Programme de colle 9

Pelletier Sylvain — PSI, LMSC

Cours:

Rappels d'analyse : formule de Taylor avec reste intégrale, accroissements finis. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

Chapitre 4 Séries entières

I Lemme d'Abel et rayon de convergence *I.1 Définitions I.2 Lemme d'Abel I.3 Calculs de rayon de convergence ✯Invariance ✯Comparaison des coefficients ✯Dérivation et primitivation terme à terme ✯Règle de d'Alembert ✯Somme de deux séries ✯Produit de Cauchy de deux séries entières*

II Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle *✯Convergence normale sur tout segment de l'intervalle de convergence ✯Continuité ✯Primitivation d'une série entière ✯Dérivation d'une série entière*

III Développement en série entière *III.1 Fonctions développables en série entière III.2 Développements en série entière des fonctions usuelles ✯Série géométrique ✯Logarithme ✯Arctangente ✯Exponentielle, cosinus et sinus hyperbolique ✯Cosinus et sinus ✯Fonction puissance III.3 Extension au cas de la variable complexe*

Rappel sur l'algèbre linéaire : Espaces vectoriels. Produit de SEV. Somme et somme directe de sous-espace vectoriel. Espaces vectoriels supplémentaires.

Techniques:

- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral pour obtenir des inégalités.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Application du théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ à la fonction $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.
- Théorème des accroissements finis.
- Notion de Rayon de convergence pour une série entière.
- Techniques pour estimer le rayon de convergence. Les résultats de la forme : « si on trouve $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z^n$ converge alors $|z| \leqslant R$ », doivent être connus et compris.
- Invariance du rayon de convergence.
- Utilisation de la comparaison des coefficients.
- Règle de d'Alembert pour les séries entières. Cas des séries lacunaires.
- Dérivation et primitivation termes à termes d'une série entière. Dérivation successives.
- Fonctions développables en série entière.
- Montrer qu'une fonction est DSE par des arguments de somme / produit / dérivée / primitive de fonctions DSE.
- Développements en série entière usuels : série géométrique, arctangente, exponentielle, cosinus, sinus, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, $x \mapsto (1+x)^\alpha$
- Montrer que la fonction exponentielle est DSE en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral. (la démonstration doit être connue).
- Montrer que $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est DSE en utilisant une équation différentielle. (la démonstration doit être connue).
- Définitions de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, sous-espaces vetoriels, somme et prduit de sous-espaces vectoriels. Somme directe.
- Montrer qu'une partie F d'un EV E est un SEV : par la définition, en l'écrivant comme un noyau ou une image d'une application linéaire.
- Montrer que deux espaces sont supplémentaires.