭Produit de Cauchy de deux séries entières*

II Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle *✭Convergence normale sur tout segment de l'intervalle de convergence ✭Continuité ✭Primitivation d'une série entière*

Techniques:

- Tout exercice de synthèse sur suite et série de fonctions.
- Formule de Taylor pour les polynômes.
- Formule de Taylor-Young. Retrouver les DLs usuels.
- Manipulation des DL : DL en un point a, DL d'une somme, DL d'un produit, DL d'une composée (exemple de $\ln(\cos(x))$), DL d'un quotient. Exemples :

$$x \longmapsto \ln(2+x) \qquad x \longmapsto \sqrt{1+x^2\sin(x)} \qquad x \longmapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$$

- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral pour obtenir des inégalités.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Théorème des accroissements finis.
- Application du théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ à la fonction $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.
- Notion de Rayon de convergence pour une série entière.
- Techniques pour estimer le rayon de convergence. Les résultats de la forme : « si on trouve $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z^n$ converge alors $|z| \leqslant R$ », doivent être connus et compris.
- Invariance du rayon de convergence.
- Utilisation de la comparaison des coefficients.
- Règle de d'Alembert pour les séries entières. Cas des séries lacunaires.