Table des matières

1 — Logique et ensembles

I Rudiments de logique

I.1 Proposition

Définition I.1 — Proposition. Une proposition P est un énoncé dont on doit pouvoir dire sans ambiguïté si il est « vrai » ou « faux ».

Une propriété (ou prédicat) $P(x)$ est un énoncé qui dépends d'une variable x. Si on remplace la variable x par une valeur quelconque d'un ensemble E, la proposition obtenue est vraie ou fausse sans ambiguïté.

Les termes d'une proposition doivent être **parfaitement définis**. Cela impose qu'avant de commencer à démontrer une proposition, il faut en maîtriser tous les termes et donc **apprendre les définitions**.

■ **Exemple I.1**
- « 2 est un entier pair » est une proposition vraie.
- « 3 est un entier pair » est une proposition fausse.
- « $i > 0$ » n'est pas une proposition, car dans l'ensemble des complexes, il n'y a pas de relation d'ordre.
- « π est plus intéressant que 4 » n'est pas une proposition car « plus intéressant que » n'est pas défini.
- « la fonction sinus est croissante » n'est pas une proposition. Il y a une ambiguïté sur l'ensemble on considérait cette fonction. Parfois le contexte permet de lever cette ambiguïté. Ici par exemple, on considère que si ce n'est pas précisé c'est sur l'ensemble le plus grand sur lequel la fonction sinus est définie ($\mathbb{R}$ donc). La proposition est donc fausse.
- « $P(n)$: n est pair » est une propriété sur les entiers naturels. Par contre, $P(\sqrt{2})$ n'a pas de sens.

■

P Il y a un lien clair entre les propositions et les variables booléennes en Python qui valent vrai (`True`) ou faux (`False`). On les utilise pour les **instructions conditionnelles** `if` et les **boucles conditionnelles** `while`.

D'autre part, on distingue en informatique le = d'**affectation** et le == qui teste l'égalité des valeurs. Ainsi, la proposition mathématique « x=2 » s'écrit x==2, tandis l'opération x=2 est l'affectation de la variable x à la valeur entière 2.

I.2 Opérations sur les propositions

Les propositions sont les briques de bases avec lesquelles on construit toutes les propositions que l'on peut démontrer.

C'est un grand principe en mathématiques : on construit des objets et des règles pour les manipuler.

Définition I.2 À partir des propositions P et Q, on définit :
- la **négation** « non P », comme la proposition « P est fausse »,
- la **disjonction** « P ou Q », comme la proposition « P est vraie ou Q est vraie »,
- la **conjonction** « P et Q », comme la proposition « P est vraie et Q est vraie »,
- l'**équivalence** « $P \iff Q$ », comme la proposition « P et Q ont la même valeur »,

On peut voir dans les tableaux 1.1 la valeur de ces nouvelles propositions en fonction de la valeur de P et Q.

P	V	F
non P	F	V

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P ou Q	V	V	V	F
P et Q	V	F	F	F
P $\iff$ Q	V	F	F	V

TABLE 1.1 – Table de vérités de **non**, **et**, **ou** et $\iff$

P En python, on utilise `not`, `and` et `or`.

Ne pas confondre négation et contraire : la négation de « f est croissante » n'est pas « f est décroissante ».

le **ou** n'est pas exclusif : si les deux propositions sont vraie, « P ou Q » est vraie, au contraire de la valeur de **ou** dans l'expression *formage ou dessert.*

Le principe du tiers exclu indique que « P et non P » est toujours vraie.

P Par définition si P est faux, alors « P et Q » est faux, sans avoir besoin de calculer la valeur de Q. Ceci est très utilisé en informatique, sous la forme de l'**évaluation paresseuse** : on peut utiliser une proposition « P et Q » avec Q qui n'a de sens que si P est vraie.

On pourra ainsi définir la proposition :

$$P(x) : \qquad x \neq 0 \quad \texttt{et} \quad \frac{1}{x} = y$$

dans cet ordre.

Autre exemple : la propriété :

$$P(z) : \qquad z \in \mathbb{R} \text{ et } z > 0$$

a un sens pour $z \in \mathbb{C}$.

Usage du symbole $\iff$

L'équivalence est une égalité sur les propositions. $P \iff Q$ signifie que P et Q sont la même proposition et donc que montrer P est strictement identique à montrer Q.

Le symbole $\iff$ n'est à utiliser que dans les cas suivants :

- On ne sait pas si P est vrai ou faux. Généralement on veut montrer que P est vrai. On trouve une propriété « plus simple » Q et on sait montrer que $P \iff Q$. Le but étant de se ramener à une proposition clairement vraie (une **évidence**). Le symbole équivalence permets donc *de partir du résultat*.
- Dans les équations, le symbole $\iff$ signifie que les deux équations ont le même ensemble de définition et le même ensemble de solutions.

Si on sait que P est vrai et que l'on en déduit que Q est vrai, on écrit « donc ». Par exemple, on écrit : « on sait que $n \geqslant 0$ donc $n+1 \geqslant 1$ ».

Attention, il faut souvent des arguments pour prouver qu'il y a bien équivalence. Les petites manipulations usuelles sont des équivalences : passer un terme de droite à gauche du signe égal, développer, factoriser, etc, mais toute opération autre doit être justifiée.

En particulier :

- la multiplication, division doit se faire que par un nombre non nul (ou positif si on manipule des inégalités),
- des relations du type $a = b \iff f(a) = f(b)$ se justifie systématiquement par un argument.

■ **Exemple I.2** Montrons que pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{\sqrt{2k-1}} \leqslant \sqrt{2k-1} - \sqrt{2k-3}.$$

Soit $k \geqslant 2$, on procède par équivalence :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2k-1}} \leqslant \sqrt{2k-1} - \sqrt{2k-3} \\
\iff & 1 \leqslant 2k-1 - \sqrt{(2k-1)2k-3} && \text{car } \sqrt{2k-1} > 0 \\
\iff & \sqrt{(2k-1)(2k-3)} \leqslant 2k-2 \\
\iff & (2k-1)(2k-3) \leqslant (2k-2)^2 && \text{car les deux termes sont des réels positifs} \\
\iff & 4k^2 - 8k + 3 \leqslant 4k^2 - 8k + 4 \\
\iff & 3 \leqslant 4 && \text{VRAI}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{\sqrt{2k-1}} \leqslant \sqrt{2k-1} - \sqrt{2k-3}.$$

■

I.3 Manipulation des symboles « et », « ou » et « non »

L'équivalence permets aussi de montrer les points intuitifs suivants :

Proposition I.1 Soient P, Q, et R des propositions, on a :
- La double négation : **non** (**non** P) $\iff P$.
- L'ordre ne compte pas dans des **et** successifs :
  (P **et** Q) $\iff$ (Q **et** P).
- De même pour les **ou** :
  (P **ou** Q) $\iff$ (Q **ou** P).
- On n'a pas besoin de parenthèse lors de plusieurs **et** consécutif :
  (P **et** Q) **et** $R \iff P$ **et** (Q **et** R).
- De même pour les **ou** :
  (P **ou** Q) **ou** $R \iff P$ **ou** (Q **ou** R).
- De manière évidente :
  P **ou** $P \iff P$
  P **et** $P \iff P$

Ces propositions sont démontrées en considérant toutes les valeurs possibles de P, Q et R et en utilisant des tables de vérités. On parle de **synonymies**.

Démonstration. Voici la démonstration de la première :

P	V	F
non P	F	V
non (non P)	V	F

Il suffit de constater que les lignes 1 et 3 sont identiques. ■

Théorème I.2 — Loi de De Morgan. Soient P, Q, et R des propositions, on a :
- Distributivité du « ou » sur le « et » :
  (P **ou** Q) **et** $R \iff$ (P **et** R) **ou** (Q **et** R).
- Distributivité du « et » sur le « ou » :
  (P **et** Q) **ou** $R \iff$ (P **ou** R) **et** (Q **ou** R).

Démonstration. De la même manière pour la dernière, on a :

P	V	V	V	V	F	F	F	F
Q	V	V	F	F	V	V	F	F
R	V	F	V	F	V	F	V	F
P et Q	V	V	F	F	F	F	F	F
(P et Q) ou R	V	V	V	F	V	F	V	F
P ou R	V	V	V	V	V	F	V	F
Q ou R	V	V	V	F	V	V	V	F
(P ou R) et (Q ou R)	V	V	V	F	V	V	V	F

On constate bien que les lignes : **(P et Q) ou R** et **(P ou R) et (Q ou R)** sont identiques, ces deux propositions sont donc équivalentes. ■

On peut aussi prendre la négation du **et** et du **ou** :

Théorème I.3 Soit P et Q deux propositions, on a :

- **non**(P **ou** Q) est équivalent à **non**(P) **et non**(Q),
- **non**(P **et** Q) est équivalent à **non**(P) **ou non**(Q).

Ici encore, tout est intuitif. La démonstration rigoureuse se fait en considérant les tables de vérité.

Exemple I.3

- **non**(« -1 est strictement négatif ») est « -1 est strictement positif ou nul »,
- **non**(« $-1 < x \leqslant 3$ ») est « $x \leqslant -1$ ou $x > 3$ »,
- Si l' est un nombre réel donné, et $P(l)$ la proposition « $l = l'$ », alors **non**($P(l)$) $\iff$ **non**(« $l \geqslant l'$ » **et** « $l \leqslant l'$ ») $\iff$ « $l < l'$ » **ou** « $l > l'$ ».
  Ainsi lorsque l'on suppose que deux nombres sont distincts, on peut toujours considérer que l'un est supérieur strict à l'autre.

■

En conséquence, lorsque l'on veut obtenir la réponse "oui" ou "non" de la part de l'utilisateur, on va boucler tant que la réponse n'est ni "oui", ni "non", *ie* (non(rep est oui) et non(rep est non)). Cela s'écrit :

```
rep = input("oui / non ?")
while rep != "oui" and rep !="non" :
  rep = input("oui / non ?")
```

I.4 Implication et contraposition

L'implication est un autre opérateur sur les propositions. Il signifie qu'une proposition est moins forte qu'une autre. Il a le même sens que $\geqslant$ pour les réels.

Définition I.3 — Implication. Soient P et Q deux propositions, on note $P \implies Q$ et on lit « P implique Q », ou « si P alors Q » la proposition :

$$P \implies Q \quad = \quad ((\textbf{non } P) \textbf{ ou } Q).$$

Cette proposition est fausse uniquement si Q est fausse et P vraie, elle est vraie dans tous les autres cas.

La figure 1.2 montre la table de vérité correspondante.

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P $\implies$ Q	V	F	V	V

TABLE 1.2 – Table de vérité de $P \implies Q$

Si $P \implies Q$ on dit que Q est une condition nécessaire à P, puisqu'on ne peut avoir P que si on a Q.
On dit aussi que P est une condition suffisante pour Q, puisqu'il suffit d'avoir P pour avoir Q.

On n'utilise pas $\implies$ à la place de donc.

La proposition :
« *Le ciel est bleu* » $\Longrightarrow$ « *le sang est rouge* »
est tout à fait exacte mathématiquement.
Ainsi, $\Longrightarrow$ n'indique pas un rapport cause/conséquence. C'est une nouvelle proposition qui signifie : *si je savais que P est vraie alors je saurai que Q est vraie*. Si on sait que P est vraie et que l'on en déduit Q, on écrit : « *on a P donc Q* »

■ **Exemple I.4**

- si $P(f)$ est « f est une fonction dérivable sur un intervalle I », et $Q(f)$ est « f est une fonction continue sur un intervalle I », alors $P(f) \Longrightarrow Q(f)$, mais $Q(f) \Longrightarrow P(f)$ est fausse.
  Ainsi, « Être continue » est une condition nécessaire pour « être dérivable » : ce n'est pas la peine de chercher à dériver une fonction non continue. Tandis que, « être dérivable » est une condition suffisante pour « Être continue ».
- $x > 5 \Longrightarrow x^2 > 25$, la réciproque est bien sûr fausse.

■

Du point de vue de la logique mathématique : $P \Longrightarrow Q$ est vrai dès que P est fausse.
En pratique, cela indique que pour démontrer qu'une proposition du type $P \Longrightarrow Q$ est vrai, on se place dans le cas intéressant, c'est-à-dire dans le cas où P est vrai, et on montre que Q est vrai.
Enfin, $P \Longrightarrow Q$ est évidement différent de $Q \Longrightarrow P$.

Comme on l'a vu pour deux proposition égalité est l'équivalence $\Longleftrightarrow$ et la comparaison $\geqslant$ est $\Longrightarrow$. On a donc l'équivalent de $(a = b) \Longleftrightarrow a \leqslant b$ et $b \leqslant a$.

Théorème I.4 — Double implication. Soient P et Q deux propositions, alors on a :

$$(P \Longleftrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (P \Longrightarrow Q) \text{ **et** } (Q \Longrightarrow P).$$

Autrement dit, pour montrer que P est équivalent à Q, on montre que P implique Q, puis que Q implique P, c'est la double implication.

Démonstration. Par table de vérité :

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P $\Longrightarrow$ Q	V	F	V	V
Q $\Longrightarrow$ P	V	V	F	V
(P $\Longrightarrow$ Q) et (Q $\Longrightarrow$ P)	V	F	F	V
(P $\Longleftrightarrow$ Q)	V	F	F	V

■

Lorsqu'on nie une proposition d'implication on a :

Proposition I.5 Soit P et Q deux proposition, la proposition non$(P \Longrightarrow Q)$ s'écrit : P et (non Q).

Cette proposition est assez intuitive : le contraire que P entraîne Q c'est d'avoir P sans Q

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition :
non($P \implies Q$) est non(non(P) ou Q), c'est-à-dire P et non(Q). ■

Une autre égalité logique importante à connaître est la contraposé :

Théorème I.6 — Contraposé. Soient P et Q deux propositions, alors on a :

$$(P \implies Q) \quad \iff \quad \Big((\textbf{non } Q) \implies (\textbf{non } P)\Big)$$

On dit que l'on a pris la contraposé de la proposition $P \implies Q$.

Démonstration. La preuve se fait encore par table de vérité :

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P $\implies$ Q	V	F	V	V
non Q	F	V	F	V
non P	F	F	V	V
non Q $\implies$ non P	V	F	V	V

On voit que les deux lignes correspondantes sont égales. ■

Le principe de la contraposé est de considérer $P \implies Q$ sous la forme : Q est la conséquence de P. Par exemple : « *si il pleut alors le trottoir est mouillé* ». La contraposé dit que l'absence de la conséquence (non Q) est une preuve l'absence de la cause (non P). Dans l'exemple : « *si le trottoir n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas* ».

■ **Exemple I.5** On rappelle les définitions suivantes valables pour un entier n :

$$n \text{ pair} \iff \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$$
$$n \text{ pair} \iff \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k+1.$$

Pour illustrer la contraposé, l'exemple qu'il faut connaître est :

$$n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair},$$

Pour cela, on prends la contraposé et on démontre :

$$n \text{ impair} \implies n^2 \text{ impair}.$$

On considère pour cela n impair, qui s'écrit donc sous la forme $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Et on écrit alors :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

On pose alors $K = 2k^2 + 1$, et on a $K \in \mathbb{N}$, et $n^2 = 2K + 1$, ainsi n^2 est impair. D'où

$$n \text{ impair} \implies n^2 \text{ impair}.$$

et donc :

$$n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair},$$

■

I.5 Quantificateurs

Soit E un ensemble, à partir d'une proposition $P(x)$, tel que $P(x)$ a un sens pour tout élément x de E, on peut définir une proposition qui signifie « $P(x)$ *est vrai partout* » ou « $P(x)$ *est vrai quelque part* ». Ces définitions font appel aux quantificateurs universels : « pour tout » et « il existe ».

Définition I.4 Soit $P(x)$ une propriété tel que $P(x)$ a un sens pour tout élément x de E, on définit :

- $(\forall x \in E, P(x))$, cette proposition signifie
  « pour tout élément x de l'ensemble E, $P(x)$ est vrai ».
- $(\exists x \in E, P(x))$, cette proposition signifie
  « il existe un élément de E tel que $P(x)$ est vrai ».
- $(\exists! x \in E, P(x))$, cette proposition signifie
  « il existe un unique élément de E tel que $P(x)$ est vrai ».

■ **Exemple I.6** La proposition précédente s'écrit précisément ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\exists k \in \mathbb{N}, n^2 = 2k\right) \implies \left(\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\right).$$

remarquez que le k dans la première partie n'est pas le même que dans la deuxième partie. ■

L'USAGE DES QUANTIFICATEURS HORS DES ÉNONCÉS MATHÉMATIQUES EST À PROSCRIRE !

✎ Toute variable introduite dans un énoncée doit être quantifiée. Par exemple, si x n'a pas de valeur connue, écrire $x^2 \geqslant 0$, ne signifie rien. Il faut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$, ou écrire : soit x tel que $x^2 \geqslant 0$, ou encore : pour le x défini avant, je sais que $x^2 \geqslant 0$.

✎ La variable est **muette**, $\forall x \in E,\ P(x)$ est la même proposition que $\forall \varepsilon \in E,\ P(\varepsilon)$. On essayera donc de donner un « sens » au choix du nom des variables. On utilisera ainsi n, p, q pour un entier, f pour une fonction, w pour une éventualité etc.

✎ On peut utiliser une virgule, ou un tel que :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n = 2k + 1.$$

On peut aussi écrire :

$$\text{soit } n \text{ tel que } n \text{ s'écrit } n = 2k + 1 \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N},$$

plutôt que

$$\text{soit } n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant : } \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k+1.$$

En toute rigueur la deuxième forme est la seule possible car la variable k est quantifiée avant d'être utilisée.
Dans une proposition quantifiée, on écrit les quantificateurs avant. On écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0,$$

et pas

$$x^2 \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ici encore, ne pas confondre l'énoncé mathématique précis et ce que l'on dit oralement.

■ **Exemple I.7** Soit E une partie de $\mathbb{R}$, P et Q les propositions :

$$\begin{array}{ll} P: & \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ x \leqslant M \\ Q: & \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ x < M \end{array}$$

A priori, P et Q sont différents, mais en fait P et Q sont équivalents. En effet, dans P et Q le symbole M désigne deux quantités différentes. Les propositions P et Q sont relatives à l'existence d'un réel M et non à sa valeur.

Montrons précisément l'équivalence.

$\boxed{\Longrightarrow}$ si E vérifie Q, alors E vérifie P avec la même valeur pour M.

$\boxed{\Leftarrow}$ si E vérifie P, alors on sait qu'il existe M, tel que : $\forall x \in E,\ x \leqslant M$. On pose alors $M' = M+1$, et on a alors : $\forall x \in E,\ x < M'$. D'où $\exists M' \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ x < M'$, ce qui est strictement identique (la variable est muette) à Q. ■

⋆ Négation des quantificateurs

La négation d'une proposition composée d'un quantificateur provient du sens commun :

- nier un « quelque soit » c'est trouver un élément qui ne vérifie pas la propriété, (donc **exhiber un contre-exemple**),
- nier un « il existe » c'est démontrer que tous les éléments ne vérifient pas la propriété (donc montrer qu'aucun ne vérifie la propriété).

Théorème I.7 Soit $P(x)$ une proposition qui a un sens pour tout élément x d'un ensemble E. On a alors :

$$\begin{array}{lcl} non(\forall x \in E,\ P(x)) & \Longleftrightarrow & \exists x \in E, non(P(x)) \\ non(\exists x \in E,\ P(x)) & \Longleftrightarrow & \forall x \in E, non(P(x)) \end{array}$$

Par exemple : « non($\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 13 \implies x > \sqrt{13}$) » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 > 13$ et $x \leqslant \sqrt{13}$ ».

⋆ Ordre des quantificateurs

Lorsqu'on combine plusieurs propositions avec des quantificateurs, il faut faire attention à l'ordre : les quantificateurs se mettent en début de proposition et se lisent de gauche à droite. Les variables introduite dépendent des précédentes.

■ **Exemple I.8** Soit la proposition

$$P : \forall x > 0, \exists a > 0, a < x.$$

il faut comprendre : pour tout $x > 0$, il existe un $a > 0$ (qui dépend donc de x), tel que $a < x$. Ce qui est vrai.

En fait la proposition P s'écrit : $\forall x > 0, Q(x)$, où $Q(x)$ est le proposition : $\exists a > 0$: $a < x$. Souvent dans ce cas, on note a_x à la place de a pour montrer cette dépendance.

Par contre, soit la proposition

$$P' : \exists a > 0, \forall x > 0, a < x.$$

Il faut comprendre : il existe un a tel que tout $x > 0$ vérifie $a < x$, cette fois-ci, le a ne dépend pas de x. P' se décompose en $\exists a > 0, Q'(a)$, où $Q'(a)$ est la proposition :$\forall x > 0, a < x$. P' est alors faux. ∎

∎ **Exemple I.9** Par exemple, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$, si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^x.$$

dans cette écriture le λ ne dépend pas de x. si on change l'ordre des quantificateurs :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^x,$$

alors, toute fonction est solution : en effet, étant donné un $x \in \mathbb{R}$, il suffit de poser $\lambda = f(x)e^{-x}$, qui vérifie bien : $f(x) = \lambda e^x$. On note souvent dans ce dernier cas λ_x pour indiquer que λ dépend de x. D'une manière générale, dans une proposition les variables dépendent des variables précédentes. ∎

⋆ Conclusion

Cette partie clôt le premier but : l'ensemble des énoncés que l'on peut démontrer est constitué de propositions, de propositions avec quantificateurs et associés entre eux avec **non**, **ou**, **et**, $\Longrightarrow$, et $\Longleftrightarrow$.

Par exemple, on peut maintenant définir la notion de suite convergente en disant : une suite u_n est convergente si

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in N, n \geqslant N \implies |u_n - l| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Cet énoncé est une proposition qui dépend de la suite u_n à qui on peut donner une valeur vraie ou fausse.

Une représentation mentale satisfaisante pour ce type d'énoncé est : « il existe un l, tel que pour toute précision ε, on peut trouver un rang N à partir duquel u_n et l sont égaux à ε près ».

II Raisonnement et rédaction

II.1 Méthodes de démonstrations

Certaines propositions sont vraies par choix, c'est les axiomes. Sinon la véracité d'une proposition doit être démontré en utilisant des règles de démonstrations.

Ces règles permettent de prouver que des propositions sont vraies en utilisant la véracité d'autres propositions.

Démontrer consiste ainsi à expliquer le chemin qui permet de passer des propositions que l'on sait être vraie à la proposition que l'on veut démontrer. Les techniques de démonstrations permettent de se « déplacer » d'une proposition vraie à une autre.

Voici quelques techniques de démonstrations :

Déduction si P est vraie et si P implique Q alors Q est vraie.

Transitivité de l'implication si on a $P \implies Q$ et $Q \implies R$ alors on a $P \implies R$.

Contraposé $P \implies Q$ est équivalent à non $Q \implies$ non P.

Raisonnement par l'absurde si on suppose qu'une proposition P et que l'on obtient qu'une autre proposition Q est vraie et fausse (une contradiction), alors c'est que P est faux.

Disjonction des cas Si l'ensemble E est constitué de deux ensemble A et B, avec $E = A \cup B$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ (x \in A) \textbf{ ou } (x \in B),$$

et si on a : $\forall x \in A,\ P(x)$ et $\forall x \in B,\ P(x)$, alors on a : $\forall x \in E,\ P(x)$.

Quantificateur universel Si on a $\forall x \in E, P(x)$, et si $b \in E$ alors $P(b)$ est vraie. Cela signifie que l'on peut remplacer x par n'importe quelle valeur, en particulier, $-x$, $2x$ etc en vérifiant que l'on remplace par une valeur de E.

■ **Exemple II.1**

- Exemple d'utilisation de la transitivité :

$$x > 2 \implies x^2 > 4 \qquad \text{et} \qquad x^2 > 4 \implies |x| > 2$$

donc

$$x > 2 \implies |x| > 2$$

- Pour la contraposition :

$$x > 2 \implies x^2 > 4 \qquad \text{est équivalent à} \qquad x^2 \leqslant 4 \implies x \leqslant 2$$

- Pour la disjonction des cas :

$$\forall x \geqslant 0, |x| \geqslant x \qquad \text{et} \qquad \forall x < 0, |x| \geqslant x$$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant x$.

- Pour une fonction f donnée la proposition

$$\forall (x,y) \in D_f^2, \qquad f(x) = f(y) \implies x = y,$$

est équivalente à

$$\forall (x,y) \in D_f^2, \qquad x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

- De la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x),$$

on peut déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

■

⋆ Méthodes de rédaction

Comme on l'a vu, démontrer consiste à expliquer un chemin permettant d'obtenir la véracité d'une proposition. Il est donc toujours important de :
- Préciser les propositions que l'on sait vraie,
- préciser quel est la proposition que l'on veut démontrer
- donner des indications sur la technique utilisée.

Avant de se lancer dans une démonstration, il est donc important de commencer par « Montrons que ... ».

Ceci est aussi vrai en cours de raisonnement :
- on peut indiquer l'endroit où on est « On a donc.... », « On sait ... »,
- les « déplacements : « On obtient ... », « on a donc .... »,
- la techniques : « par l'absurde ... », « on utilise la contraposée ... ».

Dans une copie de concours, la rédaction est essentielle : le correcteur doit suivre le raisonnement sans effort !

Démontrer une implication Pour démontrer $P \implies Q$, on voit que si P est faux il n'y a rien à démontrer, $P \implies Q$ est automatiquement vrai, il faut donc supposer P vrai. On rédige donc en mettant :« Supposons P ... », et on montre que Q est vrai.

Double implication Pour démontrer une équivalence, il faut démontrer successivement les deux implications. On doit donc séparer le cas $P \implies Q$ et $Q \implies P$.

Utiliser la disjonction des cas Il faut clairement indiquer « On sépare deux cas distincts », et indiquer les différents cas. Il doit être clair qu'on distingue tous les cas possibles.

Raisonnement par l'absurde Bien indiquer la supposition que l'on va nier, et à quel moment elle intervient. Ensuite, bien indiquer la contradiction, avant de conclure.

Quelque soit Pour démontrer une proposition composé d'une proposition avec un quantificateur « quelque soit », $\forall x \in E,\ P(x)$. Il y a deux possibilités :
- on ne peut pas tester tous les éléments de E un par un. On utilise alors un *élément générique* x, qui appartient à E, sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse. Si la proposition $P(x)$ est vraie pour cet élément alors elle est vraie pour tout x de E. Il faut donc écrire, « Soit x appartenant à E », et on montre $P(x)$.
- on peut prouver la véracité de $P(x)$ directement pour tout $x \in E$ (par exemple en dérivant une expression pour montrer qu'elle est constante, ou par l'absurde).

Il existe Pour une proposition composé d'une proposition avec un quantificateur « il existe », $\exists x \in E,\ P(x)$, il faut trouver un élément de E pour lequel $P(x)$ est vrai. Il y a alors deux possibilité :
- on construit x explicitement, en écrivant : « on pose $x = ...$ ».
- on démontre qu'il est possible de trouver un tel élément par l'utilisation d'une autre proposition.

Pour consruire x explicitement, on peut être amené à utiliser une technique « d'analyse-synthèse » :
- on suppose que l'élément x existe et on essaie de trouver quels conditions sont vérifiés dans le but d'isoler la ou les valeurs possibles (c'est l'**analyse :** on regarde les conditions nécessaires pour que x vérifie la propriété),

- S'il y a plusieurs possibilités on en choisit une.
- Ensuite, on vérifie que cette valeur convient (c'est la **synthèse :** on regarde les conditions nécessaires pour que x vérifie la propriété),).
- Bien sûr, on finit par une **conclusion**.

Existence et unicité Pour une proposition composée d'une proposition avec un quantificateur « il existe un unique », $\exists! x \in E,\ P(x)$. Il faut prouver l'existence et l'unicité.
Pour l'unicité, le plus simple est de supposer qu'il y a deux solutions et montrer qu'elles sont égales. Il est souvent plus simple de commencer par l'unicité qui donne des indications sur l'existence.
Il arrive que l'on prouve l'unicité par d'autre voie (par exemple la stricte croissance d'une fonction peut donner l'unicité d'une solution à une équation).

✎ Si possible, ne pas utiliser d'abréviations dans les copies ! Plus précisément, si écrire Mq à la place de « *Montrons que* », tq à la place de « *tel que* » ne pose pas de grand problème, il ne faut pas :
- Utiliser des symboles mathématiques au milieu des phrases en français : « *f est continue comme $\sum$ de fonctions continues.*
- Abréger le nom des théorème : « *d'après le TVI* »
- Utiliser des quantificateurs à la place de *pour tout*
- Utiliser des $\implies$ ou des $\iff$ à la place de « *donc* ».

II.2 Exemple de raisonnement

On a déjà vu des exemples de démonstrations par équivalence.

⋆ Implication

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, x > 4 \implies x^2 > 16$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on suppose que $x > 4$. On a alors $x > 4 > 0$, et on utilise le résultat :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad 0 < a < b \implies 0 < a^2 < b^2 \qquad \text{ie} \quad x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+.$$

avec $a = 4$ et $b = x$. On obtient ainsi $x^2 > 16$.
En conclusion, comme x est quelconque dans $\mathbb{R}$, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 4 \implies x^2 > 16$$

À retenir :
- Pour montrer un « pour tout », on utilise un élément quelconque.
- Pour montrer une implication $P \implies Q$, on suppose P et on montre Q.
- On montre au correcteur que l'on a **repéré et résolu la difficulté**. Ici il s'agit de vérifier que les deux termes sont positifs avant d'élever au carré. De la même manière, lorsque l'on utilise un résultat (ici en utilisant $a = 4$ et $b = x$) on vérifie que l'on est dans le domaine de validité du résultat.
- On écrit une conclusion dans les termes de l'énoncé.

★ **Analyse synthèse**

Montrons que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \exists! (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \Big(a = \lambda + \mu \ \text{ et } \ b = \lambda - \mu\Big).$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

Unicité Supposons qu'il existe (λ,μ), et (λ',μ'), qui conviennent, et montrons que $\lambda = \lambda'$ et $\mu = \mu'$. On a

$$\lambda + \mu = \lambda' + \mu', \text{ et } \lambda - \mu = \lambda' - \mu',$$

d'où en ajoutant :

$$2\lambda = 2\lambda', \text{ et donc } \lambda = \lambda', \text{ puis } \mu = \mu'.$$

Existence Montrons que : $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ $a = \lambda + \mu$ et $b = \lambda - \mu$. On raisonne par analyse et synthèse.

Analyse : on suppose que λ existe, on a alors $a + b = 2\lambda$, donc $\lambda = \frac{a+b}{2}$. On a aussi : $a - b = 2\mu$, donc $\mu = \frac{a-b}{2}$.

R C'est les mêmes calculs que dans l'unicité.

Synthèse Posons $\lambda = \frac{a+b}{2}$, $\mu = \frac{a-b}{2}$, on a alors :

$$\lambda + \mu = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a, \text{ et } \lambda - \mu = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b.$$

Donc λ et μ conviennent.

Conclusion λ,et μ existent et sont uniques. Et donc :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \exists! (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \Big(a = \lambda + \mu \ \text{ et } \ b = \lambda - \mu\Big).$$

À retenir :

- Utilisez le vocabulaire du cours.
- Pour montrer un « il existe un unique », on commence par l'unicité.
- Pour montrer l'existence, dans le cas où l'on ne devine pas la valeur qui va convenir, on doit faire une analyse. Cela consiste à supposer le problème résolu (l'existence de la solution), et à déterminer quelles sont les solutions possibles. Si il y a unicité, on trouve une seule valeur, sinon il y a plusieurs valeurs possibles, il faut en choisir une.
- Parfois une valeur est donné dans l'énoncé. Il s'agit alors simplement de faire la synthèse, *i.e.* de vérifier que la valeur convient.
- Faire un dessin peut guider la réflexion.
- L'unicité guide l'analyse, c'est souvent les mêmes calculs.
- La synthèse consiste à poser la valeur trouvée (en choisir une si il y en a plusieurs). Elle commence par « On pose » On vérifie alors que cette valeur convient, *i.e.* qu'elle appartient au bon ensemble et qu'elle vérifie la propriété. Attention, la difficulté est souvent dans la première partie.

★ Raisonnement par l'absurde

Montrons que $i \notin \mathbb{R}$.

On raisonne par l'absurde : supposons que $i \in \mathbb{R}$, alors $-1 > 0$ car $-1 = i^2$ est le carré d'un nombre réel. Contradiction avec $-1 < 0$. Donc $i \notin \mathbb{R}$.

À retenir :
- Bien indiquer le raisonnement par l'absurde, la négation de la propriété que l'on doit démontrer.
- Indiquer la contradiction.

★ Disjonction des cas

Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant |x|+|y|$.

En utilisant la définition de la valeur absolue :

$$|.| \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \max(x,-x) \end{array} \right.$$

Soit (x,y) deux réels. Quatre cas sont possibles :
- Si x et y sont positifs alors $x+y$ est aussi positif, l'inégalité s'écrit alors :
$$\begin{aligned} |x+y| &= x+y \\ &\leqslant x+y = |x|+|y|, \qquad \text{on a bien le résultat} \end{aligned}$$
- Si x et y sont négatifs, alors $x+y$ est aussi négatif, l'inégalité s'écrit alors :
$$\begin{aligned} |x+y| &= -x-y \\ &\leqslant -x-y = |x|+|y|, \qquad \text{on a bien le résultat} \end{aligned}$$
- Si x est négatif et y positif, alors $|x| = -x$ et $|y| = y$. Il y a deux sous cas,
  - Soit $x+y \geqslant 0$, et on a : $x \leqslant -x$, et
  $$\begin{aligned} |x+y| &= x+y \\ &\leqslant -x+y = |x|+|y|, \qquad \text{on a bien le résultat} \end{aligned}$$
  - Soit $x+y \leqslant 0$ et on a : $-y \leqslant y$ donc
  $$\begin{aligned} |x+y| &= -x-y \\ &\leqslant -x+y = |x|+|y|, \qquad \text{on a bien le résultat} \end{aligned}$$

  Dans les deux cas, $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.
- Si x est négatif et x positif, alors la même étude permet de montrer que $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

En conclusion, on constante que dans tous les cas on a : $|x+y| \leqslant |x|+|y|$. Ainsi : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant |x|+|y|$.

À retenir :
- Bien vérifier que l'on balaie tous les cas et qu'à chaque fois on a la même conclusion.
- Utiliser un dessin pour guider la démonstration.
- Conclure dans les termes de l'énoncé.

✯ Inégalité obtenue par dérivation

Montrer que $\forall x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

On pose : $\varphi : x \mapsto \ln(1+x)-x$, on a φ dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :

$$\forall x > -1, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

On construit alors le tableau de variation de φ et on obtient :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \qquad \ln(1+x) \leqslant x.$$

À retenir :
- Dessiner le tableau de variation plutôt qu'un long discours vague.

✯ Existence par théorème

Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$, continue. Montrons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$, $f(c) = c$.

On note g la fonction définie sur $[0,1]$ par $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) - x$. Montrons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$, $g(c) = 0$.

La fonction g est continue sur $[0,1]$, comme somme de fonctions continues. De plus, $g(0) = f(0) \geqslant 0$, et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $c \in [0,1]$, $g(c) = 0$.

En conclusion, on a $\exists c \in \mathbb{R}, f(c) = c$.

À retenir :
- Ici on montre l'existence en utilisant un théorème d'existence.
- On introduit nos notations avec « on note »,
- On a besoin d'indiquer une étape avec « Montrons que ».
- Lorsque l'on utilise un théorème, on vérifie les hypothèses (ici le correcteur attends la continuité de la fonction g).

✯ Condition de colinéarité

Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on rappelle que u et v sont **colinéaires** si :

$$u = 0 \qquad \text{ou} \qquad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ v = \lambda u.$$

On note $u = (x,y)$ et $v = (x',y')$ les coordonnées des vecteurs, et

$$\det(u,v) = xy' - yx'$$

le **déterminant** de u et v.

Montrer que u et v sont colinéaires, si et seulement si $\det(u,v)=0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ supposons u et v colinéaires. On a alors deux cas :

- si $u=0$, *i.e.* $x=0$ et $y=0$, on a de manière évidente : $\det(u,v)=0$.
- si $v=\lambda u$ pour un certain $\kappa\in\mathbb{R}$, *i.e.* $x=\lambda x'$ et $y=\lambda y'$, on a alors :

$$\det(u,v)=xy'-yx'=\lambda x'y'-\lambda y'x'=0.$$

Dans les deux cas, on a $\det(u,v)=0$. D'où une implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ réciproquement supposons $\det(u,v)=0$. On distingue plusieurs cas :

- Si $u=0$ alors u et v sont colinéaires.
- Sinon on a $x\neq 0$ ou $y\neq 0$.
  - si $x\neq 0$, de la relation $xy'-yx'=0$, on déduit : $y'=\frac{x'}{x}y$. On pose alors $\lambda=\frac{x'}{x}$, on a $x\neq 0$, donc λ est bien défini et réel. On a alors à la fois :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x'}{x}y &\quad \text{ce qui s'écrit} \quad && y' &= \lambda y \\ \lambda &= \frac{x'}{x} &\quad \text{ce qui donne} \quad && x' &= \lambda x. \end{aligned}$$

    Donc $v=\lambda u$, et u et v sont colinéaires.
  - Si $y\neq 0$, alors on pose de même : $\lambda=\frac{y'}{y}$ qui existe et est réel. On a alors $y'=\lambda y$, et de la relation la relation $xy'-yx'=0$, on déduit : $x'=\lambda x$. Donc $v=\lambda u$, et u et v sont colinéaires.

Dans tous les cas, on a u et v sont colinéaires. D'où la réciproque.

$\boxed{\text{conclusion}}$ On a donc prouvé :

$$\det(u,v)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \text{ et } v \text{ sont colinéaires.}$$

À retenir :

- L'égalité n'a pas le même sens dans tous les ensembles ! Ici $u=0$ est une égalité de vecteurs, qui signifie donc $x=0$ et $y=0$. De même, les opérations $+$, $\cdot$, $\times$ n'ont pas le même sens selon la nature des éléments. ici $u=\lambda v$ signifie $x=\lambda x'$ et $y=\lambda y'$, c'est une opération « réel multiplié par vecteur ».
- On travaille par disjonction des cas, en traitant chaque cas et avec une conclusion.
- On fait implication et réciproque et on indique clairement ces deux parties.
- Remarquez dans l'existence, le fait que λ existe demande un argument.
- Souvent un cas est symétrique de l'autre, on le traite ou on indique simplement que « par symétrie, on obtient de même ... »

III Ensembles

III.1 Généralités

Comme on l'a déjà indiqué : la notion d'ensemble est intuitive, elle correspond à une collection d'objets. Un **ensemble** E est donc la collection (*i.e.* sans ordre) d'éléments a. Un ensemble peut contenir des nombres, des fonctions, des ensembles etc.

Dans ce cours, on se contente d'ensemble qui contiennent des éléments de même type (des réels, des fonctions, des ensembles), etc.

Deux ensembles F et G sont égaux (noté $F = G$) si $F \subset G$ et $G \subset F$. Pour montrer que deux ensembles sont égaux, il y a donc une double implication à démontrer :

- partant d'un élément générique f de F, montrer que l'on $f \in G$,
- partant d'un élément générique g de G, montrer que l'on $g \in F$

On voit le lien avec la double implication, car $F = G$ est équivalent à

$$\forall x \in E,\ (x \in F \iff x \in G)$$

Exemple III.1 Les ensembles classiques :

- l'**ensemble vide** noté $\emptyset$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément,
- l'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** : 0, 1, 2, 3 etc. On note $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers naturels différents de 0,
- l'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers** : 0, 1, -1, 2,-2, 3 etc.
- l'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **rationnels** : $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, et $q \in \mathbb{N}^*$. On montrera que l'on peut supposer p et q premiers entre eux. Les nombres $\sqrt{2}$, et π n'appartiennent pas à cet ensemble.
- l'ensemble $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombre **réels** : 0, 1, $\sqrt{2}$, π.... $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs, $\mathbb{R}^-$ des négatifs, on définit aussi $\mathbb{R}^+_*$ et $\mathbb{R}^-_*$.
- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres **complexes**.
- $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des **polynômes**, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des **suites**.
- l'ensemble $\mathscr{C}^0$ est l'ensemble des fonctions continues, on définit de même l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$, etc.
- l'ensemble $\left\{\emptyset, \{a\}, \{a,b,c\}\right\}$ est une collection d'ensemble, c'est donc un ensemble qui contient des ensembles.

■

Certains ensembles sont **finis** (ont un nombre fini d'éléments), certains sont **infinis**.

Définition III.1 Pour un élément a de l'ensemble, on dispose de la proposition $a \in E$ pour dire « a est élément de E ». La négation est $a \notin E$.

Un ensemble F est un sous-ensemble de E si tout élément f de F vérifie $f \in E$, on note $F \subset E$. On dit aussi que F est une partie de E, ou que F est inclus dans E.

Cela s'écrit :

$$F \subset E \quad \iff \quad \forall f \in F, f \in E.$$

On appelle ensemble des parties de E, l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble E (qui est aussi un ensemble), on le note $\mathscr{P}(E)$.

Lorsque x est élément de E, on peut créer le singleton c'est la partie de E constituée uniquement de l'élément x, on le note $\{x\} \subset E$.

Pour démontrer que $F \subset G$, on part d'un élément générique f de F, et on montre que l'on $f \in G$.

Il ne faut pas confondre $x \in E$ et $\{x\} \subset E$. Notons que $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$.
Le symbole $\not\subset$ n'existe pas, par contre il existe un symbole $\supset$.
D'un autre côté, le symbole $\notin$ existe, mais pas le symbole $\ni$.
Pour insister $\subset$ est un symbole binaire entre élément de même type (des ensembles), alors que $\in$ est un symbole entre élément de type différent (un élément et un ensemble).

■ **Exemple III.2** si $a < b$, l'intervalle $[a,b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$, l'intervalle $]a,+\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$, on définit de même $]-\infty,a]$, $[a,b[$, $]a,b[$ etc. Ceux sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. ■

En dénombrements, $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble des tirages que l'on peut faire dans E de taille quelconque.
Par exemple, $\mathscr{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ est l'ensemble des résultats de l'expérience : « *on plonge la main dans un urne qui contient des jetons numérotées* 1 *à n, la main peut se refermer sur aucun jeton, sur un seul, sur deux, etc, ou même sur tous* ». On peut aussi considérer l'expérience suivante : « *on lance au hasard les n jetons dans des boites, chaque jetons tombe dans une boîte indépendamment des autres. On regarde le contenu de la boîte* 1 ». La boîte 1 peut contenir tous les jetons, 1 seul ou un nombre quelconque de jetons.
Si E est de cardinal n, alors $\mathscr{P}(E)$ contient 2^n éléments.

Exercice 1 Soit un ensemble $\{a,b,c,d\}$, déterminer $\mathscr{P}(E)$.

■ **Exemple III.3** Soit $E = \{a,b\}$, on a alors :

$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\Big\}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}\Big(\mathscr{P}(E)\Big) = \Big\{ & \emptyset, \\ & \Big\{\emptyset\Big\}, \Big\{\{a\}\Big\}, \Big\{\{b\}\Big\}, \Big\{\{a,b\}\Big\} \\ & \Big\{\emptyset,\{a\}\Big\}, \Big\{\emptyset,\{b\}\Big\}, \Big\{\emptyset,\{a,b\}\Big\}, \Big\{\{a\},\{b\}\Big\}, \Big\{\{a\},\{a,b\}\Big\}, \Big\{\{b\},\{a,b\}\Big\}, \\ & \Big\{\emptyset,\{a\},\{b\}\Big\}, \Big\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\Big\}, \Big\{\emptyset,\{b\},\{a,b\}\Big\}, \Big\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\Big\}, \\ & \Big\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\Big\}\Big\}.\end{aligned}$$

■

III.2 Description d'un ensemble

Il existe plusieurs manières de décrire un ensemble :

donner directement ces éléments par exemple : $\Omega = \Big\{1,2,3,5\Big\}$. On peut aussi utiliser … : $\Omega = \Big\{1,\dots,n\Big\}$. Lorsque l'on écrit : $\Omega = \Big\{x_1,\dots,x_n\Big\}$, il est sous-entendu que les $\Big(x_i\Big)$ sont distincts, sinon il faut le préciser.

sous forme d'équations On part d'un ensemble plus grand F, et on définit l'ensemble E, comme les éléments x de F vérifiant une propriété $P(x)$:

$$E = \left\{x \in F \middle| P(x)\right\}$$

Par exemple :

$$\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \cos(x)\right\} \qquad \left\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \middle| \forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x^2} f(x)dx = e^x\right\}$$

(on peut remplacer la barre verticale | par « tel que »).
L'avantage de cette représentation est qu'il est facile de vérifier si un élément x est dans E, il suffit de regarder si $P(x)$ est vrai. Par contre, il est difficile d'en construire un élément, et si on sait que $x \in E$, il faut trouver comment utiliser l'information $P(x)$.

sous forme de paramètres On part d'un ensemble A, et on définit E, comme l'ensemble des éléments x de F qui s'écrivent sous la forme $f(a)$ pour $a \in A$, où f est une fonction de A dans E. C'est en fait une simple variante du cas précédent, dans le cas où $P(x)$ s'écrit avec un « il existe »

$$E = \left\{x \in F \middle| \exists a \in A, x = f(a)\right\}$$

Souvent, on utilise une représentation plus simple :

$$E = \left\{f(a) | a \in A\right\}.$$

Par exemple :

$$\begin{array}{ll} & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) = (a+b,a,b)\right\} \\ \text{ou} & \left\{(a+b,a,b) \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \end{array}$$

Dans la deuxième écriture, la barre verticale | peut être remplacé par « pour (a,b) variant dans $\mathbb{R}^2$ ».
L'avantage de cette représentation est qu'il est facile de construire des éléments de E, et il est facile d'utiliser l'information $x \in E$: on sait qu'il existe $a \in A$, tel que $x = f(a)$. On remplace alors dans la suite x par son expression en fonction de a.
Par contre, il est difficile de vérifier qu'un élément x appartient à E, il faut construire (par analyse/synthèse) un élément a de A et tel que $x = f(a)$.

R Le vocabulaire exact est :

- « décrit en compréhension » à la place de « par des équations »,
- « décrit en extension » ou « décrit comme une image directe » à la place de « par des paramètres »

P L'équivalent des ensembles décrits en extension en Python sont les **listes en compréhension**, dont l'une des syntaxes est :

```
L = [expression for variable in liste if test ]
```

Le passage d'un mode de représentation à l'autre est un problème central en mathématiques.

Par exemple, résoudre l'équation $y' = y$, revient à écrire :

$$\left\{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivable} \middle| y' = y\right\} = \left\{x \to \lambda e^x \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Autre exemple : la droite Δ passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{U} = (u_x, u_y)$ est l'ensemble des points :

$$\Delta = \left\{(x_A + \lambda u_x, y_A + \lambda u_y) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si on utilise une représentation de Δ par un vecteur normal $\overrightarrow{N}$:

$$\Delta = \left\{M \in \mathscr{P} \middle| \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{N}\right\} = \left\{M \in \mathscr{P} \middle| \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{N} = 0\right\}.$$

(ici $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points du plan). La représentation d'une droite sous forme d'équation cartésienne est :

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathscr{P} \middle| -u_y x + u_x y + u_y x_A - u_x y_A = 0\right\}.$$

Autre exemple : le cercle trigonométrique :

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 = 1\right\} = \left\{(\cos\theta, \sin\theta) \middle| \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

III.3 Opérations sur les parties

Définition III.2 Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E, on définit **le complémentaire** de l'ensemble A par :

$$\bar{A} = C_E(A) = \left\{x \in E \middle| x \notin A\right\}$$

l'intersection des deux ensembles A et B par :

$$A \cap B = \left\{x \in E \middle| x \in A \textbf{ et } x \in B\right\},$$

la réunion des deux ensembles A et B définie :

$$A \cup B = \left\{x \in E \middle| x \in A \textbf{ ou } x \in B\right\}.$$

Différence de deux ensembles A et B définie :

$$A \setminus B = \left\{x \in E \middle| x \in A \textbf{ et } x \notin B\right\}.$$

R La notation $C_E(A)$ est plus précise que $\bar{A}$, en effet elle indique dans quel ensemble est pris le complémentaire.

Par exemple, le complémentaire du segment $[0,1]$ considéré comme un sous-ensemble de $[-1,1]$ est $[-1,0[$, considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ le complémentaire devient $]1,+\infty[$.

La proposition suivante exprime ce qui se passe lorsqu'on combine ces opérateurs. Ici encore, rien de très étonnant.

Proposition III.1 — Manipulation des symboles $\cup$, $\cap$ et $\bar{\ }$. Soient A, B, et C trois sous-ensembles de E. On a :

- $\overline{\overline{A}} = A$,
- $\overline{\emptyset} = E$, $\overline{E} = \emptyset$,
- L'ordre n'a pas d'importance :

$$\begin{aligned} & A\cap B = B\cap A \\ \text{et} \quad & A\cup B = B\cup A \end{aligned}$$

- Il n'y a pas besoin de parenthèses :

$$\begin{aligned} & A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C \\ \text{et} \quad & A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C \end{aligned}$$

- relations appelées **loi de De Morgan** :

$$\begin{aligned} & A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \\ \text{et} \quad & A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \end{aligned}$$

- Complémentaire d'une réunion et d'une intersection :

$$\begin{aligned} & \overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B} \\ \text{et} \quad & \overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B} \end{aligned}$$

Démonstration. Par exemple, pour les lois de Morgan :

$$\begin{aligned} \forall x\in A\cap(B\cup C) \quad & \iff \quad x\in A \text{ et } (x\in B \text{ ou } x\in C) \\ & \iff \quad x\in A \text{ et } x\in B \text{ ou } x\in A \text{ et } x\in C \\ & \iff \quad x\in (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} x\in\overline{A\cup B} \quad & \iff \quad non(x\in A\cup B) \iff non(x\in A \text{ ou } x\in B) \\ & \iff \quad x\in \overline{A} \text{ et } x\in\overline{B} \iff x\in\overline{A}\cap\overline{B} \end{aligned}$$

■

D'une manière générale, il est inutile de retenir ces formules, il vaut mieux les retrouver rapidement sur un dessin.

Si $A_1,\dots A_n$ sont n sous-ensembles de E, on définit la réunion des ensembles $(A_i)_{i=1\dots n}$:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x\in E \mid \forall i=1\dots n,\ x\in A_i\}.$$

Et l'intersection des ensembles $(A_i)_{i=1\dots n}$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E |\ \exists i = 1\dots n,\ x \in A_i\}.$$

III.4 Couples et produit cartésien

Définition III.3 — Produit cartésien. Soit E et F deux ensembles, on appelle **produit cartésien** de E par F, l'ensemble des couples (e, f), avec $e \in E$, et $f \in F$. On note cet ensemble $E \times F$, et on lit « E croix F »

Les éléments de $E \times F$ sont représentés par un couple (e, f), par exemple cela correspond aux deux coordonnées d'un point du plan ou au deux coordonnée d'un vecteur.

Dans un couple, il y a donc un ordre, $(e, f) \neq (f, e)$. L'ensemble $E \times F$ est différent de l'ensemble $F \times E$, sauf bien sûr si $F = E$.

Notation III.1. *On note $E \times E = E^2$, on généralise aux cas de E^k, pour $k \in \mathbb{N}$.*

Définition III.4 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les éléments de E^n sont des n-uplet, ou des n-liste d'éléments de E. Ils s'écrivent $(x_1, \dots, x_n)$, où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in E$.

Ces éléments sont souvent utiles en dénombrements. Exemple si on tire n fois à P/F, l'ensemble des tirages possibles est P, F^n.

Logique et ensembles

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Logique élémentaire

Exercice 1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Donner la signification des propositions suivantes :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \qquad \forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$$

$$\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y) \qquad \forall (x,y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Exercice 2 Traduire avec des quantificateurs :

- la fonction g s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0,1]$.
- la fonction f s'annule
- la fonction f est la fonction nulle
- f n'est pas une fonction constante
- f ne prend jamais deux fois la même valeur
- la fonction f présente un minimum
- f ne peut s'annuler qu'une seule fois
- f prend des valeurs arbitrairement grandes

Correction :

$\exists ! x_0 \in [0,1],\ g(x_0) = 0.$

Exercice 3 Pour chacune des propositions suivantes, écrire sa négation et déterminer si elle est vraie :

P1 : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
P2 : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$
P3 : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$

Correction : P1 et P2 vrai, P3 faux.

⋆ Raisonnement

Exercice 4 Démontrer : Pour tout nombre complexe z, on a l'équivalence :
(z est réel positif ou nul) $\Leftrightarrow |z| = \mathrm{Re}(z)$.

Correction : Double implication : supposons z réel et positif, il est alors clair que $|z| = \Re(z)$. Réciproquement si $|z| = \Re(z)$, on écrit z sous la forme $z = a + ib$. On démontre que $b = 0$. On a : $|z|^2 = a^2 + b^2 = a^2$ donc $b = 0$.

Exercice 5 Démontrer qu'il n'existe pas de réel (a,b,c), tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = ax^2 + bx + c$.

On utilisera : $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^k} = +\infty$.

Correction Technique classique : pour démontrer que quelque chose n'existe pas (ou qu'un ensemble est vide) on raisonne par l'absurde. On suppose donc que a, b et c existent. On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{e^x}{x^2} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$. En prenant la limite au voisinage de $+\infty$, on a $a = +\infty$ ce qui est impossible.

Exercice 6 Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, montrer que :

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=0 \text{ et } \beta=0.$$

Correction Écrire : $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

Exercice 7 Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{\ln x+\ln y}{2}\leqslant \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Correction : Par équivalence, on obtient facilement

$$\frac{\ln x+\ln y}{2}\leqslant \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \iff xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Exercice 8 Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}\notin\mathbb{Q}$.

Correction : Par l'absurde, on suppose $\frac{\ln 2}{\ln 3}=\frac{p}{q}$ et cela donne : $2^q=3^p$ pair/impair, contradiction.

✯ Analyse-Synthèse

Exercice 9 Soit

$$E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,\middle|\,x+y+z+t=0\right\}$$
$$F=\left\{(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)\,\middle|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Montrer la proposition suivante :

$$\forall u\in\mathbb{R}^4,\ \exists!(a,b)\in E\times F,\ u=a+b$$

Correction : Analyse/synthèse si $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$, on a : $\lambda=u_1+u_2+u_3+u_4$ et $a=u-(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)$.

Exercice 10 Montrer que toute fonction continue sur $[0,1]$ est la somme d'une fonction affine de la forme $x\mapsto ax$ avec $a\in\mathbb{R}$ et d'une fonction continue dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle.

Exercice 11 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on rappelle que

- f est **paire** si :
$$\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=f(x),$$
- f est **impaire** si :
$$\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=-f(x).$$

On note $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions paires et impaires respectivement.

1. Déterminer $\mathscr{P}\cap\mathscr{I}$,
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction quelconque montrer que :
$$\exists!(p,i)\in\mathscr{P}\times\mathscr{I}, f=p+i$$

Correction :

1. Il faut vérifier que la fonction nulle est paire et impaire, et que c'est la seule,
2. On vérifie par analyse et synthèse que $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{p(x)-p(-x)}{2}$.

✯ Ensembles

Exercice 12 Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Déterminer des conditions sur A et B, pour que les équations suivantes d'inconnus X possèdent des solutions : a. $A \cup X = B$ b. $A \cap X = B$

Exercice 13 Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A, B de E :

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$$

appelée **différence symétrique** de A et B.

1. **Deux exemples :** déterminer $A\Delta B$ dans les deux exemples suivants :

$$E = \{1,2,3,4\} \qquad A = \{1,2\} \qquad B = \{1,3\}$$
$$E = \mathbb{R} \qquad A =]-\infty,2] \qquad B = [1,+\infty[$$

2. Établir :

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2,\ A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

3. Montrer que l'opération Δ est associative dans $\mathscr{P}(E)$, c'est-à-dire :

$$\forall (A,B,C) \in (\mathscr{P}(E))^3, \qquad (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

✯ Résolution d'équations

Exercice 14 Résoudre les équations suivantes :

E1 : $2e^{2x} - e^x - 1 = 0.$
E2 : $x+1 = \sqrt{x+1}.$
E3 : $x-1 = \sqrt{x+1}$

Correction :

1. changement de variables : $Y = e^x$.
2. utiliser la méthode du cours : solution candidate, vérification.

Exercice 15 Résoudre les équations :

$$(E_1) \qquad \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$$
$$(E_2) \qquad \sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = x$$
$$(E_3) \qquad \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$
$$(E_4) \qquad \sqrt{17+8x-2x^2} + \sqrt{4+12x-3x^2} = x^2-4x+13$$

(utilisez la forme canonique)

---

1. (E_1) seule solution 23 par équivalence,
2. (E_2) pas de solution (par encadrement ou chercher une équation d'ordre 4, ou tableau de variation ?),
3. (E_3) solution $[5,10]$, en écrivant :

$$|\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}-3| = 1.$$

4. (E_4) seule solution 2 en écrivant :

$$\sqrt{25-2(x-2)^2} + \sqrt{16-3(x-2)^2} = 9 + (x-2)^2.$$

Exercice 16 On considère l'équation suivante :

$$3mx^2-(m^2+9)x+3m=0$$

où m désigne un paramètre réel. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation selon les valeurs de m.

Correction : Si $m\neq 0$ c'est une équation du second degré, on a :

$$\Delta_m=(m^2+9)^2-36m^2=(m^2+6m+9)(m^2-6m+9)=(m+3)^2(m-3)^2=(m^2-9)^2$$

On voit donc que $\forall m\in\mathbb{R}^*, \Delta_m\geqslant 0$, avec de plus Δ_m est nul si $m=3$ ou $m=-3$.

De plus les solutions sont :

$$x_1=\frac{(m^2+9)+m^2-9}{6m}=\frac{m}{3}\qquad x_2=\frac{(m^2+9)-m^2+9}{6m}=\frac{3}{m}.$$

Dans le cas $m=3$ ou $m=-3$ ces deux solutions sont confondues.

Dernier cas si $m=0$, l'équation s'écrit : $9x=0$ soit $x=0$.

Conclusion :

$$\mathscr{S}_0=\{0\}\qquad \forall m\in\mathbb{R}^*,\ \mathscr{S}_m=\left\{\frac{m}{3},\frac{3}{m}\right\}$$

Exercice 17 Résoudre les équations

$$(1):\ x^2+2mx+1=0\qquad (2):\ e^x+me^{-x}-m-1=0,$$

en fonction du paramètre m.

Correction : (1) est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta_m=4m^2-4=4(m-1)(m+1)$. Ainsi, si $m\in]-1,1[$ l'équation n'a pas de solution, sinon les solutions sont :

$$x_1=\frac{-2m+2\sqrt{(m-1)(m+1)}}{2}=-m+\sqrt{(m-1)(m+1)}$$

$$x_2=-m-\sqrt{(m-1)(m+1)}.$$

Si $m=1$ ou -1 les deux solutions sont confondues.

(2) Soit x solution, alors x est solution de $e^{2x}-(m+1)e^x+m=0$. On pose alors : $X=e^x$, et on voit que X est solution d'une équation de degré 2 : $X^2-(m+1)X+m=0$. Cette équation a pour discriminant :

$$\Delta=(m+1)^2-4m=m^2-2m+1=(m-1)^2.$$

Ainsi, on a les solutions (dans le cas où $m=1$ les deux solutions sont confondues).

$$X_1=\frac{(m+1)+m-1}{2}=m\qquad X_2=\frac{(m+1)-m+1}{2}=1.$$

Il y a donc deux valeurs possibles pour X.

De plus, si $m\leqslant 0$, l'équation $e^x=m$ n'a pas de solution.

Ainsi,

- Si $m>0$, il y deux valeurs candidates à être solution : $x_1=\ln m$ et $x_2=0$.
- Si $m\leqslant 0$, il n'y a qu'une valeur candidate : $x_2=0$.

Réciproquement, on voit que 0 et $\ln m$ est bien solution (si $m>0$). Ainsi :

$$\text{si } m>0,\ \mathscr{S}_m=\Big\{0,\ln m\Big\}\qquad \text{si } m\leqslant 0,\ \mathscr{S}_m=\Big\{0\Big\}.$$

Dans le cas $m=1$ les deux solutions sont confondues.

Exercice 18 Résoudre l'inéquation $\sqrt{x+1} \leqslant 2(x-2)$.

Équations et inéquations

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Le but de cette fiche est de résumer les méthodes permettant de résoudre une équation du type :

$$(E): \qquad f(x) = 0,$$

où f est une fonction réelle d'une variable réelle.

La première étape est de déterminer le **domaine de définition de l'équation**, qui sera le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

Éventuellement, l'énoncé peut préciser un domaine plus petit, sous la forme *Résoudre* (E) *sur l'intervalle* I, l'ensemble de définition est alors $\mathscr{D}_f \cap I$. Si aucun intervalle n'est précisé, il est sous-entendu que l'on cherche les solutions sur $\mathscr{D}_f$.

Une solution de l'équation (E) est une valeur $x \in \mathscr{D}_f$, qui vérifie $f(x) = 0$.

Résoudre l'équation, c'est déterminer une description simple de l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions. Ainsi :

$$[x \in \mathscr{D}_f \text{ et } f(x) = 0] \iff x \in \mathscr{S}.$$

Pour une résolution d'équation, on donnera toujours en conclusion l'ensemble solution.

Attention : Une équation peut n'avoir aucune solution !

Deux équations sont **équivalentes**, si elles ont le même ensemble de définition et le même ensemble de solution. On peut alors utiliser le symbole $\iff$ qui a bien un sens.

La difficulté est
- de ne pas oublier de solutions,
- d'être assuré que l'on a bien obtenu des solutions.

Il y a deux grandes méthodes de démonstration :
Par équivalence On raisonne en utilisant toujours des équations équivalentes.
Double implication On raisonne par condition nécessaire et condition suffisante.

La méthode par **équivalence** est plus rapide, plus élégante, mais facilement source d'erreurs.
Attention : on doit bien vérifier (et montrer au correcteur) que chaque équation est équivalente.

Une technique est de diminuer l'ensemble dans lequel on cherche les solutions : plutôt qu'utiliser l'ensemble de définition de $\mathscr{D}_f$, on remarque que l'on peut chercher les solutions dans un ensemble plus petit. Sur ce dernier ensemble, on peut simplifier plus facilement l'équation en une équation équivalente.

La méthode par **double implication** est plus longue et laborieuse, mais plus sûre :
- On considère x solution et on essaie de voir tout ce que l'on sait sur x dans le but de déterminer sa valeur. On obtient ainsi un ensemble E de **valeurs candidates** à être solutions de l'équation. On a $\mathscr{S} \subset E$ et E est généralement constitué de quelques valeurs.
- Dans un deuxième temps seulement, on vérifie que ces valeurs sont bien solutions. Notons en particulier que, pour que x soit solution, il faut que $x \in \mathscr{D}_f$, c'est une condition nécessaire, mais ce n'est pas une condition suffisante.
  On peut soit faire le calcul, soit reprendre les calculs précédents pour déterminer si l'on a ou non équivalence à chaque ligne

On peut donc comparer cela à une analyse-synthèse.

Il est très souvent plus facile de faire la double implication, surtout si l'équation à résoudre est compliquée.

Il est aussi important de commencer la résolution de l'équation en se demandant si on ne connaît pas une solution dite **solution évidente**. On pourra essayer, selon les cas, des petits entiers : 0,1,-1,2, et -2, ou des valeurs particulières (e, π).

⋆ Pièges classiques

On a : $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, mais la réciproque n'est vraie que si l'on a une indication sur le signe, puisque : $|a| = |b| \iff a^2 = b^2$.

On a : $x = y \Rightarrow \sin(x) = \sin(y)$, mais la réciproque n'est vrai que sur certains intervalles.

D'une manière générale, dans le cas d'une équation trigonométrique, le plus simple est de dessiner le cercle.

Enfin, attention aux fonctions qui ne sont pas définies partout, comme les logarithmes, les racines, ou d'une manière générale, les fractions rationnelles.

Par contre, on garde l'équivalence en utilisant :

- les résultats classiques comme les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$,
- toutes les simplifications par le calcul,
- Il arrive aussi que l'on utilise une inconnue auxilliaire, en posant par exemple $y = x^2$, il s'agit alors juste d'un changement d'inconnue. La conclusion ne doit plus faire apparaître cette inconnue

⋆ Inéquations

Les inéquations sont des équations du type :

$$(I) : \qquad f(x) > 0, \text{ ou } f(x) \geqslant 0.$$

Elles se résolvent de la même manière.

On utilise souvent l'équivalence pour résoudre une inéquation.

⋆ Équations qui dépendent d'un paramètres

Dernier point, on rencontre des équations (E_m) qui dépendent d'un paramètre m, soit de la fonction f_m, soit de l'ensemble sur lequel on résout l'équation.

On donnera alors l'ensemble des solutions en fonction du paramètre m, noté E_m. Il faudra peut-être distinguer plusieurs cas pour ce paramètre.

Si on considère l'équation d'inconnue x et de paramètre m : $(E_m) : \qquad x^2 = m$. On a :

- si $m > 0$: $\mathscr{S}_m = \left\{\sqrt{m}, \sqrt{-m}\right\}$,
- si $m = 0$: $\mathscr{S}_0 = \left\{0\right\}$,
- si $m < 0$: $\mathscr{S}_m = \emptyset$.

mais on ne doit pas écrire une solution du type $\mathscr{S} = \left\{\sqrt{m}, \sqrt{-m}, m \geqslant 0\right\}$.

Le paramètre ne doit par intervenir comme une solution.

⋆ Autre type d'équations

On peut aussi parler d'équations dont les solutions sont des fonctions (exemple les équations différentielles), des suites, etc. Par exemple, déterminer l'ensemble des suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n + n,$$

il s'agit alors de donner une autre écriture de cet ensemble.

On veillera à appliquer les mêmes techniques :

- résolution par équivalence ou solution candidate/vérification,
- écriture de l'ensemble des solutions.

⋆ Exemple 1

$$(E_1) \qquad \sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4} = 0.$$

On voit clairement que l'équation est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puis :

$$\begin{aligned}
\sin(x)^2 - \sin(x) + \frac{1}{4} &\iff \left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\
&\iff \sin(x) = \frac{1}{2} \\
&\iff \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \textbf{ ou } \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)
\end{aligned}$$

(on peut éventuellement utiliser une inconnue auxiliaire : $X = \sin(x)$, mais cela n'est qu'une commodité d'écriture).

D'où

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ici on a pu procéder par équivalence, puisqu'on peut bien passer d'une équation à une autre.

⋆ **Exemple 2**

$$(E_2) \qquad \sqrt{x+2} = x - 4.$$

L'équation est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + 2 \geqslant 0$. Ainsi, $\mathscr{D}_f = [-2, +\infty[$. Considère x solution de E_2, on a donc :

$$\begin{aligned}
(E_2) \quad &\text{donc} \quad x + 2 = x^2 - 8x + 16 \\
&\text{donc} \quad x^2 - 9x + 14 = 0
\end{aligned}$$

On a $\Delta = 25$, d'où $\delta = 5$. D'où $x = (7 \textbf{ ou } 2)$. On a donc deux valeurs candidates.

Réciproquement, ces deux valeurs sont bien dans l'ensemble de définition, mais seul 7 est solution mais pas 2. D'où $\mathscr{S}_2 = \{7\}$.

On voit ici que l'on a perdu l'équivalence lorsque l'on a élevé les deux membres de l'équation au carré.

Voici le même exercice avec équivalence :

L'équation est définie sur $\mathscr{D}_f = [-2, +\infty[$, mais on constate que si x est solution, $x - 4 \geqslant 0$. On peut donc chercher des solutions sur $[4, +\infty[$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(E_2) &\iff \begin{cases} \sqrt{x+2} = x - 4. \\ x \geqslant 4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2 = (x-4)^2 \\ x \geqslant 4 \end{cases} && \text{car les deux membres sont positifs !} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - 9x + 14 = 0 \\ x \geqslant 4 \end{cases} && \text{même calcul} \\
&\iff \begin{cases} x = 7 \text{ ou } x = 2 \\ x \geqslant 4 \end{cases} \iff x = 7.
\end{aligned}$$

⋆ **Exemple 3**

$$(E_3) \qquad \sqrt{x+4} = x - 1,$$

L'équation est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + 4 \geqslant 0$, ainsi $\mathscr{D}_f = [-4, +\infty[$. Soit x solution, on a alors :

$$\begin{aligned}
x \text{ vérifie } (E_3) \text{ donc } &x + 4 = x^2 - 2x + 1 \\
\text{donc } &x^2 - 3x - 3 = 0
\end{aligned}$$

On a $\Delta = 21$, d'où $\delta = \sqrt{21} = \sqrt{3}\sqrt{7}$. D'où

$$x = \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2} \textbf{ ou } \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \right).$$

On a donc deux valeurs candidates. Réciproquement, il n'est pas facile de vérifier sans calculette si ces valeurs conviennent. Il est clair que ces deux valeurs vérifient : $(x-1)^2 = x+4$, mais pas (E_3). L'équivalence à été perdue au moment de l'élévation au carré.

Notons tout d'abord $x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Déjà $x \geqslant 0$, donc en particulier $x+4 \geqslant 0$ et x est bien dans l'ensemble de définition. Ensuite,

$$x = 1 + \frac{1+\sqrt{21}}{2} \geqslant 1, \text{ d'où } x-1 \geqslant 0.$$

On sait que : $(x-1)^2 = x+4$. Comme on a $(x-1) \geqslant 0$ et $x+4 \geqslant 0$, on peut utiliser

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \texttt{ avec } a \geqslant 0 \texttt{ et } b \geqslant 0, a^2 = b^2 \Rightarrow a = b,$$

on obtient $\sqrt{x+4} = (x-1)$. Donc x est bien solution.

Pour la deuxième valeur, notons maintenant $x = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Déjà

$$x+4 = \frac{11-\sqrt{21}}{2} = \frac{\sqrt{121}-\sqrt{21}}{2} \geqslant 0,$$

et x est bien dans l'ensemble de définition. Par contre, $x-1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2} < 0$, donc il est sûr que $\sqrt{x+4} \neq (x-1)$.

En conclusion,

$$\mathscr{S}_3 = \left\{ \frac{3+\sqrt{21}}{2} \right\}.$$

De la même manière, on peut choisir de raisonner par équivalence L'équation est définie sur $\mathscr{D}_f = [-4, +\infty[$, mais on constate qu'il ne peut y avoir de solutions si $x-1 < 0$. On cherche donc des solutions $x \geqslant 1$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
(E_3) &\iff \begin{cases} \sqrt{x+4} = x-1, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+4 = x^2-2x+1 \\ x \geqslant 1 \end{cases} && \text{car les deux membres sont positifs} \\
&\iff \begin{cases} x^2-3x-3 = 0 \\ x \geqslant 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2} \textbf{ ou } \frac{3-\sqrt{21}}{2} \right) \\ x \geqslant 1 \end{cases} \\
&\iff x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}
\end{aligned}$$

⋆ **Exemple 4**

$$(E_4): \qquad \sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5},$$

L'équation est définie si $x-1 \geqslant 0$ et $x+4 \geqslant 0$, *i.e.* $x \geqslant 1$.

Déjà, on remarque que $x = 1$ est solution.

D'autre part, soit $x > 1$, alors $x+4 > 5$, d'où $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} > \sqrt{5}$, en particulier x n'est pas solution.

Conclusion, $\mathscr{S}_4 = \{1\}$.

⋆ **Exemple 5**

$$(E_5) \qquad \sqrt{2x-3} - \sqrt{x+2} < 0.$$

L'inéquation est définie si $2x-3 \geqslant 0$ et $x+2 \geqslant 0$, *i.e.* $x \geqslant \frac{3}{2}$.

Dans ce cas, on a $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+2} > 0$, et donc on peut multiplier l'inégalité par cette quantité :

$$\begin{aligned}
(E_5) &\iff 2x-3-(x+2) < 0 \\
&\iff x-5 < 0 \\
&\iff x < 5
\end{aligned}$$

Ainsi $S = \left[\frac{3}{2}, 5\right[$.

Notation somme et produit

Pelletier Sylvain — PC, Lycée Descartes

✯ Définition

La notation **somme** correspond à additionner une famille de nombres : si $(a_k)_{k=1\dots n}$ est une famille de n éléments (réels, entiers, complexes, etc.), on note :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots a_n = \sum_{k=1\dots n} a_k = \sum_{k\in[\![1,n]\!]} a_k$$

Le terme a_k est appelé **terme général** de la somme.

R Une somme du type $\sum_{k=p}^{n} a_k$ avec $p > n$ ne contient pas de terme. Par convention cette somme est alors nulle.

Cette notation s'étend naturellement à tout ensemble fini E. Par exemple :

$$\sum_{k\in[\![1,n]\!],\ k \text{ pair}} \frac{1}{k+1} \qquad \text{somme sur les entiers pairs de } [\![1,n]\!].$$

On peut aussi écrire :

$$\sum_{l=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{2l+1}$$

mais aucune autre écriture n'est possible.

✯ Manipulation

- Cette somme ne dépend pas de k (mais dépend de n) . Ainsi,

  $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{l=1}^{n} a_l.$$

  La variable est donc **muette**.
- Lorsqu'on manipule les sommes, il est important de garder en tête quel est le **premier terme**, le **dernier terme** et le **nombre de termes**.
  La somme $\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k$ contient $n_1 - n_0 + 1$ termes. En particulier :
  - une somme de 0 à n contient $n+1$ termes,
  - tandis qu'une somme de 1 à n contient n termes.

  En cas de doute, il faut revenir à la définition avec $\dots$, et/ou utiliser des valeurs de n petites.
- Il peut y voir des constantes dans le terme général, par exemple dans la formule :

  $$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k,$$

  on voit que la somme de la puissance de a et celle de b fait $n-1$. Ce qui aide à vérifier les calculs lorsqu'on manipule les sommes.
  Par exemple, si on veut faire le changement de variable $j = n-1-k$, soit $k = n-1-j$, on obtient :

  $$a^n - b^n = (a-b)\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j}.$$

  On constate qu'on a le même invariant.

- L'ordre dans lequel on fait la somme n'intervient pas.
  On peut par exemple sommer en partant de la fin :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$$

  Il peut donc être intéressant d'organiser les termes d'une certaine manière.
- On peut aussi sommer tous les termes pairs puis tous les termes impairs. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} \\
&= a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \\
&= \sum_{k\in[\![0,2n]\!],\ k \text{ pair}} a_k + \sum_{k\in[\![0,2n]\!],\ k \text{ impair}} a_k
\end{aligned}$$

- Lorsqu'une formule faisant intervenir des sommes est vraie pour toute valeur d'une variable n, on n'oubliera pas que l'on peut l'utiliser en remplaçant n par $n-1$, $n+1$ etc.
  Par exemple de

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

  on peut déduire en remplaçant n par $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- Si le premier terme est nul, on peut l'enlever de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k.$$

- On a :

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

  mais

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \neq (\sum_{k=1}^{n} a_k)(\sum_{k=1}^{n} b_k).$$

  Par contre, on peut factoriser dans une somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$.
  Attention : on ne peut factoriser par λ que parce que λ ne dépend pas de k.
- Si $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $a_k = a$ *i.e.* a_k ne dépend pas de k, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a = na$, puisque cela revient à ajouter n fois la valeur a.

  En particulier, il faut faire attention aux noms des indices : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_j = na_j$, puisque la somme se fait sur j et non sur k.

⋆ Changement de variable

Pour faire un changement de variable dans une somme $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k$, il faut :

- exprimer k' en fonction de k et n (en écrivant on pose : $k' = \ldots$), puis exprimer k en fonction de k' et n (idem).
- trouver les bornes n'_0 et n'_1, telles que, à un $k \in [\![n_0, n_1]\!]$ correspond un et un seul $k' \in [\![n'_0, n'_1]\!]$ et réciproquement,
- faire le changement de variable dans a_k.

Les deux principaux changements de variables qu'il faut savoir faire sont :

Inverser l'ordre $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}$.

Décalage $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{p=0}^{n-1} a_{p+1} = \sum_{l=2}^{n+1} a_{l-1}$.

On peut aussi décaler de plus de 2 termes, etc.

✯ Somme télescopique

Voici une technique de calcul de somme à connaître.

Si on veut calculer : $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}$. On peut utiliser : $\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Ce qui fait que :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Si on veut obtenir le même résultat avec la notation $\sum$, on pose dans la première somme $k' = k-1$, soit $k = k'+1$, le nouvel intervalle devient alors $[\![1, n-1]\!]$, et on a alors (en utilisant le fait que la variable est muette, et que l'on peut par conséquence revenir à une somme sur k) :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k'=1}^{n-1} \frac{1}{k'} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

les termes pour k allant de 2 à n s'annulant.

R La démonstration avec … est à connaître, mais il vaut mieux rédiger avec le changement de variables.

La somme est dite **télescopique**, car un terme sur deux s'annule.

Exercice 1 Soit (u_k) une liste d'éléments de $\mathbb{C}$, calculez :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (u_k + u_{k+1}).$$

✯ Somme avec double indices

Si on a un tableau à n lignes et m colonnes de réels, soit $n \times m$ éléments on peut on peut considérer la somme de tous ces termes :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ 1 \leqslant q \leqslant m}} u_{p,q},$$

qui est la somme des éléments du tableau

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,m} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{p,1} & u_{p,2} & u_{p,q} & u_{p,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & u_{n,q} & u_{n,m} \end{bmatrix}$$

Cette somme peut être obtenue en sommant d'abord sur les lignes, puis sur les colonnes, ou l'inverse. Ce qui s'écrit :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ 1 \leqslant q \leqslant m}} u_{p,q} = \sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \left(\sum_{1 \leqslant q \leqslant m} u_{p,q} \right) = \sum_{1 \leqslant q \leqslant m} \left(\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} u_{p,q} \right)$$

Le but est évidement de pouvoir « *séparer* » $u_{p,q}$ par exemple en une partie qui dépend de p et une partie qui ne dépend pas de p, que l'on pourra sortir de la somme.

■ **Exemple III.4** On veut calculer

$$\sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant 5 \\ 1 \leqslant q \leqslant 10}} (p + pq).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant 5 \\ 1 \leqslant q \leqslant 10}} (p + pq) &= \sum_{1 \leqslant p \leqslant 5} \sum_{1 \leqslant q \leqslant 10} (p + pq) = \sum_{1 \leqslant p \leqslant 5} \sum_{1 \leqslant q \leqslant 10} p(1 + q) \\ &= \sum_{1 \leqslant p \leqslant 5} p \sum_{1 \leqslant q \leqslant 10} (1 + q) \\ &= \sum_{1 \leqslant p \leqslant 5} p \sum_{2 \leqslant q \leqslant 11} q = \sum_{1 \leqslant p \leqslant 5} p \left(\frac{11 \times 12}{2} - 1 \right) \\ &= \sum_{1 \leqslant p \leqslant 5} 65p = 65 \sum_{1 \leqslant p \leqslant 5} p = 65 \frac{5 \times 6}{2} = 65 \times 15 = 975 \end{aligned}$$

Une autre manière de faire le calcul est :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant 5 \\ 1 \leqslant q \leqslant 10}} (p + pq) &= \sum_{1 \leqslant q \leqslant 10} \sum_{1 \leqslant p \leqslant 5} (p + pq) = \sum_{1 \leqslant q \leqslant 10} \sum_{1 \leqslant p \leqslant 5} p(1 + q) \\ &= \sum_{1 \leqslant q \leqslant 10} (1 + q) \sum_{1 \leqslant p \leqslant 5} p = \dots \end{aligned}$$

■

En inversant l'ordre de sommation, on obtient deux expressions différentes de la même quantité. Ce qui permets d'obtenir des résultats.

⋆ Somme triangle

On peut aussi considérer une liste de réels $u_{p,q}$ définie pour $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$ *i.e.* un « triangle » de nombres. Et la somme sur cette liste :

$$\sum_{1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n} u_{p,q}.$$

Il faut imaginer que l'on fait une somme sur un « *demi-tableau* du type :

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

De même, on peut sommer sur les lignes puis sur les colonnes ou l'inverse :

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant q\leqslant n} u_{p,q} = \sum_{1\leqslant p\leqslant n}\left(\sum_{p\leqslant q\leqslant n} u_{p,q}\right) = \sum_{1\leqslant q\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant p\leqslant q} u_{p,q}\right)$$

Plutôt que de retenir par cœur ces formules, il est plus simple de dessiner un tableau contenant une croix lorsqu'un terme existe. On retrouve alors facilement les bornes. Il est important de noter aussi que $p \leqslant q$ ce qui se retrouve sur toutes les formules.

Une technique différentes : Une autre technique revient à se ramener à une somme double sur sur $n \times n$ éléments complétée par des zéros.

En effet en cas de doute, on peut écrire :

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant q\leqslant n} u_{p,q} = \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ 1\leqslant q\leqslant n}} u_{p,q}\mathbb{1}_{p\leqslant q}$$

Où $\mathbb{1}_{p\leqslant q}$ est une fonction de p et q qui vaut 1 si $p \leqslant q$, 0 sinon. Cette technique permet de se ramener à des sommes doubles.

■ **Exemple III.5**

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant p\leqslant q\leqslant 10} pq &= \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant 10\\ 1\leqslant q\leqslant 10}} pq\mathbb{1}_{p\leqslant q} = \sum_{1\leqslant q\leqslant 10}\ \sum_{1\leqslant p\leqslant 10} pq\mathbb{1}_{p\leqslant q} = \sum_{1\leqslant q\leqslant 10}\sum_{1\leqslant p\leqslant q} qp\\ &= \sum_{1\leqslant q\leqslant 10} q \sum_{1\leqslant p\leqslant q} p = \sum_{1\leqslant q\leqslant 10} q\frac{q(q+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant q\leqslant 10}(q^3+q^2)\end{aligned}$$

■

■ **Exemple III.6** On veut calculer : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}$.

Il s'agit d'une somme triangle : on somme sur l'ensemble des couples (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tels que $i \geqslant j$, *i.e.* la sous-diagonale. Si on travaille par colonne, c'est-à-dire que l'on calcule

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i} = \sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}$$

on ne peut s'en sortir, parce qu'à j fixé, on ne sait pas faire la somme $\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}$.

Au contraire, si on travaille par ligne, la situation s'éclaire :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{n(n+1)}{4}+\frac{n}{2}.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple III.7** Voici un exemple à connaître faisant appel à la notion d'espérance :

$$\begin{aligned}E(X) &= P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+\dots nP(X=n)\\ &= P(X=1)\\ &+ P(X=2)+P(X=2)\\ &+ P(X=3)+P(X=3)+P(X=3)\\ &+ \vdots\\ &+ P(X=n)+P(X=n)+\dots+\dots+P(X=n)\\ &= P(X>0)+P(X>1)+P(X>2)+\dots+P(X>n-1)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}P(X>k).\end{aligned}$$

Ou de manière rigoureuse :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 1P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{j\leqslant k}P(X=k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{j\leqslant k}P(X=k) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} P(X=k) = \sum_{j=1}^{n} P(X\geqslant j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} P(X\geqslant j+1) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X>j)
\end{aligned}$$

■

✯ Autres notations similaires

La notation produit est la même :

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Cela permet entre autre de définir la factorielle.

Si $A_1, \dots A_n$ sont n sous-ensembles de E, on définit la réunion des ensembles $(A_i)_{i=1\dots n}$:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x\in E|\ \forall i = 1\dots n,\ x\in A_i\}.$$

Et l'intersection des ensembles $(A_i)_{i=1\dots n}$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x\in E|\ \exists i = 1\dots n,\ x\in A_i\}.$$

Exercice 2

- Comparer $\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$ et $\prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k$,
- Comparer $\prod_{k=1}^{n} a_k b_k$ et $(\prod_{k=1}^{n} a_k)(\prod_{k=1}^{n} b_k)$,
- Simplifier $\prod_{k=1}^{n} \lambda a_k$,

Exercice 3 Calculer $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

R De même que pour les somme, on a : $\prod_{k=p}^{n} a_k$ qui vaut 1 si $p>n$.

✯ Algorithmique : calcul d'une somme en Python

Pour calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ avec un ordinateur, on utilise la formule de récurrence : $S_n = S_{n-1} + a_n$ avec $S_0 = 0$. Ainsi :

- on initialise une variable S à 0, S contient la valeur de S_n.
- on utilise une boucle `for`, et
- on utilise l'opération S = S + ... pour ajouter un terme.

Par exemple pour calculer $\sum_{k=1}^{20} k^2$ on fait :

```
S=0
for k in range(1,21) :
  S += k**2
```

⋆ **Exemples**

Calculer les sommes pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij, \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{j-1} ij, \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j), \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(i+j), \qquad \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 2^{i+j}, \qquad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} i.$$

⋆ **Lien somme et somme double**

Le produit de deux sommes est une somme double :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{\substack{j=1\ldots m\\ i=1\ldots n}} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j$$

en particulier :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} a_i a_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!],\ i\neq j} a_i a_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j\end{aligned}$$

⋆ **Sommes usuelles**

Voici une petite liste des sommes que vous devez savoir calculer :

Somme des termes d'une suite arithmétique

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

On a aussi :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Somme des termes d'une suite géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nbr de termes}}}{1-\text{raison}} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Newton

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

2 — Nombres entiers, réels et rationnels

Dans ce chapitre, on introduit quelques généralités et notations qui nous serviront toute l'année.

I L'ensemble $\mathbb{N}$ et le principe de récurrence

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : 0,1, etc.
On utilise les **intervalles d'entiers** :

$$\begin{aligned}[\![a,b]\!] &= [a,b]\cap\mathbb{N}\\ &= \left\{a, a+1, ..., b-1, b\right\}\\ &= \left\{k\in\mathbb{N} \middle| a\leqslant k\leqslant b\right\}.\end{aligned}$$

Attention, on n'écrit pas $[ab[|$ ni $[|a+\infty[|$.

I.1 Récurrence simple

L'axiome le plus important de l'ensemble $\mathbb{N}$ est le principe de récurrence, que l'on peut formaliser ainsi :

Définition I.1 — Entiers naturels. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble E tel que $0\in E$ et tel que $n\in E \Rightarrow n+1\in E$.

Ce que veut dire cette définition c'est que l'ensemble $\mathbb{N}$ est directement lié au principe de récurrence :

Théorème I.1 — Démonstration par récurrence. Si $P(n)$ est un proposition tel que :
- $P(0)$ est vrai,
- $\forall n\in\mathbb{N},\ P(n)\Rightarrow P(n+1)$,

Alors $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, si on considère l'ensemble E des n tel que $P(n)$ est vrai. 0 est élément de cet ensemble, et $n \in E \Rightarrow n+1 \in E$, d'où $\mathbb{N} \subset E$.

Pour rédiger une récurrence, on ferra bien apparaître :

- *ce que l'on veut démontrer*, et indiquer la variable sur laquelle on fait la récurrence (ce n'est pas toujours évident).
  On écrit donc : « *Montrons par récurrence sur n que* $\forall n \in \mathbb{N}, \ldots$ »,
- La proposition $P(n)$ (attention, celle-ci dépends de n, et donc ne contient pas le « $\forall n \in \mathbb{N}$ »).
  On écrit donc : « *Pour $n \in \mathbb{N}$, On note $P(n)$:* $\ldots$ »,
- l'*initialisation* (cas $n = 0$).
  On conclue cette partie par « *D'où l'initialisation* » ou d'où $P(0)$.
- l'*hérédité* : on considère n fixé tel que $P(n)$ est vrai et on montre $P(n+1)$.
  En cas de doute, ne pas hésiter à écrire la proposition $P(n+1)$.
  On indique en particulier l'endroit où l'hypothèse $P(n)$ intervient. On écrit donc en cours de raisonnement : « *D'après l'hypothèse de récurrence* ».
  On conclue par « *D'où l'hérédité* ».
- la *conclusion*.
  On écrit : « *D'après le principe de récurrence, on obtient donc :* $\forall n \in \mathbb{N}, \ldots$ ».

R **Rappel :** les abréviations sont à éviter dans une copie. On évite donc d'écrire $\boxed{\text{I}}$ à la place d'initialisation, $\boxed{\text{HR}}$ à la place d'hypothèse de récurrence, etc, même si cela sera systématiquement utilisé en TD et dans les corrections.

✯ Un exemple de récurrence

■ **Exemple I.1** **Montrons par récurrence** sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. ■

Démonstration. On note pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$P(n) : \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation : Lorsque $n = 0$, on a : $\frac{n(n+1)}{2} = 0$ et $\sum_{k=0}^{n} k$ ne contient que le terme pour $k = 0$. D'où $P(0)$.

Hérédité : Soit n fixé, tel que $P(n)$ est vrai, montrons $P(n+1)$, c'est-à-dire :

$$\text{Mq} : \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{en utilisant HR} \\ &= \frac{n^2+n+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

D'où l'hérédité.

Conclusion : On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. ■

✯ Choix de la propriété récursive

Attention : On voit souvent dans les copies l'erreur de rédaction :

$$\text{On démontre : } P(n) : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Le problème est qu'une proposition du type : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \dots$ ne dépend pas de n ! Il faut écrire :

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, on démontre par récurrence que cette propriété est vrai pour $n \in \mathbb{N}$.

De même, on ne peut pas définir une propriété $P(n)$ qui dépends de la suite des valeurs et non d'une valeur particulière. Ainsi, on ne peut pas définir :

$$P(n) : \quad (a_n) \text{ est croissante}$$
$$P(n) : \quad (a_n) \text{ est constante}$$

car ces propositions concernent la suite (a_n) entière et ne dépendent pas de n.

Enfin, sauf en de rares exceptions, *on ne démontre pas par récurrence une propriété récursive*. Autrement dit, la proposition $P(n)$ doit concerner « le rang n » et non « les rangs n et $n+1$ ».

Exercice 1 Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Les formules pour $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3$ sont à connaître.

Exercice 2 Une suite u_n est dite **géométrique** de raison q si $u_{n+1} = qu_n$. Montrer que dans ce cas : $u_n = u_0 q^n$, et que si $q \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Exercice 3 Une suite u_n est dite **arithmétique** de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$. Montrer que dans ce cas $u_n = u_0 + nr$, et que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = nu_0 + r\frac{n(n-1)}{2}$$

I.2 Variantes de la récurrence

Différentes variantes existent :

- on peut initialiser à partir d'un n_0 plutôt que de 0, on montre alors que la proposition est vraie pour tout n supérieur à n_0,
- on peut utiliser un proposition $P(n)$ de la forme « $Q(n)$ et $Q(n-1)$ » (**récurrence double**),
- on peut utiliser un proposition $P(n)$ de la forme « $\forall k \leqslant n,\ Q(k)$ » (**récurrence forte**).

Cela correspond aux propositions

Proposition I.2 — Variantes de la récurrence.

Récurrence à partir de n_0 Si un proposition $P(n)$ vérifie :

- $P(n_0)$ est vraie,
- $\forall n \geqslant n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$,

alors $\forall n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

Récurrence double Si un proposition vérifie :

- $P(0)$ est vraie, $P(1)$ est vraie
- $\forall n \geqslant 0, [P(n)\ \textbf{et}\ P(n+1)] \Rightarrow P(n+2)$,

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Récurrence forte Si un proposition vérifie :

- $P(0)$ est vraie,
- $\forall n \geqslant 0, [P(0)\ \textbf{et}\ P(1)\ \textbf{et}\ \ldots \textbf{et}\ P(n)] \Rightarrow P(n+1)$,

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. C'est en fait des conséquences de la récurrence simple en utilisant des proposition composée. ∎

■ **Exemple I.2** Soit la **suite de Fibonacci** (F_n) définie par :

$$F_1 = 1 \qquad F_2 = 1 \qquad \forall n \geqslant 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Montrer que :

$$\forall n > 0,\ F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

■

Démonstration. On voit qu'on ne peut pas utiliser une récurrence classique parce qu'il nous faut des hypothèses sur F_n et F_{n-1}. On va donc faire une récurrence double à partir du rang 1 sur la proposition $P(n)$: $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Initialisation : On a : $F_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)$, et $F_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$. Donc $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies

Hérédité : Soit n fixé, tel que $P(n)$ et $P(n+1)$, et montrons $P(n+2)$.

On a : $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, d'où en utilisant les hypothèses de récurrence , on a :

$$\begin{aligned} F_{n+1} &< \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^n (1 + \frac{7}{4}) \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^n \frac{11}{4} \end{aligned}$$

puis comme

$$\frac{11}{4} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2,$$

on a $F_{n+2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$. D'où l'hérédité.

Conclusion : On a montré : $\forall n > 0,\ F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$. ■

■ **Exemple I.3** Montrons que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que : $n = 2^k(2q+1)$. Ce qui signifie que tout $n \geqslant 1$ s'écrit comme une puissance de 2 multiplié par un nombre impair. ■

Démonstration. On utilise la récurrence forte sur

$$P(n) :\ \exists k \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N},\ n = 2^k(2q+1)$$

Initialisation : Déjà, $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$, d'où la propriété est vrai au rang 1, avec $k = 0$ et $q = 0$.

Hérédité : Soit n fixé, tel que $[P(1)$ **et** $P(2)$ **et**...**et** $P(n)]$ sont vraies, et on prend $n \geqslant 1$.

Ensuite lorsqu'on regarde le rang $n+1$, deux cas sont possibles : soit n est pair, soit n est impair.

- si n est pair, on sait $\exists l \in \mathbb{N}, n = 2l$, et donc $n+1 = 2l+1 = 2^0(2l+1)$, d'où $P(n+1)$ avec $k = 0$ et $l = 1$. (l'hypothèse de récurrence n'intervient pas ici).
- Si n est impair, alors on sait $\exists l \in \mathbb{N}, n = 2l+1$, et donc $n+1 = 2l+2 = 2(l+1)$. L'hypothèse qu'il nous faut est $P(l+1)$, pour ce l (inconnu par avance). Comme $l+1 < n$ (car $n = 2l+1$), $P(l+1)$ est vraie par hypothèse de récurrence. On peut donc trouver k', et q' tel que : $l+1 = n = 2^{k'}(2q'+1)$, puis $n+1 = 2^{k'+1}(2q'+1)$. Et donc le résultat pour $k = k'+1$ et $q = q'$.

Dans les deux cas, on a le résultat et donc on a l'hérédité.

Conclusion : On a montré $\forall n \geqslant 1,\ \exists k \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N},\ n = 2^k(2q+1)$. ■

II Binôme de Newton

II.1 Factorielle

Définition II.1 Soit $n \in N$, on appelle factorielle n et on note $n!$, le nombre entier

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \dots (n-1)n.$$

La factorielle est une fonction clairement récurrente $n!$ est défini rigoureusement par :

$$\begin{cases} 1! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ n! = n(n-1)! \end{cases}.$$

On pose généralement par convention que $0! = 1$, pour garder $(n+1)! = n \times n!$.

R La définition des factorielles étant récursive, on utilise souvent la récurrence lorsqu'on travaille avec les factorielles.

La fonction factorielle sert pour les dénombrements : $n!$ est le nombre de permutations possibles de n objets.
Par exemple, si on veut placer n objet dans n cases (chaque case contenant un et un seul objet),
- on a : n possibilités pour le premier objet,
- on a : $n-1$ possibilités pour le deuxième objet, etc,
- on a : 1 pour le dernier objet.

D'où $n!$ rangements possibles (ce raisonnement deviendra du cours).

II.2 Coefficients binomiaux

Définition II.2 — arrangements. Pour $n \in \mathbb{N}$, et pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on définit **les arrangements** de k éléments parmi n par :

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

R C'est le produit des k entiers en partant de n : n, $n-1$, etc.

En dénombrements, les arrangements de k éléments parmi n correspondent aux nombres de possibilités d'extraire k boules parmi n successivement et sans remise :

- On a n choix pour la première boule,
- on a : $n-1$ pour la deuxième, etc.
- on a : $n-k+1$ pour la k-ième.

Définition II.3 — Coefficients binomiaux. Pour $n \in \mathbb{N}$, et pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on définit les combinaisons à k éléments parmi n par :

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Par convention si $k > n$ on pose $\binom{n}{k} = 0$.

R On a aussi la notation C_n^k pour $\binom{n}{k}$. C'est plutôt l'ancienne notation.

En dénombrements, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Ainsi, on tire « *en tas* » k jetons parmi n jetons, on a $\binom{n}{k}$ possibilités.

Proposition II.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $k \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Démonstration. Évident avec la définition ■

Ces propriétés ont des interprétations combinatoires :

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ signifie qu'il y a autant de tas à k éléments qu'à $n-k$ éléments,
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ signifie qu'il y a qu'un seul tas vide et qu'un seul tas à n éléments,
- $\binom{n}{1} = n$ signifie qu'il y a n tas à un seul élément,

Proposition II.2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Propriété que l'on écrit souvent sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Démonstration. On utilise la définition :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\ &= \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}\\ &= \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

■

R **À retenir :** dans la définition des binomiaux avec les factoriels, en « bas à gauche » c'est la « distance » entre n et k qui intervient. C'est bien sûr la même distance qu'entre $n-1$ et $k-1$.

⋆ Triange de Pascal

Proposition II.3 — Triangle de Pascal. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

✎ Cette propriété est importante en particulier pour utiliser les binomiaux dans une récurrence : les termes d'une ligne s'obtienne à partir de la ligne précédente.

R **Attention :** À priori, on ne peut appliquer cette formule qu'avec $k < n$ (pour que $\binom{n}{k+1}$ soit bien défini).

On l'applique ici en *complétant le triangle de Pascal avec des zéros*, *i.e.* en considérant que si $k > n$ $\binom{n}{k} = 0$. Cette convention est au programme.

Démonstration. Si $k = n$, c'est évident, sinon on a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\Big(k+1+n-k\Big) \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}n+1 \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}
\end{aligned}$$

■

Interprétation : On peut construire les coefficients binomiaux à partir du triangle de Pascal, comme montré sur la figure 2.1

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

TABLE 2.1 – Triangle de pascal

⋆ Algorithme de construction du triangle de Pascal

On veut construire un tableau contenant les valeurs de coefficients binomiaux $\binom{i}{j}$ avec la propriété de Pascal qui indique que la valeur contenue dans la case (i, j) est égale à la somme de celle contenue dans la case $(i-1, j)$ et de celle de la case $(i-1, j-1)$.

```
def Pascal(N) :
  """
  entrée: N = entier
  sortie: tab = tableau de N+1xN+1 entiers
  tab contient les coefficients binomiaux (i parmi j)
  pour i et j = 0 ... n
  en utilisant la propriété de Pascal
  """
  # crée un tableau d'entiers avec des 0
  tab = zeros( (N+1,N+1), int)
  for i in range(N+1) :
    tab[i,0] = 1 #première colonne
    for j  in range(1,i+1) :
      #la case (i,j) est obtenue en faisant
      #la somme des cases N et NO
      tab[i,j] = tab[i-1,j-1] + tab[i-1,j]
```

```
    return(tab)
```

II.3 Binôme de Newton

Un des intérêts majeurs des combinaisons résident dans la formule du binôme de Newton, cette formule permet de **développer** des expression algébriques, c'est-à-dire de passer d'une forme réduite à une forme pleine.

Théorème II.4 — Binôme de Newton. Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

En particulier, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Newton par récurrence. Pour $n = 0$, on a : $(a+b)^0 = 1$ et la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ est réduite à $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. D'où l'initialisation.

Supposons la propriété vraie au rang n. On a alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{d'après HR.}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

On fait un changement de variable : $k' = k+1$ dans la deuxième somme, soit $k = k'-1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n+1-k'} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0} a^0 b^{n+1}}_{k=0} + \underbrace{\binom{n}{n} a^{n+1} b^0}_{k=n+1}
\end{aligned}$$

Avec la propriété de Pascal, les coefficients binomiaux se simplifient.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}}_{\text{terme } k=0} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0}_{\text{terme } k=n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

D'où l'hérédité.
En conclusion, d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Comme a et b sont quelconques, on a bien démontré :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

■

R Il est important de voir que l'on a aussi : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (en échangeant a et b). On peut donc « *mettre le k* » sur le a ou sur le b. On choisira donc systématiquement la forme qui permet de faciliter les calculs.

Cette proposition est importante, et a beaucoup d'applications. On s'en servira toute l'année.

✎ On voit en particulier que $(1+x)^n$ est un polynôme en x de degré n, dans lequel tous les monôme x^k interviennent avec des coefficients entiers positifs.

✎ Autre cas particulier, en remplaçant b par $-b$, on a :

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-1)^k b^k$$

qui est une autre formule à connaître : pour développer $(a-b)^n$, on procède comme $(a+b)^n$ sauf que l'on alterne les signes.

Exercice 4 Développer $(a+b)^3$.

Exercice 5 Développer $(1+\sqrt{3})^4$ et $(1-\sqrt{3})^4$. En déduire que $A = (1+\sqrt{3})^4 + (1-\sqrt{3})^4$ est un entier.

III Factorisation

La **factorisation** est l'opération inverse : elle permet de passer d'une forme développe à une forme réduite. C'est une opération plus difficile que le développement.

On peut parfois factoriser si on reconnaît un développement par la méthode de Newton : par exemple $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Parmi les autres formules de factorisation à savoir il y a :

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\
(a-b)(a+b) &= a^2-b^2 \\
(a-b)(a^2-ab+b^2) &= a^3+b^3 \\
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3-b^3
\end{aligned}$$

Ces deux dernières se généralisent selon

Proposition III.1 Soient deux réels a et b et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
& a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots ab^{n-2}+b^{n-1}) \\
\text{soit} \quad & a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.
\end{aligned}$$

On peut aussi écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a^{n+1}-b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k.$$

Un cas particulier est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad x^{n+1}-1 = (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = (x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k,$$

Démonstration. Il suffit de développer le second membre.

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k+1}$$

On remarque ensuite que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k &= a^n + \quad a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1} \\
\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k+1} &= \qquad\quad a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1} \quad +b^n
\end{aligned}$$

En faisant la différence, on voit que le résultat fait $a^n - b^n$.

Pour le démontrer avec des manipulations de sommes, on doit faire des changements de variable :

Comme : $a^{n-1-k} = a^{n-(k+1)}$, on pose $k' = k+1$ dans la seconde somme, soit $k = k'-1$. On obtient alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k+1)}b^{k+1} = \sum_{k'=1}^{n} a^{n-k'}b^{k'}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^k \\ &= \underbrace{a^n}_{k=0} - \underbrace{b^n}_{k=n}.\end{aligned}$$

■

R Remarquons que dans la somme, la puissance de a additionnée à celle de b fait $n-1$: on incrémente la puissance de a et on décrémente la puissance de b.
On peut bien sûr inverser le rôle de a et b, ainsi on choisit « sur quel terme on met la puissance k ».
On peut aussi démontrer cette formule par récurrence.

La formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^{n+1} - 1 = (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = (x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k,$$

est une réécriture de la somme d'une suite de termes géométriques :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+x^2+x^3+\ldots x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{si } x \neq 1.$$

On peut d'ailleurs redémontrer la relation précédente en utilisant cette méthode :

Démonstration. Si $b = 0$, il est clair que $a^n - b^n = a^n$ et $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = a^{n-1}$. D'où la relation de manière évidente.

Si $b \neq 0$, on peut poser $x = \frac{a}{b}$. On a alors :

On sait que : $x^{n+1} - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k$

ce qui s'écrit : $\dfrac{a^{n+1}}{b^{n+1}} - 1 = \left(\dfrac{a}{b} - 1\right)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{-k}$

en multipliant par b^{n+1}, on obtient :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

Ce qui est bien la relation voulue. ■

Le cas $a^n + b^n$ est plus délicat à gérer : déjà si $n = 2$, il faut utiliser les nombres complexes pour avoir : $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$.

Rappel : si P est un polynôme et a une racine de P, *i.e.* $P(a) = 0$, alors on peut factoriser $P(X)$ par $(X-a)$. On reverra ce résultat en détail.

IV Valeur absolue, partie entière et applications

IV.1 Valeur absolue

Définition IV.1 — Valeur absolue. On appelle **valeur absolue** l'application :

$$|.| \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \max(x,-x) = \sqrt{x^2} \end{array} \right.$$

R La valeur absolue est donc tout le temps positive.

Proposition IV.1 — Deux propriétés intéressantes de la valeurs absolue. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \leqslant |x| \text{ et } -x \leqslant |x|.$$

Enfin, si x est un réel, on a l'équivalence :

$$|x| \leqslant M \iff x \leqslant M \text{ et } -x \leqslant M.$$

Démonstration. La première est évidente avec $|x| = \max(x,-x)$ Pour la suivante :

$$\begin{aligned} |x| \leqslant M &\iff \max(x,-x) \leqslant M \\ &\iff x \leqslant M \text{ et } -x \leqslant M. \end{aligned}$$

■

Quelques interprétations de la valeur absolue :

- $|a-b|$ est la distance entre a et b, avec en particulier $|a-b| = 0 \iff a = b$.
- $|x-x_0| \leqslant \alpha$, signifie que la distance entre x et x_0 est inférieure à α.
- Ainsi, $\left\{ x \in \mathbb{R} \middle| |x-x_0| \leqslant \alpha \right\}$ est l'intervalle centré en x_0 et de longueur 2α (de demi-longueur α).
- Pour une suite (u_n), la proposition :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M,$$

signifie que la suite est bornée : elle reste entre M et $-M$.

Théorème IV.2 — Inégalité triangulaire. La valeur absolue vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

et de manière plus générale :

$$\forall (a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n, \qquad \left|\sum_{k=1}^n a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

i.e. la valeur absolue de la somme est inférieure à la somme des valeurs absolues.

Démonstration. On a déjà montré la première proposition par disjonction des cas, on recommence avec la racine carré : pour deux réels x, y donnés, on a :

$$\begin{aligned}
|x+y| \leqslant |x|+|y| &\iff \sqrt{(x+y)^2} \leqslant \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} \\
&\iff (x+y)^2 \leqslant x^2+2\sqrt{x^2y^2}+y^2 && \text{les deux membres sont positifs} \\
&\iff x^2+2xy+y^2 \leqslant x^2+2|xy|+y^2 \\
&\iff xy \leqslant |xy| && \text{VRAI}
\end{aligned}$$

La dernière proposition est vraie car $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\leqslant |x|$. D'où l'inégalité triangulaire.

La deuxième proposition se démontre par récurrence immédiate. ■

La démonstration montre que $|x+y| = |x|+|y|$ est équivalent à $xy = |xy|$, ie x et y de même signe.

L'inégalité triangulaire a un corollaire qu'il faut connaître :

Proposition IV.3 — Inégalité triangulaire renversée. On a :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \qquad \big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$$

Démonstration. On considère $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, et on applique l'inégalité triangulaire à $x-y$ et y. On obtient :

$$|x| = |x-y+y| \leqslant |x-y|+|y|,$$

d'où

$$|x|-|y| \leqslant |x-y|.$$

Puis on montre $|y|-|x| \leqslant |x-y|$ de la même manière, ce qui permet de conclure : $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$ ■

Cette inégalité montre que si deux nombres x et y sont proches ($|x-y|$ petit), alors leur valeur absolue est proche : ($\big||x|-|y|\big|$ petit).

R Le passage de l'inégalité triangulaire à l'inégalité triangulaire renversé est toujours vrai (dans $\mathbb{R}$ et même dans $\mathbb{C}$ avec le module).

P En Python, on utilise la fonction `abs`

IV.2 Partie entière

Définition IV.2 — Partie entière. Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe alors un unique entier relatif, appelé partie entière de x, et noté $\lfloor x \rfloor$, tel que :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

On parle parfois de partie entière par défaut.

Par exemple : $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor 0.2 \rfloor = 0$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor -1.2 \rfloor = -2$.

P En Python, la partie entière par défaut est `floor` du module `math`. On dispose aussi de `ceil` (partie entière par excès) et de `round` (partie entière approchée)

! Ne pas confondre partie entière et troncature : $\lfloor -1.2 \rfloor = -2$!

Proposition IV.4 — propriété de la partie entière. Voici quelques propriétés évidentes :

- Une définition équivalente de la partie entière :

$$\begin{aligned}\lfloor x \rfloor &= \max \left\{ n \in \mathbb{Z} \middle| n \leqslant x \right\} \\ &= \min \left\{ n \in \mathbb{Z} \middle| n+1 > x \right\}\end{aligned}$$

- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante (au sens large).
- On a l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

- De manière évidente :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad & x \in \mathbb{Z} \iff \lfloor x \rfloor = x \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad & \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n\end{aligned}$$

R La technique de « renversement des inégalités » est à connaître.

IV.3 Développement décimal d'un réel

✯ Nombres décimaux

Définition IV.3 Un nombre x est dit décimal, si il s'écrit sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Ces nombres s'écrivent ainsi avec un nombre fini de décimales.
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux.

On a donc $0.25 \in \mathbb{D}$, par contre $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

P En particulier un ordinateur ne calcule qu'avec des décimaux (en fait avec une partie des décimaux).

⋆ Deux suites de décimaux

Soit $x \in \mathbb{R}$, considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont clairement des suites de rationnels (et même de décimaux).

■ **Exemple IV.1** Pour $x = \pi$, les premiers termes sont :

$$\begin{aligned} u_0 &= 3 & v_0 &= 4 \\ u_1 &= 3.1 & v_1 &= 3.2 \\ u_2 &= 3.14 & v_2 &= 3.15 \\ u_3 &= 3.141 & v_3 &= 3.142 \\ u_3 &= 3.1415 & v_3 &= 3.1416 \end{aligned}$$

On reconnaît le développement décimal par défaut et excès. ■

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lfloor 10^n x \rfloor &\leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \qquad \text{propriété de la partie entière} \\ \text{donc : } u_n &\leqslant x < u_n + \frac{1}{10^n} \\ \text{ainsi : } 0 &\leqslant x - u_n < \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

En particulier $\lim\limits_{n\infty} u_n = x$ et par suite $\lim\limits_{n\infty} v_n = x$.

En renversant l'inégalité : $u_n \leqslant x < u_n + \frac{1}{10^n}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x - \frac{1}{10^n} < u_n \leqslant x.$$

On obtient alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &> \left(x - \frac{1}{10^{n+1}} \right) - x \qquad \text{en majorant (strictement) } u_n \text{ et minorant } u_{n+1} \\ u_{n+1} - u_n &> -\frac{1}{10^{n+1}} \end{aligned}$$

On peut donc écrire : $10^{n+1}\left(u_{n+1} - u_n\right) > -1$. Or :

$$10^{n+1}\left(u_{n+1} - u_n\right) = \lfloor 10^{n+1} x \rfloor - 10 \lfloor 10^n x \rfloor \qquad \text{est un entier relatif}$$

Donc de $10^{n+1}\left(u_{n+1} - u_n\right) > -1$, on peut déduire que

$$\begin{aligned} 10^{n+1}\left(u_{n+1} - u_n\right) &\geqslant 0 \\ \text{et donc } u_{n+1} &\geqslant u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

On peut recommencer avec (v_n) :

$$\text{on a :}\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n - \frac{1}{10^n} \leqslant x < v_n$$
$$\text{et donc :}\quad \forall n \in \mathbb{N},\ x < v_n \leqslant x + \frac{1}{10^n}$$

Et donc pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n < x + \frac{1}{10^{n+1}} - x \qquad \text{en majorant } v_n \text{ et minorant (strictement) } v_{n+1}$$
$$v_{n+1} - v_n < \frac{1}{10^{n+1}}$$

Or :

$$10^{n+1}(v_{n+1} - v_n) = \lfloor 10^{n+1}x \rfloor + 1 - 10\lfloor 10^n x \rfloor - 10 \qquad \text{est un entier relatif.}$$

Donc de $10^{n+1}(v_{n+1} - v_n) < 1$, on peut déduire :

$$10^{n+1}(v_{n+1} - v_n) \leqslant 0$$
$$\text{et donc } v_{n+1} \leqslant v_n$$

Ainsi, la suite (v_n) est décroissante.

IV.4 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On vient donc de démontrer le résultat suivant :

Théorème IV.5 — Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Tout réel est limite de rationnels.

Plus précisément, si $x \in \mathbb{R}$, il existe deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant les propriétés suivantes :

$$(u_n) \text{ est croissante} \quad \text{et} \quad (v_n) \text{ est décroissante}$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in \mathbb{Q}$$
$$\lim_{n\infty} u_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n\infty} v_n = x$$

On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Corollaire IV.6 En conséquence :

- Entre deux réels, on peut toujours placer un rationnel :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \qquad x < y \implies \exists z \in \mathbb{Q},\ x < z < y.$$

- Un réel est approchée à une précision arbitraire par un rationnel :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in \mathbb{Q},\ |x - y| \leqslant \varepsilon$$

- Un réel est limite d'une suite de rationnel :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (u_n) \text{ une suite telle que} \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Q} \\ \lim\limits_{n\infty} u_n = x \end{cases}$$

R Plus précisément, on a démontre la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$.

Cette propriété de $\mathbb{Q}$ est souvent utilisé dans des énoncés utilisant la continuité, en particulier dans le cas d'équation fonctionnelle.

■ **Exemple IV.2** si on considère une fonction continue f tel que $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = 0$. On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

En effet, si $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver une suite $u_n \in \mathbb{Q}$, tel que $u_n \to x$, on a alors :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) \text{ par continuité, or } \forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = 0, \text{ ainsi } f(x) = 0.$$

■

V Les rationnels

V.1 Rudiments d'arithmétique

✯ Division euclidienne

Théorème V.1 — division euclidienne. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, tel que :

$$a = bq + r \qquad \text{avec } r \in [\![0, b]\!].$$

C'est la division euclidienne de a par b. L'entier relatif q est le quotient, tandis que l'entier r est le reste.

Démonstration. $\boxed{\textbf{Unicité :}}$ Supposons qu'il existe deux couples (q, r) et (q', r') solutions. On a alors :

$$\begin{aligned} a = bq + r &= bq' + r' \\ \text{ainsi,} \quad b(q - q') &= r - r' \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que $q \neq q'$, on obtient alors $q - q' \neq 0$, et donc $|q - q'| > 1$, car c'est un entier. D'où : $|b(q - q')| > b$, ce qui s'écrit $|r - r'| > b$.

Or on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant &r \leqslant b - 1 \\ 1 - b \leqslant &-r' \leqslant 0 \\ \text{d'où } 1 - b \leqslant &r - r' \leqslant b - 1 \\ \text{ce qui s'écrit aussi } |r - r'| \leqslant &b - 1. \end{aligned}$$

On a donc une contradiction entre $|r - r'| > b$ et $|r - r'| \leqslant b - 1$. Ainsi, $q = q'$, par suite comme $b(q - q') = r - r'$, on a $r = r'$.

Existence : L'intuition dit que a est compris entre qb et $(q+1)b$. On pose $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$q \leqslant \frac{a}{b} < q+1, \qquad \text{soit } bq \leqslant a < bq+b.$$

Enfin, on pose $r = a - bq \in \mathbb{N}$. On a alors clairement $a = bq + r$, puis $0 \leqslant r < b$. ∎

✎ La division euclidienne est souvent utilisée dans ce contexte : Si on considère un entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, alors il s'écrit sous l'une des 4 formes suivantes : $n = 4k$, ou $n = 4k+1$, ou $n = 4k+2$, ou $n = 4k+3$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ (plus précisément, $k \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$)
La division euclidienne existe aussi avec $b < 0$.

✎ Si a et b sont entiers, $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ désigne le quotient de la division euclidienne de a par b.

P En python, le quotient est `a//b` et le reste est `a%b`. Attention, ce n'est pas la même convention pour les entiers négatifs.

✯ Multiples et diviseurs

On reverra ces notions en détails dans le chapitre dédié.

Définition V.1 Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On dit que b divise a noté $b|a$ si il existe : $k \in \mathbb{Z}$, tel que : $a = kb$. Autrement dit si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. Remarquons que dans ce cas $|a| \geqslant |b|$.

On dit alors que b est un diviseur de a et que a est un multiple de b.

Le nombre 1 divise tous les nombres naturels, un nombre est aussi toujours divisible par lui-même.

Définition V.2 Soit n un entier naturel :

- les multiples de n sont les nombres de la forme : kn avec $k \in \mathbb{N}$.
- Les diviseurs de n sont les nombres l tel que $l|n$ qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $n = kl$.

✯ Décomposition en facteurs premiers

Définition V.3 Un entier naturel non nul et différent de 1 est dit premier, si il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Si un entier naturel n non nul n'est pas premier, il est factorisable de manière non triviale sous la forme $n = kl$ avec (k,l) deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

Par exemple : 2,3, 5,7, 11, 13, 17,19 sont premiers.

Proposition V.2 Tout entier naturel $n \geqslant 2$ est produit de nombres premiers.

C'est la décomposition en facteurs premiers de l'entier n.

Démonstration. Par récurrence forte. On note :

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{"}n \text{ est produit de nombres premiers."}$$

2 étant premier, il est produit de nombre premiers. D'où l'initialisation $P(2)$.
Considérons n fixé, tel que $\forall k \leqslant n$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Deux cas sont possibles :

- Soit n est premier, et il est produit de nombre premiers.
- Sinon il existe (k,l) deux entiers supérieurs ou égaux à 2, tel que $n = kl$. En appliquant les hypothèses de récurrence, on obtient : k est produit de nombres premiers, et l est produit de nombres premiers, en conséquence, n est aussi produit de nombres premiers.

D'où l'hérédité dans les deux cas.

■

On admet l'unicité de cette décomposition à l'ordre près des facteurs.

⋆ Entiers premiers entre eux

Définition V.4 Étant donné deux entiers n et m non nuls, on définit leur plus grand diviseur commun (PGCD), comme le plus grand entier naturel k vérifiant $k|n$ et $k|m$.

Deux entiers n et m sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1.

Proposition V.3 Deux nombres entiers non nuls sont premiers entre eux si dans leur décomposition en facteurs premiers, il n'y a pas de facteurs premiers communs.

Démonstration. Soient a et b premiers entre eux, par l'absurde, si il y a un facteur p commun aux deux décomposition, alors $p|a$ et $p|b$. ■

P C'est **l'algorithme d'Euclide** qui permet de déterminer le plus grand diviseur commun à deux entiers et donc de déterminer si ils sont premiers entre eux.

⋆ Ensembles des rationnels

Définition V.5 On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \right\} \\ &= \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, lorsqu'on manipule une fraction rationnelle, on peut toujours supposer que le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

V.2 Irrationalité de $\sqrt{2}$

Proposition V.4 Le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ou encore il n'existe pas d'entier p et q tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Démonstration. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premier entre eux tel que :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{p}{q} \\ \text{cela donne : } 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ \text{ou encore : } 2q^2 &= p^2 \end{aligned}$$

Ainsi, p^2 est pair, et donc en utilisant le résultat vu au chapitre précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n^2 \text{ pair } \implies n \text{ pair},$$

on obtient : p est pair.

Donc p s'écrit sous la forme $p = 2l$, et donc on a :

$$2q^2 = 4l^2 \text{ et donc } q^2 = 2l^2$$

Ainsi, q^2 est pair, et donc q est pair.

C'est une contradiction avec p et q premier entre eux.

■

Au final, les rationnels $\mathbb{Q}$ sont donc une partie de $\mathbb{R}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$ mais ne contient pas tous les réels.

VI Une définition de l'ensemble des réels

VI.1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

✯ Inégalité large et compatibilité avec les opérations

Définition VI.1 L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ qui vérifie pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} &\left(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z\right) \implies x+z \leqslant y+t \\ &\left(0 \leqslant x \leqslant y \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant t\right) \implies 0 \leqslant xz \leqslant yt \\ &x \leqslant y \iff -y \leqslant -x \\ &\left(x \leqslant y \text{ et } z \leqslant 0\right) \implies xz \geqslant yz. \end{aligned}$$

Pour multiplier les inégalités, il est préférable de toujours se ramener à des inégalités entre nombres positifs.
Si on multiplie un inégalité par un nombre négatif, on en change le sens.

R Éviter d'écrire des encadrements « *à l'envers* » : $a \geqslant b \geqslant c$, cela « casse » le sens de lecture.

✯ Suites d'inégalités

Proposition VI.1 Soit $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de réels, tels que :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$$

On a :
- Si $a_1 = a_n$ alors, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = a_1$.
- Si $\exists i \in [\![1,n-1]\!]$, tel que $a_i < a_{i+1}$, alors $a_1 < a_n$

Ainsi dans une succession d'inégalités du type $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$:
- Si on suppose que l'inégalité finale est une égalité, alors chacune des inégalités intermédiaires est une égalité.
- Si l'une des inégalités est stricte, alors l'inégalité finale est stricte.

★ Manipulation de l'inégalité stricte

Proposition VI.2 Soient a,b,c,d quatre réels, on a :

$$a \leqslant b \text{ et } c < d \implies a+c < b+d$$
$$a < b \text{ et } 0 < c \implies ac < bc.$$

! Attention, si $a < b$ et $c \geqslant 0$, on a $ac \leqslant bc$ et non $ac < bc$ (faux si $c = 0$).

R Sauf si cela est demandé explicitement dans l'énoncé, il est plus simple de manipuler des inégalités larges que strictes. L'une des exceptions est lorsqu'on manipule des entiers : si a et b sont des entiers et $a < b+1$ alors $a \leqslant b$.

★ Exemples de majoration/minoration

Proposition VI.3 Pour majorer une somme $a+b$, on majore a et majore b.
Pour majorer un produit de nombres positifs ab, on majore a et majore b.
Pour majorer une différence $a-b$, on majore a et minore b.
Pour majorer un quotient $\frac{a}{b}$ de nombres réels positifs, on majore a et minore b.

VI.2 Majorant, maximum, borne supérieure

★ Majorant, minorant

Définition VI.2 Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\mathbb{R}$. On dit que le réel a est un majorant de X si :

$$\forall x \in X,\ x \leqslant a.$$

De même, le réel a est un minorant de X si :

$$\forall x \in X,\ x \geqslant a.$$

La partie X de $\mathbb{R}$ est :

- majorée si elle admet un majorant, ce qui s'écrit donc :

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ x \leqslant a$$

- minorée si elle admet un minorant, ce qui s'écrit donc :

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ x \geqslant a$$

- bornée si elle est majorée et minorée, ce qui s'écrit donc :

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ b \leqslant x \leqslant a$$

Une partie bornée est « majorée en valeur absolue » :

Proposition VI.4 La partie X de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |x| \leqslant M$$

Démonstration. Notons $(*) \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |x| \leqslant M$, en effet :

✎ $(*)$ implique d'être minoré par $-M$ et majoré par M.

✎ si on est minoré par m et majoré par M, en prenant $T = \max(|M|, |m|)$, on a $\forall x \in X, |x| \leqslant T$.

∎

il n'y a pas d'unicité du majorant, d'où l'idée de choisir le meilleur, *i.e. le plus petit*.

⋆ Maximum, minimum

Définition VI.3 Un réel a est le maximum de X si :

$$a \in X \quad \text{et} \quad \forall x \in X, x \leqslant a.$$

On note alors : $a = \max(X)$ et a est unique. On dit aussi que a est le plus grand élément de X et que X admet un maximum.

On définit de même, la notion de minimum (ou de plus petit élément) par : a est un minimum si :

$$a \in X \quad \text{et} \quad \forall x \in X, x \geqslant a.$$

et on note $\min(X)$

Preuve de l'unicité. Soit a et b deux minimums, on a alors $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ d'où $a = b$. ∎

✎ Le maximum d'un ensemble X est donc par définition un élément de X.
Une partie de $\mathbb{R}$ n'admet pas toujours un maximum (exemple basique $[0, 1[$)

✎ On utilise la notation $a = \max(X)$ pour dire : X admet un maximum et on le note a. Tant que l'on ne sait pas que l'ensemble admet un maximum, on ne peut pas utiliser cette notation.

Un ensemble fini (*i.e.* avec un nombre fini d'éléments) est toujours borné et a toujours un élément maximal et minimal.
Pour une famille finie de réels $(x_i)_{i\in I}$, on pose donc :

$$\max_{i\in I}(x_i) = \max\{x_i | i \in I\} \qquad \min_{i\in I}(x_i) = \min\{x_i | i \in I\}$$

Pour une partie infinie (même bornée), ces valeurs n'existent pas nécessairement.
Pour deux réels (a,b), on note $\max(a,b)$ le plus grand, et $\min(a,b)$ le plus petit.

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum, pas forcément un maximum.

⋆ Borne supérieure, inférieure

Définition VI.4 On dit qu'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, si il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{array}{ll} \forall x \in X, x \leqslant M & m \text{ est un majorant} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X,\ M - \varepsilon < x & m \text{ est le plus petit des majorants.} \end{array}$$

Le réel M est appelé la borne supérieure de X. Elle est unique et on la note $\sup(X)$.

Une borne supérieur est toujours un majorant, c'est le meilleur majorant.

La deuxième partie signifie : dès qu'on se donne un petit $\varepsilon > 0$, une précision donc, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant (sinon ce serait $M - \varepsilon$ la borne supérieure), donc on peut trouver un élément de X entre $M - \varepsilon$ et M.

Si X admet un maximum, alors X admet une borne supérieure avec de plus $\max(X) = \sup(X)$.

Unicité. Supposons par l'absurde que M et M' soient deux bornes supérieures, avec $M \neq M'$. Quitte à échanger les noms, on peut supposer $M < M'$, on va choisir une précision qui permets de séparer M et M', par exemple : $\varepsilon = \frac{M'-M}{2}$.

Comme M' est un majorant, on obtient On a alors : $\exists x \in X$, tel que : $M' - \varepsilon < x$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} M' - \frac{M'-M}{2} &< x \\ \frac{M+M'}{2} &< x \end{aligned}$$

et comme $M < M'$ cela donne :$M < x$

Contradiction avec M est un majorant. ∎

Définition VI.5 Si elle existe, on définit de même la borne inférieure, comme le plus grand des minorants, notée $\inf(X)$.

Si $m = \inf(X)$, on a :

$\forall x \in X,\ x \geqslant m$	m est un minorant
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in X,\ x < m + \varepsilon$	m est le meilleur des minorants

C'est ici que l'on voit la différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$:

- Si on utilise les réels, l'ensemble : $\{x \in \mathbb{R} | x^2 \leqslant 2\}$ est majoré et admets une borne supérieur, ici $\sqrt{2}$
- Si l'on ne considère que des rationnels, alors $\{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leqslant 2\}$ est majoré, mais sa borne supérieur $\sqrt{2}$ n'est pas élément de $\mathbb{Q}$. Ainsi, dans $\mathbb{Q}$ certains ensembles majorés n'ont pas de borne supérieure rationnelle.

VI.3 Propriété de la borne supérieure

Théorème VI.5 — Axiome de la borne supérieure. Tout ensemble non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
Tout ensemble non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Définition VI.6 On appelle ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, un ensemble qui contient $\mathbb{Q}$ et vérifie de plus les propriétés :

- $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$,
- tout ensemble majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Ces deux propriétés sont les axiomes de construction de l'ensemble des réels.

Ainsi, $\mathbb{R}$ contient $\sqrt{2}$, comme la borne supérieure de $\{x | x^2 \leqslant 2\}$, et π comme par exemple la borne supérieure de $\{x | x \leqslant 4 \ \textbf{et} \ \cos(x) \geqslant 0\}$.

✎ Cet axiome est très important : il permet de montrer par exemple que toute suite croissante et majorée converge, théorème fondamental de l'analyse, que l'on le verra lors du chapitre sur les suites réelles.
D'une manière générale, il est important de noter tous les théorèmes d'analyse que l'on en déduit : convergence monotone, suites adjacentes, théorème des valeurs intermédiaires, Théorème de Rolle (et donc des acroissements finis), etc.

Nombres entiers, nombres réels

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Les pièges dans la récurrence

Exercice 1 Soit la démonstration suivante :

Soit $a > 0$, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^{n-1} = 1$.
On considère donc $P(n)$: $a^{n-1} = 1$.
Pour $n = 1$, on a bien $a^0 = 1$.
Considérons n fixé, tel que $P(1)$, $P(2)$ ... $P(n)$ soient vrais.
On a alors :

$$\begin{aligned} a^{(n+1)-1} &= a^n = \frac{a^{n-1} \times a^{n-1}}{a^{n-2}} \\ &= \frac{1 \times 1}{1} = 1. \end{aligned}$$

D'où l'hérédité et la conclusion.
Où est l'erreur ?

Exercice 2 Soit la démonstration suivante :

$$\text{Mq} : \forall n \geqslant 1, \ \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$$

On note $P(n)$ la propriété, et on a : pour $n = 1$,

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{3}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

Considérons n fixé, tel que $P(n)$ est vrai, on a alors :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} + \frac{1}{n \times n+1} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n \times n+1} && \text{HR} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{(n+1) - n}{n \times n+1} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

D'où l'hérédité et la conclusion.
Pourtant on constate facilement que cette propriété est fausse. Pourquoi ?

Exercice 3 Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0, \ u_1 = 3, \ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer par récurrence forte que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n$.
Recommencez en remplaçant $u_1 = 3$ par $u_1 = 4$.

⋆ **Récurrence**

Exercice 4 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 5 Soit la suite définie par la relation de récurrence double :

$$a_0 = 1, \; a_1 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \; a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 4a_n}{3a_{n+1} + 2a_n}.$$

Montrer que la suite (a_n) est constante.

Correction : On va procéder par récurrence double, en utilisant pour $n \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$P(n) : \qquad a_n = 1.$$

Initialisation :
la propriété est vrai par hypothèse aux rangs 0 et 1.
Hérédité : Considérons n fixé tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ est vrai et montrons $P(n+2)$:
On a :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{a_{n+1} + 4a_n}{3a_{n+1} + 2a_n} \\ &= \frac{1+4}{3+2} \text{ d'après les hypothèses de récurrence} \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : La propriété est initialisé au rang 0 et 1 et on a :

$$\forall n \geqslant 0, \left[P(n) \text{ et } P(n+1) \Rightarrow P(n+2) \right],$$

par récurrence double la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite est constante égale à 1.

Exercice 6 On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n}.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leqslant 1$.

Correction : Récurrence forte !

Exercice 7 On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

Correction : Récurrence forte !

Exercice 8 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence l'égalité de Bernouilli :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$

✯ Manipulation du symbole somme

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{j}$.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \max(i,j)$.

Exercice 11

1. Déterminer a, b, c tels que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+2}$$

2. En déduire une expression explicite de :

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)(p+2)} \qquad (n \geq 1)$$

3. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 12 Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

✯ Coefficients binomiaux

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$\forall p \in [\![1,n]\!], \ \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

On utilisera deux techniques :
- une récurrence sur n,
- une somme téléscopique.

Correction :
voir j'intègre

Exercice 14 Soient n et p deux entiers naturels avec $n \geqslant p$. Déterminer $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$.

Correction :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i} &= \sum_{i=0}^{p} \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{(p-i)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} \sum_{i=0}^{p} \frac{p!}{i!(p-i)!} \\
&= \binom{n}{p} 2^p
\end{aligned}$$

✯ Formule du binôme de Newton

Exercice 15 Développer $(a-b)^5$

Exercice 16 Développer $(1+\sqrt{3})^4$ et $(1-\sqrt{3})^4$.
En déduire que $A=(1+\sqrt{3})^4+(1-\sqrt{3})^4$ est un entier.

Commentaires : exercice de cours.
Correction : Avec la formule de Newton

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3})^4 &= 1+4\sqrt{3}+6\times 3+4\times 3\sqrt{3}+9\\ (1-\sqrt{3})^4 &= 1-4\sqrt{3}+6\times 3-4\times 3\sqrt{3}+9.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$A=(1+\sqrt{3})^4+(1-\sqrt{3})^4 = 2+2\times 6\times 3+18=56.$$

Ainsi, A est un entier.

Exercice 17 Calculer en fonction de n :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k},\qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k},$$

$$\sum_{k=0,\text{ k pair}}^{n}\binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0,\text{ k impair}}^{n}\binom{n}{k},$$

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k},\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Correction : Pour les premières Newton. Pour la somme sur les pairs impairs, faire $S_p+S_i=2^n$ et $S_p-S_i=0$. Pour $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$, dériver la formule de Newton en $(1+x)^n$. Dériver une seconde fois pour $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$. Enfin prendre **la** (!) primitive qui s'annule en 0 pour la dernière.

⋆ Partie entière, valeur absolue

Exercice 18 Soient $x \in \mathbb{R}$ et la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Correction : Soit n un entier,

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![1,n]\!], \quad & kx \leqslant \lfloor kx \rfloor < kx+1 \\
\text{donc} \quad & \sum_{k=1}^{n} kx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor < \sum_{k=1}^{n} (kx+1) \\
\text{c'est-à-dire :} \quad & x\frac{n(n+1)}{2} \leqslant n^2 u_n < x\frac{n(n+1)}{2} + n \\
& x\frac{n(n+1)}{2n^2} \leqslant u_n < x\frac{n(n+1)}{2n^2} + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

La limite est donc x.

Exercice 19 Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit les parties positives et négatives de x par :

$$x^+ = \max(0,x) \qquad \text{et} \qquad x^- = \max(-x,0).$$

Simplifier les expressions suivantes :

$$x^+ + x^- \qquad\qquad x^+ - x^-$$

$$\frac{|x|+x}{2} \qquad\qquad \frac{|x|-x}{2}$$

Correction : On constate : $x^+ = x$ si $x \geqslant 0$, 0 sinon, $x^- = 0$ si $x \geqslant 0$, $-x$ sinon. Ce qui donne :

$$x^+ + x^- = |x| \qquad\qquad x^+ - x^- = x$$

$$\frac{|x|+x}{2} = x^+ \qquad\qquad \frac{|x|-x}{2} = x^-$$

Exercice 20 Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Correction : On a :

$$\begin{aligned}
& \lfloor x \rfloor \leqslant x \text{ et } \lfloor y \rfloor \leqslant y \\
\text{donc par somme } \ & \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor \leqslant x+y
\end{aligned}$$

On reprends la partie entière (qui est une fonction croissante), ce qui donne :

$$\begin{aligned}
& \lfloor \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \\
\text{c'est-à-dire } \ & \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \qquad \text{car } \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \text{ est un entier.}
\end{aligned}$$

Pour l'autre inégalité :

$$\begin{aligned}
& x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ et } y < \lfloor y \rfloor + 1 \\
\text{donc } \ & x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2
\end{aligned}$$

On prends la partie entière :

$$\begin{aligned}
& \lfloor x+y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \qquad \text{car } \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \text{ est un entier} \\
\text{donc : } \ & \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \qquad \text{car } \lfloor x+y \rfloor \text{ est un entier.}
\end{aligned}$$

Exercice 21 Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n$$

Correction : En séparant le cas où $n = 4k$, $n = 4k+1$, etc.

⋆ Arithmétique élémentaire

Exercice 22 Montre que le nombre $A = 5^{45} + 4^{30}$ n'est pas premier.

Correction :

$$\begin{aligned} A &= \left(5^{15}\right)^3 + \left(4^{10}\right)^3 \\ &= \left(5^{15} + 4^{10}\right)\left(\left(5^{15}\right)^2 - 5^{15}4^{10} + \left(4^{10}\right)^2\right). \end{aligned}$$

on a clairement $5^{15} + 4^{10} \geqslant 2$ et :

$$\left(5^{15}\right)^2 - 5^{15}4^{10} + \left(4^{10}\right)^2 \geqslant \left(4^{10}\right)^2 \geqslant 2$$

⋆ Irrationnalité

Exercice 23 Soit x et y deux rationnels positifs, tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.

Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

Correction : Par l'absurde, dans ce cas $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \in \mathbb{Q}$. Par suite $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ rationnels.

Exercice 24 Existence d'au moins un irrationnel

Soit $X = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0 \text{ et } x^2 \leqslant 2\right\}$.

1. Montrer que X possède une borne supérieure, notée a dans la suite.
2. Supposons $a^2 < 2$.
   (a) Vérifier que : $\forall h \in [0,1]$, $(a+h)^2 \leqslant a^2 + 2ah + h$.
   (b) En déduire qu'en posant $h = \min\left(1, \dfrac{2-a^2}{2a+1}\right)$, on a $a + h \in X$.
   (c) Expliquer la contradiction et conclure.
3. Supposons $a^2 > 2$.
   (a) Vérifier que : $\forall h \in \mathbb{R}$, $(a-h)^2 \geqslant a^2 - 2ah$.
   (b) En posant $h = \min\left(a, \dfrac{a^2-2}{2a+1}\right)$, aboutir à une contradiction et conclure.

On a ainsi montré que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

On peut adapter cette démonstration en considérant :

$$Y = \left\{x \in \mathbb{Q} | x \geqslant 0 \text{ et } x^2 \leqslant 2\right\}$$

On a alors Y est une partie de $\mathbb{Q}$ majorée dont la borne supérieure n'est pas dans $\mathbb{Q}$. Ce qui montre que $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas l'axiome de la borne supérieure.

Correction :

1. X non vide car contient 1 et majoré par 2.
2. (a) $h^2 \leqslant h$ donc évident.
   (b) 1 et $\dfrac{2-a^2}{2a+1}$ strictement positifs et inférieurs à 1, en remplaçant, on obtient : $(a+h) \leqslant 2$. Or $a+h \geqslant 0$, d'où $a+h \in X$.
   (c) Contradiction avec la définition d'une borne supérieure : a n'est pas un majorant puisque $a+h \in X$ et $h > 0$.

3. (a) évident.
   (b) a et $\dfrac{a^2-2}{2a+1}$ strictement positif et en calculant on a $(a-h)^2 \geqslant 2$. et donc $\forall x \in X, x \leqslant (a-h)$.
   Contradiction avec la définition d'une borne supérieure : $a-h$ est u meilleur majorant que a puisque $h>0$.

Exercice 25 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n n'est pas le carré d'un entier. Montrer que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

Correction : Par l'absurde, si $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ alors $nq^2 = p^2$. En décomposant p comme un produit de nombres premiers : $p = p_1 \dots p_k$, on obtient :

$$nq^2 = p_1^2 \dots p_k^2$$

En procédant de même pour q et n, on obtient :

$$n_1 \dots n_m q_1^2 \dots q_l^2 = p_1^2 \dots p_k^2$$

On sait que cette écriture est unique (à l'ordre près des facteurs) et que aucun des p_i n'est un q_j, donc $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, etc, et

$$n = n_1 \dots n_m = p_1^2 \dots p_k^2 = (p_1 \dots p_k)^2.$$

et donc n est un carré d'entier.

⋆ Majorant, borne supérieure

Exercice 26 Montrer que l'ensemble :

$$A = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

est borné et déterminer ses bornes supérieure et inférieure.

Correction : On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \leqslant 1.$$

Pour $n = 1$, on a $0 \in A$, donc $\inf(A) = 0$. Comme : $\lim_{n\infty} \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = 1$, on a $\sup(A) = 1$.

Exercice 27 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup(A \cup B) = \max\Big(\sup(A), \sup(B)\Big)$$
$$\text{et } \inf(A \cup B) = \min\Big(\inf(A), \inf(B)\Big)$$
$$A \subset B \implies \sup(A) \leqslant \sup(B)$$
$$A \subset B \implies \inf(B) \leqslant \inf(A)$$

Correction : Clairement :

$$\forall x \in A \cup B,\ x \leqslant \max\Big(\sup(A), \sup(B)\Big)$$

Considérons ensuite le cas où $\sup(A) \geqslant \sup(B)$ et $\varepsilon > 0$, on a alors :

$$\exists x \in A,\ x > \sup(A) - \varepsilon,$$

c'est-à-dire : $\exists x \in A \cup B,\ x > \max\Big(\sup(A), \sup(B)\Big) - \varepsilon.$

Le reste est évident.

Exercice 28 Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une partie de $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ [x,y] \subset I$$

ou encore :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \implies z \in I.$$

Montrer que I est nécessairement de l'une des formes suivantes :

$$[a,b] \quad [a,b[\quad]a,b] \quad]-\infty,b] \quad]-\infty,b[\quad]a,+\infty[\quad [a,+\infty[\quad \mathbb{R} \qquad \text{avec}(a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Correction : séparer les cas où I est majoré et minoré. Si I borné, alors en notant a sa borne supérieure et b sa borne inférieure, on a nécessairement : $]a,b[\subset I$, et donc $I =]a,b[$ ou $I = [a,b[$ ou $I = [a,b]$.

Exercice 29 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

On définit l'ensemble $A+B$ par :

$$A+B = \left\{ x+y \middle| x \in A\ y \in B \right\}$$

Montrer que $A+B$ est majorée et que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

On suppose maintenant que A et B sont minorées, montrer : $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Correction : Clairement :

$$\forall u \in A+B,\ u \leqslant \sup(A) + \sup(B)$$

Soit $\varepsilon > 0$, on considère alors x et y tels que :

$$x \in A,\ y \in B,\ x > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2},\ y > \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors : $x+y \in A+B$ et $x+y > \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$.

3 — Nombres complexes et géométrie

I Généralités

I.1 L'ensemble des nombres complexes

Définition I.1 L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ est constitué des nombres de la forme :

$$\mathbb{C} = \left\{ a+ib \middle| a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

où i est un nombre qui vérifie $i^2 = 1$.

Si z est un nombre complexe, il existe donc un couple unique $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $z = a+ib$, on appelle

- le réel a la partie réelle de z, $\mathrm{Re}(z) = a$,
- le réel b la partie imaginaire de z, $\mathrm{Im}(z) = b$.

Deux nombres complexes sont égaux si ils ont même partie réelle et partie imaginaire.

On peut ainsi, calculer des sommes produits de nombres complexes, de la même manière que dans $\mathbb{R}$, avec juste en plus la règle $i^2 = 1$. On peut ainsi définir la somme $\sum$, le produit $\prod$, etc comme dans $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{C}$, on peut définir :

- la **somme de deux complexes** par

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b'),$$

i.e. en regroupant partie réelle et imaginaire,

- la **multiplication de deux nombres complexes** par :

$$(a+ib)\times(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+ba'),$$

i.e. en utilisant la règle $i^2 = 1$,

En particulier :

$$\operatorname{Re}(z+z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(z+z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$$

On a aussi :

$$\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z') \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z')$$

En particulier

$$z = 0 \iff \Big(\operatorname{Re}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0\Big)$$

Les nombres réels s'identifient aux nombres complexes qui ont une partie imaginaire nulle.
Au contraire, on appelle **imaginaire pur**, les nombres complexes de la forme ib.
On note parfois $z \in i\mathbb{R}$ pour z est imaginaire pur.

Cette représentation sous la forme $a+ib$ s'appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe par opposé à la représentation exponentielle et géométrique vue plus loin.
La forme algébrique est adaptée à l'addition.

Proposition I.1 Sont valables dans $\mathbb{C}$:

- Toutes les formules de manipulation de somme et de produit.
- La formule du binôme de Newton :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{b}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\text{et} \quad \forall x \in \mathbb{C}, \qquad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{b}{k} x^k$$

- La formule sur la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{k=0}^{n} x^n = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

- La formule de factorisation (identité de Bernoulli) :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \qquad a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right)$$

$$\text{et} \quad \forall x \in \mathbb{C}, \qquad 1 - x^{n+1} = (1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$$

D'une manière générale toutes les formules qui ne font pas intervenir $<$ dans leur démonstration sont valables dans $\mathbb{C}$.

Mais attention : il n'existe pas d'équivalent à $<$, il n'y a donc pas de majorant, de fonction croissante etc.

De même il n'y a pas de racines carrées : l'équation $z^2 = a$ a deux solutions, mais on ne peut pas choisir la solution positive comme dans $\mathbb{R}$.

Il y a une fonction exponentielle, mais pas de fonction ln (voir plus loin). En conséquence, si x n'est pas un entier, et $z \in \mathbb{C}$, z^x n'existe pas.

P En python il existe un type `complex` natif qui utilise la lettre `J` à la place de la lettre i. Ainsi, on peut écrire : $z = 0.2 + 1J$.

Remarquez que c'est $1J$ et pas $1 * J$.

La plupart des fonctions mathématiques sur les complexes se trouvent dans la module `cmath`.

Proposition I.2 Tout élément non nul de $\mathbb{C}$ admet un inverse.

Plus précisément, si $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul (i.e. a ou b non nul), alors son inverse de z est :

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2},$$

En particulier,

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad \left(zz' = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z' = 0\right)$$

On dit que $\mathbb{C}$ est **intègre** (comme $\mathbb{R}$).

Démonstration. Il suffit de faire le calcul :

$$(a + ib) \times \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = 1.$$

■

C'est le module au carré qui apparaît au dénominateur.
Cela indique aussi que lorsqu'on dispose d'un quotient du type $\frac{z}{z'}$, pour revenir à une forme algébrique, on utilise : $\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$. (on dit que l'on multiplie par **l'expression conjuguée**).
En particulier si $|z| = 1$, on a $z^{-1} = \bar{z}$. Plus précisément :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |z| = 1 \iff z^{-1} = \bar{z}.$$

I.2 Conjugaison

Définition I.2 Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, son conjugué est le nombre complexe : $\bar{z} = a - ib$.

La conjugaison est une opération qui a beaucoup de bonnes propriétés.

Proposition I.3 Si z et z' sont deux nombres complexes, on a :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

z est un nombre réel $\iff z = \bar{z}$

z est un nombre imaginaire pur $\iff z = -\bar{z}$

$$\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'}$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$$

$$\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$$

Démonstration. Prouvons la dernière :

$$\begin{aligned}
\overline{z^{-1}} &= \overline{\frac{a-ib}{a^2+b^2}} \\
&= \overline{\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}} \\
&= \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2} \\
&= (\bar{z})^{-1}
\end{aligned}$$

■

R En particulier, pour montrer que z est réel, on peut vérifier $z = \bar{z}$.

I.3 Le plan complexe

Définition I.3 Considérons le plan cartésien P, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit un point M de P, il existe alors un unique couple (a, b), tel que : $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$. On appelle affixe de ce point, le nombre complexe $z = a + ib$.

De même, à chaque complexe $z = a + ib$ correspond un et un seul point.

On parle alors du plan complexe.

Enfin, si (u, v) est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on appelle de même affixe de ce vecteur (u, v) le nombre complexe $z = u + iv$.

On peut donc identifier les nombres complexes et le plan usuel muni d'un repère orthonormé direct, ce qui permet :

- d'avoir une interprétation géométrique des propositions utilisant les complexes, ce qui permet de guider l'intuition pour les calculs. Par exemple, la proposition : $|z-i| = |z+i|$ s'interprète avec : z est sur la médiatrice des points de coordonnées $(0, 1)$ et $(0, -1)$ (d'affixe i et $-i$).
- de résoudre des problèmes de géométrie en les ramenant à des calculs algé-

briques sur les complexes !

Cette représentation a plusieurs avantages :

- la **somme de deux vecteurs** correspond à la des affixes correspondants (puisque c'est l'addition des parties réelles et des parties imaginaires),
- la **longueur du vecteur** correspond au module de son affixe,
- Si A et B sont deux points d'affixe z_a et z_b, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_b - z_a$, la longueur AB est $|z_b - z_a|$.
- en particulier $|z_a|$ est la distance de A à l'origine.
- Le conjugué $\bar{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe horizontal.

II Module d'un nombre complexe

Définition II.1 — Module d'un nombre complexe. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on voit que $z\bar{z} = a^2 + b^2$ est toujours un nombre réel positif. On définit alors le module de z comme le nombre réel positif : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

On a donc deux écritures :

$$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{et} \qquad |z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Pour l'interprétation géométrique :

- Si M est le point d'affixe z, alors : $|z|$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- Si (u, v) est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, alors $|u + iv|$ est la longueur de ce vecteur.
- Si A et B sont deux points d'affixe z_A et z_B, alors $|z_A - z_B|$ est la distance AB.
- Si z et z' sont deux complexes, alors $|z - z'|$ est la distance entre les points correspondants dans le plan complexe.

Le module est plus proche d'une valeur absolue : comportement simple par rapport à la multiplication, inégalité triangulaire pour l'addition.

Proposition II.1 Si z et z' sont deux nombres complexes, on a :

$$\begin{array}{lll}
|z| = 0 \iff z = 0 & & \\
|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| & \text{et} & |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \\
z\bar{z} = |z|^2 & & \\
|z| = |\bar{z}| & & \\
|zz'| = |z||z'| & \text{donc} & \forall n \in \mathbb{N},\ |z|^n = |z^n| \\
\text{si } z \neq 0, \quad \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} & \text{donc} & \forall n \in \mathbb{Z},\ |z|^n = |z^n|
\end{array}$$

Démonstration. Si $|z| = 0$ alors $a^2 + b^2 = 0$, on a donc une somme de terme positif, qui est nul si et seulement si $a = b = 0$. La réciproque est évidente.

On a aussi : $a^2 \leqslant a^2 + b^2$, et donc $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$.

Puis :

$$|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = z\bar{z} \times z'\bar{z'} = |z|^2 \times |z'|^2.$$

d'où $|zz'| = |z||z'|$.

Ensuite :

$$\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2}.$$

d'où $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$. ■

✯ Inégalité triangulaire et cas d'égalité

Enfin, on a l'inégalité triangulaire :

Proposition II.2 On a l'inégalité triangulaire :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \qquad |z+z'| \leqslant |z| + |z'|,$$

et donc en conséquence l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \qquad \Big||z| - |z'|\Big| \leqslant |z - z'|.$$

Enfin, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si les complexes sont positivement liés :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \qquad |z+z'| = |z| + |z'| \iff \Big(\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que } z = \lambda z'\Big) \text{ ou } z' = 0.$$

Démonstration. Soit z et $z' \in \mathbb{C}$, On a :

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'| \iff |z+z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2$$

car les deux membres sont positifs. On a aussi :

$$\begin{aligned}
|z+z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} \\
&= z\bar{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + \bar{z}z' \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \\
&\leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2\left|z\overline{z'}\right| \\
&\leqslant \Big(|z| + |z'|\Big)^2.
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire renversée s'obtient à partir de l'inégalité triangulaire comme cela a été vu précédemment.

Pour démontrer le dernier point, supposons que $|z+z'| = |z| + |z'|$, en regardant la démonstration précédente, on a alors : $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = \left|z\overline{z'}\right|$.

On utilise alors le résultat vu en exercice :

$$\forall t \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(t) = |t| \iff \Big(t \in \mathbb{R} \text{ et } t \geqslant 0\Big)$$

D'où $z\overline{z'}$ est un réel positifs.

On pose donc $\lambda = z\bar{z}$. On a alors : $z \times |z'|^2 = \lambda z'$. Si $z' \neq 0$, on peut diviser par $|z'|^2$ pour obtenir : $z = \underbrace{\frac{\lambda}{|z'|^2}}_{\geqslant 0} z'$.

Réciproquement, si $z = \lambda z'$, on a :

$$|z+z'| = |1+\lambda||z| = (1+\lambda)|z| = |z|+|z'|$$

si $z' = 0$, l'inégalité est évidente.

■

(R) On a bien sûr le même résultat en remplaçant z' par z :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'| = |z|+|z'| \iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \text{tel que } z' = \lambda z\right) \text{ ou } z = 0.$$

Souvent on sait que z et z' sont non nuls, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} |z+z'| = |z|+|z'| &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \text{tel que } z' = \lambda z \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \text{tel que } z = \lambda z' \end{aligned}$$

⋆ **Cercles et disques dans le plan complexe**

Définition II.2 Le cercle de centre A et de rayon r dans le plan complexe s'identifie avec :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z-a| = r \right\}$$

où $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point A.

De même, le disque de centre A et de rayon r du plan complexe s'identifie avec :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z-a| \leqslant r \right\}.$$

III Nombre complexe de module 1 et trigonométrie

III.1 Cercle trigonométrique

Définition III.1 On appelle cercle trigonométrique, le cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1 et de centre 0 dans le plan complexe.

Ce cercle correspond donc à l'ensemble

$$\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| = 1 \right\}.$$

Comme on l'a vu : $\forall z \in \mathbb{U}, \bar{z} = \frac{1}{z}$, et même :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$$

En particulier, il faut garder en tête la relation $\frac{1}{i} = -i$

Théorème III.1 — Paramétrisation du cercle par les fonctions circulaires. Géométriquement chaque point de $\mathscr{C}$ peut être représenté par l'angle $\theta = (\overrightarrow{i}\,; OM)$ (angle avec l'axe horizontal) il a donc pour coordonnée $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

On admet donc que

$$\forall z \in \mathbb{U}, \exists \theta \in \mathbb{R}, \qquad z = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Énoncé de manière différente :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| = 1 \right\} = \left\{ \cos(\theta) + i\sin(\theta) \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Définition III.2 Soit $z \in \mathbb{U}$, avec $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

On dit que θ est un **argument** du nombre complexe z.

Les propriétés des fonctions trigonométriques imposent que si θ_0 est un argument, les autres sont de la forme $\theta_0 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle **argument principal**, l'unique argument $\theta \in]-\pi, \pi]$.

✎ L'argument est donc unique à « 2π près » , ce qui correspond à l'idée intuitive qu'un angle est défini à 2π près. Ce qui corresponds aussi aux résultats :
Pour deux réels θ et α, on a :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \alpha + 2k\pi \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\alpha) \\ \sin(\theta) = \sin(\alpha) \end{cases} \iff \theta = \alpha[2\pi]$$

On choisit parfois l'argument principal comme l'unique argument de $[0, 2\pi[$, cela dépends du contexte.

III.2 Définition de e^{it} pour t réel

Définition III.3 Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit le nombre complexe e^{it} par :

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t).$$

C'est l'unique nombre complexe de module 1 dont un argument est t.

On a en particulier :

$$\forall (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{i\alpha} = e^{i\theta} \iff \theta \equiv \alpha[2\pi]$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \alpha + 2k\pi$$

La propriété qui justifie cette notation est :

Proposition III.2 Soit t et t' deux réels, on a alors :

$$e^{i(t+t')} = e^{it}e^{it'}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\text{d'un côté : } e^{i(t+t')} &= \cos(t+t') + i\sin(t+t') \\
&= \cos(t)\cos(t') - \sin(t)\sin(t') + i\Big(\sin(t)\cos(t') + \sin(t')\cos(t)\Big) \\
\text{d'un autre côté : } e^{it}e^{it'} &= \Big(\cos(t) + i\sin(t)\Big)\Big(\cos(t') + i\sin(t')\Big) \\
&= \cos(t)\cos(t') - \sin(t)\sin(t') + i\Big(\sin(t)\cos(t') + \sin(t')\cos(t)\Big)
\end{aligned}$$

■

Corollaire III.3 En conséquence :

$$\frac{1}{e^{it}} = e^{-it} \qquad \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i\alpha-\beta} \qquad \overline{e^{it}} = e^{-it}$$

La forme exponentielle est adapté à la multiplication !

III.3 Formule d'Euler et applications

Théorème III.4 — Formules d'Euler. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. C'est une ré-écriture des formules :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

pour $z = e^{i\theta}$. ■

✎ Formule à apprendre aussi sous la forme :

$$e^{i\theta} + e{-}i\theta = 2\cos\theta \qquad \text{et} \qquad e^{i\theta} - e{-}i\theta = 2i\sin\theta$$

✎ La parité du cosinus et l'imparité du sinus se lisent sur les formules d'Euler.

✎ On peut donner une formule pour tangente en faisant le quotient :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -ie^{i\theta} - e^{-i\theta}e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

⋆ Linéarisation

La formule d'Euler permet de linéariser des $\cos(x)^n$, en les exprimant sous la forme de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, pour $k = 1\dots n$.

■ **Exemple III.1**

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sin(x) =& \frac{1}{4i}(e^{ix}+e^{-ix})(e^{ix}-e^{-ix}) \\
=& \frac{1}{4i}(e^{i2x}+1-1-e^{-i2x}) \\
=& \frac{1}{4i}(e^{i2x}-e^{-i2x}) \\
=& \frac{1}{2}\sin(2x)
\end{aligned}$$

■

La formule d'Euler permet d'exprimer un nombre réel $\cos(\theta)$ en fonction d'un nombre *a priori* complexe $\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$.
Dans l'exemple ce n'est pas un hasard si les termes de degré 0 se simplifie : on sait depuis le début que l'on manipule un nombre réel, donc que l'on va tomber sur la formule d'Euler pour « *revenir* » dans $\mathbb{R}$.
De plus, on voit dans le développement (avec la formule de Newton), que « *la puissance diminue de 2 en 2* ». Dans le sens où lorsqu'on calcule des expression du type :

$$\left(e^{ik\theta}\pm e^{-ik\theta}\right)^n$$

on l'argument écrit diminue par pas de 2θ.

■ **Exemple III.2**

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin(x) =& \frac{1}{8i}\left(\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right) \\
=& \frac{1}{8i}\left(\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right) \\
=& \frac{1}{8i}\left(e^{3ix}+e^{ix}-e^{-ix}-e^{3ix}\right) \\
=& \frac{1}{4}\left(\sin(3x)+\sin(x)\right)
\end{aligned}$$

■

⋆ Factorisation par l'angle de moitié

Une technique importante liée à la formule d'Euler est la **factorisation par l'angle de moitié** : si on considère $e^{ia}+e^{ib}$, alors on peut factoriser par $e^{i\frac{a+b}{2}}$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
e^{ia}+e^{ib} =& e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{i\frac{b-a}{2}}\right) \\
=& 2\cos\left[\frac{a+b}{2}\right]e^{i\frac{a+b}{2}}
\end{aligned}$$

La factorisation par l'angle de moitié permet ainsi de faire des additions de complexes écrits sous forme exponentielle (à condition qu'ils aient le même module).

Ne pas apprendre cette formule par cœur, il faut avoir compris la méthode.
La factorisation par l'angle de moitié à une interprétation géométrique : en dessinant les deux vecteurs correspondants sur le cercle, on voit que l'argument de la somme est l'angle « *au milieu* », on parle donc d'angle de moitié et non d'angle moyen.
Dans l'écriture : $e^{ia}+e^{ib}=2\cos\left[\frac{a+b}{2}\right]e^{i\frac{a+b}{2}}$. Le module n'est pas forcément $2\cos\left[\frac{a+b}{2}\right]$ car ce nombre peut être négatif.
Néanmoins, cette écriture permet facilement d'avoir le module, la partie réelle et imaginaire (ce qui est souvent le but).

On a en particulier :

$$\begin{aligned}
1+e^{it} &= e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}}+e^{i\frac{t}{2}}\right)=2e^{i\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}}\\
1-e^{it} &= e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}\right)=-2ie^{i\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\\
&= -2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}}
\end{aligned}$$

Il faut savoir retrouver très rapidement ces deux dernières formule (explicitement au programme).

✯ Calcul de somme

On peut calculer des sommes avec la formule d'Euler :

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(kt) \qquad \text{et} \qquad S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(kt).$$

Pour cela, on forme C_n+iS_n, et on a :

$$\begin{aligned}
C_n+iS_n &= \sum_{k=0}^{n}\cos(kt)+i\sum_{k=0}^{n}\sin(kt)=\sum_{k=0}^{n}(\cos(kt)+i\sin(kt))\\
&= \sum_{k=0}^{n}e^{ikt}=\sum_{k=0}^{n}\left(e^{it}\right)^k && \text{on reconnaît une somme géométrique}\\
&= \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}
\end{aligned}$$

On veut donc retrouver les parties réelles et imaginaires du complexe : $\dfrac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}$.

On pourrait écrire ce nombre sous algébrique :

$$\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{it}}=\frac{1-\cos((n+1)t)+i\sin((n+1)t)}{1-\cos(t)+i\sin(t)}$$

mais il est plus simple de traiter le quotient en écrivant le numérateur et le dénominateur sous forme exponentielle.

Pour cela, il faut utiliser la factorisation par l'angle de moitié : Cela donne :

$$\begin{aligned}1-e^{i(n+1)t} =& e^{i\frac{n+1}{2}t}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}t}-e^{i\frac{n+1}{2}t}\right)\\ =& -2ie^{i\frac{n+1}{2}t}\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\\ \text{de même : } 1-e^{it} =& e^{i\frac{1}{2}t}\left(e^{-i\frac{1}{2}t}-e^{i\frac{1}{2}t}\right)\\ =& -2ie^{i\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

On peut ainsi facilement faire le quotient (puisqu'on a écrit sous forme exponentielle) :

$$\begin{aligned}C_n+iS_n =& \frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{it}}\\ =& \frac{-2ie^{i\frac{n+1}{2}t}\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{-2ie^{i\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\\ =& e^{i\frac{nt}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

On retrouve alors facilement la partie réelle : on a une expression du type $re^{i\theta}$, la partie réelle est $r\cos\theta$ et la partie imaginaire est $r\sin\theta$. Cela donne :

$$\begin{aligned}C_n =& \sum_{k=0}^{n}\cos(kt)=\mathrm{Re}(C_n+iS_n)\\ =& \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{nt}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\\ =& \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}S_n =& \sum_{k=0}^{n}\sin(kt)=\mathrm{Im}(C_n+iS_n)\\ =& \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{nt}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\\ =& \sin\left(\frac{nt}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

✯ Une autre méthode

$$\begin{aligned}C_n =& \sum_{k=0}^{n}\cos(kt)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}\right)\\ =& \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikt}+\sum_{k=0}^{n}e^{-ikt}\right)\end{aligned}$$

On utilise alors la technique vue plus haut :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} =& \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} \\ =& e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} =& \frac{1-e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-it}} \\ =& e^{-i\frac{nt}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}C_n =& \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{nt}{2}} + e^{i\frac{-nt}{2}}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ =& \cos\left(\frac{nt}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

⋆ **Autre calcul de somme**

Maintenant si on veut calculer :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kt) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kt).$$

Pour cela, on forme $C_n + iS_n$, et on a :

$$\begin{aligned}C_n + iS_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kt) + i\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kt) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikt} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{it}\right)^k && \text{on reconnaît Newton} \\ &= \left(1+e^{it}\right)^n\end{aligned}$$

Il reste à calculer la puissance n-ième du complexe $1+e^{it}$ pour cela, il faut l'écrire sous forme trigonométrique (plus adaptée à la multiplication). Cela donne :

$$1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}} 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

Et donc :

$$\begin{aligned}C_n + iS_n =& \left(e^{i\frac{t}{2}} 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^n \\ =& 2^n \cos^n\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{nt}{2}}.\end{aligned}$$

On retrouve la partie réelle :

$$C_n = 2^n \cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right).$$

et la partie imaginaire :

$$S_n = 2^n \cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right).$$

III.4 Formule de Moivre

Ensuite de $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, on déduit les formules de Moivre :

Proposition III.5 — Moivre. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Ces formules permettent de passer d'un $\cos(nx)$ à une somme de $\cos(x)^k$ et $\sin(x)^k$, pour des $k = 1\dots n$.

■ **Exemple III.3**

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\sin(3x) &= \Big(\cos(x) + i\sin(x)\Big)^3 \\ &= \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x) \\ &= \Big(\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)\Big) + i\Big(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\Big)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\ \sin(3x) &= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\end{aligned}$$

■

✎ La formule de Moivre est très lié à la formule de Newton, qui permet de développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$, souvent on mettra la puissance du k sur le $i\sin(\theta)$, et on séparera les cas où k est pair / impair pour isoler la partie réelle et imaginaire.

✎ On la couple aussi souvent avec la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, de manière à ne plus avoir que des cosinus ou des sinus dans le résultat final.

■ **Exemple III.4** En utilisant $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ on obtient les formule de $\cos(3x)$ en fonction uniquement de $\cos(x)$:

$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)(1 - \cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

On écrit souvent ce résultat sous la forme :

$$\cos(3x) = T(\cos(x)), \text{ avec } T : X \longmapsto 4X^3 - 3X.$$

■

⋆ Exemple d'utilisation de la formule de Moivre

Cette partie est un exemple. Elle n'est dans le cours que pour montrer le calcul dans le cas général. Retenir le résultat n'a pas d'intérêt et est à re démontrer.

$$\begin{aligned}\cos n\theta + i\sin n\theta =& (\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ =& \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta) \\ =& \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta)\end{aligned}$$

On choisit ici de mettre la puissance du k sur le i, pour isoler la partie réelle et imaginaire.

Si k est pair, il s'écrit sous la forme : $2p$ et $i^k = i^{2p} = (-1)^p$, tandis que si k est impair il s'écrit sous la forme : $2p$ et $i^k = i^{2p+1} = i(-1)^p$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\cos n\theta + i\sin n\theta = & \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\binom{n}{2p}(-1)^p\cos^{n-2p}(\theta)\sin^{2p}(\theta) \\ & + i\sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n}\binom{n}{2p+1}(-1)^p\cos^{n-2p+1}(\theta)\sin^{2p+1}(\theta).\end{aligned}$$

D'où on déduit les deux relations :

$$\cos n\theta = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\binom{n}{2p}(-1)^p\cos^{n-2p}(\theta)\sin^{2p}(\theta)$$

$$\sin n\theta = \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n}\binom{n}{2p+1}(-1)^p\cos^{n-2p+1}(\theta)\sin^{2p+1}(\theta).$$

On peut prolonger le calcul en utilisant la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$:

$$\cos n\theta = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\binom{n}{2p}(-1)^p\cos^{n-2p}(\theta)\Big(1-\cos^2(\theta)\Big)^p$$

et :

$$\sin n\theta = \sin(\theta)\sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n}\binom{n}{2p+1}(-1)^p\cos^{n-2p+1}(\theta)\Big(1-\cos^2(\theta)\Big)^p$$

On définit alors les **polynômes de Tchebichev** de première espèce par :

$$T : X \longmapsto \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\binom{n}{2p}(-1)^p X^{n-2p}\Big(1-X^2\Big)^p$$

et on a :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\qquad \cos n\theta = T(\cos\theta)$$

et les **polynômes de Tchebichev** de seconde espèce par :

$$U : X \longmapsto \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n}\binom{n}{2p+1}(-1)^p X^{n-2p+1}\Big(1-X^2\Big)^p$$

et on a :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \text{tel que}\sin\theta\neq 0\qquad \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = U(\cos\theta)$$

IV Argument d'un nombre complexe non nul

De la même manière, un vecteur non nul peut être représenter par sa longueur et l'angle fait avec l'horizontale. Donc un nombre complexe non nul peut être représenté par sa longueur $|z|$, et cet angle.

On définit de manière naturelle :

Définition IV.1 Soit z un nombre complexe non nul, on appelle argument de z, un argument de $\frac{z}{|z|}$. C'est un nombre réel θ tel que :

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta).$$

L'écriture trigonométrique du nombre complexe z est alors :

$$z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right).$$

L'écriture du nombre complexe z sous forme exponentielle est alors :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Respectivement, si $\rho \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, l'écriture $\rho e^{i\theta}$ désigne le complexe :

$$\rho\Big(\cos\theta + i\sin\theta\Big)$$

✎ Il faut que z soit non nul sinon cela n'a pas de sens. Avant de mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique, on s'assurera qu'il est non nul. Par contre $\rho e^{i\theta}$ existe même si $\rho = 0$ ou $\rho < 0$.

✎ Pour déterminer l'argument d'un nombre complexe (et donc la forme $\rho e^{i\theta}$), on « factorise » par $|\rho|$ pour se ramener à un nombre complexe de module 1 et on essaie de reconnaître un cosinus et un sinus connu. Plus loin, on verra une méthode générale plus loin.

✎ Pour un complexe $z = \rho e^{i\theta}$ non nul on a :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} \quad &\iff \quad \theta \equiv 0[\pi] \\ z \in \mathbb{R}^+ \quad &\iff \quad \theta \equiv 0[2\pi] \\ z \in i\mathbb{R} \quad &\iff \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{aligned}$$

Proposition IV.1 On a $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$ avec $\rho > 0$ et $\rho' > 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} \rho = \rho' \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases}$$

(!) Attention, cette identification module/argument n'est possible que si ρ est strictement positif.

Si on enlève la condition $\rho > 0$, alors la propriété n'est plus vraie : par exemple :

$$1e^{i\pi} = -1 = -e^{i0} \text{ on n'en déduit pas } 1 = -2 \text{ et } \pi \equiv 0\ [2\pi].$$

De plus, dans tous les cas θ n'est pas unique.

■ **Exemple IV.1**

$$e^{i0} = 1 \qquad (1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = -1.$$

■

✯ Expression de l'argument en fonction en utilisant l'arctangente

Proposition IV.2 Soit $x+iy$ un nombre complexe non nul. On souhaite l'écrire sous la forme $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$.

Pour calculer le module, il suffit de calculer $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Pour obtenir l'argument, on a :

- si $x \neq 0$, on considère l'unique angle $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan\alpha = \frac{y}{x}$. Si $x > 0$, on pose alors $\theta = \alpha$, si $x < 0$ on pose alors $\theta = \alpha + \pi$.
- Si $x = 0$ et $y > 0$ on a $\theta = \frac{\pi}{2}$, si $x = 0$ et $y < 0$ on a $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

On obtient ainsi les uniques valeurs qui conviennent pour ρ et θ, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

(R) L'unique angle $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ s'obtient avec la fonction arctangente.

On ramène très facilement l'argument θ dans l'intervalle naturel $[0, 2\pi[$.

Démonstration. Soit θ l'unique argument de x situé dans l'intervalle : $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ On sait $x+iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Le cas $x = 0$ étant évident, on considère le cas $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}\\ &= \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0.\end{aligned}$$

donc $\theta = \alpha$ ou $\theta = \alpha + \pi$ puisqu'on a choisit θ dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

- Si $x > 0$ il faut donc $\cos\theta > 0$ et donc $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui impose $\theta = \alpha$.
- Si $x < 0$ il faut donc $\cos\theta < 0$ et donc $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, ce qui impose $\theta = \alpha + \pi$.

■

Proposition IV.3 Si ρ et ρ' sont deux nombre strictement positifs, et θ et θ' sont deux réels, alors on a

$$(\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = (\rho\rho')e^{i\theta+\theta'} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta} \qquad \overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$$

> La forme exponentielle est ainsi utile pour calculer le produit de nombre complexe.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\rho e^{i\theta} \times \rho' e^{i\theta'} &= \rho\rho'\Big(\cos(\theta)+i\cos(\theta)\Big)\Big(\cos(\theta')+i\cos(\theta')\Big)\\
&= \rho\rho'\left(\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')+i\Big(\cos(\theta)\sin(\theta')+\sin(\theta')\cos(\theta)\Big)\right)\\
&= \rho\rho'\Big(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\Big)\\
&= \rho\rho' e^{i\theta+\theta'}
\end{aligned}$$

La deuxième relation se déduit de la première : il suffit de vérifier que $\rho e^{i\theta} \times \frac{1}{\rho}e^{-i\theta} = 1$.

Enfin :

$$\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho\big(\cos(\theta)-\sin(\theta)\big) = \rho\big(\cos(-\theta)+\sin(-\theta)\big) = \rho e^{-i\theta}$$

■

Ce qui signifie que :

- le module du produit est le produit des modules,
- **un** argument du produit est la somme des deux arguments,

On trouve par exemple facilement les propriétés de l'argument.

Proposition IV.4 Soient z et z' deux nombres complexes non nul, θ (resp. θ') un argument de z (resp. z').

On a :a

- un argument de zz' est $\theta+\theta'$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, un argument de z^n est $n\theta$.
- Un argument de $\frac{1}{z}$ est $-\theta$.
- Un argument de $\frac{z}{z'}$ est $\theta-\theta'$.
- Un argument de $\bar{z}$ est $-\theta$.

R Pour un nombre complexe z non nul, $\frac{1}{z}$ et $\bar{z}$ ont donc les mêmes arguments, ce qui est évident puisque : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ et que si $\lambda > 0$, les arguments de λz sont les mêmes que z.

⋆ Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$

Cette notation est connue depuis la terminale, mais il faut bien savoir la manipuler :

Définition IV.2 Soit x et y deux réels, on dit que x et y sont congrus modulo 2π si :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + 2k\pi.$$

On note alors $x \equiv y[2\pi]$, ou plus simplement $x = y[2\pi]$.

Cette définition étant au programme, il faut l'utiliser. Néanmoins, attention aux pièges. En cas de doutes, il faut revenir à la définition avec « *il existe* ».

V Équation du second degré

V.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Proposition V.1 Soit A un nombre complexes non nul, l'équation :

$$(E) \qquad x^2 = A,$$

d'inconnue x a alors deux solutions opposées dans $\mathbb{C}$, *i.e.* il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que : $\mathscr{S} = \{a, -a\}$.

On dit que a et $-a$ sont les racines carrées de A.

La notation $\sqrt{\cdot}$ n'existe pas dans $\mathbb{C}$, en effet, comme aucune des deux ne peut être qualifiée de positive, on ne peut pas en choisir l'une des deux (comme c'est le cas dans $\mathbb{R}$).
Autre manière de voir : on a construit $\mathbb{C}$ en considérant i une solution de $x^2 = -1$, mais on aurait aussi bien prendre $-i$ à la place. Il n'y a donc aucun moyen de différencier les deux.

Démonstration. Comme A est non nul, on peut l'écrire sous forme trigonométrique $A = \rho e^{i\theta}$. Soit x solution de l'équation (E), on a alors $x \neq 0$, donc x peut s'écrire $re^{i\alpha}$.

On choisit de plus pour valeurs de θ, l'argument principal dans $[0, 2\pi[$, idem pour α.

On a :

$$x^2 = A$$

$$\text{donc } r^2 e^{i2\alpha} = \rho e^{i\theta}$$

$$\text{donc } \begin{cases} r^2 = \rho \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 2\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} r = \sqrt{\rho} \text{ car } r \text{ et } \rho > 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha = \frac{\theta}{2} + \pi \end{cases}$$

$$\text{donc} \qquad x = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{ou} \qquad x = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}+\pi} = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Réciproquement ces deux valeurs sont bien solution.

En conclusion :

$$\mathscr{S} = \left\{ \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}, -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \right\}$$

■

La forme exponentielle est bien adaptée à la recherche des racines carrées dans $\mathbb{C}$.

Évidement si A est réel on a :

$$\mathscr{S} = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\} \qquad \text{si } a \geqslant 0$$
$$\mathscr{S} = \{i\sqrt{|a|}, -i\sqrt{|a|}\} \qquad \text{si } a < 0$$

Dans ce cas, il ne faut pas écrire A sous forme trigonométrique.

⋆ Racine carrée sous forme algébrique

Proposition V.2 Soit $Z = X + iY$ un nombre complexe non réel.
Pour déterminer l'un des complexes $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z$, on utilise :
- l'égalité des parties réelles : $x^2 - y^2 = X$
- l'égalité des modules : $x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2}$.
- l'égalité des parties imaginaires $2xy = Y$.

Ce système donne alors :
- par somme, on obtient x^2 et donc $|x|$,
- par différence, on obtient y^2 et donc $|y|$,
- comme on a $2xy = Y$, on en déduit si ils sont de même signe ou opposés.

Il suffit alors de choisir un signe pour x et on a alors la valeur de y.

Les formules exactes sont :

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{X^2+Y^2} + X\right)$$
$$y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{X^2+Y^2} - X\right).$$

■ **Exemple V.1** Dans le cas où $Z = i$, on a $\rho = 1$, $X = 0$ et $Y = 1 > 0$. En conséquence les solution de $z^2 = i$ sont :

$$\mathscr{S}_1 = \left\{\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$$

Dans le cas où $z = 1 + i$, on a $\rho = \sqrt{2}$, $X = 1$, et $Y = 1 > 0$. En conséquence les solution de $z^2 = 1 + i$ sont :

$$\mathscr{S}_2 = \left\{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}$$

Dans le cas où $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a : $\rho = 1$, et $X = -\frac{1}{2}$, et $Y = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$. En conséquence les solution de $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont :

$$\mathscr{S}_2 = \left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

■

V.2 Résolution des équations du second degré

Théorème V.3 — Résolution des équations du second degré à coefficients complexes. Soit a,b,c trois nombres complexes, avec $a \neq 0$, on considère l'équation :

$$(E) \quad az^2+bz+c=0,$$

on note $\Delta = b^2-4ac$, Δ est le discriminant.
On considère δ l'une des racines carrées complexes de Δ, *ie* δ vérifie $\delta^2=\Delta$.
Les solutions de l'équation (E) sont alors :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}, \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

(si $\Delta=0$, les deux solutions sont confondues).
De plus, on a l'écriture :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

C'est la forme canonique.

R Si (a,b,c) sont non réels, le discriminant est un nombre complexe et les deux racines ne sont plus conjuguées

Changer la solution δ ne change pas les racines, ça inverse leur nom.

si $b=0$ ou si $c=0$, il ne faut pas appliquer ce résultat : on résout directement l'équation.

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c =& a(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}) \\
=& a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) \\
=& a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \\
=& a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)
\end{aligned}$$

On utilise la relation $\delta^2=\Delta$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c =&a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\\
a =&a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right)\\
=&a\left(\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\right)\\
=&a\left(\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right)\right)\\
=&a(z-z_1)(z-z_2)
\end{aligned}$$

avec les deux racines : $z_1=-\dfrac{b-\delta}{2a}$ et $z_2=-\dfrac{b+\delta}{2a}$. ■

■ **Exemple V.2** Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2+(4-2i)z-i=0$.
On a

$$\Delta=(4-2i)^2+4i=16-16i-4+4i=12-12i=12(1-i)=12\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

On pose alors $\delta=\sqrt{12\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{8}}$. On a alors : $\delta^2=\Delta$.
Ce qui donne les solutions :

$$x_1=\frac{-4+2i+\sqrt{12\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{8}}}{2}\qquad x_2=\frac{-4+2i-\sqrt{12\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{8}}}{2},$$

on peut simplifier par 2 :

$$x_1=-2+i+\sqrt{3\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{8}}\qquad x_2=-2+i-\sqrt{3\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{8}}$$

■

■ **Exemple V.3** Mettre d'autres exemples. ■

⋆ Cas d'un polynôme réel

Bien sûr ce résultat complète celui de terminale : pour résoudre ax^2+bx+c avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on forme le **discriminant** $\Delta=b^2-4ac$ (un réel dans ce cas) et on construit δ avec :
- si $\Delta>0$, on choisit $\delta=\sqrt{\Delta}$,
- si $\Delta=0$, on a alors $\delta=0$,
- sinon on choisit $\delta=i\sqrt{|\Delta|}$.

Cela donne le résultat bien connu :
- Si $\Delta>0$, on peut poser $\delta=\sqrt{\Delta}$ l'équation (E) admet alors **deux racines réelles distinctes** :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\quad \text{et}\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, alors $\delta = 0$ et l'équation (E) admet une unique racine réelle (on dit **une racine double**) :

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, on peut poser $\delta = i\sqrt{|\Delta|}$ l'équation (E) admet deux **racines complexes (non réelles) distinctes et conjugués** :

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

R Même pour un polynôme réel la formule :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}, \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

a un intérêt : cela permet d'éviter de mettre des valeurs absolue lorsque Δ s'écrit $\Delta = \delta^2$.

⋆ Étude du polynôme réel de degré 2

Proposition V.4 Pour un polynôme réel de degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ on a :
- Si $\Delta < 0$, *i.e.* si il n'y a pas de racine réelle, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est non nul et du signe de a,
- Si $\Delta = 0$, *i.e.* si il y a une unique racine réelle notée x_0, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est du signe de a sauf pour $x = x_0$ ou il s'annule.
- Si $\Delta < 0$, *i.e.* si il y a deux racines réelles, $P(x)$ est du signe de a « à l'extérieur des racines », du signe de $-a$ à « entre les racines ».

R En particulier, si le polynôme ne change pas de signe c'est que $\Delta \leqslant 0$.

Proposition V.5 Le minimum de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ $a > 0$ est atteint pour la valeur $x = -\frac{b}{2a}$.

De plus la droite verticale $x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie, au sens où :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \qquad f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - h\right).$$

Démonstration. Pour le minimum, il suffit de dériver l'expression de la fonction : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2ax + b$.

La deuxième relation s'obtient par la forme canonique :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) =& a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right)\\ \text{ainsi } \forall h \in \mathbb{R},\ f\left(-\frac{b}{2a}+h\right) =& a\left(h^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right)\\ =& a\left((-h)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right)=f\left(-\frac{b}{2a}-h\right)\end{aligned}$$

■

V.3 Somme et produit des racines d'une équation du second degré

Proposition V.6 Soient a,b,c des complexes, avec $a \neq 0$, on considère l'équation :

$$(E):\qquad ax^2+bx+c=0,$$

on note x_1 et x_2 ses solutions (si il y a une racine double, on a $x_1 = x_2$).

On a alors :

- la **somme des racines :** $x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a}$
- le **produit des racines** $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

✎ Cela signifie que l'on peut exprimer les coefficients à partir des racines.
Si l'on connaît une des deux racines (par exemple si l'une est « solution évidente » alors on connaît l'autre,

✭ Recherche de deux nombres dont on connaît la somme et le produit

Proposition V.7 Si on a deux nombres a et b tel que

$$\begin{cases} ab = P \\ a+b = S \end{cases},$$

alors a et b sont les solutions de l'équation $X^2-SX+P=0$.

On retrouve cette formule très rapidement avec :

$$aX^2+bX+c = a(X-x_1)(X-x_2) = aX^2-(x_1+x_2)X+x_1x_2.$$

✎ Il reste ensuite à identifier a et b ce qui se fait souvent par des arguments de signe ou de comparaison.

VI Racines n-ièmes

✭ Résolution dans $\mathbb{C}$ de $z^n = 1$

Théorème VI.1 — Racine n-ièmes de l'unité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$(E) \qquad z^n = 1$$

admet n solutions.

Plus précisément, les solutions sont :

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \middle| k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \\ &= \left\{ 1,\ e^{\frac{2i\pi}{n}},\ e^{\frac{4i\pi}{n}},\ \dots,\ e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} \right\}\end{aligned}$$

Notation VI.1. *On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :*

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \middle| k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Démonstration. Soit z solution de l'équation, on a alors z non nul, donc z s'écrit sous la forme $\rho e^{i\theta}$. On choisit d'utiliser l'argument principal avec donc $\theta \in [0, 2\pi[$. On a alors :

$$\begin{aligned} z^n = 1 \quad &\text{donc} \quad \rho^n e^{in\theta} = 1 \\ &\text{donc} \quad \begin{cases} \rho^n = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = 2k\pi \end{cases} \\ &\text{donc} \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \\ &\text{donc} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}. \end{aligned}$$

On a donc une infinité de solutions candidates :

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

il est donc pas évident a priori que l'on puisse se ramener à $k \in [\![0, n-1]\!]$.

On a $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ et on a choisi l'angle principal dans $[0, 2\pi[$. Ce qui donne alors :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{2k\pi}{n} &< 2\pi \\ 0 \leqslant k &< n \end{aligned}$$

d'où $k \in [\![0, n-1]\!]$.

On a alors plus que n solutions candidates. Ces solutions sont bien distinctes, puisque l'on a n angles distincts dans $[0, 2\pi[$.

Réciproquement tout complexe de la forme : $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ (et même $k \in \mathbb{Z}$) est solution.

On obtient ainsi le résultat.

■

La rédaction doit faire apparaître le passage de $k \in \mathbb{Z}$, à $k \in [\![0, n-1]\!]$. Pour cela, on utilise l'angle principal $\theta \in [0, 2\pi[$ (attention ouvert en 2π).
On peut aussi démontrer cela avec une division euclidienne :
Soit $j \in \mathbb{Z}$, on effectue la division euclidienne de j par n, on obtient alors : $\exists (q,n) \in \mathbb{Z}^2$, $j = qn + k$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a alors :

$$\frac{2ij\pi}{n} = \frac{2ik\pi}{n} + 2q\pi \equiv \frac{2ik\pi}{n} \ [2\pi].$$

En conséquence : $e^{\frac{2ij\pi}{n}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Ce qui prouve que :

$$\left\{ e^{\frac{2ij\pi}{n}} \middle| j \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \middle| k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

Exemple VI.1

- Pour $n = 2$, les racines deuxième de l'unité sont 1 et -1,
- Pour $n = 3$, les racines troisième de l'unité sont

$$1, \qquad j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2i\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2i\pi}{3}\right), \quad \text{et} \quad \overline{j} = j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

- Pour $n = 4$, les racines quatrième de l'unité sont 1, i, -1, $-i$.

■

On a toujours $1 \in \mathbb{U}_n$. Si n est pair, $-1 \in \mathbb{U}_n$.
Si $z \in \mathbb{U}_n$, alors $\overline{z} \in \mathbb{U}_n$, puisque $(\overline{z})^n = \overline{z^n} = 1$. Donc $\mathbb{U}_n$ est symétrique par rapport à l'axe horizontal.
Si $z \in \mathbb{U}_n$, alors $z^{n+1} = z$, $z^{n+2} = z^2$, etc. On peut écrire : si $i \equiv j[n]$, alors $z^i = z^j$.

✭ Interprétation géométrique

Proposition VI.2 Les points images des racines n-ièmes de l'unité forment les n sommets d'un polygone régulier convexe inscrit dans le cercle unité, l'un de ces sommets étant le point d'affixe 1.

Sur le cercle, les n racines n-ième de l'unité sont ainsi placées régulièrement : on a découpé le cercle en secteur angulaire égaux.
(Dessin à faire un jour)

✭ Somme des racines n-ième de l'unité

La proposition suivante peut être résumé en disant que « *la somme des racine n-ième de l'unité est nulle* »

Proposition VI.3 Soit z une racine n-ième de l'unité différente de 1. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0.$$

En appliquant ce résultat à $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, on obtient :

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0.$$

Démonstration. La démonstration est évidente car il s'agit d'une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} = 0$$

■

Soit $n \geqslant 2$, considérons l'équation :

$$(E_n) \quad 1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$$

Les solution de cette équations sont alors les racines n-ième de l'unité sauf 1. En effet, on a :

$$z^n - 1 = (z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})$$

Une autre vision intéressante est la factorisation du polynôme $X^n - 1$. En effet, comme $\left(e^{2i\frac{k\pi}{n}}\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ sont les n racines de ce polynôme, on a :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{2i\frac{k\pi}{n}}\right).$$

On retrouve par exemple le produit des racines de l'unité en regardant le terme constant :

$$-1 = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} e^{2i\frac{k\pi}{n}}$$

On reverra cela en détail dans le chapitre polynôme.

✯ Nombre complexe j

Le nombre complexe j est important. Voici un bref résumé des propriétés de ce nombre :

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \qquad j^3 = 1$$

$$1+j+j^2 = 1 \qquad \overline{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = j^2$$

D'autre part, le polynôme $1+X+X^2$ a pour racine j et j^2.

✯ Applications aux racines n-ième d'un complexe

Proposition VI.4 Soit $a \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$, l'équation $z^n = a$ admet alors n solution. Plus précisément, on écrit la forme exponentielle : $a = \rho e^{i\theta}$, et on a :

$$\mathscr{S} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}} \middle| k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Démonstration. On a clairement :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad \left(\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}}\right)^n = \rho e^{2ik\pi+\theta} = \rho e^{i\theta} = a.$$

D'autre part, soit z solution, on a alors :

$$z^n = \left(\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$$

et donc :

$$\left(\frac{z}{\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n = 1.$$

Ainsi, d'après le résultat précédent, on a :

$$\exists k \in [\![0, n-1]\!], \ \frac{z}{\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

D'où le résultat. ■

■ **Exemple VI.2** Racines 5-ième de $1+i$. ■

VII Exponentielle complexe

Définition VII.1 — Exponentielle complexe. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on définit l'exponentielle d'un nombre complexe, comme

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \Big(\cos(y) + i\sin(y)\Big)$$

On définit ainsi l'exponentielle de $z = x + iy$ comme le nombre complexe dont

- le module est e^x
- un argument est y.

R On voit que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
C'est la forme algébrique qui est adapté au calcul de e^z

L'avantage de cette notation est que l'exponentiel complexe hérite de la propriété fondamentale de l'exponentiel sur $\mathbb{R}$: elle transforme une somme en produit.

Proposition VII.1 On a :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}, \qquad e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$$

Démonstration.

$$e^{z+z'} = e^{x+x'+i(y+y')} = e^{x+x'} e^{i(y+y')} = e^x e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = e^{x+iy} e^{x'+iy'} = e^z \times e^{z'}.$$

■

R En particulier $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Proposition VII.2 L'application $exp : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^*$ est surjective.
Autrement dit : si $Z \in \mathbb{C}^*$, alors il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que : $Z = e^z$.
L'application $exp : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^*$ est injective. On a

$$\forall (z,z)' \in \mathbb{C}^2, \qquad e^z = e^{z'} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = z' + 2k\pi$$

R En particulier $e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = 2ik\pi$.

Démonstration. On écrit Z sous la forme $\rho e^{i\theta}$ (car Z non nul), $z = \ln(\rho) + iy$ convient alors.

Considérons maintenant z et z' tel que $e^z = e^{z'}$, on écrit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, cela donne :

$$e^x e^{iy} = e^{x'} e^{iy'} \text{ donc } \left(x = x' \text{ et } y \equiv y'[2\pi]\right)$$
$$\text{c'est-à-dire } \left(x = x' \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z},\ y = y' + 2k\pi\right)$$
$$\text{au final : } \exists k \in \mathbb{Z},\ z = z' + 2k\pi$$

Réciproque évidente. ∎

Cette fonction n'est pas injective, car $e^{i0} = e^{i2\pi}$, donc elle n'a pas de bijection réciproque et ln n'existe pas sur $\mathbb{C}$.
Autre manière de voir : on ne peut pas définir $\ln(\rho e^{i\theta})$ comme $\ln(\rho) + i\theta$, car θ est définit à 2π près.

VIII Nombres complexes et géométrie plane

VIII.1 Généralités sur la géométrie

On a déjà vu l'identification :

- des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et des complexes,
- des points du plan muni d'un repère et des complexes.

Dans cette section, on ramène des problèmes de géométrie à des problèmes de calcul avec des nombres complexes.

On suppose que le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un **d'un repère orthonormal** $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, c'est-à-dire d'un point O (l'**origine**) et de deux vecteurs orthogonaux de norme 1 tel que l'angle $\vec{i}, \vec{j}$ est dans le sens direct (notion qui sera précisé plus tard, on se contente de l'intuition).

On a alors :

- Si on a deux points A et B, on peut construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
  Si on se donne un point A et un vecteur $\vec{u}$, alors il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. En particulier, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$.
  On peut mesurer la distance entre deux points AB en posant $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.
- Tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ a deux **coordonnées** dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, on peut

écrire :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2, \exists!(a,b) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$$

On écrit donc $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. C'est le vecteur d'affixe $a+ib$. Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie.
Tout point M a deux coordonnées qui sont les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$, on écrit ainsi $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour dire $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ C'est le point d'affixe $a+ib$. Les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi.

- Une fois choisi la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on peut identifier $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. Une fois choisi le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on peut identifier $\mathscr{P}$ et $\mathbb{C}$.
- Pour un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$, on il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Ce réel est une mesure de l'angle : $\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}}\right)$ (angle entre l'axe horizontal et $\overrightarrow{u}$). La mesure d'un angle n'est pas unique, elle est définie modulo 2π.
On écrit :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}}\right) \equiv \theta[2\pi]$$

pour dire : θ mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}}\right)$.
On définit alors une mesure de l'angle entre deux vecteurs non nuls par :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}}\right)[2\pi]$$

(c'est l'angle de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$ dans le sens direct).
On a alors la relation de Chasles sur les angles.

$$\forall (u,v,w) \in \left(\mathbb{R}^2 \setminus 0\right)^3, \qquad \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}}\right)[2\pi]$$

Si les trois points A, B et C ne sont pas alignés, on peut définir une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ par :

$$\widehat{ABC} \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$$

- Étant donné un réel $\rho > 0$ et un réel θ, il existe un unique vecteur $\vec{u}$ tel que :

$$\left(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}\right) = \theta \qquad\qquad \|\vec{u}\| = \rho$$

C'est le vecteur d'affixe $\rho e^{i\theta}$.

VIII.2 Alignement et orthogonalité

Proposition VIII.1 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2.

Alors le complexe $\dfrac{z_2}{z_1}$ a pour argument toute mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$.

Par suite :

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$ (est imaginaire pur).

Dessin à faire

Démonstration. En écrivant $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, alors on sait :

$$\theta_1 \text{ est une mesure de } \left(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}\right) \quad \text{et} \quad \theta_2 \text{ est une mesure de } \left(\widehat{\vec{i}, \vec{v}}\right)$$

un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$ est $\theta_2 - \theta_1$, c'est-à-dire une mesure de

$$\left(\widehat{\vec{i}, \vec{v}}\right) - \left(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) [2\pi]$$

d'après la définition de l'angle entre deux vecteurs.

Les vecteurs sont ainsi

- colinéaire si et seulement si $\theta_2 - \theta_1 \equiv 0[\pi]$, et donc si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1}$ est réel.
- orthogonaux si et seulement si $\theta_2 - \theta_1 \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, et donc si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1}$ est imaginaire pur.

■

✎ On a aussi d'autres résultats : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si et seulement si $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^+$.

Corollaire VIII.2 Soit A , B et C trois points du plan, deux à eux distincts et d'affixes respectives a, b et c.

Le complexe $\dfrac{b-a}{c-a}$ a pour argument toute mesure de l'angle $\widehat{CAB}$ (c'est-à-dire de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$).

Par suite :

- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R}$ (est imaginaire pur).

Pour vérifier qu'une quantité z de la forme $z = \dfrac{b-a}{c-a}$ est réelle ou imaginaire pur, il faut penser à regarder $z = \bar{z}$ ou $z = -\bar{z}$.

Exemple VIII.1 Soient A et B deux points du plan d'affixe respective a et b. Montrer qu'un point M d'affixe z appartient au cercle Γ de diamètre $[A,B]$ si et seulement si :

$$2z\bar{z} - (\bar{a}+\bar{b})z - (a+b)\bar{z} + a\bar{b} + \bar{a}b = 0.$$

On sait :

$$M \in \Gamma \iff \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\iff \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \\
&\iff \frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \\
&\iff \frac{z-a}{z-b} = -\overline{\frac{z-a}{z-b}} \\
&\iff \frac{z-a}{z-b} = -\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}} \\
&\iff (z-a)\left(\bar{z}-\bar{b}\right) + (z-b)\left(\bar{z}-\bar{a}\right) = 0 \\
&\iff 2z\bar{z} - (\bar{a}+\bar{b})z - (a+b)\bar{z} + a\bar{b} + \bar{a}b = 0.
\end{aligned}$$

■

VIII.3 Transformation remarquable du plan

⋆ Application du plan et de $\mathbb{C}$

Proposition VIII.3 Soit $\mathscr{P}$ le plan muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Si $F : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est une application du plan dans lui-même, alors il existe une unique application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que pour tout couple (M, M') de points d'affixe respective z et z', on a :

$$M' = F(M) \iff z' = f(z).$$

Respectivement, si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, alors il existe une unique application $F : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ vérifiant la même relation.

Ainsi, on peut identifier les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et les applications $F : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$.

⋆ Rotations

Définition VIII.1 Soit A un point du plan, et θ un réel. La rotation de centre A et d'angle θ est l'application qui à un point M associe le point M' défini par :

$$AM = AM' \qquad \text{et} \qquad \widehat{MAM'} \equiv \theta[2\pi]$$

Proposition VIII.4 Soit A un point du plan d'affixe z_A et θ un réel. La rotation de centre A et d'angle θ correspond à l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta}(z - z_A) + z_A \end{array} \right.$$

Démonstration. Le point B d'affixe $e^{i\theta}(z - z_A) + z_A$ vérifie :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &\text{ a pour affixe } e^{i\theta}(z - z_A) \\ \overrightarrow{AM} &\text{ a pour affixe } (z - z_A) \\ \text{donc une mesure de } \widehat{MAB} &\text{ est } \theta \\ \text{et } AB = |z - z_A| &= AM. \end{aligned}$$

Donc le point B est le point M'. ■

✎ En particulier, la rotation de centre O et d'angle θ correspond à l'application :

$$z \longmapsto e^{i\theta} z$$

✎ La formule $e^{i\theta}(z - a) + a$ s'interprète ainsi : on ramène l'origine en A, l'affixe de M devient alors $z - a$, on applique la rotation en multipliant par $e^{i\theta}$, on remet le repère à l'origine en ajoutant a aux affixes.

⋆ Translations

Définition VIII.2 Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan.

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Proposition VIII.5 Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan et u son affixe.

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ corresponds à l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + u \end{array} \right.$$

Démonstration. Le point B d'affixe $z + u$ vérifie : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{u}$.

C'est donc le point M'. ■

⋆ Homothétie

Définition VIII.3 Soit A un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

L'homothétie de centre A et de rapport λ est l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à un point M associe l'unique point M' défini par :

$$\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}.$$

Un cas intéressant est celui où $\lambda = -1$ on retrouve alors la symétrie centrale de centre A.

Proposition VIII.6 Soit A un point du plan d'affixe z_A et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
L'homothétie de centre A et de rapport λ corresponds à l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \lambda(z - z_A) + z_A \end{array} \right.$$

Démonstration. Le point B d'affixe $\lambda(z - z_A) + z_A$ vérifie : $\overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{AB}$. C'est donc le point M' ∎

✯ Symétrie axiale

Définition VIII.4 La symétrie axiale par rapport à l'axe horizontal est l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à un point $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$

Proposition VIII.7 La symétrie axiale par rapport à l'axe horizontal correspond à l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overrightarrow{z} \end{array} \right.$$

Nombres complexes et géométrie

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Ensemble des nombres complexes

Exercice 1 Donner la forme cartésienne des complexes suivants :

$$-\frac{2}{1-i\sqrt{3}} \qquad \frac{1}{(2+3i)(3-i)} \qquad \frac{1+2i}{1-2i} \qquad \frac{5+i\sqrt{2}}{1+i}$$

Correction : multiplication par la quantité conjuguée.

Exercice 2 À quelle condition le complexe $Z = z^2 + z + 1$ est-il réel ? imaginaire pur ?

Correction : $Z \in \mathbb{R} \iff Z = \overline{Z}$, on trouve la réunion de deux demi droites : $\mathbb{R}$ et droite verticale $x = -\frac{1}{2}$.
Pour imaginaire pur : on trouve la réunion de deux courbes représentatives : $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ et $x \mapsto -\sqrt{x^2+x+1}$.
Retrouver ces résultats avec : $\dfrac{1-z^3}{1-z} \in \mathbb{R}$ ou $\in i\mathbb{R}$?

⋆ Module et inégalité triangulaire

Exercice 3 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| \leqslant 1$. Prouver que $\mathrm{Re}(z^2+4z+3) \geqslant 0$.

Correction : écrire $z = a + ib$ et majorer la quantitée obtenu, on trouve :

$$\mathrm{Re}(z^2+4z+3) = x^2 - y^2 + 4x + 3 \geqslant 2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2.$$

Exercice 4 Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \qquad 1 + |ab-1| \leqslant (1+|a-1|)(1+|b-1|)$$

Correction : il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} ab - 1 =& (ab - b - a + 1) + (a-1) + (b-1) \\ =& (a-1)(b-1) + (a-1) + (b-1) \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} 1 + |ab-1| \leqslant& 1 + |a-1||b-1| + |a-1| + |b-1| \\ \leqslant& (1+|a-1|)(1+|b-1|) \end{aligned}$$

Exercice 5 Montrer que pour tout a, b de $\mathbb{C}$: $|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|$.

Correction : On a la même technique que pour l'inégalité triangulaire renversée :

$$\begin{aligned} a =& \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) \\ b =& \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a) \\ |a| + |b| \leqslant& \frac{1}{2}|a+b| + \frac{1}{2}|a-b| + \frac{1}{2}|a+b| + \frac{1}{2}|a-b|. \end{aligned}$$

On peut aussi écrire :

$$(|a+b| + |a-b|)^2 - (|a|+|b|)^2 = 2|a^2-b^2| + (|a|-|b|)^2 \geqslant 0$$

✯ Nombre complexe de module 1

Exercice 6 Calculer $(1+i)(\sqrt{3}+i)$ en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Correction : développer sous forme algébrique puis recommencer sous forme exponentielle.

Exercice 7 Simplifier le complexe : $z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$

Correction : Écrire sous forme exponentielle $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.

Exercice 8 Donner les n dans $\mathbb{Z}$ tels que : $(\sqrt{3}+i)^n$ est réel.

Correction : on a $\sqrt{3}+i=e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $(\sqrt{3}+i)^n=e^{i\frac{n\pi}{3}}$ est réel si $\frac{n\pi}{3}\equiv 0[\pi]$ soit $n\equiv 0[3]$.

Exercice 9 Module et argument de $a=\frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$ et $b=\frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$

Rappel : $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$.
Correction : On a :

$$\begin{aligned}1+i\tan(\theta)&=\frac{1}{\cos(\theta)}(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=\frac{e^{i\theta}}{\cos\theta}\end{aligned}$$

(on a $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$). On obtient alors a.
Pour b :

$$\begin{aligned}b&=\frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}\\&=\frac{1-e^{-i\theta}}{1+e^{-i\theta}}\end{aligned}$$

puis factorisation par l'angle de moitié.

Exercice 10 Soit $a\in\mathbb{C}^*$ montrer que $|z-a|=|z+a| \iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ z=i\lambda a$.

Correction : Résolution sous forme $x+iy$

$$\begin{aligned}|z-a|=|z+a| &\iff |z-a|^2=|z+a|^2\\&\iff (x-x_a)^2+(y-y_a)^2=(x+x_a)^2+(y+y_a)^2\\&\iff xx_A+yy_A=0\\&\iff x=-\frac{y}{x_A}y_A\end{aligned}$$

On
Ainsi, si $|z-a|=|z+a|$ on pose donc $\lambda=\frac{y}{x_A}$ on a alors $x=-\lambda y_A$ et $y=\lambda x_A$. Cela donne :

$$z=-\lambda y_A+i\lambda x_A=i\lambda(x_A+iy_A)$$

Autre cas si $x_A=0$.
Réciproque évidente.
On peut aussi vérifier $\text{Re}(z\overline{a})=0$. Ou écrire :

$$\left|\frac{z-a}{z+a}\right|=1 \iff \exists\theta\in]0,\pi[,\ \frac{z-a}{z+a}=e^{2i\theta}$$

et vérifier $z = i\text{cotan}(\theta)a$

Interprétation géométrique : sur la médiatrice du segment $[A\tilde{A}]$, avec $\tilde{A}$ d'affixe $-a$.

Exercice 11 Déterminer les complexes z tels que les modules de z , $\frac{1}{z}$ et $z-1$ sont égaux.

Correction : Soit z un tel complexe, $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ donc $|z| = 1$ puis $|z| = |z-1|$ donne en écrivant $z = e^{i\theta}$ ou en écrivant sous forme algébrique $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Réciproque évidente.

Exercice 12 Soit x, y, z trois nombres complexes de module 1. Comparer les modules de $x+y+z$ et de $xy+yz+zx$.

Correction : on a :

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}|x+y+z| &= |\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}| \\ &= \left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right| \\ &= \frac{xy+yz+zx}{xyz}\end{aligned}$$

⋆ Racine carrée

Exercice 13 Soit u l'une des racines carrées du produit zz'. Montrer que

$$\left|\frac{z+z'}{2}+u\right| + \left|\frac{z+z'}{2}-u\right| = |z| + |z'|.$$

Correction : on peut élever le membre de gauche au carré, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\left(\left|\frac{z+z'}{2}+u\right| + \left|\frac{z+z'}{2}-u\right|\right)^2 &= \left|\frac{z+z'}{2}+u\right|^2 + 2\left|\frac{(z+z')^2}{4}-u^2\right| + \left|\frac{z+z'}{2}-u\right|^2 \\ &= 2\left|\frac{z+z'}{2}\right|^2 + 2\left|u^2\right| + 2\left|\frac{(z+z')^2}{4}-zz'\right| \\ &= \left|\frac{(z+z')^2}{2}\right| + 2|z||z'| + \left|\frac{(z-z')^2}{2}\right| \\ &= |z^2| + 2|z||z'| + |z'|^2 = (|z|+|z'|)^2.\end{aligned}$$

On peut aussi considérer une racine a de z et b de z', ce qui donne :

$$\begin{aligned}\left|\frac{z+z'}{2}+u\right| + \left|\frac{z+z'}{2}-u\right| &= \left|\frac{a^2+b^2}{2}+(ab)\right| + \left|\frac{a^2+b^2}{2}-(ab)\right| \\ &= \left|\frac{(a+b)^2}{2}\right| + \left|\frac{(a-b)^2}{2}\right| \\ &= |a|^2 + |b^2| = |z| + |z'|.\end{aligned}$$

⋆ Racine n-ième

Exercice 14 Résoudre l'équation $1+2z+2z^2+\ldots+2z^{n-1}+z^n = 0$.

Correction : Clairement $z \neq 1$ donc :

$$\begin{aligned}1+2z+2z^2+\ldots+2z^{n-1}+z^n =& 1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}+z\left(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}\right)\\ =&\frac{1-z^n}{1-z}+z\frac{1-z^n}{1-z}\\ =&(1+z)\frac{1-z^n}{1-z}\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions sont les racines n-ièmes de l'unité privée de 1 auquel on ajoute -1 si besoin.

Exercice 15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+i)^6 = (i-z)^6$ en utilisant les racines n-ième de l'unité.

Soit z solution, on a alors $z \neq i$, donc :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^6 = 1$$

donc

$$\exists k \in [\![0,5]\!], \quad \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{6}}$$

On revient à la valeur de z :

$$\exists k \in [\![0,5]\!], \quad z = -i\frac{1-e^{i\frac{2k\pi}{6}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{6}}} = \tan\left(\frac{2k\pi}{6}\right).$$

Une valeur de k est interdite.

Synthèse, on constate qu'une valeur de k est interdite, sinon on a bien le résultat.

Exercice 16 On considère le nombre complexe : $w_1 = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$.

1. Calculer w_1^5, et $1+w_1+w_1^2+w_1^3+w_1^4$,
2. On note $\alpha = w_1 + w_1^4$. Vérifier : $\alpha^2+\alpha-1 = 0$,
3. Déterminer la forme trigonométrique de w_1^4 et la comparer avec $\overline{w_1}$.
4. Résoudre l'équation $z^2+z-1 = 0$.
5. En déduire une valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Correction :

1. C'est une racine 5-ième de 1.
2. Simple calcul.
3. On a : $w_1^4 = \overline{w_1}$.
4. second degré.
5. α est solution de l'équation, mais il reste le signe.

Exercice 17 On veut calculer les somme :

$$C = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) \quad \text{et} \quad S = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ et $\sigma = \omega+\omega^2+\omega^4$.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^7 = 1$.
   (b) Calculer la somme des solutions de l'équation précédente.
   (c) Exprimer $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}^2$, et $\overline{\omega}^4$ en fonction des puissances ω.
2. (a) Montrer que $\sigma+\overline{\sigma} = -1$ et $\sigma\overline{\sigma} = 2$.
   (b) σ et $\overline{\sigma}$ sont ainsi racines de quel polynôme ?
   (c) Démontrer que S est positif et en déduire C et S.

Correction :

1. (a) Les racines 7-ième de l'unité : $e^{i\frac{2k\pi}{7}}$, pour $0 \leqslant k \leqslant 6$
   (b) La somme fait 1 comme somme géométrique.
   (c) $\overline{\omega} = \omega^6$, $\overline{\omega}^2 = \omega^5$ et $\overline{\omega}^7 = \omega^3$.
2. (a) $\sigma + \overline{\sigma}$ fait la somme des racines 7-ième de 1 sans 1, donc fait -1. $\sigma\overline{\sigma} = 2$ par simple calcul.
   (b) On connaît la somme et le produit, donc ils sont racines de $X^2 + X + 2$.
   (c) En plaçant les points sur un cercle, on constate que S est positif, on a donc $S = \frac{\sqrt{7}}{2}$ puis $C = -\frac{1}{2}$

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

1. Montrer que pour tous nombres complexes a et b :
$$\prod_{k=0}^{n-1}(a + \omega^k b) = a^n - (-b)^n.$$
2. En déduire :
$$\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^{2k} - 2\omega^k \cos\theta + 1) = 2(1 - \cos n\theta).$$

⭑ Moivre et Euler, factorisation par l'angle de moitié

Exercice 19 Linéariser :

$$\cos(3x)\cos(2x) \qquad \cos^2(x) \qquad \sin^2(x) \qquad \cos 4x \cos 2x$$
$$\sin 3x \sin x \qquad \sin 3x \cos 2x \qquad \cos^3 x \qquad \sin^3 x \qquad \cos^3 x \sin x$$

Correction : Utiliser Euler.

Exercice 20 Factoriser par l'angle de moitié pour trouver le module et l'argument de :

$$1 + e^{i\theta} \qquad 1 - e^{i\theta} \qquad e^{i\alpha} + e^{i\beta} \qquad e^{i\alpha} - e^{i\beta} \qquad e^{i\alpha} + e^{-i\beta},$$

où θ, α et β sont des réels quelconques.

Exercice 21 Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}$ est de module 1.

Déterminer l'ensemble : $E = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \exists \lambda \in \mathbb{R}, z = \dfrac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i} \right\}$.

Correction : On a : $|1 + \lambda i| = |1 - \lambda i|$, simplement parce que $\overline{1 + \lambda i} = 1 - \lambda i$. Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, on résout :
$$\frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i} = e^{i\theta} \iff \lambda = -i\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}.$$
Si $\theta = \pi$ il n'y a pas de solution. Donc : $E = \{z \in \mathbb{U} | z \neq -1\}$.

Exercice 22 Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2p+1 \leqslant n} \left(-\frac{1}{3}\right)^p \binom{n}{2p+1}$, à l'aide du développement de $\left(1 + i\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$.

Correction : Avec Moivre, on obtient que S est la partie imaginaire de $\left(1 + i\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$ multiplié par $\sqrt{3}$. En prenant la forme exponentielle, on obtient l'expression : $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$. Ainsi : $S = \sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$.

⭑ Interprétation géométrique

Exercice 23 Soit le triangle OZ_1Z_2, dont les sommets Z_1 et Z_2 ont pour affixes z_1 et z_2.

Calculer l'affixe z_C du centre circonscrit.

Montrer que le rayon de ce cercle est : $R = \dfrac{\text{produit des trois côtés}}{4 \times \text{surface}}$.

Correction : il faut $|z_c| = |z_c - z_1| = |z_c - z_2|$

Exercice 24 On considère la transformation du plan

$$f : M_z \longmapsto M'_{g(z)}.$$

Lorsque $g : z \mapsto (1+i)z + 2 - i$, montrer que f est la composée de l'homothétie de rapport $\Omega(-1,-2)$ de rapport $\sqrt{2}$, et de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Correction : Par définition :

$$h : z \mapsto \sqrt{2}\,(z-1-2i)+1+2i \qquad h \text{ homothétie}$$
$$r : z \mapsto e^{i\frac{\pi}{4}}\,(z-1-2i)+1+2i \qquad r \text{ rotation}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
r \circ h : z &\longmapsto e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2}\,(z-1-2i)+1+2i-1-2i\right)+1+2i\\
&\longmapsto e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2}\,(z-1-2i)\right)+1+2i\\
&\longmapsto (1+i)\,(z-1-2i)+1+2i\\
&\longmapsto (1+i)z-(1+i)(1+2i)+1+2i\\
&\longmapsto (1+i)z-i(1+2i)\\
&\longmapsto (1+i)z+2-i.
\end{aligned}$$

Exercice 25 Soit a, b et c trois réels distincts modulo 2π. Que dire de l'argument de $\dfrac{e^{ic}-e^{ia}}{e^{ib}-e^{ia}}$? Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

C'est un argument de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 26 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que le triangle ayant pour sommet les points d'affixe de z, z^2, $z+i$ soit rectangle en M.

Réunion des deux droites $x = \frac{1}{2}$ et $y = 0$.

Fiche trigonométrie

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Savoir-faire :
- Retrouver une formule de trigonométrie en utilisant les complexes.
- Transformer $a\cos(x)+b\sin x$ en $A\cos(x-\varphi)$.

Dans cette fiche, on revoit ce qu'il faut savoir sur les fonctions trigonométriques.

✯ Le cercle trigonométrique

Dessin du cercle à faire

✯ Fonction sinus

La fonction sinus est
- définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1,1]$, 2π périodique et impaire,
- sa dérivée $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin'(x)=\cos(x)$.
- La tangente en 0 a pour coefficient directeur 1.
  On en déduit la limite usuelle :
  $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$
- Position par rapport à la tangente en l'origine : la fonction est en-dessous de sa tangente en 0 pour $x>0$ donc $\forall x>0,\ \sin(x)<x$.
- Tangente horizontale aux points tels que $\frac{\pi}{2}\,[\pi]$.

✯ Fonction cosinus

La fonction cosinus est
- définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1,1]$, 2π périodique et paire,
- sa dérivée vaut : $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos'(x)=-\sin(x)$.
- La tangente en 0 : est horizontale.
- On a :
  $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

Représentation graphique

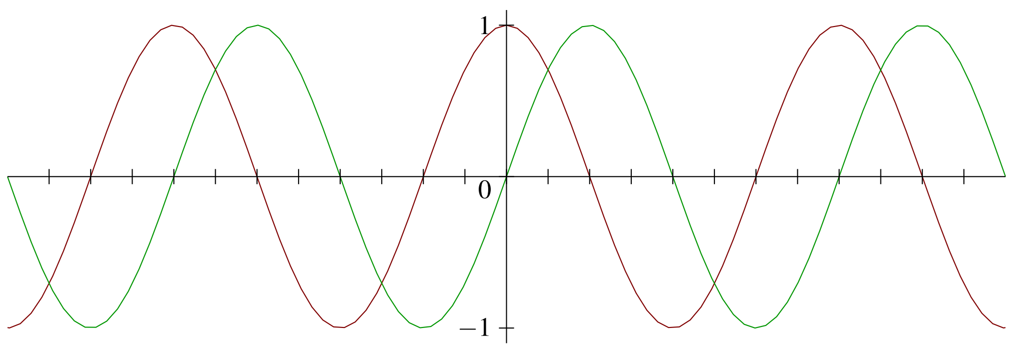


FIGURE 3.1 – Fonctions cosinus et sinus

✯ Fonction tangente

La fonction tangente est égale à $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Elle est définie sur l'ensemble des x tel que $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$. L'ensemble de définition est donc : $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

- La fonction tangente est π périodique impaire,
- la tangente en 0 est $\Delta : y = x$,
  on en déduit la limite usuelle :
  $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$
- les limites aux bornes : $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
- La dérivée : $\forall x \in \mathscr{D},\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Représentation graphique

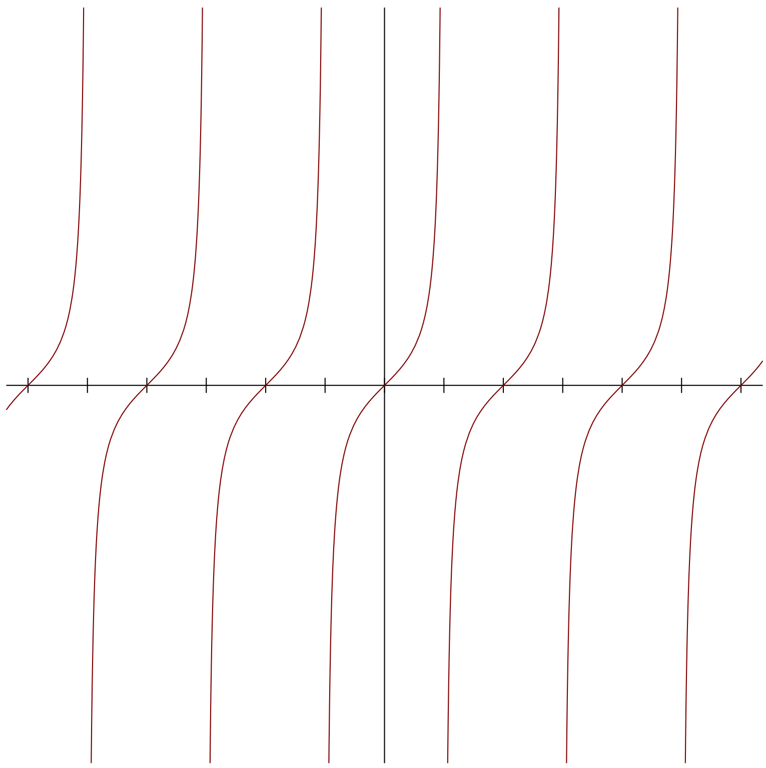


FIGURE 3.2 – Fonction tangente

Valeurs usuelles

Le tableau 3.1 résume les valeurs à savoir. Il est aussi important de savoir retrouver ces valeurs sur le cercle trigonométrique.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

TABLE 3.1 – Valeurs trigonométriques à savoir

Faire le dessin du quart de cercle.

Notation VIII.1. *Pour les fonctions trigonométriques, si il n'y a pas d'ambiguïté, on utilise* $\sin\theta$ *à la place de* $\sin(\theta)$. *De même, la notation* $\sin^2(x)$ *désigne* $\sin(x)\times\sin(x)$.

✯ Angles opposés, complémentaires, supplémentaires

On a :

$$\begin{cases}\sin(-x) = -\sin(x)\\ \cos(-x)=\cos(x)\\ \tan(-x)=-\tan(x)\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin(\pi-x)=\sin(x)\\ \cos(\pi-x)=-\cos(x)\\ \tan(\pi-x)=-\tan(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(\pi+x)=-\sin(x)\\ \cos(\pi+x)=-\cos(x)\\ \tan(\pi+x)=\tan(x)\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan(x)}\end{cases}$$

Formule à retrouver rapidement sur un cercle, plutôt qu'à apprendre par cœur

✯ Sinus, cosinus et tangente d'une somme et d'une différence, angle double

$$\begin{cases}\cos(a+b) & =\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \sin(a+b) & =\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\\ \tan(a+b) & =\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\end{cases}$$

Formule que l'on peut retrouver par Moivre :

$$\begin{aligned}e^{i(a+b)} &= \cos(a+b)+i\sin(a+b)\\ &= e^{ia}e^{ib} = (\cos(a)+i\sin(a))(\cos(b)+i\sin(b))\\ &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+i\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b).\end{aligned}$$

Pour la tangente, il faut penser à diviser par le terme « en bas à gauche » (*i.e.* $\cos a\cos b$) pour obtenir 1 :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin a+b}{\cos a+b}\\ &= \frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}\\ &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}{1-\frac{\sin a}{\cos a}\frac{\sin b}{\cos b}}\\ &= \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\end{aligned}$$

En appliquant à la différence :

$$\begin{cases} \cos(a-b) & = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) & = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ \tan(a-b) & = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b} \end{cases}$$

En appliquant à l'angle double :

$$\begin{cases} \cos(2x) = & \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \\ \sin(2x) = & 2\sin(x)\cos(x) \\ \tan(2x) = & \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \end{cases}$$

que l'on peut retrouver directement par $e^{2ix} = (e^{ix})^2$ et en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$:

$$\begin{aligned} e^{2ix} &= \cos(2x) + i\sin(2x) \\ &= (\cos(x) + i\sin(x))^2 \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x). \end{aligned}$$

On a aussi les formules qui relient l'angle de moitié au carré :

$$\begin{cases} \cos^2(a) & = \frac{1+\cos(2a)}{2} \\ \sin^2(a) & = \frac{1-\cos(2a)}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-\cos(x) & = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ 1+\cos(x) & = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

On peut retrouver ces formules en utilisant Euler :

$$\begin{aligned} \cos^2(a) &= \frac{1}{4}(e^{ia} + e^{-ia})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2ia} + 2 + e^{-2ia}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2a)). \end{aligned}$$

On peut retrouver les deuxièmes en utilisant deux factorisations par l'angle de moitié :

$$\begin{aligned} 1 + \cos(x) &= 1 + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{ix} + 1 + e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{x}{2}} 2\cos(\frac{x}{2}) + e^{-i\frac{x}{2}} 2\cos(-\frac{x}{2})\right) \\ &= \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

☆ **Transformation de produit en somme**

$$\begin{aligned}\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\Big[\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big]\\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2}\Big[\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big]\\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}\Big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big]\end{aligned}$$

On peut retrouver ces formules avec Euler :

$$\begin{aligned}\sin a \cos b &= \frac{1}{4i}\Big[(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})\Big]\\ &= \frac{1}{4i}\Big[e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}+e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}\Big]\\ &= \frac{1}{2}\Big[\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big].\end{aligned}$$

✯ Transformation de somme en produit

Ces formules ne sont pas à savoir par cœur.

$$\begin{cases}\sin(p)+\sin(q) = & 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \cos(p)+\cos(q) = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \sin(p)-\sin(q) = & 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\\ \cos(p)-\cos(q) = & -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).\end{cases}$$

Ces formules proviennent de la factorisation par l'angle de moitié :

$$\begin{aligned}\sin(p)+\sin(q) &= \frac{1}{2i}\Big[e^{ip}-e^{-ip}+e^{iq}-e^{-iq}\Big]\\ &= \frac{1}{2i}\Big[e^{ip}+e^{iq}-(e^{-iq}+e^{-ip})\Big]\\ &= \frac{1}{2i}\Big[e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}})-e^{-i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}})\Big]\\ &= \frac{1}{2i}\Big[e^{i\frac{p+q}{2}}2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)-e^{-i\frac{p+q}{2}}2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\Big]\\ &= \frac{\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}{i}\Big[e^{i\frac{p+q}{2}}-e^{-i\frac{p+q}{2}}\Big]\\ &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\end{aligned}$$

✯ Équation trigonométrique

Il faut dessiner systématiquement le cercle trigonométrique, de manière à éviter toute erreur

Cosinus égaux

$$\begin{aligned}\cos x = \cos\alpha &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi\\ &\iff x \equiv \alpha\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\alpha\,[2\pi]\end{aligned}$$

Sinus égaux

$$\begin{aligned}\sin x = \sin\alpha &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi\\ &\iff x \equiv \alpha\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \alpha\,[2\pi]\end{aligned}$$

Tangentes égales

$$\begin{aligned}\tan x = \tan\alpha &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + k\pi\\ &\iff x \equiv \alpha[\pi]\end{aligned}$$

⋆ **Propriété fondamentale**
Enfin, il ne faut pas oublier la relation

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

C'est la seule relation à « angle constant » entre les fonctions cos et sin.
Elle relie les carrées, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\cos(x)| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Ainsi si on connaît le sinus, alors on connaît le cosinus *au signe près*.

En divisant par $\cos^2 x$ (respectivement par $\sin^2 x$), on en déduit les relations entre la fonction tangente et cosinus (respectivement sinus) :

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\tan^2 x} + 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x + 1}$$

$$|\cos x| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \qquad \text{et} \qquad |\sin x| = \frac{|\tan x|}{\sqrt{\tan^2 + 1}}$$

Là encore, il faut un argument de signe pour enlever la valeur absolue.

⋆ **Résolution de** $a\cos x + b\sin x = c$
On s'intéresse à la résolution de l'équation (E) d'inconnue x :

$$(E) : \qquad a\cos x + b\sin x = c, \qquad \text{avec } (a,b) \neq (0,0)$$

La première étape consiste à poser $z = a + ib$. On a $z \neq 0$ (si a et b sont nuls, et le problème a peu d'intérêt). On peut donc écrire ce nombre complexe sous forme trigonométrique : $z = \rho e^{i\alpha}$.

On divise alors par ρ pour avoir :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\rho}\cos x + \frac{b}{\rho}\sin y &= \frac{c}{\rho} \\ \cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin y &= \frac{c}{\rho} \\ \cos(x - \alpha) &= \frac{c}{\rho}. \end{aligned}$$

Deux cas sont alors possibles :

- si $\left|\frac{c}{\rho}\right| > 1$, l'équation (E) n'a pas de solution dans ce cas.
- sinon, il existe un angle θ tel que $\cos(\theta) = \frac{c}{\rho}$. Dans ce cas l'équation (E) est équivalente avec ces nouvelles notations à

  $$(E') : \qquad \cos(x - \alpha) = \cos(\theta).$$

  Cette dernière équation se résout de manière classique.

Comme souvent : apprenez la technique et non les formules.

■ **Exemple VIII.2** On veut résoudre :

$$(E) : \qquad \sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{3}.$$

On considère donc le nombre complexe :

$$z = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
(E) &\Longleftrightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos x - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
(E) &\Longleftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}
$$

On résout alors classiquement :

$$
\begin{aligned}
(E) &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}+2k\pi, \text{ ou}\\ x+\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases}\\
(E) &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = 2k\pi, \text{ ou}\\ x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi. \end{cases}
\end{aligned}
$$

■

Interprétation géométrique : si on considère le nombre complexe $z = a+ib$ et le nombre complexe $X = \cos x + i\sin x$ (qui est sur le cercle unité). On identifie ces nombres complexes à des vecteurs du plan.

L'équation peut alors s'écrire : $z \cdot X = c$. En effet, $a\cos x + b\sin x$ est le produit scalaire du vecteur z et X.

En géométrie, on sait que le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit des normes par le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs. Appliqué ici, cela donne : $z \cdot X = |z|\cos(x-\alpha)$. En effet, $|X| = 1$ et l'angle formé par les deux vecteurs est $x-\alpha$. On obtient donc bien l'équation : $|z|\cos(x-\alpha) = c$.

✯ Transformation de $a\cos x + b\sin x$ en $A\cos(x-\varphi)$

En mathématiques, on utilise souvent l'expression : $a\cos x + b\sin x$ (somme de deux fonctions trigonométriques de même pulsation) à la place de l'expression physique : $A\cos(x-\varphi)$, qui met en avant **l'amplitude** A et la **phase** φ.

En fait ces deux expressions sont équivalentes dans le sens où si $x \in \mathbb{R}$:

$$
\left\{ a\cos x + b\sin x \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ A\cos(x-\varphi) \,\middle|\, A \in \mathbb{R}^+,\ \varphi \in [0,2\pi[\right\}
$$

Dans cette partie, on voit comment on peut passer de l'une à l'autre. Il est inutile d'apprendre par cœur les relations, mais il faut savoir les retrouver rapidement.

$\boxed{\supset}$ Soit $A \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in [0,2\pi[$:

$$
\begin{aligned}
A\cos(x-\varphi) &= A\cos(\varphi)\cos(x) + A\sin(\varphi)\sin(x)\\
&= a\cos(x) + b\sin(x) && \text{en posant } a = A\cos(\varphi) \text{ et } b = A\sin(\varphi)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\subset}$ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: On pose $A = \sqrt{a^2+b^2}$, et $\varphi \in [0,2\pi[$ l'argument principal de $a+ib$.
On a alors :

$$
a+ib = A\cos(\varphi) + iA\sin(\varphi).
$$

On obtient alors :

$$
\begin{aligned}
a\cos(x) + b\sin(x) &= A\cos(\varphi)\cos(x) + A\sin(\varphi)\sin(x)\\
&= A\cos(x-\varphi)
\end{aligned}
$$

✯ Autres équations trigonométriques

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
2. $\sin^2(x) + 3\cos(x) - 1 = 0$
3. $\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$
4. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0.$

1. on se ramène à $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et donc à une égalité de cosinus.

2. En utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$, cela devient : $-\cos^2(x) + 3\cos(x) = 0$.
3. C'est équivalent à : $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ou $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
   On utilise alors les relations entre $\cos(\alpha)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ pour se ramener à une égalité de cosinus.
4. Très classique, on calcule :

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + i\left(\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)\right) = e^{ix} + e^{2ix} + e^{i3x}.$$

   On utilise alors la somme des termes d'une suite géométrique et la factorisation par l'angle de moitié.

4 — Relations binaires

I Généralités

Définition I.1 — Relation binaire. Soit E un ensemble une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est un prédicat $\mathscr{R}(x,y)$ qui dépends de deux variables $(x,y) \in E$.

On dit que l'élément x est en relation avec l'élément y et on note $x\mathscr{R}y$ si ce prédicat $\mathscr{R}(x,y)$ est vrai.

De manière équivalente, on peut dire qu'une relation est une partie Γ de E^2, avec :

$$\Gamma = \left\{ (x,y) \in E^2 \middle| x\mathscr{R}y \right\}$$
$$\text{ainsi} \quad x\mathscr{R}y \quad \iff \quad (x,y) \in \Gamma.$$

L'ensemble Γ est alors **le graphe** de la relation $\mathscr{R}$. Une relation est entièrement déterminée par son graphe.

■ **Exemple I.1**
- Les exemples à avoir en tête sont dans les réels $x < y$, $x \leqslant y$, $x = y$.
- La **relation d'inclusion** sur $\mathscr{P}(E)$:

$$\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E), \qquad A\mathscr{R}B \iff A \subset B.$$

Pour motiver ce chapitre, on peut dire que l'on cherche à examiner les ressemblances et les différences entre $\leqslant$ et $\subset$. On a en effet des ressemblances :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z \implies x \leqslant z$$
$$\forall (A,B,C) \in (\mathscr{P}(E))^3, \qquad A \subset B \text{ et } B \subset C \implies A \subset C$$

et des différences :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x$$

mais on peut construire A et B deux parties de E tel que $A \subset B$ et $B \subset A$ sont toutes les deux fausses.

- La **divisibilité des entiers relatifs** : notée $n|m$:
$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}, \qquad n|m \iff \exists k \in \mathbb{Z}, m = nk.$$
- On peut considérer un ensemble fini : $E = A, B, C, D$ et une relation qui est alors défini pas un tableau (c'est-à-dire son graphe) :

	A	B	C	D
A	x			x
B	x			
C		x	x	x
D	x			x

une croix dans la case (i, j) signifie $i\mathscr{R}j$.

Ici le graphe est :
$$\mathscr{G} = \Big\{(A,A),(A,D),(B,A),(C,B),(C,C),(C,D),(D,A),(D,D)\Big\}$$
On peut aussi tracer le graphe : une flèche entre i et j signifie $i\mathscr{R}j$ (dessin à faire).
- On peut considérer un ensemble d'ordinateurs avec la relation « être relié », ou un ensemble de personne dans un réseau social avec la relation « être ami ».

■

Le but de ce chapitre est essentiellement de travailler sur les définitions suivantes :

Définition I.2 Soit $\mathscr{R}$ une relation sur l'ensemble E.
- On dit que $\mathscr{R}$ est reflexive si :
$$\forall x \in E, \qquad x\mathscr{R}x.$$
- On dit que $\mathscr{R}$ est symétrique si :
$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x.$$
- On dit que $\mathscr{R}$ est transitive si :
$$\forall (x,y,z) \in E^3, \qquad \Big(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z\Big) \implies x\mathscr{R}z.$$
- On dit que $\mathscr{R}$ est antisymétrique si :
$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \Big(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x\Big) \implies y = x.$$

! Le contraire de symétrique n'est pas antisymétrique. Une relation peut être ni symétrique, ni antisymétrique ou les deux (ex : l'égalité).

L'antisymétrie peut s'écrire :
$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \Big(x\mathscr{R}y \text{ et } x \neq y\Big) \implies \text{non } (y\mathscr{R}x)$$
Lorsque la relation est symétrique, on peut dire que deux éléments sont ou pas en relation. Tandis que quand la relation n'est pas symétrique.

⋆ Fonctions négligeables

On reverra en détail la notion de fonctions négligeables en analyse. Le but ici est d'illustrer la notion de relation et d'introduire des formules utiles en physique, c'est pourquoi on utilise ici la notation $\ll$ qui est celle utilisé en physique.

CETTE NOTATION NE DOIT PAS ÊTRE UTILISÉE EN MATHÉMATIQUES.

Définition I.3 Soit E l'ensemble des fonctions f à valeurs réelles définies à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telles que :

$$\exists A \in R,\ \forall x \in]A,+\infty[, \qquad f(x) \text{ existe et } f(x) \neq 0$$

Sur cette ensemble, on définit la relation : $f \ll g$ par :

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad \left(f \ll g \text{ en } +\infty\right) \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On dit alors que f est **négligeable** devant g (au voisinage de $+\infty$) ou que g est **prépondérante** sur f.

C'est la traduction de l'idée intuitive : la quantité $f(x)$ est très petite devant la quantité $g(x)$ lorsque x est très grand.

Cette relation n'est pas réflexive, puisque si $f \in E$,

$$f \ll f \text{ signifie : } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f(x)} = 0$$

$$\text{ce qui est évidement impossible puisque } \frac{f(x)}{f(x)} = 1$$

Une quantité ne peut ainsi pas être négligeable devant elle-même.

Elle n'est pas symétrique puisque si $f \ll g$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \pm\infty.$$

donc on ne peut pas avoir $g \ll f$.

Elle est antisymétrique car :

$$f \ll g \text{ et } g \ll f \text{ est impossible.}$$

R On rappelle que $P \implies Q$ est toujours vrai si P est fausse.

Par contre, cette relation est transitive, ce qui traduit l'idée que si une quantité f est négligeable devant g et g négligeable devant h, alors f est négligeable devant h. En effet, en supposant $f \ll g$ et $g \ll h$:

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{g(x)}{h(x)}}_{\to 0} \qquad \text{ainsi} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = 0.$$

! Pour deux fonction $(f,g) \in E^2$, on peut avoir

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ n'a pas de limite en } +\infty.$$

On a alors les formules suivantes :

$$f \ll 1 \text{ signifie : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

La comparaison des puissances :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^3} \ll \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x} \ll 1 \ll x \ll x^2 \ll x^3 && \text{en } +\infty\\
f \ll x \text{ signifie : } &f(x) \text{ est négligeable devant } x && \text{en } +\infty\\
&f(x) \text{ peut tendre vers } +\infty \text{ mais moins vite que } x && \text{en } +\infty\\
f \ll \frac{1}{x} \text{ signifie : } &f(x) \text{ tends vers 0 plus vite que } x && \text{en } +\infty
\end{aligned}$$

Quelques exemples :

$$\begin{aligned}
\text{des exemples : } &x^3 + 3x^2 \ll x^4 && \text{en } +\infty\\
&x \ll x\ln(x) \ll x^2 && \text{en } +\infty\\
&x \ll e^x \ll xe^x \ll x^2e^x && \text{en } +\infty\\
&\cos(x) \ll x && \text{en } +\infty
\end{aligned}$$

R En toute rigueur $x \longmapsto \cos(x)$ n'est pas une fonction de E. D'où la nécessité d'une définition plus rigoureuse de la relation $\ll$.

En particulier on a les **croissances comparées :**

$$\begin{aligned}
\ln x \ll x \text{ en } +\infty \qquad &\text{et même :} \qquad \forall a>0, \forall b\in\mathbb{R}, \Big(\ln(x)\Big)^b \ll x^a \text{ en } +\infty\\
x \ll e^x \text{ en } +\infty \qquad &\text{et même :} \qquad \forall a>0, \forall b\in\mathbb{R}, x^b \ll e^{ax} \text{ en } +\infty.
\end{aligned}$$

R On peut aussi définir la notion de fonctions négligeables en 0 par :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En 0, la comparaison des puissances est dans l'ordre inverse.
On verra la notation $f(x) = \underset{x\to 0}{o}\Big(g(x)\Big)$ qui est plus précise.

II Relation d'ordre

Il s'agit de généraliser la notion $\leqslant$.

Définition II.1 — Relation d'ordre. Une relation d'ordre sur E et une relation sur E qui est réflexive, antisymétrique et transitive.

On note $\leqslant$ une telle relation. On dit alors que $(E, \leqslant)$ est un ensemble ordonné.

Une relation d'ordre est donc caractérisé par :

$$\begin{aligned}
\forall x \in E, &\quad x \leqslant x \\
\forall (x,y) \in E^2, &\quad \left(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x\right) \implies x = y \\
\forall (x,y,z) \in E^3, &\quad \left(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z\right) \implies x \leqslant z,
\end{aligned}$$

Définition II.2 Deux éléments sont comparables si $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

! Attention, contrairement à $\leqslant$ dans les réels, on ne peut pas comparer tous les éléments.

★ Exemples et remarques

■ **Exemple II.1** Dans $\mathscr{P}(E)$, on dispose de la relation d'inclusion :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E), \quad A \leqslant B \iff A \subset B.$$

On a bien :

$$\begin{array}{rlr}
\forall A \in \mathscr{P}(E), & A \subset A, & \text{symétrique} \\
\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, & A \subset B \text{ et } B \subset A \implies A = B & \text{antisymétrique} \\
\forall (A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3, & A \subset B \text{ et } B \subset C \implies A \subset C & \text{transitive}
\end{array}$$

■

On voit ici la différence avec $\leqslant$: on ne peut pas comparer tous les éléments. Par exemple, dans $\mathscr{P}([\![1,10]\!])$, $\{2,3,4,5\}$ et $\{3,7\}$ ne sont pas comparables.

Définition II.3 On dit que $\leqslant$ est un ordre total si deux éléments quelconques de E, c'est-à-dire si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \left(x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x\right).$$

L'ensemble $(E, \leqslant)$ est alors un ensemble totalement ordonné.

Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel.

Si $\leqslant$ est une relation d'ordre, alors on peut définir une **relation d'ordre stricte** notée $<$ par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x < y \iff \left(x \neq y \text{ et } x \leqslant y\right)$$

Cette relation est transitive et antisymétrique, mais ce n'est pas une relation d'ordre (puisqu'elle n'est pas réfléxive).

Par exemple, on peut utiliser le symbole $\subsetneq$.
On peut aussi définir la **relation d'ordre inverse** $\geqslant$ par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x \geqslant y \iff x \leqslant y$$

C'est aussi une relation d'ordre.
Par exemple, on peut utiliser le symbole $\supset$.
On peut aussi définir $>$.
Si la relation d'ordre est partielle, on a :

$$\text{non}\Big(x \leqslant y\Big) \iff \Big(x \text{ et } y \text{ ne sont pas comparables ou } x > y\Big)$$

Si la relation d'ordre est totale :

$$\text{non}\Big(x \leqslant y\Big) \iff x > y$$

■ **Exemple II.2** Dans l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on peut définir la relation d'ordre :

$$\forall (f,g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad f \leqslant g \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x).$$

C'est une relation d'ordre partielle sur $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ■

■ **Exemple II.3** Dans $\mathbb{C}^2$, on peut définir la relation d'ordre partielle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \qquad x \leqslant y \iff \Big(\text{Re}(x) \leqslant \text{Re}(y) \text{ et } \text{Im}(x) \leqslant \text{Im}(y)\Big).$$

■

(!) Il n'y a pas de relation d'ordre « intéressante » sur $\mathbb{C}^2$, dans le sens où il n'y a pas de relation d'ordre compatible avec les opérations $+$, $\times$ définies sur $\mathbb{C}^2$.

✯ Relation de divisibilité des entiers naturels

Proposition II.1 La relation n divise m (m est divisible par n) notée $n|m$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad n|m \iff \exists q \in \mathbb{N}, m = nq$$

est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$.

Cette relation d'ordre est partielle, par exemple 2 et 3 ne sont pas comparables.

(!) La relation de divisibilité sur les entiers relatifs définie par :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad n|m \iff \exists q \in \mathbb{Z}, m = nq$$

n'est pas une relation d'ordre, car elle n'est pas antisymétrique :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad n|m \text{ et } m|n \implies m = \pm n$$

et donc par exemple $2|-2$ et $-2|2$ mais $2 \neq -2$.

✯ Ordre lexicographique

Proposition II.2 La relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \iff \begin{cases} x_1 < y_1 \\ \text{ou } \left(x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leqslant y_2\right) \end{cases}$$

$$\text{avec les notations} \quad x = (x_1, x_2) \text{ et } y = (y_1, y_2)$$

est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

C'est l'**ordre lexicographique** sur $\mathbb{R}^2$.

On peut de la même manière définir l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^n$: c'est l'ordre du dictionnaire.

P L'ordre lexicographique est très important en informatique. Par exemple, c'est celui qui est utilisé pour comparer deux chaînes de caractères.

☆ Vocabulaire dans les ensembles ordonnés

Définition II.4 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, A une partie de E et $a \in A$.

- On dit que a est le plus grand élément de A, si $\forall x \in A$, $x \leqslant a$. Quand il existe le plus grand élément se note $\max(A)$.
- On dit de même que a est le plus petit élément de A, si $\forall x \in A$, $a \leqslant x$. Quand il existe le plus grand petit se note $\min(A)$.

Si ils existe $\min(A)$ et $\max(A)$ sont uniques.

! Il n'y a pas toujours de plus grand ou de plus petit élément.

Démonstration de l'unicité du plus petit élément si il existe. Supposons qu'il existe deux minimum a et a'. On a alors

$$a \leqslant a' \text{ et } a' \leqslant a \text{ d'où } a = a' \text{ car la relation } \leqslant \text{ est antisymétrique.}$$

D'où l'unicité. ■

■ **Exemple II.4** Dans $(\mathbb{N}, |)$, $\min(\mathbb{N})$ est 1, $\max(\mathbb{N})$ est 0, car tout entier de $\mathbb{N}$ est divisible par 1 et divise 0. ■

■ **Exemple II.5** Considérons $(\mathbb{R}, \leqslant)$ et le sous-ensemble $I = [0, 1[$.

Montrons qu'il n'existe pas de plus grand élément. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in I$ le plus grand élément.

Notons alors :

$$y = \frac{1+x}{2}, \qquad \text{on a alors } y \in I \text{ et } y > x \text{ contradiction.}$$

Ainsi, il n'existe pas de plus grand élément dans I. ■

■ **Exemple II.6** Dans $\mathscr{P}(E)$ muni de la relation $\subset$, on a $\min(\mathscr{P}(E)) = \emptyset$, et $\max(\mathscr{P}(E)) = E$, car tout ensemble de $\mathscr{P}(E)$ contient l'ensemble vide et est inclus dans E. ■

■ **Exemple II.7** À la suite de l'exemple précédent, on considère toujours $\mathscr{P}(E)$ muni de la relation $\subset$. Supposons que E ait plus de deux éléments et montrons qu'il n'existe pas de plus grand élément dans $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un plus grand élément noté A. C'est donc un élément de $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$, ie une partie de E qui n'est pas E entier. Considérons donc $x \in E \setminus A$. On a :

$$\{x\} \in \mathscr{P}(E) \setminus \{E\}, \text{ donc } \{x\} \subset A$$
$$\text{c'est-à-dire } x \in A \text{ contradiction.}$$

Ainsi, il n'y a pas de plus grand élément dans $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$. ■

Définition II.5 Soit A une partie d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$. Un élément $a \in E$ est :
- un majorant de A si $\forall x \in A$, $x \leqslant a$,
- un minorant de A si $\forall x \in A$, $a \leqslant x$.

! Il n'y a pas d'unicité du majorant et du minorant.

■ **Exemple II.8** Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, 2 est un majorant de $[0,1[$.

$$1 \text{ est un majorant de } \left\{ \cos(x) \middle| x \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

III Relation d'équivalence

Définition III.1 — Relation d'équivalence. Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est une relation d'équivalence sur E si elle est réflexive, symétrique et transitive.

La relation d'équivalence la plus simple est bien sûr l'égalité.

■ **Exemple III.1** Soit $f : E \to F$, on peut définir une relation d'équivalence sur E par

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y).$$

■

■ **Exemple III.2** Dans l'ensemble des droites $\mathscr{D}$ du plan , on peut définir une relation d'équivalence sur $\mathscr{D}$ par :

$$\forall (D,\Delta) \in \mathscr{D}^2, \qquad D\mathscr{R}\Delta \iff \Delta \,/\!/\, D$$

■

⋆ Classes d'équivalence

Définition III.2 Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E. Pour $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x l'ensemble des éléments de E en relation avec x. On le note $\mathscr{C}(x)$. Ainsi :

$$\mathscr{C}(x) = \left\{ y \in E \middle| x\mathscr{R}y \right\}$$

Notation III.1. *La classe d'équivalence est noté $cl(x)$, $\mathscr{C}(x)$, $\overline{x}$ ou $\dot{x}$ selon les ouvrages..*

Pour tout $x \in E$, $x \in \mathscr{C}(x)$. En particulier aucune classe d'équivalence n'est vide.
Si $(x,y) \in E$, on a deux choix :

- soit x et y sont équivalents et donc $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$ (par transitivité),
- soit x et y ne sont pas équivalents et dans ce cas $\mathscr{C}(x) \cap \mathscr{C}(y) = \emptyset$.

Ainsi, **les classes d'équivalence sont disjointes**.
Une classe d'équivalence $\mathscr{C}$ est entièrement déterminée par l'un des $x \in E$ tel que $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}$. On dit que x est un **représentant** de X.

R Les classes d'équivalence forment une **partition** de E. C'est à dire qu'il s'agit d'une famille de parties de E non vides et disjointes dont l'union fait E.

Réciproquement, on peut associer à une partition une unique relation d'équivalence. Ainsi, la relation d'équivalence est entièrement déterminée par ses classes d'équivalence.

■ **Exemple III.3** On reprends l'exemple précédent : soit $f : E \to F$, on définit l'équivalence sur E par

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y).$$

Soit $x \in E$, $\mathscr{C}(x)$ est l'ensemble des élément y de E qui vérifient $f(y) = f(x)$. Autrement dit :

$$\mathscr{C}(x) = f^{-1}\Big(\{f(x)\}\Big).$$

■

■ **Exemple III.4** Soit Ω un point quelconque du plan $\mathscr{P}$. On définit une relation d'équivalence sur le plan $\mathscr{P}$ par :

$$\forall (M,N) \in \mathscr{P},\ M\mathscr{R}N \iff d(M,\Omega) = d(N,\Omega).$$

Les classes d'équivalence sont les cercles de centre Ω. ■

☆ Les nombres rationnels

Considérons $E = \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, l'ensemble des couples d'entiers relatifs. On dit que deux couples sont équivalents si :

$$(p,q)\mathscr{R}(p',q') \iff pq' = p'q.$$

C'est bien sûr la traduction de $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$.

Considérons par exemple, la classe d'équivalence $\mathscr{C}(2,3)$, c'est-à-dire l'ensemble des couples (p,q) tels que $3p = 2q$ ie $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$.

En notant $\frac{2}{3}$ à la place de $\mathscr{C}(2,3)$, on peut définir la fraction comme la classe d'équivalence :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} =& \mathscr{C}(2,3) = \left\{(p,q) \in (\mathbb{Z}^*)^2 \middle| 3p = 2q\right\} \\ =& \left\{(2,3),(4,6),(6,9),(8,12)\right\}\end{aligned}$$

L'égalité $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ revient alors à dire que les deux classes d'équivalence sont les mêmes, c'est-à-dire que $\mathscr{C}(2,3) = \mathscr{C}(4,6)$ ou encore que $(2,3)\mathscr{R}(4,6)$.

Ce travail permet de définir formellement les fractions de nombres rationnels comme des ensembles de couples de rationnels.

✩ Congruence modulo un réel strictement positif

Définition III.3 — Congruence modulo θ. Soit $\theta \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit la relation de congruence modulo θ sur $\mathbb{R}$ comme :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x \equiv y\ [\theta] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + k\theta$$

C'est une relation d'équivalence.

Si $x \equiv y[2\pi]$, alors (x,y) « sont le même angle » (même cosinus, même sinus). (faire un dessin pour $x \equiv y[\pi]$, $x \equiv y\left[\frac{\pi}{2}\right]$)

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique représentant de $\mathscr{C}(x)$ qui est dans $[0,\theta[$ ou dans $\left]-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right[$.

On a les propriétés :

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad & x \equiv y[\theta] & \iff & \quad x + \lambda \equiv y[\theta] \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \qquad & x \equiv y[\theta] & \iff & \quad \lambda x \equiv \lambda y[\lambda\theta].\end{aligned}$$

■ **Exemple III.5** Classiquement les solutions des équations trigonométriques :

$$\cos x = \cos\alpha \iff \begin{cases} x \equiv \alpha[2\pi] \\ x \equiv -\alpha[2\pi] \end{cases} \qquad \sin x = \sin\alpha \iff \begin{cases} x \equiv \alpha[2\pi] \\ x \equiv \pi - \alpha[2\pi] \end{cases}$$

■

✩ Division euclidienne et congruence modulo un entier

Définition III.4 — division euclidienne. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, alors il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, tel que :

$$a = bq + r \qquad\qquad \text{avec } r \in [\![0, b-1]\!].$$

C'est la division euclidienne de a par b. L'entier relatif q est le quotient, tandis que l'entier r est le reste.

P En python, le quotient est `a//b` et le reste est `a%b`. Attention, ce n'est pas la même convention pour les entiers négatifs.

La relation de divisibilité de $(a,b) \in \mathbb{Z}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &b \text{ divise } a \\ &\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ a = kb \\ &\iff \quad \big(a = b = 0 \text{ ou le reste de la division euclidienne de } a \text{ par } |b| \text{ est nul}\big) \end{aligned}$$

Définition III.5 — congruence modulo n. Soit n un entier strictement positif. On dit que deux entiers relatifs (x,y) sont congrus modulo n si :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \qquad x = y + kn.$$

Par exemple modulo 2, il y a deux classes d'équivalence $\mathscr{C}(0)$ (les entiers pairs) et $\mathscr{C}(1)$ (les entiers impairs).

D'après la division euclidienne, modulo n, il y a n classes d'équivalence :

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(0) &= \left\{ kn \middle| k \in \mathbb{N} \right\} && \text{l'ensemble des multiples de } n \\ \mathscr{C}(1) &= \left\{ kn+1 \middle| k \in \mathbb{N} \right\} && \text{ceux congrus à 1 modulo } n \\ \mathscr{C}(2) &= \left\{ kn+2 \middle| k \in \mathbb{N} \right\} && \text{ceux congrus à 2 modulo } n \\ &\ldots\ldots && \ldots \\ \mathscr{C}(n-1) &= \left\{ kn+(n-1) \middle| k \in \mathbb{N} \right\} && \text{ceux congrus à n-1 modulo } n \end{aligned}$$

Proposition III.1 On a les propriétés suivantes pour a, b et $c \in \mathbb{Z}^3$ et n et $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} a \equiv b\,[n] &\iff a + c \equiv b + c\,[n] \\ a \equiv b\,[n] &\implies ma \equiv mb\,[mn] \implies ma \equiv mb\,[n] \\ a \equiv b\,[n] &\implies a^m \equiv b^m\,[n] \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, tel que $a \equiv b\,[n]$. On sait alors qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$.

On a alors $a + c = b + c + kn$, d'où $a + c \equiv b + c\,[n]$.

On a aussi : $ma = mb + k(mn)$, donc $ma \equiv mb\,[mn]$ et on peut aussi écrire : $ma = mb + (km)n$, et donc $ma \equiv mb\,[m]$ (propriété beaucoup moins forte que la précédente).

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} a^m &= (b+kn)^m \\ &= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (kn)^i b^{m-i} \\ &= b^m + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (kn)^i b^{m-i} \\ &= b^m + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j+1} (kn)^{j+1} b^{m-j-1} \\ &= b^m + n \left(\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j+1} k^{j+1} n^j b^{m-j-1} \right) \end{aligned}$$

On pose donc :

$$K = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j+1} k^{j+1} n^j b^{m-j-1}$$

On a $K \in \mathbb{Z}$ (comme somme et produit d'entiers relatifs). Donc de l'écriture : $a^m = b^m + nK$, on déduit : $a^m \equiv b^m \, [n]$.

■

✯ Fonctions équivalentes

On utilise ici la notation $\approx$ utilisée en physique et on reverra ces notions en détail dans le chapitre d'analyse dédié.

Définition III.6 Soit E l'ensemble des fonctions f à valeurs réelles définies autour de 0 sauf peut-être en 0, c'est-à-dire telles que :

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall x \in]-\varepsilon, 0[\cup]0, +\varepsilon[, \qquad f(x) \text{ existe et } f(x) \neq 0$$

Sur cette ensemble, on définit la relation : $f \approx g$ par :

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad f \approx g \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On dit alors que f et g sont équivalentes devant g (au voisinage de 0).

C'est la traduction de l'idée intuitive : la quantité $f(x)$ est du même ordre que la quantité $g(x)$.

Cette relation est réflexive, puisque si $f \in E$,

$$f \approx f \text{ signifie : } \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{f(x)} = 1 \text{ ce qui est évident.}$$

Elle est symétrique puisque si $f \approx g$, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \text{ donc } \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \text{ soit } g \approx f.$$

Cette relation est transitive, ce qui traduit l'idée que si une quantité f est du même ordre que g et g est du même ordre que h, alors f est du même ordre que h. En effet :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{g(x)}{h(x)}}_{\to 1} \qquad \text{ainsi} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{h(x)} = 1.$$

C'est-à-dire $f \approx h$.

La relation $\approx$ est donc une relation d'équivalence sur E.

On a alors les formules suivantes :

$$\text{si } l \neq 0,\ f \approx l \text{ signifie : } \lim_{x\to 0} f(x) = l$$

$$f \approx x \text{ signifie : } f(x) \text{ tends vers } 0 \text{ à la vitesse de } x$$

$$\text{si } h \in E \text{ et } f \approx g \text{ alors } fh \approx gh$$

$$\text{si } f_1 \approx g \text{ et } f_2 \approx g \text{ alors } f_1 + f_2 \approx 2g$$

$$\text{si } f \text{ est un polynôme } f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n$$

$$\text{alors } f(x) \approx a_p x^p \text{ son terme de plus bas degré.}$$

Par exemple :

$$\text{de la limite usuelle } \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{on déduit l'équivalent : } \cos(x) - 1 \approx \frac{x^2}{2}.$$

Si la fonction f est dérivable en 0, avec $f'(0) \neq 0$, alors on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \text{ ce que l'on peut écrire : } \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{f'(0)x} = 1$$

$$\text{ie} \quad f(x) - f(0) \approx x f'(0).$$

On obtient ainsi la plupart des équivalents usuels en 0 :

$$\sin(x) \approx x \qquad \tan(x) \approx x$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \approx -\frac{x}{2} \qquad \sqrt{1+x} - 1 \approx \frac{x}{2} \qquad (1+x)^\alpha - 1 \approx \alpha x \text{ avec } \alpha > 0.$$

$$\ln(1+x) \approx x \qquad e^x - 1 \approx x$$

$$\arcsin(x) \approx x \qquad \arctan x \approx x$$

R On peut aussi définir la notion de fonctions négligeables en $+\infty$ par :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En $+\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

On définira plus précisément la notation $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$.

Relations binaires

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Généralités

Exercice 1 Quelle est la seule relation sur E qui soit à la fois réflexive, symétrique et antisymétrique ?

Correction : l'égalité. Si $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et antisymétrique et $x\mathscr{R}y$, alors $y\mathscr{R}x$ (symétrie) et de $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$ on déduit $x = y$ (antisymétrie). Réciproque évidente.

Exercice 2 Soit $\mathscr{P}^*$ l'ensemble des nombres premiers strictement supérieur à 2. On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathscr{P}^*$ par :

$$\forall (a,b) \in \mathscr{P}^*, \qquad a\mathscr{R}b \iff \frac{a+b}{2} \in \mathscr{P}^*.$$

Est-ce que cette relation est réflexive, transitive, symétrique ou antisymétrique ?

Correction : Pour comprendre, faire un tableau avec les nombres premiers « petits ». La réflexivité est évidente, la symétrie aussi. Ce n'est pas antisymétrique ($3\mathscr{R}7$ et $7\mathscr{R}3$).

La relation n'est pas transitive, on a par exemple : $3\mathscr{R}7$ (puisque la moyenne fait 5) $3\mathscr{R}11$ (puisque la moyenne fait 7) mais $7 \not\mathscr{R} 11$ (puisque la moyenne fait 9)

⋆ Relation d'ordre

Exercice 3 On définit la relation $\preccurlyeq$ comme l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$:

$$\forall \Big((a,b),(c,d)\Big) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2, \qquad (a,b) \preccurlyeq (c,d) \iff a < c \text{ ou } (a = c \text{ et } b \leqslant d)$$

1. La partie $A = \Big\{(n,n) \Big| n \in \mathbb{N}\Big\}$ est-elle majorée ? Si oui est-ce qu'elle admet un plus grand élément ?
2. Même question pour $B = \Big\{(3,2^n) \Big| n \in \mathbb{N}\Big\}$.
3. Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}^2$ admet un plus petit élément.

Correction : c'est un cas particulier de l'ordre lexicographique vu en cours.

La partie A n'est pas majoré. En effet, si on considère $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ alors $(a+1,a+1)$ est un élément de A tel que : $(a,b) < (a+1,b+1)$.

La partie B est majorée par $(4,0)$. Elle n'admet pas de plus grand élément.

Si X est une partie non vide de $\mathbb{N}^2$, on peut noter $a = \min(x | \exists y \in \mathbb{N}, (x,y) \in X)$, et $b = \min(y | (a,y) \in X)$, on a alors $(a,b) \in X$ et (a,b) est le minimum de X.

Exercice 4 Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ deux relations d'ordre total sur E.

1. On définit la relation $\mathscr{T}$ sur E par : $x\mathscr{T}y \iff (x\mathscr{R}y \text{ et } x\mathscr{S}y)$. Est-ce une relation d'ordre (total, partiel) ?
2. Même question en définissant : $x\mathscr{U}y \iff x\mathscr{R}y$ ou $x\mathscr{S}y$

Correction : $\mathscr{T}$ est une relation d'ordre partielle.

Elle peut ne pas être une relation d'ordre totale. Pour contre-exemple : dans $\mathbb{R}^2$ $\mathscr{R}$ est inférieur ou égale, $\mathscr{S}$ est supérieur ou égal. C'est bien deux relations d'ordre totale, mais $\mathscr{T}$ est l'égalité.

$\mathscr{U}$ n'est pas une relation d'ordre. Pour contre-exemple : dans $\mathbb{R}^2$ $\mathscr{R}$ est inférieur ou égale, $\mathscr{S}$ est supérieur ou égal. C'est bien deux relations d'ordre totale, mais $\mathscr{U}$ est la relation triviale (tout élément est en relation avec tout le monde), donc $\mathscr{U}$ n'est pas antisymétrique.

Vois d'autre contre-exemple : dans $\mathbb{R}^2$ considérer l'ordre lexicographique (1er composante puis 2ème) et l'ordre lexicographique depuis la fin (2ème composante puis 1er).

⋆ Relation d'équivalence

Exercice 5 Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x\mathscr{R}y \iff xe^x = ye^y.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence et étudier le nombre d'éléments d'une classe d'équivalence.

Correction : $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence (c'est l'exemple du cours). Il faut étudier la fonction $x \longmapsto xe^x$ qui est croissante strictement pour $x \geqslant -1$, décroissante pour $x \leqslant -1$.

Ainsi, $\mathscr{C}(y)$ a un seul élément si $y \geqslant 0$, deux éléments si $y < 0$. Exception de $\mathscr{C}(-1)$ qui a un seul élément.

Exercice 6 On définit sur $\mathbb{R}$ la relation : $x\mathscr{R}y \iff x^3 - y^3 = 3(x-y)$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer pour tout réel x, le cardinal de la classe d'équivalence de x.

Correction : $x\mathscr{R}y \iff x^3 - 3x = y^3 - 3y$. On est ramené à l'étude de $x \longmapsto x^3 - 3x$.

Exercice 7 Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit sur $\mathscr{P}(E)$ la relation :

$$\forall (X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2, \qquad X\mathscr{R}Y \iff X \cap A = Y \cap A.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.

Si $E = [\![1,5]\!]$ et $A = \{1,3,5\}$. Déterminer les classes d'équivalence de $\{2,4\}$, $\{1\}$, E, $\{1,2\}$, $\emptyset$ etc.

Réflexivité et symétrie évidente, transitivité aussi. C'est un cas particulier de l'exemple du cours en considérant :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & A \cap X \end{array} \right.$$

5 — Théorie des applications

I Généralités

Définition I.1 — Application. Une application f est la donnée de deux ensembles E et F et d'un processus (abstrait) qui à un élément x de E associe un unique élément noté $f(x)$ de F.

On note alors :

$$f : \begin{cases} E & \to & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

On parle d'application de E dans F ou de E vers F.

L'ensemble E est l'ensemble de départ ou l'ensemble de définition de la fonction f. L'ensemble F est l'ensemble d'arrivée.

Pour $x \in E$, $f(x)$ est l'image de x par f, si on note $y = f(x)$, alors x est un antécédent de y par f.

Le graphe Γ de l'application est la partie de $E \times F$ définie par :

$$\Gamma = \left\{ (x, f(x)) \middle| x \in E \right\}.$$

! Attention aux notations ! les flèches $\to$ et $\longmapsto$ sont différentes.
L'image est d'un point de E existe et est unique (par définition), mais il peut y avoir plusieurs antécédents (ou aucun).

Par définition :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, y = f(x)$$

autrement dit : $\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in \Gamma$.

(faire un dessin fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: toute droite verticale issue de E coupe la courbe en un unique point).

Une application est la donnée de l'ensemble de départ, d'arrivée et de la valeur de $f(x)$ en tout point x. Ainsi, montrer que deux applications f et g sont égales, revient à démontrer :
- que les ensembles de définitions sont les mêmes,
- que les ensembles d'arrivée sont les mêmes,
- que $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$ où E est l'ensemble de définition commun.

On ne peut pas se contenter des deux premières.
Ainsi les applications :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

ne sont pas les mêmes. Elles n'ont pas les mêmes propriétés et dans certains cas, il faut les distinguer soigneusement.
On utilise le mot **fonction** pour désigner le processus qui à x associe $f(x)$ (si il existe). En analyse, il arrive que le mot fonction soit utilisé à la place de application.

La variable x est muette : la fonction $x \longmapsto f(x)$ est rigoureusement la même que la fonction $y \longmapsto f(y)$, on ne change de lettres dans les variables que pour pour rédiger plus clairement.

Pour illustrer les propriétés des applications, on utilise parfois un diagramme avec des flèches : on relie l'élément x de E à l'élément $f(x)$ de F.
(faire un dessin).
Il faut vérifier que : de chaque élément de E part une et une seule flèche. Au contraire, deux flèche peuvent avoir la même extrémité et certains éléments de F ne sont pas atteints par les flèches.

On définit parfois l'application comme la donnée des ensemble E et F et de Γ. Ces données caractérisent l'application.
Une partie Γ de $E \times F$ est le graphe d'une application si : $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma$.
Pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, une courbe est le graphe d'une fonction définie sur E si et seulement si tout droite verticale issue de E coupe la courbe en un unique point.

L'application **identité** sur E est l'application pour laquelle le processus consiste à renvoyer l'élément en entrée. On écrit :

$$Id_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

Notation I.1. *L'ensemble des applications de E dans F se note $\mathscr{F}(E, F)$ ou encore F^E.*

Cette dernière notation est justifiée par le fait que si E et F sont finis, alors F^E est fini et $\mathrm{Card}(F^E) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$.

⋆ **Exemples et contre-exemples**

■ **Exemple I.1** Avec plusieurs variables en entrée et en sortie.

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (u,v) & \longmapsto & (u+v,u-v,\max(u,v))\end{array}\right.$$

■

■ **Exemple I.2** Si E est un ensemble :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E)\\ X & \longmapsto & X\cap A\end{array}\right.$$

■

■ **Exemple I.3** On peut considérer un ensemble de fonctions en entrée : $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$),

Soit $\theta\in\mathbb{R}$, on peut définir :

$$S_\theta:\quad\left\{\begin{array}{ccc}E & \to & E\\ f & \longmapsto & f_\theta:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ \theta & \longmapsto & f(x+\theta)\end{array}\end{array}\right.$$

■

■ **Exemple I.4** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, on peut définir l'application « évaluation en α », qui à un polynôme associe sa valeur en α

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P & \longmapsto & P(\alpha)\end{array}\right.,$$

■

La partie important de la définition d'une application est qu'un élément de l'ensemble de départ une seule image définie sans ambiguïté. On ne peut donc pas définir des applications n'importe comment.

Si on note E l'ensemble des polynômes de degré exactement 3, on peut définir :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P & \longmapsto & \min\{x\in\mathbb{R}|P(x)=0\}\end{array}\right.,$$

Cette application existe car un polynôme de degré exactement 3 a toujours 1, 2, ou 3 racines, on peut donc choisir la plus petite. Par contre, on ne peut pas définir f sur l'ensemble des polynômes de degré exactement 2, car certains n'ont pas de racines dans $\mathbb{R}$, ni même sur l'ensemble des polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui ont des racines, à cause du polynôme nul qui a une infinité de racines. On ne peut pas non plus définir :

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P & \longmapsto & \text{l'un des } x\in\mathbb{R} \text{ tel que } P(x)=0.\end{array}\right.$$

Car alors l'application est mal définie (l'image d'un polynôme n'est pas définie sans ambiguïté).

Lorsqu'une question est : « *montrer que l'on définit une application f sur E par la relation ...* » il faut montrer que l'image d'un élément $x \in E$ par f est défini sans ambiguïté.

Exemple I.5 On peut définir une application :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \text{l'unique solution de l'équation } x^3 + \lambda x - 1 = 0. \end{array}\right.$$

■

⋆ Fonctions en python

La notion de fonction est très importante en informatique, une fonction est une suite d'instruction permettant de construire des variables en sortie à partir de variables d'entrée. Les fonctions permettent d'obtenir un code modulaire et de ramener la résolution d'un problème en sous-problème.

Il s'agit de fonctions et non d'applications, ce qui signifie que le domaine de définition n'est pas attaché à la fonction. Il faut indiquer en entête en commentaire le domaine de définition.

La syntaxe pour écrire une fonction est la suivante :

```
def f(x1, x2) :
    """
    entrée: x1 = type = interprétation
            x2 =
    sortie: y = ...
    """
    # instructions permettant de calculer y à partir de x
    return y
```

R La description des entrées et des sorties est obligatoire.

II Restriction et prolongement

Définition II.1 Soit E' un sous-ensemble de E. La restriction de f à E' est l'application :

$$f_{|E'} : \left\{\begin{array}{ccc} E' & \to & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$$

C'est donc l'application obtenue en prenant comme ensemble de départ E'.

Si E_1 est un ensemble qui contient E et g une application $g : E_1 \to F$. On dit que g est un prolongement de f à E_1 si :

$$\forall x \in E,\ g(x) = f(x).$$

Autrement dit : g est définie sur un ensemble E_1 plus grand que E, et les deux applications coïncident sur E.

R La notation $f_{|E'}$ est standard est à connaître.

! La restriction est unique, mais il y a une infinité de prolongement : prolonger l'application revient à choisir de nouvelles valeurs.

■ **Exemple II.1** Si

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases},$$

alors un prolongement est :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 5 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Bien entendu, ce n'est pas le prolongement le plus opportun, on préfère utiliser **le prolongement par continuité** de f en 0 (qui lui est unique) :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

■

Si $f : E \to F$, on peut toujours étendre le domaine d'arrivée à un ensemble plus grand F_1 qui contient F.
L'application obtenue :

$$\tilde{f} : \begin{cases} E & \to & F_1 \\ X & \longmapsto & f(x) \end{cases} \quad \text{n'est plus l'application } f.$$

On peut aussi restreindre le domaine d'arrivée, lorsque cela est justifié.

III Famille d'éléments indexée par un ensemble

Définition III.1 — Famille. Soit I un ensemble quelconque, une application de I dans E est aussi appelée famille d'éléments de E indexée par I.

On peut utiliser la notation : $\begin{cases} I & \to & E \\ i & \mapsto & x_i \end{cases}$ pour désigner la famille, mais on peut aussi utiliser la notation $(x_i)_{i\in I}$.

■ **Exemple III.1** Lorsqu'on écrit : « Soit (x_1,x_2,x_3) trois réels » on utilise en fait une famille indexée sur $[\![1,3]\!]$. ■

■ **Exemple III.2** Une **suite** u de E est une famille indexée sur $\mathbb{N}$. En général on utilise la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

■ **Exemple III.3** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on peut définir $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-a| \end{array} \right.$ la famille $\left(f_a\right)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille de fonctions indexée sur $\mathbb{R}$. ■

Définition III.2 Une famille indexée sur I est dite finie lorsque l'ensemble I est fini.
Lorsque I est de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$, on choisit le plus souvent $I = [\![1,p]\!]$ et une telle famille est aussi appelé p-liste ou p-uplet. La famille est alors noté $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ ou $(x_1,\dots,x_p)$.
On note E^p l'ensemble des p-uplets.

P En anglais, on dit tuple à la place de p-uplet et c'est le nom d'une structure en python, qui permet de contenir un nombre quelconque d'éléments sans pouvoir modifier ces éléments.

La notation E^p est utile car si E est fini, E^p est aussi fini et :

$$\mathrm{Card}(E^p) = \mathrm{Card}(E)^p.$$

IV Image directe et réciproque

Définition IV.1 Soit f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

On appelle image directe de A par f le sous ensemble de F :

$$\begin{aligned} f(A) &= \left\{ y \in F \middle| \exists x \in A, f(x) = y \right\} \\ &= \left\{ f(x) \middle| x \in A \right\} \end{aligned}$$

On appelle image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$, le sous ensemble de E :

$$f^{-1}(B) = \left\{ x \in E \middle| f(x) \in B \right\}$$

! La notation $f(A)$ correspond à identifier f avec une application de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(F)$: on applique f à un ensemble et non à un élément.
De même, la notation $f^{-1}(B)$, ne signifie pas que f est inversible.
$f(A)$ est un sous-ensemble de E, et $f^{-1}(B)$ est un sous-ensemble de F.

✎ Pour montrer qu'un élément x de E vérifie $x \in f^{-1}(B)$, on vérifie que $f(x) \in B$.
Si on sait qu'un élément x de E vérifie $x \in f^{-1}(B)$, alors on sait que $f(x) \in B$.
Pour montrer qu'un élément y de F vérifie $y \in f(A)$, on construit (éventuellement avec une analyse/synthèse) un élément x qui vérifie $x \in A$ et $f(x) = y$. Si on sait qu'un élément y de F vérifie $y \in f(A)$, alors on peut l'écrire sous la forme : $y = f(x)$ pour un certain $x \in A$.

✎ Autrement dit :

– pour un élément $x \in E$, et une partie B de F,

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B,$$

– pour une partie A de E et un élément $x \in E$,

$$x \in A \implies f(x) \in f(A).$$

La réciproque étant fausse.

On appelle aussi **ensemble image** de f, l'image directe de l'ensemble E entier, c'est-à-dire $f(E)$.

Pour les fonctions réelles de la variable réelle, c'est le tableau de variation (et le théorème des valeurs intermédiaires) qui permet de donner les images directes et réciproques.

Proposition IV.1 Soient A_1 et A_2 deux parties de E et $f : E \to F$. On a alors :

$$A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$$
$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

Démonstration. Montrons que : $A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$.

Soit $y \in f(A_1)$, on sait alors qu'il existe $x \in A_1$, tel que $y = f(x)$. Comme $A_1 \subset A_2$, on a aussi $x \in A_2$. Ce qui donne :

$$\begin{cases} x \in A_2 \\ y = f(x) \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad y \in f(A_2).$$

D'où l'inclusion et le premier résultat.

Montrons que : $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$, on sait alors qu'il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$. On a deux cas :

- Si $x \in A_1$, alors $\begin{cases} x \in A_1 \\ y = f(x) \end{cases}$ donc $y \in f(A_1)$ et par suite : $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$
- Si $x \in A_2$, par symétrie, on a le même résultat.

D'où l'inclusion.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. On a deux cas :

- si $y \in f(A_1)$, alors on sait que y s'écrit sous la forme $y = f(x)$ pour $x \in A_1$. Comme $x \in A_1 \cup A_2$ Alors : $\begin{cases} x \in A_1 \cup A_2 \\ y = f(x) \end{cases}$ donc $y \in f(A_1 \cup A_2)$
- Si $y \in f(A_2)$, par symétrie, on a le même résultat.

D'où l'inclusion réciproque et le deuxième résultat.

Montrons que : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ Soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. On sait alors qu'il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$. On a : $\begin{cases} x \in A_1 \\ y = f(x) \end{cases}$ donc $y \in f(A_1)$ et par symétrie $y \in f(A_2)$, donc $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. D'où l'inclusion et le troisième résultat.

■

Proposition IV.2 Soient B_1 et B_2 deux parties de F et $f : E \to F$.
On a alors :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\ f^{-1}(\overline{B_1}) &= \overline{f^{-1}(B_1)} \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons que : $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. On sait alors que $f(x) \in B_1 \cup B_2$. On a alors deux choix :

- Si $f(x) \in B_1$, alors $x \in f^{-1}(B_1)$ et donc $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- Si $f(x) \in B_2$, on procède de même.

D'où l'inclusion.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. On a alors deux choix :

- Si $x \in f^{-1}(B_1)$ alors $f(x) \in B_1$, et donc $f(x) \in B_1 \cup B_2$, et par suite : $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$
- Si $x \in f^{-1}(B_2)$, on procède de même.

D'où l'inclusion réciproque et le résultat.

Montrons que : $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. On sait alors que $f(x) \in B_1 \cap B_2$. On a alors $f(x) \in B_1$, donc $x \in f^{-1}(B_1)$, puis de même $f(x) \in B_2$, donc $x \in f^{-1}(B_2)$. Au final, $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ D'où l'inclusion.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. $x \in f^{-1}(B_1)$ alors $f(x) \in B_1$ et de même : $x \in f^{-1}(B_2)$ alors $f(x) \in B_2$. Au final : $f(x) \in B_1 \cap B_2$, et donc $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. D'où l'inclusion réciproque et le résultat.

Montrons que : $f^{-1}(\overline{B_1}) = \overline{f^{-1}(B_1)}$. On peut raisonner par l'absurde ou écrire des équivalence pour $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\overline{B_1}) &\iff f(x) \in \overline{B_1} \\ &\iff \text{non}\,(f(x) \in B_1) \\ &\iff \text{non}\,\left(x \in f^{-1}(B_1)\right) \\ &\iff x \in \overline{f^{-1}(B_1)} \end{aligned}$$

■

(!) Il n'y a pas d'expression simple pour $f^{-1}(\overline{A})$ et il n'y a pas égalité dans la relation : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

D'une manière générale, il est conseillé de ne pas apprendre ses relations et de les retrouver rapidement.

V Composition

Définition V.1 — Composition. Soit $f : E \to F$, et $g : F \to G$, on définit l'**application**

composée $g \circ f$ par :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & G \\ x & \mapsto & g \circ f(x) = g(f(x)) \end{array} \right. .$$

On applique donc f à x puis g au résultat.

On utilise parfois le schéma suivant pour montrer la composition :

$$\begin{array}{ccccc} E & \to & F & \to & G \\ x & \longmapsto & f(x) & & \\ & & y & \longmapsto & g(y) \\ x & & \longmapsto & & g(f(x)) \end{array}$$

C'est particulièrement utile en analyse pour montrer qu'une fonction est continue/dérivable. En effet, une composée de fonction continue/dérivable est continue/dérivable. De plus, on peut facilement calculer la dérivée d'une composée avec la formule :

$$(g \circ f)' = f' \times \left(g' \circ f\right)$$

■ **Exemple V.1** On peut par exemple considérer la fonction : $x \mapsto \sqrt{x^2 - x}$.

Cette fonction s'écrit comme une composée :

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[& \to & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x & & \\ & & y & \longmapsto & \sqrt{y} \\ x & & \longmapsto & & \sqrt{x^2 - x} \end{array}$$

En effet, on résout l'inéquation $x^2 - x \geqslant 0$, ce qui donne l'ensemble de définition de f : $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. La fonction f est continue sur cet intervalle comme composée de fonctions continues.

Pour la dérivabilité, il faut garder en tête que la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ n'est pas dérivable en 0. La composition est donc légèrement différente :

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[& \to & \mathbb{R}_*^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x & & \\ & & y & \longmapsto & \sqrt{y} \\ x & & \longmapsto & & \sqrt{x^2 - x} \end{array}$$

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

On a de plus :

$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[, \qquad f'(x) = (2x - 1)\frac{1}{2\sqrt{x^2 - x}}.$$

■

La composition est associative : on n'a pas besoin de parenthèse pour indiquer l'ordre de la composition.

Proposition V.1 Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Alors les applications : $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont égales.

Démonstration. En effet, si $x \in E$, on a :

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h[g(f(x))] = h(g \circ f(x)) = h \circ (g \circ f)(x)$$

et ces deux applications ont même ensemble de définition et d'arrivée. ■

Enfin, si on compose par l'identité, on ne change pas l'application :

Proposition V.2 Soit $f : E \to F$, on a alors :

$$f \circ Id_E = f \qquad \text{et} \qquad Id_F \circ f = f$$

Si $f : E \to E$ et $g : E \to E$, on peut définir $f \circ g$ et $g \circ f$. Si les ensembles de départ et d'arrivée sont différents, cela n'est pas possible. Bien entendu, $f \circ g \neq g \circ f$ dans le cas général.
Si $f : E \to E$, on peut compose f avec elle-même. On note alors f^n ou $f^{(n)}$ ou encore $f^{[n]}$ l'application définie par :

$$f^{(n)} = f \circ f \circ \cdots \circ f \text{ composée } n \text{ fois.}$$

On utilise de plus les conventions $f^{(1)} = f$ et $f^{(0)} = Id_E$.

VI Injections, surjections

Rappel : Une application transforme un élément x de l'ensemble de départ E, en un élément $f(x)$ de l'espace d'arrivée F (son image). Deux éléments de E peuvent avoir la même image et des élément de l'espace d'arrivée peuvent ne pas avoir d'antécédents (ils ne sont pas atteints).

Définition VI.1 Soit $f : E \to F$, on dit que l'application
- f est injective si on a :

$$\forall (x,x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \implies x = x',$$

  autrement dit si les éléments de F ont au plus un antécédent.
- f est surjective si on a :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y,$$

  autrement dit si tout élément de F admet au moins un antécédent.

Être injective peut s'écrire par contraposée :

$$\forall (x,x') \in E^2,\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'),$$

Être surjective signifie que $f(E) = F$ (l'ensemble image est F entier).

L'injectivité signifie que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet au plus une solution.
La surjectivité signifie que cette équation admet une solution au moins (quelque soit la valeur de $y \in F$).
L'injectivité est liée à l'ensemble de départ E, la surjectivité est liée à l'ensemble d'arrivée F.
À partir d'une application quelconque $f : E \to F$, on peut construire l'application : $g : \begin{array}{ccc} E & \to & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$. Cette application est surjective. On a modifié l'ensemble d'arrivée pour la « *rendre surjective* ». Il faut bien faire la différence entre ces deux applications.

Pour démontrer qu'une application f est surjective, on part donc d'un élément y appartenant à l'ensemble d'arrivée et on construit un antécédent x.
Pour démontrer qu'une application f est injective

- on part de deux éléments x et x' appartenant à l'ensemble de départ, qui ont la même image et on démontre qu'ils sont égaux,
- ou (et c'est équivalent) on part de deux éléments x et x' appartenant à l'ensemble de départ, dont on sait qu'ils sont différents et on démontre que leurs images sont différentes.

Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on utilise souvent le résultat suivant : si une fonction est strictement monotone alors elle est injective. Pour la surjectivité, c'est souvent le théorème des valeurs intermédiaires qui assurent l'existence de solution de l'équation $y = f(x)$.

Pour les ensembles finis :

- si il existe une application $f : E \to F$ qui est injective, c'est que $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
- si il existe une application $f : E \to F$ qui est surjective, c'est que $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.

Proposition VI.1 La composée de deux injections est une injection.
La composée de deux surjections est une surjection.

R En conséquence, la composée de bijections (vus plus loin) est une bijection.

Démonstration. On considère $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux injections. On va montrer que $g \circ f$ est injective.

Pour cela, on considère deux éléments dans l'ensemble de départ de $g \circ f$ qui ont la même image. Soit donc $(x, x') \in E^2$ vérifiant $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. On a alors :

$$\begin{aligned} g\Big(f(x)\Big) &= g\Big(f(x')\Big) && \\ \text{donc } f(x) &= f(x') && \text{car l'application } g \text{ est injective} \\ \text{puis } x &= x' && \text{car l'application } f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

On a bien $x = x'$ et l'application $g \circ f$ est injective.

On considère maintenant que $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux surjections. Montrons que $g \circ f$ est surjective.

Pour cela, on considère un élément quelconque de l'ensemble d'arrivée de $g \circ f$, soit donc $y \in G$. On a alors :

- l'application g est surjective, donc on sait que : $\exists z \in F, \quad y = g(z)$
- l'application f est surjective et $z \in F$, donc on sait que : $\exists x \in R, \quad z = f(z)$
- au final, on a : $x \in E$ et $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$.

On a bien trouvé un antécédent à y. D'où $g \circ f$ est bien surjective.

■

VII Bijection réciproque

Définition VII.1 — Bijection. Soit $f : E \to F$, on dit que f est bijective si il existe une application $g : F \to E$ telle que :

$$f \circ g = Id_F, \qquad \text{et} \qquad g \circ f = Id_E.$$

Dans ce cas, cette application est unique, on l'appelle bijection réciproque de f, et on la note f^{-1}.

De plus, on a $\left\{f^{-1}\right\}^{-1} = f$.

Démonstration. Montrons que la bijection réciproque de f est unique.

Soit deux applications g et g' deux applications $F \to E$ vérifiant les relation alors :

$$g(x) = g \circ \underbrace{f \circ g'}_{Id}(x) = \underbrace{g \circ f}_{Id} \circ g'(x) = g'(x).$$

Donc les deux applications sont les mêmes, et donc la bijection réciproque est unique.

Pour la deuxième partie, on a :

$$f \circ f^{-1} = Id, \text{ et } f^{-1} \circ f = Id_E,$$

donc f est l'inverse de f^{-1}. ■

! Bien entendu il ne faut pas confondre f^{-1} et $\frac{1}{f}$.
Il faut les deux relations : $f \circ g = Id_F$, et $g \circ f = Id_E$.

R Lorsque f est bijective, et $B \subset F$, on peut voir $f^{-1}(B)$ de deux manières :

- Soit comme l'image directe de B par f^{-1} :

$$f^{-1}(B) = \left\{ f^{-1}(y) \in E \middle| y \in B \right\}$$

- soit comme l'image réciproque de B par f :

$$f^{-1}(B) = \left\{ x \in E \middle| f(x) \in B \right\}$$

Ces deux définitions coïncident.

On dit aussi **inversible** à la place de bijective.

Proposition VII.1 Soit $f : E \to F$, f est bijective, si et seulement si f est injective et f est surjective.
Autrement dit, f est bijective, si tout élément de f a un antécédent et un seul, ce qui s'écrit :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E :\ f(x) = y$$

Démonstration. Supposons f inversible. Montrons que f est injective. Soit x et x' des éléments de E, tels que $f(x) = f(x')$, on a alors :

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')) = x = x'.$$

Montrons ensuite que f est surjective : soit $y \in F$, on pose $x = f^{-1}(y)$, alors $f(x) = y$.

Réciproquement, supposons f injective et surjective. Soit $y \in F$, y a alors un unique antécédent, on l'appelle $g(y)$, c'est donc l'unique élément x de E tel que $f(x) = y$. Ainsi, on peut définir sans ambiguïté une application g :

$$g : \begin{cases} F & \to & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique solution } x \text{ de l'équation } (E_y) \quad y = f(x). \end{cases}$$

L'application g est alors définie, puisque x existe et est unique.
Montrons que g est l'inverse de f.
Soit $y \in F$, on a $g(y)$ est solutions de l'équation (E_y), donc

$$f(g(y)) = y, \qquad \text{ie } \Big(f \circ g\Big)(y) = y$$

et comme y est quelconque, cela montre $f \circ g = Id$.

Soit maintenant $x \in E$, et notons $z = g(f(x))$, par définition c'est l'unique solution de l'équation :

$$(E_{f(x)}) \quad f(t) = f(x) \text{ d'inconnue } t$$

Or x est solution évidente de cette équation, qui admet une solution unique, donc $x = z$, ce qui s'écrit : $g(f(x)) = x$. ■

On voit donc que pour montrer qu'une fonction est bijective, on a deux possibilités :
- construire une fonction inverse et montrer qu'on a les deux relations de la définition,
- ou montrer qu'elle est injective et surjective en étudiant l'équation $y = f(x)$.

✎ Un autre manière de démontrer la réciproque et de considérer le graphe : Si $f : E \to F$ est injective et surjective alors on peut considérer l'ensemble :

$$\Gamma = \Big\{ (f(x), x) \Big| x \in E \Big\}$$

Comme f est injective et surjective, on a :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, (y, x) \in \Gamma.$$

Ce qui signifie que Γ est la graphe d'une application, c'est le graphe de la bijection réciproque de f.

Pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le tableau de variation donne souvent l'injectivité et la surjectivité.
La courbe représentative de f^{-1} est alors obtenu à partir de celle de f par symétrie d'axe la première bissectrice.

■ **Exemple VII.1** Si on veut définir la fonction arccosinus inverse de la fonction cosinus, on va restreindre la fonction cosinus. On considère alors l'application :

$$c : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

Cette fonction est bijective. On peut donc considérer son inverse : la fonction arccosinus.
En prenant la symétrie, on obtient la courbe :

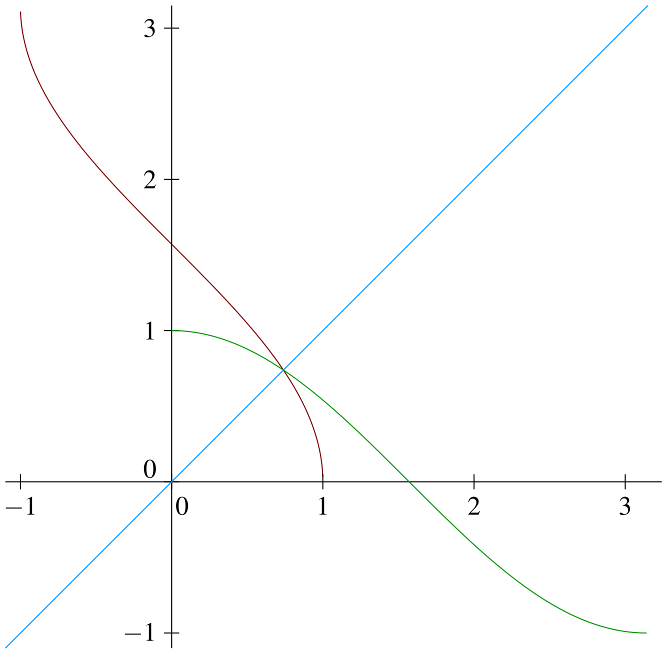


FIGURE 5.1 – **Représentation graphique :** Fonction cos et arccos

■

Pour des ensembles finis E et F, il existe une bijection $f : E \to F$ si et seulement si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Enfin, on peut voir ce qui se passe lorsqu'on compose des applications bijectives et qu'on les inverse :

Proposition VII.2 Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections, alors $g \circ f$ est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. $g \circ f$ est injective (comme composée de deux injections) et surjective (comme composée de deux surjections), donc $g \circ f$ est bijective.

On a :

$$\begin{aligned}(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) &= g\circ \underbrace{f\circ f^{-1}}_{Id_F}\circ g^{-1}\\ &= g\circ Id_F\circ g^{-1}\\ &= g\circ g^{-1} = Id_G.\end{aligned}$$

On montre de même :

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = f^{-1}\circ f = Id_E$$

■

VIII Fonction indicatrice (ou caractéristique)

Un exemple important et au programme est celui des fonctions caractéristiques d'un ensemble :

Définition VIII.1 Soit E un ensemble et $A\subset E$. La fonction indicatrice de A est la fonction de E dans $\{0,1\}$, notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\mathbb{1}_A : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\}\\ x & \longmapsto & \begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}\end{array}\right.$$

De manière évidente : $\mathbb{1}_E$ est l'application constante égale à 1, et $\mathbb{1}_\emptyset$ est l'application constante égale à 0.

Proposition VIII.1 Si A et B sont deux parties de E, on a :
complémentaire $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1-\mathbb{1}_A$.
intersection : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \inf\left(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B\right) = \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B$.
réunion : $\mathbb{1}_{A\cup B} = \sup\left(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B\right) = \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_{A\cap B}$.

Théorème VIII.2 L'application :

$$\varphi\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{F}(E,\{0,1\})\\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A\end{array}\right.$$

est une bijection

Démonstration. L'application réciproque associe à une fonction f la partie $f^{-1}(\{1\})$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments où la fonction f est égale à 1.

On considère donc :

$$\psi\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{F}(E,\{0,1\}) & \to & \mathscr{P}(E)\\ f & \longmapsto & f^{-1}(\{1\})\end{array}\right.$$

Il s'agit de démontre que φ et ψ sont bijection réciproques l'une de l'autre. Considérons une partie A de E, on a :

$$\begin{aligned}\Big(\psi\circ\varphi\Big)(A) =& \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\})\\ =& \Big\{x\in E \Big| \mathbb{1}_A = 1\Big\}\\ =& A\end{aligned}$$

Ainsi, $\psi\circ\varphi$ est l'identité sur l'ensemble des parties de A.
Considérons maintenant f une fonction de E dans $\{0,1\}$. On a :

$$\Big(\varphi\circ\psi\Big)(f) = \mathbb{1}_{f^{-1}(1)}$$

Ainsi, $\Big(\varphi\circ\psi\Big)(f)$ est une fonction de E dans $\{0,1\}$ qui vérifie :

$$\forall x\in E,\ \Big(\varphi\circ\psi\Big)(f)(x) = \begin{cases}1 & \text{si } x\in f^{-1}(1)\\ 0 & \text{si } x\notin f^{-1}(1)\end{cases}$$

Il faut montrer que cette fonction est en fait f. Pour cela, on considère $x\in E$. On a alors deux cas :

- si $f(x)=1$, alors $x\in f^{-1}(1)$ et $\Big(\varphi\circ\psi\Big)(f)(x) = 1$.
- si $f(x)\neq 1$, alors $x\notin f^{-1}(1)$ et $\Big(\varphi\circ\psi\Big)(f)(x) = 0$, mais comme f est à valeurs dans $\{0,1\}$ et que $f(x)\neq 1$, on est sûr que $f(x)=0$.

Dans les deux cas, on a :

$$f(x) = \Big(\varphi\circ\psi\Big)(f)(x).$$

D'où l'égalité des applications et donc $\varphi\circ\psi$ est l'identité sur $\mathscr{F}(E,\{0,1\})$ ■

✎ Ainsi, on peut démontrer l'égalité d'ensemble $A=B$ par l'égalité de fonction $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. En conséquence, si E est fini, il y a autant de parties dans E que de fonctions de E dans $\{0,1\}$, et donc il y a $2^{\mathrm{Card}(E)}$ parties dans E.

Théorie des applications

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Notion d'application

Exercice 1 Montrer que l'on définit une suite $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n \in]0,1[\text{ et } \alpha_n^n - (1-\alpha_n)^2 = 0.$$

Tableau de variation.

Exercice 2 Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on définit x_n sans ambiguïté par les relations : $x_n \in [0,n]$ et $f_n(x_n) = 0$, où $f_n : x \longmapsto x^n e^{-x} - 1$.

Tableau de variation.

Exercice 3 Montrer que l'on définit une suite $\left(x_n\right)$ par les relations :

$$x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[\text{ et } \tan(x_n) = x_n$$

Tableau de variation.

Exercice 4 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on pose $P_\lambda(x) = x^3 + \lambda x - 1$. Montrer qu'il existe une fonction u définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, $P_\lambda(u(\lambda)) = 0$.

Tableau de variation.

⋆ Images directes et réciproques

Exercice 5 Déterminer les images directes :

$$\ln\left(\mathbb{R}_+^*\right) \qquad \ln\left([1,e]\right) \qquad \cos\left(\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right)$$

Tableau de variation.

Exercice 6 Soit $f : E \to F$ une application. Soient A une partie de E.

1. Montrer que si f est injective on a $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.
2. Montrer que si f est surjective on a $\overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$.

Correction :

1. Supposons donc f injective, et considérons $y \in f(\overline{A})$.
   On sait alors qu'il existe $x \in \overline{A}$, tel que $y = f(x)$.
   Pour montrer que $y \in \overline{f(A)}$, on procède par l'absurde. Supposons donc par l'absurde que $y \in f(A)$. On sait alors qu'il existe $x' \in A$, tel que $y = f(x')$. On a alors $y = f(x) = f(x')$. La fonction f étant injective, on en déduit que $x = x'$. Or $x \in A$, et $x' \in \overline{A}$. D'où une contradiction et donc $y \in \overline{f(A)}$.
   Au final, on a donc $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.
2. On suppose donc f surjective, et on montre : $\overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$.
   Soit donc $y \in \overline{f(A)}$. Il s'agit de montrer que $y \in f\left(\overline{A}\right)$.

Comme $y \in F$ et f est surjective, on sait qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On va montrer que $x \notin A$ en utilisant un raisonnement par l'absurde. Supposons donc, par l'absurde, que $x \in A$. On déduit alors de $y = f(x)$ la relation $y \in f(A)$. Ce qui est en contradiction avec $y \in \overline{f(A)}$. On en déduit que $x \notin A$, *i.e.* $x \in \overline{A}$, et donc on déduit de $y = f(x)$ la relation $y \in f\left(\overline{A}\right)$.
Ainsi, $\overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$.

Exercice 7 **Image directe de l'image indirecte et réciproquement** Soient E et E' des ensembles et $f : E \to E'$ une application. Montrer que pour toute partie A de E et toute partie A' de E' :

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \qquad\qquad f\left(f^{-1}(A')\right) \subset A'$$

Chercher un cas où il n'y a pas d'égalité.

⋆ Injection, surjection, bijection

Exercice 8 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}\right. \quad g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}\right. \quad h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}\right. \quad i : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}\right.$$

$$j : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}\right. \quad k : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}\right. \quad l : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sup(x/10+4, x-30) \end{array}\right.$$

($\sup(x,y)$ est la plus grande valeur de x et de y).

Exercice 9 Soient

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right., \qquad \text{et} \qquad g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n-1 & \text{si } n > 0, \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Calculer $g \circ f$. La fonction f est-elle bijective ?

Exercice 10 Montrer que l'application

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & a + b\sqrt{2} \end{array}\right.$$

est injective.

Exercice 11 Soient E, F, G des ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications.

Montrer :

1. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Correction : bien appliquer les définitions.

⋆ Composition

Exercice 12 On note $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 + x \text{ et } g(x) = x^2.$$

Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $g \circ f = f \circ g$

Correction : cours.

Exercice 13 On considère la fonction :

$$f : x \longmapsto \frac{3x-1}{x-2}$$

Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f.

Montrer qu'il n'existe un réel et un seul b, tel que b n'a pas d'antécédent par f.

On considère l'application :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \setminus \{b\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x-1}{x-2} \end{array} \right.$$

Montrer que g est bijective.

Correction : cours.

⋆ Applications et relations

Exercice 14 **Bijection et relation d'équivalence** Soit E un ensemble. On définit pour $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ les relations :

- $X \mathscr{R} Y$ si et seulement si il existe $f : X \to Y$ bijective.
- $X \preccurlyeq Y$ si et seulement si il existe $f : X \to Y$ injective.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
   Quelles sont les propriétés de la relation $\preccurlyeq$?
2. Montrer que si X, Y, X', Y' sont des parties de E, telles que $X \mathscr{R} X'$ et $Y \mathscr{R} Y'$ on a :

$$X \preccurlyeq Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad X' \preccurlyeq Y'$$

Correction :

1. $\mathscr{R}$ réflexive (utiliser l'application identité). Symétrique (prendre la bijection réciproque de l'application $X \to Y$) et transitive (composée de bijections est une bijection).
   $\preccurlyeq$ est réflexive et transitive mais pas antisymétrique (pré-ordre) .
2. $f : X \to X'$ bijective, $g : Y \to Y'$ bijective.
   On suppose $X \preccurlyeq Y$, c'est-à-dire qu'il existe une injection $h : X \to Y$. L'application $g \circ h \circ f^{-1}$ est une injection (car composée d'injection) de $X' \to Y'$.

Exercice 15 Soient E et E deux ensembles ordonnés et A une partie non vide de E.

Soit f une application croissante de E dans F. Montrer que si $\max(A)$ existe, alors $\max\Big(f(A)\Big)$ existe et est égal à $f(\max(A))$.

La propriété subsiste-t-elle si on remplace « *max* » par « *sup* » ?

Correction : Soit α le max de A, on a $\alpha \in A$, donc $f(\alpha) \in f(A)$ et soit $y \in f(A)$, on écrit $y = f(x)$ avec $x \in A$. On a $x \leqslant \alpha$ donc $f(x) \leqslant f(\alpha)$.

Ainsi, $f(\alpha)$ est le maximum de $f(A)$.

La propriété n'est plus vraie si on remplace *max* par *sup*.

On peut par exemple considérer l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$.

Cette application est croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (elle est même strictement croissante.) Si on considère $A = [0,1[$, alors $f(A) = [0,1[$. Donc $\sup(A) = 1$ et $\sup\Big(f(A)\Big) = 1$. Mais $f(\sup A) = f(1) = 2$ n'est pas égal $\sup(f(A))$.

Exercice 16 Soient E et F deux ensembles ordonnés, l'ordre sur E étant total.

Soit $f : E \to F$ une fonction croissante.

Montrer que f est injective si et seulement si elle est strictement croissante.

Montrer que le résultat n'est pas vrai si on ne suppose pas que E est totalement ordonné.

Correction : Si f est strictement croissante, alors elle est injective.

En effet soient a, b deux éléments distincts de E, avec par exemple $a < b$ (l'ordre sur E est total). L'hypothèse sur f implique $f(a) < f(b)$ et donc $f(a) = f(b)$.

Réciproquement supposons f croissante et injective. Soient a et b deux éléments de E tels que $a < b$. On a $f(a) \leqslant f(b)$ car f est croissante, et $f(a) =\neq f(b)$ car f est injective. Ainsi $f(a) < f(b)$. L'application f est donc strictement croissante.

L'équivalence n'est plus vraie si l'ordre sur E n'est pas total. Considérons par exemple un ensemble fini X (contenant au moins deux éléments a et b). On munit l'ensemble $E = P(X)$ de la relation d'inclusion. C'est une relation d'ordre, mais partiel car a et b ne sont pas comparables. Soit f l'application de E dans $\mathbb{N}$ qui à toute partie de X associe son cardinal. Elle est strictement croissante car si $A \subset B \subset X$, avec $A \neq B$ alors $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$. Pourtant f n'est pas injective car par exemple $f(a) = f(b) = 1$.

Fonctions usuelles

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Mots clés : Fonctions usuelles. Notation x^a. Fonction puissance $x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto x^{-n}$, $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$. Fonction logarithme et exponentielle.

Exemples de questions de cours : Dessiner des fonctions usuelles.

✯ Notation x^a

La notation x^a désigne plusieurs objets selon le contexte. Il est très important de comprendre la différence entre ces différentes définitions.

- x^a pour $a \in \mathbb{N}$, qui désigne $x \times x \times \cdots \times x$ (a fois), *i.e.* $\prod_{k=1}^{a} x$.
  Cette quantité existe dès que l'on peut faire le produit (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$, x matrice carrée).
- x^a pour $a \in \mathbb{Z}$, qui étends la définition précédente au cas où $\frac{1}{x}$ existe par la formule : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$
  Cette quantité existe dès que x est inversible (si $x \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{C}^*$, x matrice inversible).
- x^a pour $a \in \mathbb{R}$, qui désigne alors $e^{a\ln(x)}$ qui est bien défini si $x > 0$, et seulement dans ce cas.

Remarque : On peut distinguer un dernier cas : x^a avec a qui s'écrit sous la forme $a = \frac{1}{n}$, que l'on note plutôt $\sqrt[n]{x}$ la solution de $y^n = x$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$

Cette quantité bien définie si cette équation admets une unique solution, elle n'a pas de sens si $x \in \mathbb{C}$. On peut noter $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ que dans le cas où $x \geqslant 0$.

Conséquence :
- Lorsque l'on écrit x^a avec $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on vérifie que $x > 0$. Dans ce cas la notation x^a désigne $e^{a\ln(x)}$.
- lorsque l'on étudie une fonction du type $f(x) = u(x)^{v(x)}$, *i.e.* la puissance varie en fonction de x, on commence par écrire : $f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$. Tout autre méthode de calcul (limite, dérivée, etc.) aboutira à une erreur. Idem pour une suite du type $u_n = v_n^{w_n}$.
- Dans tous les cas, on a les formules :

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad x^{n+m} = x^n x^m \qquad (x^n)^m = x^{nm}$$

✯ Fonctions puissance d'exposant entier naturel

Les fonctions $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}\right.$, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- réalisent une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ si n pair,
- réalisent une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si n impair,
- En $+\infty$: divergent vers $+\infty$ d'autant plus vite que n est grand, ce qui signifie que si $n \geqslant m$ et x est grand, x^n est très grand devant x^m (on note en physique : $x^n \gg x^m$). On a donc :

$$\text{lorsque } x \to +\infty \qquad 1 \ll x \ll x^2 \ll x^3$$

- En 0 :
  - « *s'écrasent* » sur l'axe horizontal d'autant plus que n est grand, ce qui signifie que si $n \geqslant m$ et $x \approx 0$, x^n est négligeable devant x^m (on note en physique : $x^n \ll x^m$). On a donc :

$$\text{lorsque } x \to 0^+ \qquad x^3 \ll x^2 \ll x \ll 1.$$

  - la dérivée en 0 est nulle (tangente horizontale),
  - un point d'inflexion en 0, si n est impair.

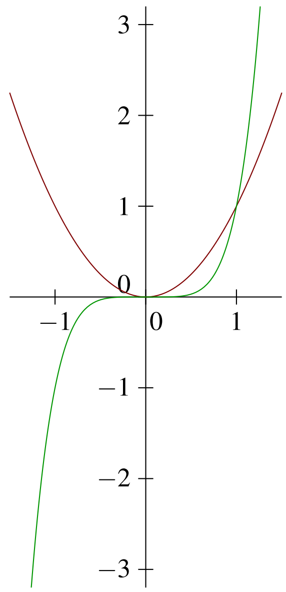


FIGURE 5.2 – Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^5$

✯ Fonction puissance d'exposant entier relatif

Les fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{-n} \end{array} \right.$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- sont strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
- En $+\infty$: on a $\lim\limits_{+\infty} x^{-n} = 0$, tendent vers 0 d'autant plus vite que n est grand, ce qui signifie que si $n \geqslant m$ et x grand, x^{-n} est négligeable devant x^{-m} (on note : $\frac{1}{x^n} \ll \frac{1}{x^m}$).
  On a donc :
  $$\text{lorsque } x \to +\infty \qquad 0 < \frac{1}{x^3} \ll \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x}$$
- En 0^+ : on a $\lim\limits_{0^+} x^{-n} = +\infty$ d'autant plus vite que n est grand, ce qui signifie que si $n \geqslant m$ et $x \approx 0$, x^{-m} est négligeable devant x^{-n} (on note : $\frac{1}{x^m} \ll \frac{1}{x^n}$).
  On a donc :
  $$\text{lorsque } x \to 0^+ \qquad 1 \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x^3}$$
  (en 0^- le signe dépend de la parité de n),

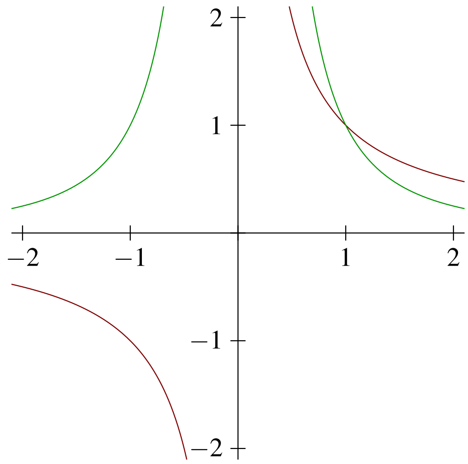


FIGURE 5.3 – Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

✯ Fonction racine carrée

L'équation $(E) : x^2 = y$ admets une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ pour tout $y \geqslant 0$. Cette solution est notée $\sqrt{y}$. On dispose donc de l'application :

$$\sqrt{\cdot} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{y} : \text{ la solution de l'équation } x^2 = y \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

On a les formules :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}.$$

✯ Fonction racine n-ième

cas pair Si n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, elle est donc bijective. On peut donc définir une fonction réciproque :

$$\sqrt[n]{\cdot} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto & \sqrt[n]{y} : \text{ la solution de l'équation } x^n = y \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

Cette fonction est croissante et continue. Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}.$$

cas impair Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc bijective . On peut donc définir une fonction réciproque, cette fois-ci définie sur $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[n]{\cdot} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \sqrt[n]{y} : \text{ la solution de l'équation } x^n = y \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Cette fonction est croissante et continue. Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}.$$

Les propriétés de ces fonctions sont :

- en 0 : elles vérifient $\sqrt[n]{0} = 0$, avec de plus tangente verticale en 0, plus n est grand, plus les fonctions sont verticales,
- en $+\infty$: elles vérifient $\lim_{+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$, d'autant plus vite que n est petit. Ce qui signifie que si $n \geqslant m$, $\sqrt[n]{x}$ est négligeable devant $\sqrt[m]{x}$ (on note : $\sqrt[n]{x} \ll \sqrt[m]{x}$).
- en 1, on a $\sqrt[n]{1} = 1$ et elles sont d'autant plus plates que n est grand.

! La notation x^a est réservée au cas où $x > 0$ et désigne dans ce cas $\exp(a\ln(x))$. Car on ne peut pas définir : $(-1)^{\frac{2}{2}}$. En

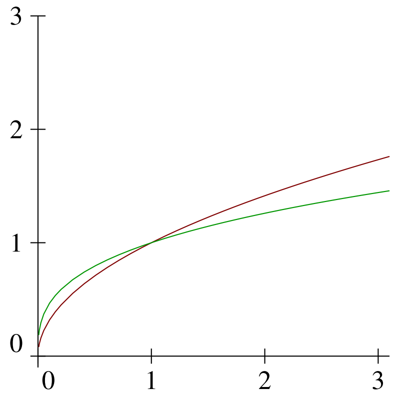


FIGURE 5.4 – Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

effet, on a

$$\begin{aligned} \text{d'un côté } & \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = 1 \\ \text{de l'autre côté } & (-1)^{\frac{2}{2}} = (-1)^1 = -1 \end{aligned}$$

✯ Logarithme et exponentiel

Définition VIII.2 Le LOGARITHME NÉPÉRIEN est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, qui s'annule en 1. C'est donc l'application $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 0, \qquad \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Le logarithme népérien est donc une application continue, strictement croissante et indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

En particulier, on a

$$\forall x > 0, \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Théorème VIII.3 — propriété fondamentale du logarithme. Le logarithme d'un produit est la somme des logarithme.

$$\forall x > 0, \qquad \forall y > 0, \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y). \tag{5.1}$$

Démonstration. Soit $x > 0$, la fonction $y > 0 \ \mapsto \ln(xy) - \ln(y)$ admet pour dérivée $\frac{x}{xy} - \frac{1}{y} = 0$. Donc cette fonction est constante et égale à $f(1) = \ln(x)$. ■

Dans une expression avec un ln, il faut toujours se demander si on peut utiliser la propriété fondamentale.

Attention : à bien vérifier que x et y sont strictement positifs.

Proposition VIII.4 Comme $\ln(1) = 0$, le logarithme de l'inverse est l'opposé du logarithme.

$$\forall x > 0, \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

Plus généralement, le logarithme d'un quotient est la différence des logarithmes.

$$\forall x > 0, \qquad \forall y > 0, \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

et la logarithme d'une puissance est

$$\forall x > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \ln(x^n) = n\ln(x).$$

- On dispose aussi du logarithme en base 10 :

$$\forall x > 0, \qquad \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)},$$

  le logarithme en base 10 est utilisé en physique.
- En informatique, le logarithme népérien est la fonction `log` du module `math`

Proposition VIII.5 On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$. La fonction ln est strictement croissante et continue. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.

On a le tableau de variation

x	0		1		e		$+\infty$
variation de $\ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction ln est en-dessous de sa tangente en 1 :

Proposition VIII.6 On a : $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

(R) C'est une conséquence de la concavité de la fonction logarithme

Démonstration. En effet les fonctions

$$\phi : x \mapsto \ln(1+x) - x, \text{ et } \psi(x) : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

sont dérivables, avec

$$\phi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0, \text{ et } \psi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0.$$

On a donc ϕ strictement décroissante $\phi(0) = 0$, tandis que ψ est strictement croissante avec $\psi(0) = 0$, donc $\forall x > 0, \phi(x) > 0$, et $\psi(x) < 0$. ∎

(R) On verra une autre démonstration par le théorème des accroissements finis.

Représentation graphique

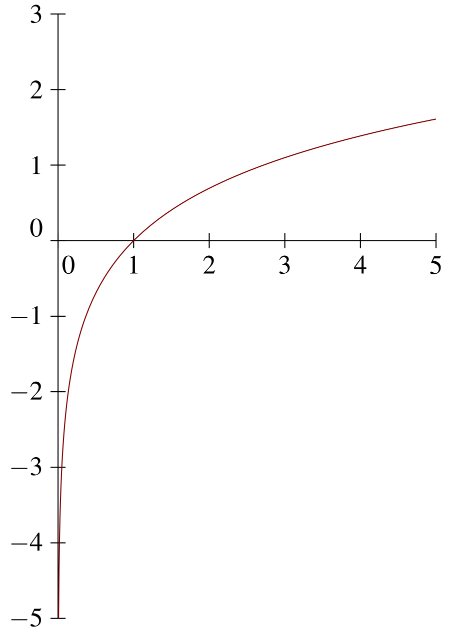


FIGURE 5.5 – Fonction $x \mapsto \ln(x)$

Définition VIII.3 L'exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est la bijection réciproque du logarithme népérien $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Notation VIII.1. *Pour simplifier, on introduit le nombre e défini par $e = \exp(1)$, e est donc l'unique solution de $\ln(x) = 1$. On a la valeur numérique $e = 2.718281828$, puis on introduit la notation :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = \exp(x).$$

Cette notation est justifié car on a $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \ln(e^x) = x$.

Théorème VIII.7 L'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{x+y} = e^x \times e^y. \tag{5.2}$$

Démonstration. e^{x+y} est l'unique solution de $\ln(e^{x+y}) = x + y$, or on voit que $e^x e^y$ est une solution de cette équation. ■

Proposition VIII.8 En, conséquence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

Et plus généralement, l'exponentielle d'une différence est le quotient des exponentielles.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

Proposition VIII.9 L'exponentielle réelle est une application continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp'(x) = \exp(x).$$

En conséquence, l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

On a le tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variation de $exp(x)$	0^+ $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$

Proposition VIII.10 Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors la fonction $g : x \mapsto e^{f(x)}$ est dérivable en a et on a

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)})(a) = g'(a) = f'(a)e^{f(a)}.$$

Cette formule est souvent apprise sous la forme $(e^u)' = u'e^u$.

La fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente :

Proposition VIII.11 On a : $\forall x \neq 0, 1 + x < e^x$.

Démonstration. On pose $\phi(x) = e^x - 1 - x$, alors $\phi'(x) = e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$ et $\phi'(x) < 0$ pour $x < 0$, donc $\forall x \neq 0 \phi(x) > \phi(0) = 0$. ∎

Proposition VIII.12 **Croissance comparée logarithme/exponentielle/puissances**

Pour $\alpha > 0$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^\alpha e^x = 0.$$

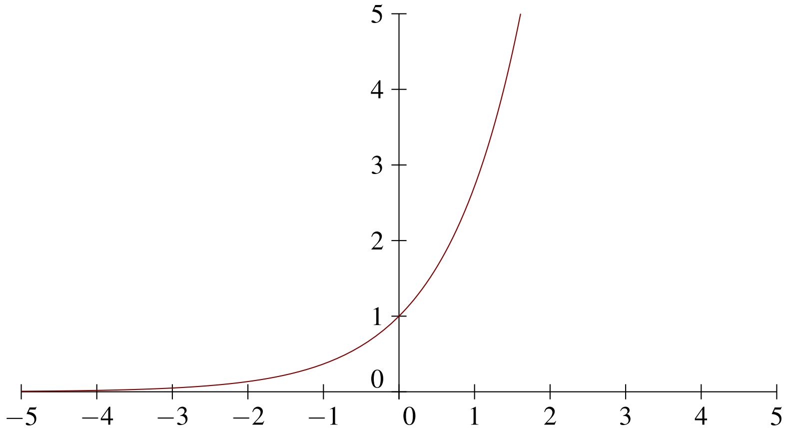


FIGURE 5.6 – Fonction exponentielle

Définition VIII.4 Si $z \in \mathbb{C}$, avec $z = a + ib$, on appelle **exponentielle du nombre complexe** z, le nombre complexe $e^a e^{ib}$ noté e^z. Cette définition permet donc de prolonger l'exponentielle au nombres complexes, en gardant la propriété $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

! Attention, si $a \in \mathbb{C}$, $e^a = e^{a+2\pi i}$, on ne peut donc pas définir le logarithme d'un nombre complexe non nul en posant $\ln(\rho e^{i\theta}) = \ln(\rho) + i\theta$, parce que θ est défini à 2π près.

On peut ajouter dans cette liste de fonctions usuelles les fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques.

⋆ Autres fonctions

Fonction partie entière

La fonction partie entière :

$$\lfloor \cdot \rfloor : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor = \text{ l'unique } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1. \end{cases}$$

Proposition VIII.13 On peut renverser l'inégalité précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Représentation graphique : Dessin à faire

Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \max(x, -x) = \sqrt{x^2}$$

Théorème VIII.14 — Inégalité triangulaire. La valeur absolue vérifie **l'inégalité triangulaire** :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

et **l'inégalité triangulaire renversée** ;

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x-y|$$

R Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si x et y sont de même signe.

Représentation graphique : Dessin à faire

Soient a et b deux réels, alors $|b-a|$ est la **distance** entre a et b sur la droite réelle.

Soit $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$, vérifiant l'inégalité $|x-a| \leqslant \varepsilon$ est l'ensemble des points sur la droite réelle situés à une distance inférieure à ε de a.

6 — Calcul de dérivées et de primitives

Ce chapitre est essentiellement une introduction permettant de donner les techniques de calculs nécessaire à la physique. On reverra la dérivation et l'intégration en détail dans le chapitre dédié.

I Dérivation

★ Convention

Sauf indication contraire, on considère dans ce chapitre une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

Lorsque l'on regarde la dérivée d'une fonction f en un point x_0 de D, on considère que la fonction f est définie en x_0 et sur un petit intervalle autour de x_0. Dit plus clairement, on suppose :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leqslant \varepsilon \implies x \in D.$$

Lorsque l'on regarde la dérivée à droite (resp. à gauche) en x_0, on suppose que la fonction f est définie en x_0 et sur un petit intervalle à droite (resp. à gauche) autour de x_0. C'est-à-dire pour la dérivée à droite :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon \implies x \in D.$$

respectivement pour la dérivée à gauche :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 \implies x \in D.$$

I.1 Dérivée en un point, tangente

Définition I.1 On dit que le fonction f est dérivable au point x_0, si la fonction définie T_{x_0} définie par :

$$T_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite finie en x_0.

Autrement dit si :

$$\exists L \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\exists L \in \mathbb{R}, \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L,$$

Le nombre L est alors appelé nombre dérivé et noté $f'(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, ou $Df(x_0)$.

La fonction T_{x_0} est définie pour les $x \neq x_0$, tel que $x \in D$, donc d'après les hypothèse au moins sur un intervalle du type $]x_0-\alpha, x_0[\cup]x_0, x_0+\alpha[$, on peut donc parler de sa limite en x_0.

La fonction T_{x_0} associe à $x \neq x_0$, le **coefficient directeur** de la droite qui passe par les deux points $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$. La quantité $T_{x_0}(x)$ est le taux d'accroissement entre x_0 et x.

Ainsi, $f'(x_0)$ peut être interprété comme la limite du coefficient directeur de cette droite, *i.e.* le coefficient directeur de la tangente au point x_0.

Proposition I.1 — Équation de la tangente. Si f est dérivable en x_0, alors sa courbe représentative admet une tangente dont l'équation est :

$$\Delta : \ y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

✎ Ce qui justifie « sur le dessin » les résultats bien connu qui seront démontrés plus tard :

- Si f' est strictement positive sur un intervalle, alors f est strictement croissante sur cet intervalle.
- Si f' est strictement négative sur un intervalle, alors f est strictement décroissante sur cet intervalle.
- Si f' est nul sur un intervalle, alors f est constante sur un intervalle.

On peut aussi voir que si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, la tangente en x_0 est verticale.

✎ Enfin, notons que la dérivabilité est une propriété locale, donc si deux fonctions sont égales sur un intervalle d'un point x_0, l'une est dérivable si et seulement si l'autre l'est.

D'un autre côté, la dérivée au point x_0 dépends du comportement autour de x_0 et non juste en x_0. On évitera donc les horreurs du type :

$$f(2) = 1 \text{ donc } f(2) \text{ est une constante et } f'(2) = 0.$$

La connaissance de $f(2)$ ne suffit pas à déterminer $f'(2)$, il faut connaître la fonction sur un intervalle contenant 2.

Certaines limites usuelles s'obtiennent par dérivée :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

I.2 Dérivée à droite et à gauche

Définition I.2 On dit que la fonction f est dérivable à droite (resp. à gauche) si la fonction T_{x_0} admet une limite à droite (resp. à gauche) en x_0. On note alors $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).

On a de plus la proposition :

Proposition I.2 Une fonction f définie autour et en x_0 est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite avec de plus $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Démonstration. Cela revient à dire : T_{x_0} admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à droite et à gauche et que ces deux dérivées sont égales. ■

Cette proposition sert généralement à démontrer qu'une fonction de la forme :

$$f : x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leqslant 0 \\ f_2(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable, en calculant les dérivées à gauche et à droite en 0.

■ **Exemple I.1** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x\sin(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en sur $\mathbb{R}$.

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$, il reste à vérifier en 0.

On a $f'_g(0) = 0$ de manière évidente, et

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sin(x) = 0,$$

d'où f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 0$. On en déduit que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. ■

I.3 Fonction dérivée

On étend comme pour la continuité la définition de la dérivabilité en un point à un intervalle selon :

Définition I.3 On dit que la fonction f est dérivable sur l'ensemble D, si elle est dérivable en tout point de D.

Pour traiter le cas des bords d'un intervalle, si D est de la forme $[a,b]$, on dit que est dérivable sur $[a,b]$ si et seulement si f est dérivable en tout point de $]a,b[$, et si f est dérivable à droite de a et à gauche de b. On pose de plus $f'(a) = f'_d(a)$ et $f'(b) = f'_g(b)$.

On peut alors définir l'application dérivée :

$$f'(x) = \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{y\to x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \end{cases}$$

On note aussi $f' = Df = \frac{df}{dx}$.

✎ La notion de dérivée est surtout utile sur un intervalle. On évitera de parler de dérivabilité sur autre chose qu'un intervalle.

✎ L'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable n'est pas l'ensemble de définition de la fonction dérivée !
On évitera donc des rédactions du type : je calcule f', j'obtiens une expression $f'(x)$ valable pour $x \in I$, j'en déduis que f est dérivable sur I.
Au contraire, il faut déterminer I tel que f est dérivable sur I puis calcule $f'(x)$ pour tout $x \in I$.

■ **Exemple I.2** Exemple de rédaction à éviter.

Considérons $f : x \longmapsto \sqrt{x}$.

On a $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, cette expression n'a pas de sens si $x = 0$ donc $f'(0)$ n'existe pas et f n'est pas dérivable en 0. Au final, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ce raisonnement est faux parce qu'on compare l'expression de $f'(x)$ lorsque x tends vers 0, et $f'(0)$. On compare donc :

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \text{ et } \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

Ce qui n'a pas de sens, il n'y a aucun résultat dans le cours qui permets d'échanger deux limites.

Pour montrer que f n'est pas dérivable en 0, il faut revenir au taux d'accroissement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty.$$

■

On retiendra :

- On démontre d'abords que la fonction est dérivable en utilisant des théorèmes généraux (somme, produit, composée de fonctions dérivables), puis on dérive.
- Ces théorèmes généraux ne donnent que des résultats positifs (la fonction EST dérivable). Pour savoir si la fonction est (ou n'est pas) dérivable en un point particulier a pour lequel on n'a pas d'information, il ne faut pas remplacer x

par a (ou faire tendre x vers a) dans l'expression de $f'(x)$. C'est l'étude du taux d'accroissement qui permet d'assurer que la fonction est ou n'est pas dérivable en a.

On reverra tout ceci en détail dans le chapitre dérivation.

I.4 Tableau de variation

Proposition I.3 Une fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. On a aussi : une fonction dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 est continue à droite (resp. à gauche) en x_0.

✎ Il est donc inutile de se demander si une fonction non continue est dérivable.
Attention : certaines fonctions sont continues sur leur intervalle de définition, mais ne sont pas dérivable au bords de leur intervalle définition ($\sqrt{\cdot}$, $|\cdot|$, arcsin et arccos, par exemple).

Pour représenter les variations d'une fonction réelle de la variable réelle, on utilise **un tableau de variations**. Dans ce tableau, les flèches indiquent des intervalles sur lesquels la fonction est **continue** et **strictement monotone**.

✎ Un tableau de variation est un outil pour utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.
Ne pas hésiter à ajouter des valeurs à ce tableau. Bien utilisé, ce tableau peut remplacer le graphique.
De plus, il est nécessaire (et suffisant) de dessiner le tableau de variation pour d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires (par exemple calcul d'image directe indirecte).

✎ On rappelle les résultats suivants, valable sur un intervalle I :

- Si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.
- Si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$, avec plus précisément l'existence d'un point x_0 tel que :

  $$\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ f'(x) > 0 \text{ et } f'(x_0) = 0$$

  alors la fonction f est toujours strictement croissante sur l'intervalle I.
  D'une manière générale, si la dérivée est positive et s'annule uniquement en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante.
- Si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur l'intervalle I.

I.5 Dérivée et opérations

Proposition I.4 Si f est g sont deux fonctions dérivables sur D, et λ, μ des réels, alors : la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur D avec :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

Démonstration. Il faut montrer que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\lambda f+\mu g)(x_0+h)-(\lambda f+\mu g)(x_0)}{h}=\lambda f'(x_0)+\mu g'(x_0)$$

Ce qui est évident en écrivant :

$$\frac{(\lambda f+\mu g)(x_0+h)-(\lambda f+\mu g)(x_0)}{h}=\lambda\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\mu\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

■

Proposition I.5 Si f et g sont dérivables sur D alors la fonction fg est dérivable sur D avec $(fg)'=f'g+g'f$.

Démonstration. On doit montrer que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{fg(x)-fg(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Cela provient de :

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)}\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)}+f(x_0)\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}.$$

Pour conclure, il faut utiliser le fait que g est continue en x_0 (car dérivable). ■

I.6 Dérivation d'une composée

Proposition I.6 On suppose que la fonction $g\circ f$ est définie sur un intervalle D, autrement dit que g est définie sur un intervalle D', avec $\forall x\in D,\ f(x)\in D'$. Si f est dérivable sur D et si g est dérivable sur $f(D)$, $g\circ f$ est alors dérivable avec $(g\circ f)'=(g'\circ f)\times f'$.

Démonstration. On doit démontrer :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Si $f(x)\neq f(x_0)$, on peut écrire :

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\times\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Comme $f(x)\to f(x_0)$, on peut poser $y=f(x)$ et $y_0=f(x_0)$ et on a : $y\to y_0$. Par composée des limites, on a donc :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{y\to f(x_0)}\frac{g(y)-g(y_0))}{y-y_0}=g'(y_0)=g'(f(x_0))$$

Comme d'un autre côté, on a :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

On a bien :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

■

✎ Sauf que cette démonstration a un gros défaut, en effet on suppose que l'on a : $f(x) \neq f(x_0)$, pour tous les x autour de x_0 (dans un voisinage de x_0), pour pouvoir écrire :

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

mais cela n'est pas forcément le cas. On admettra donc le résultat.

✎ En conséquence, on voit que si f est dérivable et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est dérivable comme la composée :

$$\begin{array}{ccccc} D & \to & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) & & \\ & & y & \longmapsto & \frac{1}{y} \\ x & \multicolumn{3}{c}{\longmapsto} & \frac{1}{f(x)}. \end{array}$$

On obtient la formule bien connue :

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Ce qui donne en faisant le produit avec une fonction g :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f^2(x)}.$$

✎ Un autre cas particulier de composition est la composée avec une fonction affine : si f est une fonction dérivable, alors la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable avec :

$$\Big(x \mapsto f(ax+b)\Big)' \qquad \text{est la fonction} \qquad x \mapsto a \times f'(ax+b).$$

> Pour calculer la dérivée d'une fonction composée, il faut écrire le schéma de composition (la « décomposer »)

I.7 Dérivation d'une bijection réciproque

On se place dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle :

Proposition I.7 Soit f une fonction strictement monotone et dérivable sur un intervalle I.

La théorème des valeurs intermédiaires assure alors que $f(I)$ est un intervalle noté J et que f réalise une bijection de $I \to J$. On note f^{-1} la bijection réciproque qui est donc une fonction $J \to I$.

Soit $b \in J$, on note $a = f^{-1}(b)$. La fonction f^{-1} est alors dérivable en b si et seulement si la fonction $f'(a) \neq 0$. Dans ce cas, on a :

$$f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$$

Démonstration. Ce résultat est admis pour l'instant, on peut simplement remarquer que si on admet la dérivabilité de f^{-1} en b, comme on a la relation :

$$\forall b \in J,\ f\left(f^{-1}(b)\right) = b$$

on peut dériver cette relation en utilisant la dérivée d'une composée pour obtenir :

$$\forall b \in J, \left(f^{-1}(b)\right)' \times f'\left(f^{-1}(b)\right) = 1$$

et donc :

$$\forall b \in J, \left(f^{-1}(b)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

Ce calcul n'est possible que si $f'\left(f^{-1}(b)\right) \neq 0$.

■

R On voit que ce qui est compliqué (et admis) ici c'est l'existence de la dérivée. L'expression de la dérivée se déduit facilement de l'existence de la dérivée.

Graphiquement, la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est la symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe $y = x$. Donc, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ en b est obtenu comme la symétrique (par rapport à $y = x$) de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en a.
Ainsi, si $T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est la tangente en a à $\mathscr{C}_f$ (qui existe puisque f est dérivable et qui n'est pas horizontale puisque $f'(a) \neq 0$), alors la tangente notée $\tilde{T}$ en b à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est la droite symétrique de T par rapport à $y = x$.
On voit facilement que si D est une droite non horizontale d'équation $y = \alpha x + \beta$ sa droite $\tilde{D}$ symétrique par rapport à $y = x$ a pour équation $y = \frac{1}{\alpha}x + \beta'$, autrement dit les coefficients directeurs sont inversés.
Ainsi, la tangente en b à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ admet une équation de la forme :

$$\tilde{T} : \quad y = \frac{1}{f'(a)}x + \beta'.$$

Ainsi, le coefficient directeur, ie la valeur de la dérivée de f^{-1} en b est $\frac{1}{f'(a)}$.
On retrouve donc l'équation complète de la tangente en b :

$$\tilde{T} : \quad y = \frac{1}{f'(a)}(x-b) + f^{-1}(b)$$

On voit aussi pourquoi il faut que $f'(a) \neq 0$: si la tangente en a est horizontale (ie si $f'(a) = 0$), alors son image par la symétrie sera une droite verticale, et donc f^{-1} admettra en b une tangente verticale.

Si on sait que la fonction f a une dérivée non nulle en tous les points de I alors en appliquant le résultat précédent en chaque point, on en déduit que la bijection réciproque est dérivable sur J.

Théorème I.8 Soit f dérivable et strictement monotone sur un intervalle I avec $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$. On note $J = f(I)$.

La bijection réciproque est alors dérivable sur J, avec :

$$\forall x \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

! Ne pas oublier d'enlever les points de I pour lesquels il y a une tangente horizontale. Plus précisément, si a est un point de I où $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$.

■ **Exemple I.3** Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeur dans $\mathbb{R}^{+*}$, avec $\forall x > 0,\ f'(x) = 2x \neq 0$. On en déduit que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec :

$$\forall x > 0,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{2f^{-1}(x)}$$

On retrouve le résultat bien connu : la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est : $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

On voit aussi pourquoi la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 : c'est parce que la tangente de $x \mapsto x^2$ en 0 est horizontale.

■

■ **Exemple I.4** Considérons la fonction $c : x \mapsto \cos(x)$ sur l'intervalle $]0, \pi[$. Cette fonction est bien bijective (à valeurs dans $]-1,1[$) et dérivable, avec :

$$\forall x \in]0, \pi[, \qquad \cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$$

puisqu'on a enlevé les points 0 et π où la dérivée s'annule.

La bijection réciproque noté arccos $:]-1,1[\to]O,\pi[$ est alors dérivable, avec :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}$$

On peut retrouver ce résultat en écrivant :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \cos(\arccos(x)) = x$$

donc en dérivant : $\forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) \times (-\sin(\arccos(x))) = 1.$

On verra l'égalité : $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, qui permet alors de montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arccos n'est pas dérivable en 1 et en -1, qui sont les images des points 0 et π où il y a des dérivées horizontales.

■

I.8 Conclusion sur les règles de dérivation

Les tableaux suivants récapitulent les règles de calcul des dérivées,

Il faut les lire de cette manière : si la fonction f s'écrit sous la forme d'une somme $u+v$, où u et v sont des fonctions dérivables, alors sa dérivée s'écrit $u'+v'$

R Bien sûr on peut généraliser et écrire par exemple si $\left(\alpha_i\right)$ sont des réels et $\left(f_i\right)$ des fonctions dérivables :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i'$$

ou encore (plus difficile) :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} f_k\right) f_i'\right)$$

Combinaison linéaire :

$(\alpha u)' = \alpha u'$
$(u+v)' = u'+v'$

Produit :

$(uv)' = u'v+uv'$
$(uvw)' = u'vw+uv'w+uvw'$

Inverse et quotient :

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Composée :

$(u\circ v)' = \left(u'\circ v\right)\times v'$
$(u\circ v\circ w)' = \left(u'\circ v\circ w\right)\times\left(v'\circ w\right)\times w'$
$(x\mapsto u(ax+b))' = x\mapsto a\times u'(ax+b)$

Bijection réciproque :

$$\boxed{\left(u^{-1}\right)' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}}}$$

I.9 Dérivées des fonctions usuelles

On a les tableaux 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4 pour les fonctions usuelles.

D	$f(x)$	$f'(x)$	paramètre
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}_+^*$	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}x}$	

TABLE 6.1 – Dérivée des fonctions puissances

D	$f(x)$	$f'(x)$	paramètre
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	
$\mathbb{R}$	e^{ax}	ae^{ax}	$a \in \mathbb{C}$
$\mathbb{R}$	$a^x = e^{x\ln(a)}$	$\ln(a)a^x = \ln(a)e^{x\ln(a)}$	$a \in \mathbb{R}_+^*$

TABLE 6.2 – Dérivées des fonctions logarithme et exponentiel

D	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

TABLE 6.3 – Dérivées des fonctions trigonométriques

D	$f(x)$	$f'(x)$
$]-1,1[$	$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$]-1,1[$	$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

TABLE 6.4 – Dérivées des fonctions trigonométriques réciproques

I.10 Composée avec les fonctions usuelles

D'autre part, quelque exemple de dérivées de fonctions composées sont montrés sur les tableaux : 6.5, 6.6, 6.8, 6.7.

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)^\alpha$	$\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

TABLE 6.5 – Dérivées en u^α

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$v(x)e^{u(x)}$	$\Big(v'(x)+v(x)u'(x)\Big)e^{u(x)}$

TABLE 6.6 – Dérivées composée avec l'exponentielle et le logarithme

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\tan(u(x))$	$u'(x)(1+\tan^2(u(x))) = \dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$

TABLE 6.7 – Dérivées composées avec les fonctions trigonométriques

$f(x)$	$f'(x)$
$\arctan(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
$\arccos(u(x))$	$-\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arcsin(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

TABLE 6.8 – Dérivées composées avec les fonctions trigonométriques réciproques

II Dérivations successives

II.1 Définitions

Définition II.1 On dit que f est deux fois dérivable en x_0, si
- la fonction f est dérivable sur un voisinage de x_0 (*i.e.* sur un intervalle du type $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$)
- la fonction f' dérivable en x_0.

On note alors $f''(x_0)$, le réel :

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h},$$

On dit que f est deux fois dérivables sur D si elle est deux fois dérivables en tout point de D.

R On utilise souvent la définition $f^{(2)}$ pour différencier f'' et f^2.
La fonction f'' est la dérivée de la fonction f'. Ainsi, sauf cas très particulier, pour calculer f'' il faut déjà avoir calculé f'. Plus précisément, pour calculer $f''(x_0)$ (en un point x_0), il faut avoir calculé l'expression de $f'(x)$ pour x autour de x_0.

On étend ensuite ces définition à la dérivées n-ième, en disant :

Définition II.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est dérivable n fois en x_0, si f est $n-1$ fois dérivable autour de x_0 et telle que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en x_0. On note alors :

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}.$$

On dit que f est n fois dérivable sur D si elle est n fois dérivable en tout point de D.

La définition de la dérivée n-ième est ainsi une définition récursive, avec par définition :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' = \left(f'\right)^{(n)}.$$

et bien sûr par convention : $f^{(0)} = f$.

Définition II.3 On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D, si elle est n fois dérivable et que la dérivée n-ième est continue sur D.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (classe infinie) si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎ Remarquons que pour démontrer rigoureusement qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$, il faut donc démontrer (généralement par récurrence) que f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n. Cela n'est possible que

- pour les polynômes (dérivées n-ième nulle dès que n est supérieur au degré),
- les fonction cos et sin et exp pour lesquelles une formule existe par récurrence (il y en a d'autres).

Ou alors, il faut écrire la fonction f comme somme/composé/produit de fonction $\mathscr{C}^\infty$, comme on va le voir.

✎ On a bien par définition $f \in \mathscr{C}^n \Leftrightarrow f' \in \mathscr{C}^{n-1}$. D'autre part, si $f \in \mathscr{C}^n$ alors les fonctions $f^{(p)}$, pour $p \in [\![1,n]\!]$ sont alors continues sur D.

II.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$

Proposition II.1 La somme, le produit, le quotient, la composée de fonction de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

Ainsi, la somme, le produit, le quotient, la composée de fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

R Plus important : il existe une formule pour la dérivée n-ième d'une somme (c'est la somme des dérivées), il existe une formule pour la dérivée n-ième d'un produit de deux fonctions (c'est la formule de Leibniz que l'on verra plus tard). Par contre, il n'existe pas de formule pour la dérivée n-ième d'une composée.

Démonstration. Pour la somme, on démontre par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

Pour le produit le résultat est admis. On verra la formule de Leibniz qui permet de calculer directement $(fg)^{(n)}$.

Pour la composée, On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$\mathscr{P}(n)$: Toute composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

La propriété au rang 0 est connue (composée de fonctions continues est continue).

Pour l'hérédité, considérons n fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vrai et deux fonctions f et g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. On a vu :

$$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

On a $g' \in \mathscr{C}^n$, $f' \in \mathscr{C}^n$ et $g \in \mathscr{C}^{n+1} \subset \mathscr{C}^n$, donc par hypothèse de récurrence : $f' \circ g \in \mathscr{C}^n$ puis par produit $g' \times (f' \circ g) \in \mathscr{C}^n$, c'est-à-dire $(f \circ g)' \in \mathscr{C}^n$, ce qui signifie $f \circ g \in \mathscr{C}^{n+1}$, d'où l'hérédité. ■

R En conséquence de la composition, on a que si f ne s'annule pas, et $f \in \mathscr{C}^\infty$, alors $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{C}^\infty$. On peut aussi dire que le quotient de fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Proposition II.2 Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I et f est bijective sur I, avec $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors la bijection réciproque f^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^n$.

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et bijective sur I, avec $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors la bijection réciproque f^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Démonstration. On se contente de démontrer le résultat pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ celui sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ se démontre par récurrence sur n.

On a vu que f^{-1} (notée g) est dérivable. Et on a :

$$\forall x \in f(I), g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Ce qui donne bien que g' est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et donc g aussi. ■

II.3 Fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^\infty$

Proposition II.3 Sont de classe $\mathscr{C}^\infty$

- les polynômes, les quotients de polynômes, sur leur ensemble de définition
- les fonctions exp et ln, sur leur ensemble de définition
- les fonctions trigonométriques, sur $\mathbb{R}$.
- les fonctions arccos et arcsin, sauf en -1 et 1.
- la fonction arctan,
- les fonctions racines, sauf en 0.
- toutes composées, quotients, produits, etc. de ces fonctions,
- ainsi que les bijections réciproques de ces fonctions (attention aux images des points où la dérivée s'annule).

Attention aux fonctions arccos, arcsin, $\sqrt{\cdot}$ et $|\cdot|$ qui ne sont pas dérivables sur le bords de leur ensemble de définition.

III Généralisation

Dans cette partie, on généralise la notion de dérivée au cas d'une fonction f de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). On expose aussi les calculs de dérivées partielles.

III.1 Dérivation d'une fonction à valeurs complexes

Définition III.1 Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note a et b les fonction $D \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = a(x) + ib(x)$. On dit que la fonction f est dérivable en un point x_0 (resp. sur D) si et seulement si a et b sont dérivable en x_0 (resp. en tout point de D).

Dans ce cas on note $f'(x_0) = a'(x_0) + ib'(x_0)$ la fonction dérivée est alors aussi une fonction de $D \to \mathbb{C}$.

Attention : on étudie la dérivabilité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on ne dérive jamais une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ SAUF si c'est un polynôme.

■ **Exemple III.1** Si on considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \cos(2t) + i\sin(t) \end{array}$$

alors la dérivée est :

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & -2\sin(2t) + i\cos(t) \end{array}$$

■

Les règles de dérivation sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles :

Proposition III.1 Si u et v sont des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} (\alpha u)' &= \alpha u' \text{ pour } \alpha \in \mathbb{C}, \\ (u+v)' &= u' + v' \\ (uv)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{1}{u}\right)' &= -\frac{u'}{u^2} \text{ si } u \text{ ne s'annule pas} \end{aligned}$$

R La formule $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$ ne peut pas se généraliser, car lorsqu'on écrit $f \circ g$, la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et donc on ne peut pas dériver f.

Démonstration. Les trois premières propriétés ne posent pas de difficultés, à condition de décomposer u et v en partie réelle et imaginaire.

La dernière est admise (attention à ne pas utiliser de dérivation composée pour la démontrer).

Pour la montrer, il faut écrire :

$$\forall x \in D, \qquad u(x) = a(x) + ib(x)$$

et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in D, \qquad \frac{1}{u(x)} &= \frac{a(x) - ib(x)}{a(x)^2 + b(x)^2} \\ &= \frac{a(x)}{a(x)^2 + b(x)^2} - i\frac{b(x)}{a(x)^2 + b(x)^2}\end{aligned}$$

On a ainsi montré la dérivabilité de la fonction $\frac{1}{u}$.

Pour obtenir l'expression de cette dérivée, la première technique consiste à dériver les parties réelles et imaginaires pour obtenir :

$$\begin{aligned}\forall x \in D, \left(\frac{1}{u}\right)'(x) = &\frac{a'(x)\left(a(x)^2 + b(x)^2\right) - a(x)\left(2a'(x)a(x) + 2b'(x)b(x)\right)}{\left(a(x)^2 + b(x)^2\right)^2} \\ &- i\frac{b'(x)\left(a(x)^2 + b(x)^2\right) - b(x)\left(2a'(x)a(x) + 2b'(x)b(x)\right)}{\left(a(x)^2 + b(x)^2\right)^2}\end{aligned}$$

Il reste à simplifier pour faire apparaître $-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ (pas facile mais faisable).

Ou alors, on peut utiliser la relation :

$$\forall x \in D, \ u(x) \times \frac{1}{u(x)} = 1$$

et donc :

$$\forall x \in D, \ u'(x) \times \frac{1}{u(x)} + u(x) \times \left(\frac{1}{u}\right)'(x) = 0,$$

et donc :

$$\forall x \in D, \ \left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}.$$

■

Les dérivées des fonctions complexes sont surtout utilisées en physique pour dériver des exponentielles complexes.

Proposition III.2 Soit $a \in \mathbb{C}$, la dérivée de la fonction :

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ax}\end{array}\right. \quad \text{est} \quad \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & ae^{ax}\end{array}\right.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire : $a = u + iv$, et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{ax} = e^{ux}e^{ivx} = e^{ux}\left(\cos(vx) + i\sin(vx)\right).$$

La dérivée de $x \longmapsto e^{ax}$ est donc définie par :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, &[u\left(\cos(vx) + i\sin(vx)\right) + v\left(-\sin(vx) + i\cos(vx)\right)]\, e^{ux} \\ &= \left[ue^{ivx} + ive^{ivx}\right] e^{ux} = [u + iv]e^{(u+iv)x} = a^{ax}\end{aligned}$$

■

En dérivant e^{ix} par rapport à x, on retrouve :

$$\left(e^{ix}\right)' = ie^{ix} = e^{i(x+\frac{\pi}{2})}$$

$$\cos'(x) + i\sin'(x) = -\sin(x) + i\cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

et donc :

$$\cos'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

On peut généraliser au cas d'une composée avec l'exponentielle :

Proposition III.3 Soit $\varphi : D \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable et

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{\varphi(x)} \end{array}\right.$$

ie : $f = \exp\circ\varphi$, alors on a : f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, \qquad f'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}.$$

Démonstration. Ce n'est pas évident, parce que l'on n'a pas le résultat sur la dérivation composée.

Il faut donc écrire :

$$\forall x \in D, \qquad \varphi(x) = \varphi_r(x) + i\varphi_i(x)$$

puis :

$$\begin{aligned}\forall x \in D, \qquad f(x) &= e^{\varphi_r(x)}e^{i\varphi_i(x)} \\ &= e^{\varphi_r(x)}\left(\cos(\varphi_i(x)) + i\sin(\varphi_i(x))\right)\end{aligned}$$

et donc f dérivable comme somme de fonctions dérivables :

$$\begin{aligned}\forall x \in D, \qquad f'(x) &= e^{\varphi_r(x)}\Big(\varphi_r'(x)\left(\cos(\varphi_i(x)) + i\sin(\varphi_i(x))\right) \\ &\qquad + \varphi_i'(x)\left(-\sin(\varphi_i(x)) + i\cos(\varphi_i(x))\right)\Big) \\ &= e^{\varphi_r(x)}\left(\cos(\varphi_i(x)) + i\sin(\varphi_i(x))\right)\left(\varphi_r'(x) + i\varphi_i'(x)\right) \\ &= e^{\varphi_r(x)}e^{i\varphi_i(x)}\varphi'(x) \\ &= e^{\varphi(x)}\varphi'(x)\end{aligned}$$

■

III.2 Fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

On donne la définition de la dérivabilité pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On peut bien sûr généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, etc.

Définition III.2 Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on note f_1 et f_2 les fonctions $D \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \Big(f_1(x), f_2(x)\Big)$.

On dit que f est dérivable en en un point x_0 (resp. sur D) si et seulement si f_1 et f_2 sont dérivables en x_0 (resp. en tout point de D).

Le vecteur dérivée de f en x_0 est alors $f'(x_0) = \Big(f_1'(x), f_2'(x)\Big)$. L'application dérivée est alors une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

■ **Exemple III.2** Si un point mobile $M(t)$ se déplace dans le plan, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M(t) = \big(\cos(t)^2, \cos(t)\sin(t)\big)$$

alors le vecteur vitesse au point $M(t)$ est :

$$M'(t) = \big(-2\cos(t)\sin(t), -\sin^2(t) + \cos^2(t)\big)$$

■

III.3 Calculs de dérivée partielle

Définition III.3 On appelle fonction de deux variables, une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.

On note alors :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

L'étude des fonctions de deux variables sera faite dans le chapitre dédié. On se contente ici de montrer des exemples de calculs de dérivée partielle.

Définition III.4 Soit $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ une fonction de deux variables.

Sous réserve d'existence, on appelle dérivée partielle de f par rapport à x, notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, la fonction de deux variables obtenues en dérivant f par rapport à x, la variable y étant constante. L'application dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est elle-même une fonction deux variables.

De même, on peut définir la dérivée partielle de f par rapport à x, notée $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Le gradient au point (x_0, y_0) de la fonction f est le vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

■ **Exemple III.3** Considérons $f : (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$.

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

■

■ **Exemple III.4** Soit $n \in \mathbb{R}$, et $R \in \mathbb{R}$ fixés. On considère la fonction :

$$f : (V,T) \longmapsto nR\frac{T}{V}.$$

(on reconnaît la pression d'un gaz parfait en fonction de la température T, du volume V, du nombre de moles n et de la constante de Reynolds R).

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial V}(V,T) = -NR\frac{T}{V^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial T}(V,T) = nR\frac{1}{V}$$

■

IV Calcul de primitives

IV.1 Primitives d'une fonction définie sur un intervalle

Définition IV.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.

On dit que F est une primitive de f, si F est une fonction de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I et telle que :

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x)$$

Si f est continue, F est alors automatiquement $\mathscr{C}^1$, *i.e.* dérivable et à dérivée continue. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors $F \in \mathscr{C}^\infty$.

On ne parle jamais de *la primitive de* f mais de *une primitive* de f. Puisque il y a une infinité de primitive.

! Les primitives n'existent que sur des intervalles. Il n'y a pas de primitives sur des ensembles comme $\mathbb{R}^*$.

Théorème IV.1 — Théorème fondamental. Si f est une fonction **continue** sur l'**intervalle** I, alors f admet des primitives sur I.

Démonstration. Cette proposition est admise, conformément au programme. ■

Proposition IV.2 — Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Si f est continue sur l'intervalle I, alors elle admet une infinité de primitive.

Plus précisément, si f est à valeurs réelles, et si F est l'une des primitives de f et on a :

- toute primitive G de f sur I vérifie :

$$\exists c \in \mathbb{R},\ G = F + c$$

- réciproquement, pour tout valeur $c \in \mathbb{R}$, la fonction $F + c$ est une primitive de f sur I.

Si f est à valeurs complexes, on a le même résultat avec la constate c complexe.

Démonstration. On note F une primitive de f, alors on a $\forall c \in \mathbb{R}$, $(F+c)' = F' = f$. Ainsi, $F + c$ est une primitive de f.

Réciproquement, soit G telle que $\forall x \in I$, $G'(x) = f(x) = F'(x)$. On a alors $(G - F)' = 0$, comme I est un intervalle, on obtient alors $\exists c \in \mathbb{R},\ G - F = c$. ■

R Le fait que I soit un intervalle joue un rôle central dans la démonstration.

On peut lire la proposition d'une manière différente :

Proposition IV.3 Soit une fonction f qui admet sur un intervalle I une primitive, et soit x_0 un point de I et $y_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique primitive de f dont la valeur en x_0 soit y. En particulier, il existe un unique primitive qui s'annule en x_0.

R Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut évidement choisir $y_0 \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Soit F une primitive de f.

Unicité : Si G et G' sont solutions, on sait alors que $\exists c \in \mathbb{R},\ G = G' + c$. En regardant la valeur en x_0, on a $c = 0$.

Analyse : Si G est solution alors $\exists c \in \mathbb{R}, G = F + c$. en regardant la valeur en x_0, il vient : $c = y_0 - F(a)$.

Synthèse : Soit donc $G = F + y_0 - F(a)$, alors G est une primitive de f (puisque égale à F plus une constante), qui vérifie bien $G(a) = y_0$. ■

IV.2 Primitives usuelles

Le tableau **??** donne le tableau des primtives usuelles.

Il faut le lire sous la forme suivante : une primitive de $x \longmapsto f(x)$ sur l'intervalle I est $F(x)$. Les autres s'obtiennent en ajoutant une constante.

I	$f(x)$	$F(x)$	avec :
	x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	

TABLE 6.9 – Tableau des primitives des fonctions usuelles

I	$f(x)$	$F(x)$	avec :
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$	$x\ln x - x$	
$\mathbb{R}$	e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}$	$a \in \mathbb{C}^*$
$\mathbb{R}$	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$a > 0$ et $a \neq 1$

TABLE 6.10 – Tableau des primitives des fonctions usuelles

I	$f(x)$	$F(x)$	avec :
$\mathbb{R}$	$\sin(ax)$	$-\dfrac{\cos ax}{a}$	$a \in \mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}$	$\cos(ax)$	$\dfrac{\sin ax}{a}$	$a \in \mathbb{R}^*$
$\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$	$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	
$\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x$	

TABLE 6.11 – Tableau des primitives des fonctions usuelles

I	$f(x)$	$F(x)$	avec :
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	
$]-1,1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ ou $-\arccos x$	

TABLE 6.12 – Tableau des primitives des fonctions usuelles

IV.3 Méthodes de calcul des primitives

⋆ Combinaison linéaire

Proposition IV.4 Soit f et g admettant pour primitive F et G et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $F+\lambda G$ est une primitive de $f+\lambda g$.

Démonstration.

$$(F+\lambda G)' = f+\lambda g.$$

■

✯ Primitive obtenue par composition

Fonction	$\dfrac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u^\alpha u', \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$
Primitive	$\ln\lvert u\rvert$	e^u	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$2\sqrt{u}$	$\arcsin u$	$\arctan u$

.

TABLE 6.13 – Primitive dobtenues par composition

Ces primitives sont obtenues en utilisant la formule $(f\circ g)' = g' \times f'\circ g$, « à l'envers ».

Il faut être capable de repérer ces formules.

■ **Exemple IV.1** Trouver la primitive de $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. On repère clairement une fonction du type $u'u^{-1/2}$, avec $u(x) = x^2+3$ (sauf qu'il faut diviser par deux).

On écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = 2\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}\right) = u'(x)u(x)^{-1/2}$$

Avec $u(x) = x^2+3$. En intégrant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = u(x)^{1/2} = \sqrt{x^2+3}$$

■

✯ Lien entre intégration de fonctions réelles et complexes

Proposition IV.5 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction qui admet une primitive $F : I \to \mathbb{C}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On note f_1, f_2, F_1 et F_2 les fonctions $I \to \mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = f_1(x) + if_2(x) \text{ et } F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

alors F_1 est la primitive de f_1, et F_2 est la primitive de f_2.

Autrement dit, la primitive de la partie réelle / imaginaire est la partie réelle / imaginaire de la primitive.

Démonstration. Évident puisque la dérivée de la partie réelle est la partie réelle de la dérivée. ■

V Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive

V.1 Rappel sur l'intégration

Définition V.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles, a et b deux éléments de I.

On note $\int_a^b f(t)dt$ l'intégrale de a à b de la fonction f, c'est l'aire algébrique comprise entre l'axe horizontal et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur le domaine $[a,b]$.

On compte positivement les aires au-dessus de l'axe horizontal, négativement sinon.

R La variable t est muette. Ne pas oublier le dt. On peut noter $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f$ (sans la variable).

Théorème V.1 — Théorème fondamental. Soit F une primitive (quelconque) de f sur l'intervalle I. On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Notation V.1. *On note* $\Big[F\Big]_a^b$ *la quantité* $F(b) - F(a)$.

La quantité $F(b) - F(a)$ ne dépends pas de la primitive choisie, puisque deux primitives différentes sont égales à une constante près.

On peut déduire du théorème fondamental la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

On en déduit la linéarité :

$$\int_a^b \Big(\alpha f(t) + \beta g(t)\Big)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$

On démontre que l'intégrale réduite à un point est nulle : $\int_a^a f(t)dt = 0$.
Enfin, si on inverse les bornes, on obtient :

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

V.2 Fonction définie par des intégrales

Proposition V.2 Soit f une fonction continue sur l'intervalle I, et $x_0 \in I$. La fonction

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$$

est alors **l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0**.

Ainsi, la dérivée de la fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est $f(x)$

Démonstration. Évident. ■

✯ Exemple de fonction définie par une intégrale

Un problème souvent posé est celui d'étudier une fonction définie uniquement par une intégrale. Par exemple, on étudie la fonction φ définie par :

$$\varphi : x \longmapsto \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

La fonction φ est donc définie implicitement : c'est l'aire algébrique située sous la courbe de la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{\ln(t)}$ pour $t \in \left[x, x^2\right]$.

Pour trouver son ensemble de définition, on doit intégrer la fonction f sur un intervalle. On peut par exemple choisir $]1, +\infty[$.

En effet, la fonction :

$$f : \begin{cases}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{\ln(t)} \end{cases} \qquad \text{est continue sur l'intervalle }]1, +\infty[.$$

Elle admet donc une primitive (une infinité de primitives) sur cet intervalle.

Notons F une primitive de f sur $]1, +\infty[$. On n'a pas d'expression analytique de F, mais on a son existence.

On peut alors écrire :

$$\varphi x \longmapsto F\left(x^2\right) - F(x).$$

On doit donc trouver l'ensemble de définition de $x \longmapsto F\left(x^2\right)$ et $x \longmapsto F(x)$. On sait que la fonction F est définie sur $]1, +\infty[$, on écrit le schéma de composition :

$$\begin{array}{ccccc}]1, +\infty[& \to &]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 & & \\ & & y & \longmapsto & F(y) \\ x & & \longmapsto & & F\left(x^2\right) \end{array}$$

Ainsi, la fonction $x \longmapsto F\left(x^2\right)$ est définie sur $]1, +\infty[$.

Par somme, la fonction $\varphi x \longmapsto F\left(x^2\right) - F(x)$ est définie sur $]1, +\infty[$.

> Comprendre comment est construite la fonction permet de comprendre comment on peut la manipuler (ex : la dériver). Chercher l'ensemble de définition est ici une question fondamentale.

Continuons l'étude de cette fonction : déjà on remarque que f est classe $\mathscr{C}\infty$, donc aussi F donc aussi $x \mapsto F\left(x^2\right)$. Au final, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}\infty$ sur $]1, +\infty[$. On peut aussi dériver :

$$\begin{aligned}
\forall x>1, \qquad \varphi(x) =& F\left(x^2\right)-F(x) \\
\text{donc } \forall x>1, \qquad \varphi'(x) =& 2xF'\left(x^2\right)-F'(x) \\
=& 2x\frac{1}{\ln\left(x^2\right)}-\frac{1}{\ln(x)} \\
=& \frac{1}{\ln(x)}(x-1) \qquad >0.
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction φ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

! Attention, la fonction φ n'est pas définie en 1. On ne peut pas écrire directement $\varphi(1)=\int_1^1 \frac{dt}{\ln t}=0$, car $t\mapsto \frac{1}{\ln t}$ n'est pas définie en 1 !

V.3 Intégration par parties

L'intégration par parties consistent à lire la formule $(uv)'=u'v+uv'$ « à l'envers ».

Théorème V.3 — Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, x_0 un point de I.

Alors on a :

$$\forall x\in I, \int_{x_0}^{x} u(t)v'(t)dt=\Big[u(t)v(t)\Big]_{x_0}^{x}-\int_{x_0}^{x} u'(t)v(t)dt.$$

Autrement dit : on peut calculer une primitive de uv' en calculant la primitive de $-u'v$, à condition d'ajouter $u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)$.

R Parfois la fonction à intégrer est $x\mapsto 1$.
Pour la rédaction ; il faut indiquer les fonctions u, v et leur dérivée u' et v'. Il faut aussi écrire que u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$.

Démonstration. La fonction $t\mapsto u(t)v(t)$ étant une primitive de $t\mapsto u(t)v'(t)+u'(t)v(t)$, on en déduit que :

$$\int_{x_0}^{x}\Big(u(t)v'(t)+u'(t)v(t)\Big)dt=\Big[u(t)v(t)\Big]_{x_0}^{x}.$$

■

■ **Exemple V.1** Le plus classique :

$$\begin{aligned}
\int_1^x \ln(t)dt =& \int_1^x 1\times\ln(t)dt \\
=& \Big[t\ln(t)\Big]_1^x-\int_1^x t\times\frac{1}{t}dt \\
=& x\ln(x)-\int_1^x dt \\
=& x\ln(x)-x+1.
\end{aligned}$$

On en déduit que les primitives de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme : $x \mapsto x\ln(x) - x + \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. ∎

∎ **Exemple V.2** Le deuxième plus classique : $\displaystyle\int_0^x \arctan t\,dt$, avec $x > 0$.

On pose $u' = 1$, et $v = \arctan t$, soit $u = t$ et $v' = \frac{1}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^x \arctan t\,dt &= [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^x \\
&= x\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}
\end{aligned}$$

∎

∎ **Exemple V.3** Avec un produit polynôme/cosinus :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t-1)\sin t\,dt = \left[(t^2+t-1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2t+1)\cos t\,dt \\
&= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2t+1)\cos t\,dt \\
&= -1 + [(2t+1)\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt \\
&= -1 + (\pi+1) + 2[\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi - 2.
\end{aligned}$$

∎

V.4 Changement de variables

Proposition V.4 — Changement de variables pour calculer une intégrale. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[\alpha,\beta]$, et f une fonction continue telle que $f\circ\varphi$ est définie sur $[\alpha,\beta]$.

On a alors :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$$

On dit que l'on a effectué le changement de variables : $t = \varphi(x)$.

t est la nouvelle variable, x l'ancienne, la fonction qui donne le changement de variable donne la nouvelle en fonction de l'ancienne par $t = \varphi(x)$. En particulier, on voit : $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$, soit $dt = \varphi'(x)dx$.

Démonstration. Soit F une primitive de f, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &= \int_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\ &= [F(\varphi(x))]_{\alpha}^{\beta} \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt.\end{aligned}$$

■

Dans le cas classique où ϕ est bijective, on peut écrire cette proposition en posant $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$, et on obtient alors :

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Pour faire un changement de variable on écrira sur la copie :

- l'ancienne variable en fonction de la nouvelle,
- la nouvelle en fonction de l'ancienne,
- la manière dont les bornes varient (sous la forme t varie de ... à ... , u varie de ... à ...),
- la fonction $x \mapsto \varphi(x) = t$ (ou dans certains cas $t \longmapsto \varphi^{-1}(t) = x$) est bien de classe $\mathscr{C}^1$.
- le dx en fonction de dt.

! Contrairement au changement de variable dans les sommes, il ne faut pas mettre les bornes dans le sens naturel. Si φ est décroissante, les bornes sont « inversées ». Dans ce cas, on peut les remettre dans le bon sens en ajoutant un signe moins.

■ **Exemple V.4** On veut calculer :

$$\int_0^x \frac{e^t}{1+e^{2t}}dt, \text{ pour } x > 0.$$

On pose $u = e^t = \varphi(t)$, soit $t = \ln(u)$. Lorsque t varie dans $[0,x]$, u varie entre $[1,e^x]$. Ce changement de variable $t \mapsto e^t$ est bien $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$. Enfin, si $t = \ln(u)$, alors $\frac{dt}{du} = \frac{1}{u}$, et donc $dt = \frac{du}{u}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{e^t}{1+e^{2t}}dt &= \int_1^{e^x} \frac{u}{1+u^2}\frac{du}{u} \\ &= \int_1^{e^x} \frac{1}{1+u^2}du \\ &= \Big[\arctan(u)\Big]_1^{e^x} = \arctan(e^x) - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

■

Toutes les formules du type : « la primitive de $u'u^\alpha$ est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ » peuvent s'obtenir par changement de variable (en posant $u(x)$ la nouvelle variable). Ici par exemple, on peut aussi écrire :

$$\frac{e^t}{1+e^{2t}} = \frac{u'}{1+u^2} \qquad \text{avec } u = e^t$$

■ **Exemple V.5** On veut calculer :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx,$$

Notons que cela n'est pas de la forme $u'u^\alpha$ puisqu'on n'a pas le u'.

On pose alors : $x = \sin u$, soit $u = \arcsin(x) = \varphi(x)$. Lorsque x varie dans l'intervalle $[0,1]$, u varie dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Le changement $x \mapsto \arcsin(x)$ n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ (à cause de la dérivabilité en 1). Par contre, $u \mapsto \sin u$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

R Ici la formule est appliquée « *à l'envers* » c'est-à-dire en allant de l'expression avec la variable u vers l'expression avec la variable x. Cela ne pose pas de difficulté. C'est pourquoi il suffit de vérifier que l'un des changements de variables est de classe $\mathscr{C}^1$.

Enfin, $x = \sin(u)$ donc :

$$\frac{dx}{du} = \cos(u) \qquad \text{soit } dx = \cos(u)du$$

Donc :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)du$$

Cette dernière égalité provient du fait que sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ le cos est positif. On obtient :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}du = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

■

⋆ Application aux fonctions paires, impaires, et périodiques

Proposition V.5 Soit $a > 0$,

- Si f est paire, et continue sur $[-a,a]$, alors $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$,
- Si f est impaire, et continue sur $[-a,a]$, alors $\int_{-a}^a f = 0$.

Ces résultats sont intuitifs, lorsqu'on dessine les courbes représentatives des deux fonctions :

- Si elle est paire, alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$, ainsi l'aire entre $-a$ et 0 est la même que l'aire entre 0 et a.

- Si elle est impaire, alors la courbe est symétrique par rapport au point $(x,y) = (0,0)$, ainsi l'aire (algébrique) entre $-a$ et 0 est l'opposée que l'aire entre 0 et a.

C'est ce que montre la preuve.

Démonstration.

$$\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_{0}^{a} f$$

Supposons la fonction paire, on démontre alors que $\int_{-a}^{0} f = \int_{0}^{a} f$. On pose donc $t = -u$, soit $u = -t$ et $dt = -du$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(t)dt &= -\int_{a}^{0} f(-u)du \\ &= \int_{0}^{a} f(-u)du \\ &= \int_{0}^{a} f(u)du\end{aligned}$$

Dans le cas impair on démontre que $\int_{-a}^{0} f = \int_{0}^{a} f$. On pose donc $t = -u$, soit $u = -t$ et $dt = -du$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(t)dt &= -\int_{a}^{0} f(-u)du \\ &= \int_{0}^{a} f(-u)du \\ &= -\int_{0}^{a} f(u)du\end{aligned}$$

■

Proposition V.6 Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et T périodique. Alors on a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \int_{a+nT}^{b+nT} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

et

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$$

Encore une fois, cela est intuitif : l'aire est invariante par translation de nT, et l'aire entre a et $a+T$ est la même qu'entre 0 et T.

Démonstration. On a, en posant $u = t - nT$, soit $t = u + nT$ et $du = dt$,

$$\begin{aligned}\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)dt &= \int_{a}^{b} f(t+nT)dt \\ &= \int_{a}^{b} f(t)dt\end{aligned}$$

En en posant $u = t - a$, $t = u + a$, on a :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt$$

DAns la première intégrale, on pose $u = t + T$, donc u varie entre $a + T$ et T et $du = dt$. Cela donne :

$$\begin{aligned}\int_a^0 f(t)dt &= \int_{a+T}^T f(u-T)du \\ &= \int_{a+T}^T f(u)du \qquad \text{par périodicité}\end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(t)dt &= \int_{T+a}^T f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt \\ &= \int_0^T f(t)dt\end{aligned}$$

■

VI Cas particuliers à connaître

On voit dans cette section quelques exemples de calcul à avoir fait.

VI.1 Calcul de $\int_a^b \cos^n x \sin^p x dx$

Il y a alors deux techniques :

- On peut linéariser le produit en utilisant la formule d'Euler.
- Si l'une des deux puissances est impaires, on fait alors le *changement de variable* :
  - $t = \cos x$ si la puissance du sin est impaire,
  - $t = \sin x$ si la puissance du cos est impaire,

  (l'idée est d'utiliser $\cos^2 + \sin^2 = 1$).

■ Exemple VI.1

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^3 x dx.$$

On pose donc $t = \sin x$, soit $x = \arcsin t$. les bornes deviennent 0 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$. de plus, $\frac{dt}{dx} = \cos x$, soit $dt = \cos x dx$. De plus : $\sin^4 x = t^4$, et on transforme le $\cos^2 x = (1 - \sin^2) = (1 - t^2)$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^4(1-t^2)dt \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^4 - t^6 dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{9}{560}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple VI.2**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$$

on pose donc : $t = \cos x$ soit $x = \arcsin t$. les bornes deviennent 1 et 0. de plus, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, soit $dt = -\sin x dx$. Puis on a : $\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2 = (1-t^2)^2$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \sin x dx \\
&= -\int_1^0 (1-t^2)^2 dt = \int_0^1 (1-t^2)^2 dt \\
&= \int_0^1 (1-2t^2+t^4 dt = \left[t+2\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right]_0^1 \\
&= 1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5} = \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple VI.3**

$$\int_0^x \sin^2 t \cos^2 t dt.$$

On utilise donc Moivre :

$$\begin{aligned}
\sin^2 t \cos^2 t &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{2it}-2+e^{-2it}\right)\left(e^{2it}+2+e^{-2it}\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{4it}-2+e^{-4it}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(1-\cos(4t)\right).
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin^2 t \cos^2 t dt &= \frac{1}{8}\int_0^x (1-\cos(4t))\, dt \\
&= \frac{1}{8}\left[t-\frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^x = \frac{1}{8}\left(x-\frac{\sin(4x)}{4}\right).
\end{aligned}$$

■

VI.2 Produit exponentiel et cosinus

On s'intéresse au calcul de la primitive des fonctions du type

$$f_1 : x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad \text{et} \qquad f_2 : x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)\, dx$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Le principe est alors de poser $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. et de calculer la primitive de $f : x \mapsto e^{\lambda x}$. On connaît la primitive de cette fonction, c'est $F : x \mapsto \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ e^{\lambda x} =& e^{\alpha x}e^{i\beta x}\\ =& e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))\\ =& e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\sin(\beta x) = f_1(x) + if_2(x).\end{aligned}$$

Ainsi, la primitive de f_1 est la fonction :

$$x \longmapsto \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\right)$$

et la primitive de f_2 est :

$$x \longmapsto \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\right)$$

■ **Exemple VI.4** Cherchons la primitive de $f : x \mapsto e^{-x}\cos(x)$. Pour cela, on considère la fonction à valeurs complexes : $g : x \mapsto e^{(-1+i)x}$. La primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G : x \mapsto \frac{1}{(-1+i)}e^{(-1+i)x}$. On écrit alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{(-1+i)}e^{(-1+i)x} =& e^{-x}\left(\frac{-1-i}{2}\right)(\cos(x) + i\sin(x))\\ =& \frac{1}{2}e^{-x}(-\cos(x) + \sin(x)) + \frac{i}{2}e^{-x}(-\sin(x) - \cos(x))\end{aligned}$$

La partie réelle de G est la primitive de f notée F. On obtient ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(-\cos(x) + \sin(x)).$$

■

Une autre technique consiste à chercher des primitive de $x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ sous la forme : $x \mapsto e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer.

Exercice 1 Appliquer cette méthode sur l'exemple précédent.

VI.3 Intégrale d'une fonction exponentiel polynôme

On s'intéresse au calcul de :

$$\int_a^b P(x)\cos\alpha x dx, \qquad \int_a^b P(x)\sin\alpha x dx \qquad \text{et} \quad \int_a^b P(x)e^{\alpha x}dx.$$

avec P un polynôme (qui peut être constant).

Deux méthodes :

- diminuer le degré du polynôme par dérivation successive dans des ipp, à la fin il ne reste que des fonctions trigonométriques.

- Chercher une primitive sous la forme : $Q(x)e^{\alpha x}$, ou $Q_1(x)\cos(\alpha x)+Q_2(x)\sin(\alpha x)$. Selon si α est ou pas racine de P, le degré de Q peut être supérieur à $d(P)+1$. De plus si on a une intégrale avec un cos il peut y avoir des cos ET des sin.

■ **Exemple VI.5** Avec la méthode 1 :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}dx &= \left[-(x^2+1)e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x}dx\\ &= -2e^{-1}+1+2\int_0^1 xe^{-x}dx\\ &= -2e^{-1}+1+2\left([-xe{-}x]_0^1+\int_0^1 e^x dx\right)\\ &= -2e^{-1}+1+2\left(-e^{-1}-e^{-1}+1\right)\\ &= -6e^{-1}+3\end{aligned}$$

■

■ **Exemple VI.6** Avec la méthode 2 : On cherche une primitive sous la forme $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$. Cela donne :

$$F'(x) = (2ax+b-ax^2-bx-c)e^{-x}$$

ainsi, $a=-1$, $b=-2$ et $c=-3$, puis :

$$\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}dx = \left[(-x^2-2x-3)e^{-x}\right]_0^1 = -6e^{-1}+3.$$

■

VI.4 Double ipp dans le même sens

Pour calculer certaines intégrales avec des cos et des sin, on pourra faire deux intégration par parties *dans le même sens*, pour retomber sur l'intégrale de départ :

■ **Exemple VI.7**

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin 2xe^{-x}dx &= \left[2\sin 2xe^{-x}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\cos 2xe^{-x}dx\\ &= \int_0^\pi 2\cos 2xe^{-x}dx\\ &= \left[-2\cos 2xe^{-x}\right]_0^\pi - 4\int_0^\pi \sin 2xe^{-x}dx\\ &= -2e^{-\pi}+2-4\int_0^\pi \sin 2xe^{-x}dx\end{aligned}$$

On voit qu'on a retrouvé l'intégrale de départ, donc si on note : $I = \int_0^\pi \sin 2xe^{-x}dx$. On a : $I = -2e^{-\pi}+2-4I$, d'où on déduit facilement : $I = -\frac{2}{5}\left(e^{-\pi}-1\right)$ ■

VI.5 Fraction rationnelle du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Dans cette section, on regarde le calcul d'un primitive de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{Q(x)}$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$. La technique dépend du polynôme $Q(x)$ au dénominateur, en fait de son déterminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

✯ Cas $\Delta > 0$

Le polynôme Q admet deux racines réels distinctes, notées x_1 et x_2. Il se factorise sous la forme : $Q(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

On cherche alors α et β deux réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \qquad \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2},$$

puis on intègre.

Une proposition (hors programme) assure l'existence de α et β.

Pour les déterminer, on procède par analyse synthèse, c'est à dire suppose qu'ils existent et on les obtient

- soit par identification des coefficients devant x^2 et x (long mais faisable),
- soit (mieux) en multipliant par $x - x_1$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_2\}, \qquad \frac{1}{a(x-x_2)} = \alpha + (x-x_1)\frac{\beta}{x-x_2}$$

  ainsi en faisant $x = x_1$ dans cette dernière égalité, on a la valeur de α.

Une fois obtenu l'expression :

$$f : x \longmapsto \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2}$$

on en déduit facilement une primitive :

$$F : x \longmapsto \alpha \ln(x-x_1) + \beta \ln(x-x_2)$$

■ **Exemple VI.8** Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$. On a facilement $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$.

Puis, la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}, \qquad \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

On en déduit la primitive :

$$F : x \longmapsto \ln(x-2) - \ln(x-1).$$

■

✯ **cas** $\Delta = 0$

Le polynôme Q admet une racine réelle double, notée x_0. Il se factorise sous la forme : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}, \qquad \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(x - x_0)^2}\right)$$

Cela donne directement la primitive :

$$F : x \longmapsto -\frac{1}{a}\frac{1}{x - x_0}$$

■ **Exemple VI.9** Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 4}$.

On facilement : $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, puis la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \qquad \frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Ce qui donne la primitive :

$$F : x \longmapsto -\frac{1}{x-2}$$

■

✯ **Cas** $\Delta < 0$

On fait alors apparaître une arctangente, en utilisant la dorme canonique :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ax^2 + bx + c} &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}\right)
\end{aligned}$$

on note $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}}$ (comme $\Delta < 0$, on a β existe).

On est donc ramené à calculer une primitive d'une fonction de la forme :

$$x \longmapsto \frac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$$

On écrit :

$$\frac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2 + 1}.$$

Il reste à faire le changement de variable $u = \frac{x-\alpha}{\beta}$ pour avoir la forme : $u \mapsto \frac{1}{u^2+1}$, qui s'intègre en une arctangente.

R Pour obtenir le résultat final, on peut rédiger de deux manière :

- en écrivant la primitive sous forme d'intégrale : $x \mapsto \int_{x_0}^{x} \frac{1}{at^2+bt+c}dt$, pour faire le changement de variable,
- en trouvant une forme $\frac{u'}{1+u^2}$.

Exemple VI.10 On considère $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$. On voit que le polynôme x^2+x+1 n'a pas de racine réelles (c'est j et j^2 ses racines).

On écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right)$$
$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\right)$$

On peut rédiger par changement de variable :

$$\int_0^x \frac{1}{t^2+t+1}dt = \frac{4}{3}\int_0^x \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}dt$$

On pose donc $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)$, on a $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dt$. C'est-à-dire : $dt = \frac{\sqrt{3}}{2}du$. On voit qu'avec ce changement x varie entre :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Cela donne :

$$\int_0^x \frac{1}{t^2+t+1}dt = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{u^2+1}du$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\arctan(u)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) \text{ à une constante près.}$$

Au final, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ est :

$$x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

■

Calcul de dérivées et de primitives

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

★ **Fonctions usuelles**

Exercice 1 Déterminer

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

Correction : écrire sous forme exponentielle, puis utiliser $\lim_{x\to 0} x\ln(x)=0$ et

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$

Exercice 2 Soit la fonction $f : x \longmapsto x^x$. Déterminer l'ensemble de définition, justifier la dérivabilité, puis construire le tableau de variation. Vérifier la dérivabilité en 0.

Correction : écrire sous forme exponentielle : $f(x)=x^x=e^{x\ln(x)}$. C'est donc la composée :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\
x & \longmapsto & x\ln(x) & & \\
 & & y & \longmapsto & e^y\\
x & & \longmapsto & & e^{x\ln(x)}
\end{array}$$

On voit donc que la fonction est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut la prolonger en 0, en posant $f(0)=1$. En effet, on a :

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x)=0 \qquad \text{donc } \lim_{x\to 0} e^{x\ln(x)}=1$$

La dérivée est donc : $f'(x)=(\ln x+1)x^x$
la fonction est décroissante pour $x\leqslant \frac{1}{e}$ puis croissante.
Pour la dérivabilité en 0, on a :

$$\forall x>0,\quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{e^{x\ln x}-1}{x}=\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\ln(x)$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln(t)=-\infty$. D'où :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$$

On a donc une demi-tangente verticale.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$.

Correction : On a les équivalences :

$$x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x \iff e^{\sqrt{x}\ln x}=e^{x\ln(\sqrt{x})}$$

On voit déjà que l'équation est définie pour $x > 0$. On continue l'équivalence :

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x &\iff \sqrt{x}\ln(x) = \frac{1}{2}x\ln(x) \\ &\iff \ln(x)(\sqrt{x})(1-\frac{1}{2}\sqrt{x}) = 0 \\ &\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = 0 \text{ ou } 1-\frac{1}{2}\sqrt{x} = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

On peut ajouter que 0 est aussi solution.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^{x^3} = (x^x)^3$.

Correction : Par équivalence :

$$\begin{aligned} x^{x^3} = (x^x)^3 &\iff e^{x^3\ln(x)} = \left(e^{x\ln(x)}\right)^3 \\ &\iff e^{x^3\ln(x)} = e^{3x\ln(x)} \end{aligned}$$

L'équation est définie pour $x > 0$, on continue l'équivalence :

$$\begin{aligned} x^{x^3} = (x^x)^3 &\iff x^3\ln(x) = 3x\ln(x) \\ &\iff \ln(x)x\left(x^2-3\right) = 0 \end{aligned}$$

D'où $x = \sqrt{3}$ ou $x = 1$. On peut ajouter que 0 est aussi solution.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2e^{6x+1} + 9e^{4x+1} \geqslant 5\sqrt{e^{4x+2}}$

Correction : l'équation est définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} 2e^{6x+1} + 9e^{4x+1} \geqslant 5e^{2x+1} &\iff 2e^{6x} + 9e^{4x} \geqslant 5e^{2x} \\ &\iff 2X^3 + 9X^2 \geqslant 5X \text{ avec } X = e^x \\ &\iff X\left(2X^2+9X-5\right) \geqslant 0 \text{ avec } X = e^x \\ &\iff 2X^2+9X-5 \geqslant 0 \end{aligned}$$

On retombe sur une inéquation du second ordre. On calcule les racines : $\Delta = 81 + 4 \times 2 \times 5 = 41$.

Exercice 6 Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$.

Correction : On procède par équivalence :

$$\begin{aligned} x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2} &\iff e^{x\ln(x)}e^{(1-x)\ln(1-x)} \geqslant \frac{1}{2} \\ &\iff e^{x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)} \geqslant \frac{1}{2} \\ &\iff x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2) \end{aligned}$$

Il faut donc étudier la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) = x\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \ln(1-x)$$

(c'est la fonction Entropie de Shannon qui sert en physique).

Il faut vérifier que la fonction f admet un minimum en $x = \frac{1}{2}$, Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,1[, \quad f(x) &\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2). \end{aligned}$$

On peut par exemple dériver la fonction f

Exercice 7

1. Montrer que pour tout réel $x>0$, $\ln(x)\leqslant x-1$.
2. En déduire que pour tout entier $n\geqslant 2$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant e\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Correction :

1. Simple étude de $x\mapsto \ln(x)-x+1$.
2. On a :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &\leqslant e^{n\times\frac{1}{n}}=e.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} &= e^{-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\\ &\geqslant e^{-n\times-\frac{1}{n}}=e.\end{aligned}$$

✯ Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 8 Tracer les courbes suivantes après les avoir étudiées :

$$f(x)=\arcsin(\sin(x)),\qquad g(x)=\arccos(\cos(x)),\qquad h(x)=\arctan(\tan(x)).$$

Correction :

On a :

$$\begin{aligned}\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],&\ f(x)=x\\ \forall x\in[0,\pi],&\ g(x)=x\\ \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,&\ h(x)=x\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f &\text{ est } 2\pi \text{ périodique}\\ g &\text{ est } 2\pi \text{ périodique}\\ h &\text{ est } \pi \text{ périodique}\end{aligned}$$

h est alors entièrement déterminée. Enfin :

$$\begin{aligned}\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right],\ f(x) &= \arcsin(\sin(x))\\ &= \arcsin(\sin(x-\pi))=x-\pi\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\forall x\in[-\pi,0],\ g(x) &= \arccos(\cos(x))\\ &= \arccos(\cos(-x))=-x.\end{aligned}$$

Exercice 9 Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\qquad \forall x\in\mathbb{R},\ \sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Correction :

Classiquement, on part de la relation à angle constant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ |\cos(\alpha)| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$

On remplace α par $\arctan(x)$. Ce qui donne :

$$|\cos(\arctan(x))| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Il reste à enlever les valeurs absolues, en remarquant que $\cos(\arctan(x)) \geqslant 0$ car $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour le deuxième :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ |\sin(\alpha)| = \frac{|\tan(\alpha)|}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$

Ce qui donne :

$$|\sin(\arctan(x))| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

On peut enlever les valeurs absolues par disjonction des cas selon le signe de x.

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}, \qquad \arcsin x = 2\arctan x.$$

Correction première équation : Soit x la solution de (E). On a alors : $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On applique la fonction tangente à (E) pour obtenir :

$$\tan\left(\arctan x + \arctan(2x)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

On utilise alors la formule : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$. en remplaçant a par $\arctan(x)$ et b par $\arctan(2x)$.

On a bien :

$$\begin{aligned} 0 < a < \frac{\pi}{4} \text{ donc } && \tan(a) \text{existe} \\ 0 < b < \frac{\pi}{4} \text{ donc } && \tan(b) \text{existe} \\ 0 < a+b < \frac{\pi}{4} \text{ donc } && \tan(a+b) \text{existe,} \end{aligned}$$

donc on peut appliquer cette formule.

REM : penser à le vérifier !

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{x+2x}{1-2x^2} &= 1 \\ 3x &= 1-2x^2 \\ 2x^2+3x-1 &= 0. \end{aligned}$$

La solution x est donc solution de cette équation de degré 2.

On résout rapidement cette équation : $\Delta = 9+8 = 17$ et les solutions sont

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \qquad x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}.$$

On a donc deux solutions candidates.

Réciproquement. On sait que :

$$\tan\left(\arctan x_1 + \arctan(2x_1)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Il reste à estimer la valeur $\arctan x_1 + \arctan(2x_1)$ pour savoir dans quel intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ cette quantité se situe.

On a :

$$\frac{-3+4}{4} = \frac{1}{4} < x_1 < \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 < x_1 < 1 \text{ donc } 0 < \arctan(x_1) < \frac{\pi}{4} \\ 0 < 2x_1 < 1 \text{ donc } 0 < \arctan(2x_1) < \frac{\pi}{4} \\ \text{donc } 0 < \arctan x_1 + \arctan(2x_1) < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Au final, on a :

$$\begin{aligned} \tan\left(\arctan x_1 + \arctan(2x_1)\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \arctan x_1 + \arctan(2x_1) &\in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{\pi}{4} &\in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \tan \text{ injective sur } &\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

D'où :

$$\arctan x_1 + \arctan(2x_1) = \frac{\pi}{4}$$

et x_1 est bien solution.

Pour x_2, même démarche :

$$\frac{-3-5}{4} = -2 < x_2 < \frac{-3-4}{4} = -\frac{7}{4}$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} x_2 < -1 \text{ donc } -\frac{\pi}{2} < \arctan(x_2) < -\frac{\pi}{4} \\ 2x_2 < 0 \text{ donc } -\frac{\pi}{2} < \arctan(2x_2) < 0 \\ \text{donc } -\pi < \arctan x_2 + \arctan(2x_2) < -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Donc x_2 n'est pas solution. Plus précisément, on sait :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \arctan x_2 + \arctan(2x_2) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Comme $-\pi < \arctan x_2 + \arctan(2x_2) < -\frac{\pi}{4}$, nécessairement $k = -1$ et donc :

$$\arctan x_2 + \arctan(2x_2) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Correction deuxième équation : Déjà $\mathscr{D}_f = [-1, 1]$.

Soit x solution de $\arcsin x = 2\arctan x$, on a alors :

$$\begin{aligned} x = \sin(\arcsin(x)) &= \sin(2\arctan x) \\ &= 2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x) \\ &= 2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, x est solution de $x = \frac{2x}{1+x^2}$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} x + x^3 &= 2x \\ x^3 &= x \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 &\text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

On a trois solutions candidates : 0, 1 et -1.

On peut alors vérifier, puisque :

$$\begin{aligned} \arcsin(0) &= 0 \text{ et } \arctan(0) = 0 \\ \arcsin(1) &= \frac{\pi}{2} \text{ et } \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \\ \arcsin(-1) &= -\frac{\pi}{2} \text{ et } \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

D'où ces trois valeurs sont bien solutions.

On peut aussi remarquer que pour $x \in [-1,1]$, $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et$\arctan(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ donc $2\arctan(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. finalement,

$$\forall x \in [-1,1], \arcsin x = 2\arctan x \Leftrightarrow \sin(\arcsin(x)) = \sin(2\arctan(x)).$$

Cela donne :

$$\mathscr{S} = \left\{0, 1, -1\right\}$$

⋆ Dérivation

Exercice 11 La fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

Correction : Taux d'accroissement

Exercice 12 Soit $f : x \mapsto \sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x$.

Déterminer le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel la fonction f reste positive.

Correction : Il faut utiliser les formule de trigonométrie pour factoriser, puis étudier la fonction.

Exercice 13 Déterminer le maximum et le minimum sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto 2\cos x - 2\sin x + 1$.

Correction : Dériver pour étudier la fonction. On peut aussi factoriser $\cos x - \sin x$ pour simplifier.

Exercice 14 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est dérivable en 0 alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(-x)}{2x} = f'(0)$.
2. Que dire de la réciproque ?

Correction :

1. On a :

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x} + \frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right)$$

Or :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) \text{ et } \lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0).$$

D'où le résultat.

2. Réciproque fausse, il faut prendre une fonction impaire non dérivable, par exemple $f : x \mapsto |x|$ On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)-f(-x)=0,\ \text{donc } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x} = 0 \text{ existe}$$

mais f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 15 Considérons la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \end{array}$$

1. Représenter cette fonction.
2. Justifier que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et calculer $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$.
3. L'expression de $f'(x)$ trouvée à la question précédente admet-elle une limite en 0 ?
4. Étudier la dérivabilité en 0.

Correction :

1. Oscille de plus en plus vite au voisinage de 0
2. $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
3. Non car sinon $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ admet une limite en $+\infty$.
4. f dérivable en 0, avec $f'(0)=0$ (taux d'accroissement).

Montre que les rapport entre la dérivée en 0 et la limite de $f'(x)$ en 0 sont délicats.

⋆ Dérivée d'une composée

Exercice 16 Pour chacune des fonctions réelles suivantes, déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable, puis calculer sa dérivée.

$$x \longmapsto e^x\ln(\sin(x)), \qquad x \longmapsto \ln\left(\frac{x^x-1}{x^x+1}\right),$$

$$x \longmapsto 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right),$$

$$x \longmapsto \ln(|x^2-3x+2|), \qquad x \longmapsto \sqrt{|1-x^2|}.$$

$$x \longmapsto \ln(|\tan x|), \qquad x \longmapsto \sqrt{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Correction pour $x \mapsto e^x\ln(\sin(x))$:

$$f : x \longmapsto e^x\ln(\sin(x))$$

On a d'un côté la composée :

$$\begin{array}{ccccc}]0,\pi[& \to & \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x & & \\ & & y & \longmapsto & \ln(y) \end{array}$$

Ce qui montre que $x \mapsto \ln(\sin(x))$ est définie et dérivable sur $]0,\pi[$.

Par produit avec : $\begin{array}{ccc}]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$ on obtient que f est définie et dérivable sur $]0,\pi[$.

Plusieurs remarques :

- L'ensemble de définition est en fait : $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, 2(k+1)\pi[$
- On peut écrire différement le schéma de composition :

  $$]0,\pi[\quad \to \quad]0,1[\quad \to \quad \mathbb{R}^{-*}$$

  seul l'ensemble de définition nous intéresse.
- On fait le produit avec la restriction de l'exponentielle, pas la fonction exponentielle (d'où l'avantage de ne pas donner de noms aux fonctions, mais de bien préciser l'ensemble de départ et d'arrivée).

Le calcul de la dérivée est facile (produit puis composition) :

$$\forall x \in]0,\pi[, \qquad f'(x) = e^x\left(\ln(\sin(x)) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)$$

Correction pour $x \mapsto \ln\left(\frac{x^x-1}{x^x+1}\right)$

Pour la deuxième, on a :

$$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{x^x-1}{x^x+1}\right) = \ln\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{e^{x\ln x}+1}\right)$$

On a donc la composition suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc}
]1,+\infty[& \to & \mathbb{R}^{+*} & \to &]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[& \to & \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\
x & \mapsto & x\ln(x) & & & & & & \\
 & & y & \mapsto & e^y & & & & \\
 & & & & z & \mapsto & \dfrac{z-1}{z+1} & & \\
 & & & & & & t & \mapsto & \ln(t) \\
x & & & & \longmapsto & & & & \ln\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{e^{x\ln x}+1}\right)
\end{array}$$

Ce qui donne l'ensemble de définition et de dérivation de f.

Plusieurs remarques :

- Pour construire le schéma, on part de la fin où on met $\mathbb{R}$ (puisqu'on n'a pas besoin d'être plus précis ici). Puis, on résout des inéquations successives pour trouver les ensembles de définition « depuis la fin » :

  $$\begin{aligned} \ln(t) &\in \mathbb{R} \\ \frac{z-1}{z+1} &\in \mathbb{R}^{+*} \\ e^y &\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ x\ln(x) &> 0 \end{aligned}$$

- On peut écrire différemment le schéma de composition.
- Les calculs peuvent se simplifier en écrivant :

  $$\frac{x^x-1}{x^x+1} = \frac{x^x+1-2}{x^x+1} = 1 + \frac{-2}{x^x+1}$$

On obtient la dérivée :

$$\begin{aligned} \forall x > 1,\ f'(x) =& \frac{1}{\frac{x^x-1}{x^x+1}} \times \left(\frac{2}{(x^x-1)^2}\right) \times e^{x\ln x} \times (\ln x + 1) \\ =&2\frac{1}{(x^x-1)(x^x+1)} x^x(\ln x+1). \end{aligned}$$

En particulier, on voit que la fonction f est croissante.

Correction pour $x \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ **:**

Soit

$$f : x \longmapsto 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

On a le schéma composition suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}]-1,1] & \to & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1-x}{1+x} & & & & \\ & & y & \mapsto & \sqrt{y} & & \\ & & & & z & \mapsto & 2\arctan(z) \end{array}$$

Ainsi, la fonction f est définie sur $]-1,1]$. Elle est continue aussi sur $]-1,1]$.

Par contre, pour la dérivation, on a un schéma légèrement différent :

$$\begin{array}{ccccccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R}^+_* & \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1-x}{1+x} & & & & \\ & & y & \mapsto & \sqrt{y} & & \\ & & & & z & \mapsto & 2\arctan(z) \end{array}$$

qui montre que la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$.

On calcule la dérivée :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[,\ f'(x) =& 2\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \frac{1}{(1+x)^2} \\ =& -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

- Attention à la dérivation en 1, par contre, il n'y a pas de problème pour la continuité.
- On peut continuer le calcul pour obtenir l'expression de la fonction f.

On a :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f'(x) = \arccos(x)$$

Donc les fonctions f et arccosinus on la même dérivée sur **l'intervalle** $]-1,1[$, elle diffère donc d'une constante, ce qui s'écrit :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1,1[, f(x) = \arccos(x) + C.$$

On constate que $f(0) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que $C = 0$ et donc :

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \arccos(x)$$

Par continuité, cette égalité est aussi valable en 1, ce qui donne :

$$\forall x \in]-1,1], f(x) = \arccos(x)$$

Pour -1, il faudrait prolonger par continuité la fonction f, l'égalité ci-dessus montre que $\lim_{x\to -1} f(x) = \pi$ et donc on peut prolonger (en gardant l'égalité en posant $f(-1) = \pi$).

Exercice 17 On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition puis la régularité de la fonction f.
2. Calculer sa dérivée et en déduire une expression plus simple pour f.

Correction : Un schéma de composition permet de constater que f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$, elle est définie et continue sur $[-1,0[\cup]0,1]$.

On dérive :

$$\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{1}{1+\frac{1-x^2}{x^2}} \times \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2} \frac{1}{x^2} \right) \\
=& x^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \frac{1}{x^2} \right) \\
=& - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\
=& - \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

On constate que f et arccos ont la même dérivée sur l'intervalle $]0,1[$, donc son égale à une constante près. Donc :

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0,1[,\ f(x) = \arccos(x) + k.$$

Par continuité en 1, cette relation est aussi valable en 1, et on a : $f(1) = 0 = 0 + k$, d'où $k = 0$.
On procède de même sur $]-1,0[$:

$$\exists l \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1,0[,\ f(x) = \arccos(x) + l.$$

Par continuité en -1, cette relation est aussi valable en -1, et on a : $f(-1) = 0 = \pi + l$, d'où $l = -\pi$. Au final :

$$f(x) = \begin{cases} \arccos(x) \text{ si } x \in]0,1] \\ \arccos(x) - \pi \text{ si } x \in]-1,0]. \end{cases}$$

✯ Dérivation de bijection réciproque

Exercice 18 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, , on pose

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de R sur un intervalle J que l'on précisera. Que peut-on dire de f^{-1} ?
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - f^2(x)$. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J et déterminer $(f^{-1})'$
3. Déterminer explicitement f^{-1} et retrouver la dérivée $(f^{-1})'$.

Correction :

1. Tableau de variation, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. f^{-1} est une fonction croissante et continue.
2. Simple calcul pour la dérivée. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$, f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$.
3. Simple calcul pour résoudre $f(x) = y$ en fonction de y.

✯ Calcul de dérivées partielles

Exercice 19 Calculer les dérivées partielles des fonctions :

$$f(x,y) = \sin \frac{x}{y} \qquad g(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Correction : fixer x pour dériver par rapport à y puis l'inverse.

✯ Calcul de primitives

Exercice 20 Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'intervalle.

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} \qquad x \longmapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)}} \qquad x \longmapsto \frac{(\ln(x))^2}{x}$$

Correction : c'est des formes $u'u^\alpha$, avec :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x}+1, & \alpha &= \frac{1}{2} \\ u &= 2+\sin(x), & \alpha &= -\frac{1}{2} \\ u &= \ln(x), & \alpha &= 2. \end{aligned}$$

Exercice 21 Pour $x \in \mathbb{R}$, avec $x \neq -1$ et $x \neq 2$. On pose :

$$f(x) = \frac{9}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$,

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$$

et en déduire une primitive F de la fonction f sur les différents intervalle de son ensemble de définition.

Correction : calcul classique de décomposition en éléments simple. Puis intégration en :

$$F : x \mapsto a \ln|x+1| + b \ln|x-2| - \frac{c}{x-2}.$$

Attention, il faut conclure sur chaque intervalle.

Exercice 22 Calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

Correction : linéarisation (avec Euler)

✯ Techniques de calculs d'intégrales

Exercice 23 Changement de variables

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} dt$ (poser $u = \pi - t$).
2. Pour tout $x > 1$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \cos\left[\frac{2\pi \ln(\ln t)}{\ln 2}\right] \frac{dt}{t \ln t}$.
   (a) Justifier l'existence de $F(x)$,
   (b) Calculer $F(x)$ en posant $u = \ln(\ln t)$.
3. Calculer pour tout x réel : $G(x) = \displaystyle\int_0^x \sin^2 t \cos t dt$.
4. Calculer : $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ (poser $u = \cos x$).

Correction :

1. On obtient :

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{1+\cos^2 u} du \qquad I = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{\pi}{2} [\arctan v]_{-1}^{1} e = \frac{\pi^2}{4}.$$

2. (a) continuité,
   (b)

$$F(x) = \int_{\ln \ln x}^{\ln(\ln x^2)} \cos \frac{2\pi u}{\ln 2} du = \left[\frac{\ln 2}{2\pi} \sin \frac{2\pi u}{\ln 2}\right]_{\ln(\ln x)}^{\ln 2 + \ln(\ln x)} = 0.$$

3. $u=\sin t$ puis :

$$G(x)=\int_0^{\sin x} t^2dt=\frac{1}{3}\sin^3 x.$$

4.

$$J=\int_{\cos\frac{\pi}{4}}^{\cos\frac{\pi}{2}}\frac{du}{1-u^2}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{-du}{(u-1)(u+1)}=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

Exercice 24 **Intégration par parties**

Calculer :

$$\int_0^1 t\arctan t dt,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3\sin 2t dt\qquad \int_0^{\pi}\cos x e^x dx.$$

Correction : dériver l'arctangente, pour obtenir une forme : $\frac{t^2}{1+t^2}$, il faut alors écrire :

$$\frac{t^2}{1+t^2}=\frac{t^2+1-1}{1+t^2}=1-\frac{1}{1+t^2}.$$

Pour la deuxième : dériver chaque fois le polynôme, ou chercher une forme polynôme exponentielle.

Pour la troisième : deux intégration par parties dans le même sens ou passer en complexe ou encore une forme $A\cos(x)e^x+B\sin(x)e^x$.

Exercice 25 Calculer les intégrales à l'aide du changement de variables :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^3 t dt\quad (u=\sin t)\qquad \int_0^a\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}dt\quad (t=a\sin u), a\in\mathbb{R}_+^*$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx\quad (u=\tan x)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}dx\quad (u=\tan\tfrac{x}{2})$$

$$\int_0^1\frac{\sqrt{2+x}}{1+x}dx\quad (x=u^2-2)$$

Exercice 26 Déterminer une primitive de :

$$x\longmapsto\frac{x}{\cos^2 x}\qquad x\longmapsto\tan x$$

$$x\longmapsto\arctan x\qquad x\longmapsto\arcsin x$$

$$x\longmapsto\ln(1+x^2)\qquad x\longmapsto\sin(\ln(x))$$

$$x\longmapsto\cos(\ln(x))\qquad x\longmapsto x\arctan(x)$$

$$x\longmapsto x^3\sin 2x$$

Correction : Pour : $\frac{x}{\cos^2 x}$, dériver x et intégrer $\frac{1}{\cos^2(x)}$ (en $\tan(x)$).

Pour $\tan x$, c'est $\frac{u'}{u}$.

Pour $\arctan x$, « intégrer le 1 » et dériver $\arctan x$, our obtenir $\frac{u'}{1+u^2}$ idem $\arcsin x$.

Pour $\sin(\ln(x))$ « intégrer le 1 » et dériver $\sin(\ln(x))$ pour obtenir : $\cos(\ln(x))$ puis recommencer.

Les fonctions trigonométriques réciproques

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Mots-clés : Fonctions trigonométriques réciproques

Savoir-faire :
- Savoir les fonctions trigonométriques réciproques,
- Résoudre des équations avec des fonctions trigonométriques réciproques,
- Obtenir des propriétés par les fonctions trigonométriques réciproques (sans dériver). Par exemple :

$$\forall x \in [-1,1],\ \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$
$$\forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\text{expression de } \sin(\arcsin(x)) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

⋆ Rappel sur les équations trigonométriques

Cosinus égaux

$$\begin{aligned}\cos x = \cos\alpha &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi\\ &\Longleftrightarrow x \equiv \alpha\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\alpha\,[2\pi]\end{aligned}$$

Sinus égaux

$$\begin{aligned}\sin x = \sin\alpha &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi\\ &\Longleftrightarrow x \equiv \alpha\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \alpha\,[2\pi]\end{aligned}$$

Tangentes égales

$$\begin{aligned}\tan x = \tan\alpha &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + k\pi\\ &\Longleftrightarrow x \equiv \alpha[\pi]\end{aligned}$$

⋆ Fonction arcsinus

Proposition VI.1 La fonction :

$$\begin{array}{rcl}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1]\\ x & \longmapsto & \sin(x)\end{array}$$

i.e. la restriction de la fonction sin à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est bijective.

Définition VI.1 On appelle fonction arcsinus, la bijection réciproque de la fonction précédente. C'est donc la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$\arcsin : \left\{\begin{array}{rcl}[-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\\ y & \longmapsto & \text{l'unique solution } x \text{ de l'équation } \sin(x) = y \text{ avec } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right.$$

Ce n'est pas la bijection réciproque de la fonction sinus (qui n'est pas injective), c'est la bijection réciproque de la restriction de la fonction sinus à l'intervalle « *naturel* » $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition VI.2 Par définition, on a :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1,1], \sin(x) = y \Longleftrightarrow x = \arcsin(y)$$

Ce qui donne aussi :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x$$

et

$$\forall y \in [-1,1], \sin(\arcsin(y)) = y.$$

! La première relation a un sens si $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, mais elle n'est pas vraie alors : par exemple, $\arcsin(\sin(3\pi))) = \arcsin(0) = 0 \neq 3\pi$.
Un exercice classique est d'exprimer $\arcsin(\sin(x))$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Lorsque l'on travaille avec les fonction trigonométriques réciproques, le plus important est les intervalles.

Tableau de valeurs :

On « renverse » le tableau de valeur de la fonction cosinus.

y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(y)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Représentation graphique

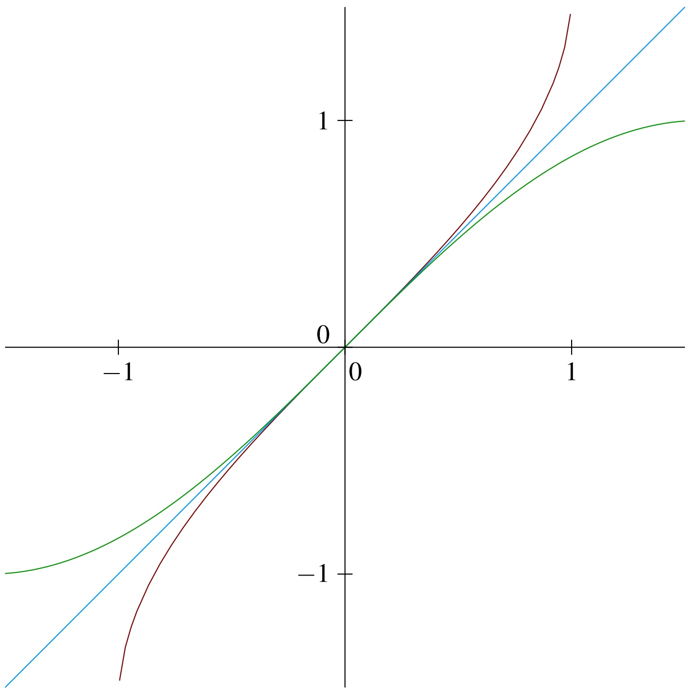


FIGURE 6.1 – **Représentation graphique** Fonction sin et arcsin

Proposition VI.3 La fonction arcsinus est impaire, strictement croissante, continue sur $[-1,1]$, et dérivable sur $]-1,1[$.

La dérivée est :

$$\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

R La continuité est une conséquence du théorème de la bijection continue, la dérivabilité et l'expression de la dérivée proviennent de la dérivation des bijections réciproques.

Démonstration. **imparité :**

Déjà $[-1,1]$ est symétrique par rapport à 0.

Soit $x \in [-1,1]$, il faut montrer que $\arcsin(x) = -\arcsin(-x)$.

Par définition, $\arcsin(x)$ est la solution de l'équation (E) $\sin(t) = x$ d'inconnue $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tandis que $\arcsin(-x)$ est la solution de l'équation (E') $\sin(t) = -x$ d'inconnue $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Il y a donc deux choses à vérifier :

- que $\sin\Big(-\arcsin(-x)\Big) = x$, *i.e.* que $-\arcsin(-x)$ est aussi une solution de l'équation (E),
- et que $-\arcsin(-x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *i.e.* que c'est une solution dans le bon intervalle.

Pour la première partie, on a :

$$\begin{aligned}
\sin\Big(-\arcsin(-x)\Big) &= -\sin\Big(\arcsin(-x)\Big) && \text{imparité de la fonction sinus}\\
&= -(-x) = x && \text{car} \sin(\arcsin(-x)) = -x.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième partie : on sait que $\arcsin(-x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, $-\arcsin(-x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, comme l'équation (E) $\sin(t) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit : $\arcsin(x) = -\arcsin(-x)$.

Puis comme x est quelconque, on en déduit l'imparité de la fonction arcsinus. ■

R On peut montrer que si f est impaire et bijective, alors f^{-1} est aussi impaire

Autre manière de voir

On a : $\sin\Big(-\arcsin(-x)\Big) = \sin(\arcsin(x))$, donc (par égalité de sinus) :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ -\arcsin(-x) = \arcsin(x) + 2k\pi, \text{ ou } -\arcsin(-x) = \pi - \arcsin(x) + 2k\pi,$$

Comme,

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} \leqslant -\arcsin(-x) &\leqslant \frac{\pi}{2}\\
\text{et } -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(x) &\leqslant \frac{\pi}{2}\\
\text{on en déduit } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant \arcsin(x) + 2k\pi &\leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi
\end{aligned}$$

La première relation n'est donc possible que si $k = 0$.

Pour la deuxième relation, on a :

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} \leqslant -\arcsin(-x) &\leqslant \frac{\pi}{2}\\
\text{et } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant \pi - \arcsin(x) + 2k\pi &\leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Ainsi, cette relation est impossible.

R Cette remarque montre le lien entre la non-unicité des équations trigonométriques (*i.e.* la non injectivité des fonctions trigonométriques) et les problèmes liés aux intervalles lorsque l'on manipule les fonctions trigonométriques réciproques.

Démonstration. **stricte croissance :** Soit x et y deux éléments de $[-1,1]$, on a alors :

$$\begin{aligned} \arcsin(x) \text{ et } \arcsin(x) \text{ sont éléments de } & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ \text{la fonction sinus est strictement croissante sur } & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ainsi : } \arcsin(x) \leqslant \arcsin(y) \Leftrightarrow \sin(\arcsin(x)) \leqslant \sin(\arcsin(y)) & \Leftrightarrow x \leqslant y \end{aligned}$$

On reconnaît la caractérisation des fonctions strictement croissante par équivalence.

Autre rédaction : Soit x et y deux éléments de $[-1,1]$, avec $x<y$. Supposons par l'absurde que $\arcsin(x) \geqslant \arcsin(y)$, comme il s'agit de deux éléments de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit par croissance de la fonction sinus sur cette intervalle :

$$\sin(\arcsin(x)) \geqslant \sin(\arcsin(y)) \text{ soit } x \geqslant y,$$

contradiction avec l'hypothèse $x<y$. ■

R En adaptant, on voit que si f est strictement croissante et bijective, alors f^{-1} est aussi strictement croissante. Ce qui est une conséquence du théorème de la bijection continue.

⋆ Fonction arccosinus

Proposition VI.4 La fonction :

$$\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

i.e. la restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0,\pi]$ est bijective. On a donc :

$$\forall y \in [-1,1],\ \exists! x \in [0,\pi],\ \cos(x) = y.$$

! La fonction cosinus n'est évidement pas bijective. C'est sa restriction qui est bijective.

Définition VI.2 On appelle fonction arccosinus, la bijection réciproque de la fonction précédente. C'est la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$\arccos : \left\{ \begin{array}{ccl} [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ y & \longmapsto & \text{l'unique solution } x \text{ de l'équation } \cos(x) = y \text{ avec } x \in [0,\pi] \end{array} \right.$$

Proposition VI.5 Par définition, on a :

$$\forall x \in [0,\pi], \forall y \in [-1,1], \cos(x) = y \Longleftrightarrow x = \arccos(y)$$

ce qui donne aussi :

$$\forall x \in [0,\pi], \arccos(\cos(x)) = x$$

et

$$\forall y \in [-1,1], \cos(\arccos(y) = y.$$

Tableau de valeurs :

y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(y)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Proposition VI.6 La fonction arccosinus est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.
Elle est dérivable sur $]-1,1[$, avec :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

R La continuité est une conséquence du théorème de la bijection continue.
La dérivabilité et l'expression de la dérivée proviennent de la dérivation des bijections réciproques.

Représentation graphique

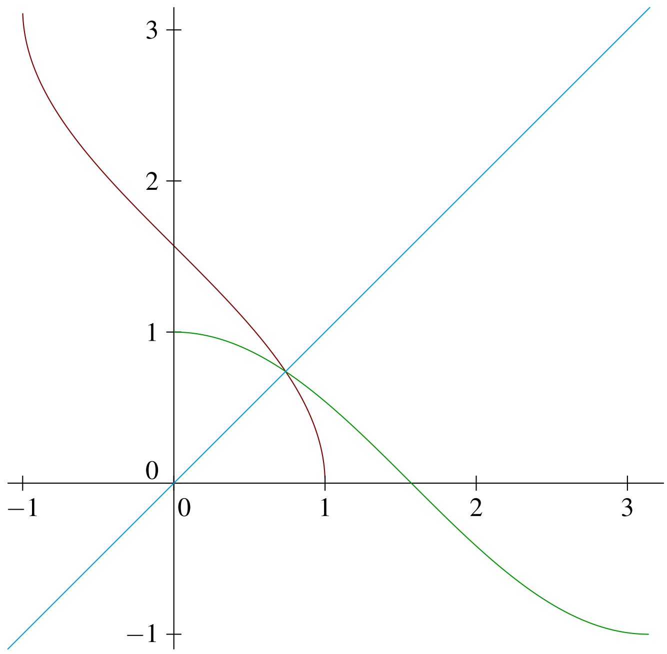


FIGURE 6.2 – **Représentation graphique :** Fonction cos et arccos

✯ Relation entre arccos et arcsin

Un exercice classique et important consiste à montrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

On fixe $x \in [-1,1]$, et on montre la relation : $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.
Par définition, $\arccos(x)$ est la solution de l'équation $\cos(t) = x$ d'inconnue $t \in [0,\pi]$. Il faut donc montrer que :
- $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ est une solution de l'équation,
- $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ est un élément de $[0,\pi]$.

Pour la première partie, on a :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) &= \sin\Big(\arcsin(x)\Big) && \text{en utilisant } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \\ &= x. \end{aligned}$$

D'où $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ est une des solutions de l'équation $\cos(t) = x$.
Pour les intervalles, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leqslant \arcsin(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \text{donc } 0 &\leqslant \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \leqslant \pi \end{aligned}$$

D'où $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ est LA solution de l'équation $\cos(t) = x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$. On en déduit la relation.

Autre point de vue :

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)\right) =& \sin(\arcsin(x))\\ =& x=\cos(\arccos(x))\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)\right)=\cos(\arccos(x))$$

On a donc une égalité du type : $\cos(\alpha)=\cos(\beta)$. On applique donc l'égalité de cosinus pour obtenir :

$$\exists k\in\mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{2}-\arcsin(x)=\arccos(x)+2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2}-\arcsin(x)=-\arccos(x)+2k\pi.$$

L'examen des intervalles assure que la seule possibilité est la première relation avec $k=0$.

R On peut aussi montrer cette relation en dérivant. Puisque la fonction $x\mapsto\arccos(x)+\arcsin(x)$ a une dérivée nulle et est donc constante.

⋆ Cosinus de arcsinus

Un autre exercice important est de montrer :

$$\forall x\in[-1,1],\ \cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}.$$

Pour cela, on fixe $x\in[-1,1]$, on utilise la relation « *à angle constant* » entre les fonctions cosinus et sinus :

$$\begin{aligned}\forall\alpha\in\mathbb{R},\cos^2\alpha+\sin^2\alpha =& 1\\ \text{donc}|\cos\alpha| =& \sqrt{1-\sin^2\alpha}\end{aligned}$$

En appliquant à $\alpha=\arcsin x$, cela donne :

$$|\cos\arcsin x|=\sqrt{1-\sin^2\arcsin(x)}=\sqrt{1-x^2}$$

Il reste à enlever les valeur absolue :

$$\text{on a }\arcsin(x)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$$
$$\text{et donc }\cos\arcsin x\geqslant 0.$$

On en déduit donc :

$$\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$$

C'est en utilisant ces relations que l'on peut calculer la dérivée :

$$\begin{aligned}\forall x\in]-1,1[,\qquad \arccos(x) =& \frac{1}{\cos'(\arccos(x))}\\ =& \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\forall x\in]-1,1[,\qquad \arcsin(x) =& \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))}\\ =& \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

⋆ Fonction arctangente

Proposition VI.7 La fonction :

$$\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

i.e. la restriction de la fonction tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est bijective.

Définition VI.3 On appelle fonction arctangente, la bijection réciproque de la fonction précédente. C'est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\arctan : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ y & \longmapsto & \text{l'unique solution } x \text{ de l'équation } \tan(x)=y \text{ avec } x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{array} \right.$$

Proposition VI.8 Par définition, on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R}, \tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan(y)$$

ce qui donne aussi :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x$$

et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(y)) = y.$$

Tableau de valeurs :

y	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$-\infty$
$\arctan(y)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

Proposition VI.9 La fonction arctangente est continue, impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Représentation graphique

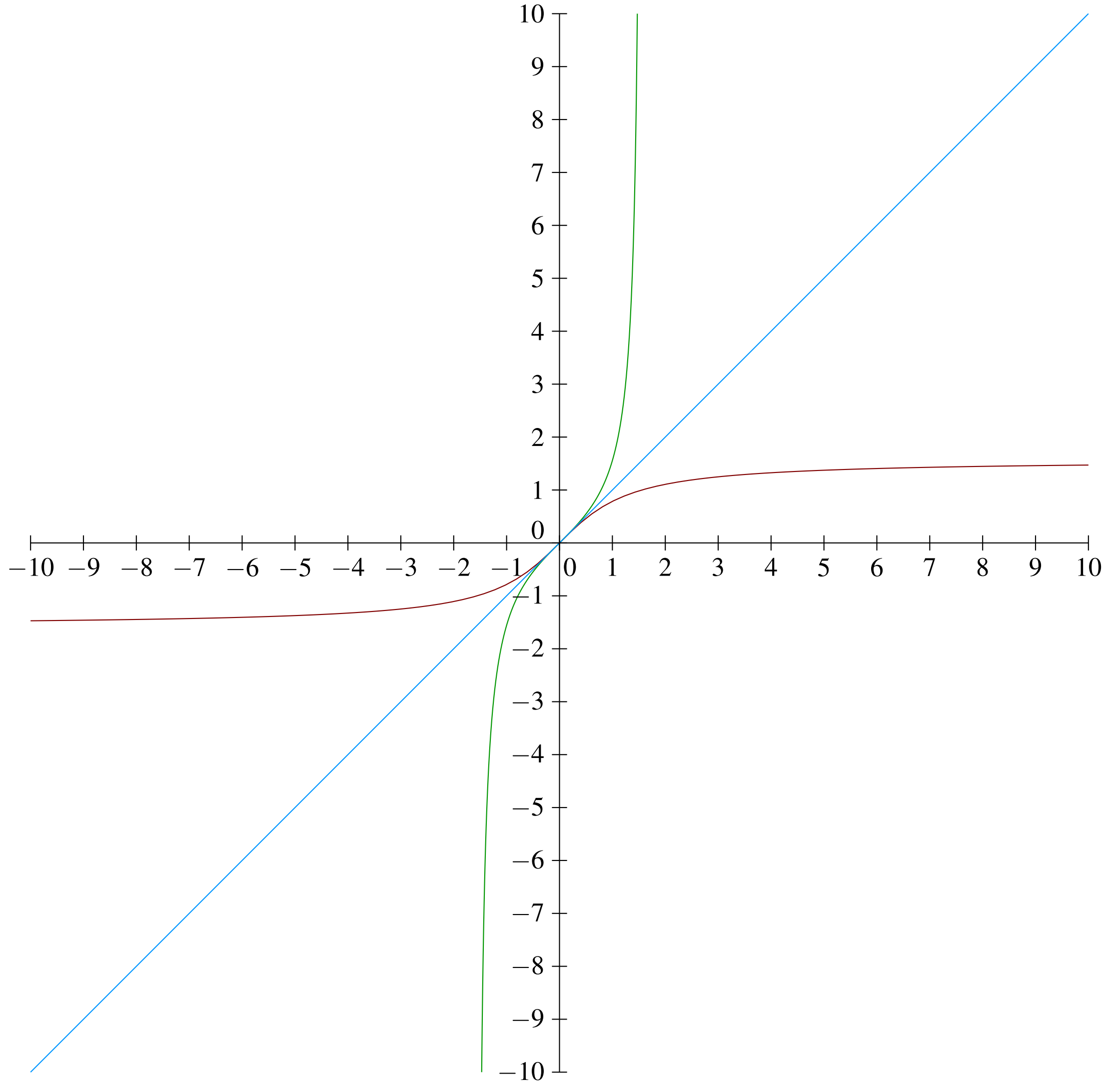


FIGURE 6.3 – **Représentation graphique :** Fonction tangente et arctangente

★ **Relation entre** $\arctan(x)$ **et** $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Montrons que :

$$\forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Fixons $x > 0$ et montrons : $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Comme par définition, $\arctan(x)$ est la solution de l'équation : $\tan(t) = x$ d'inconnue $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il y a deux choses à démontrer :

- $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est aussi solution de l'équation.
- $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est aussi élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour la première partie :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$\text{en utilisant} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

Ainsi, $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est une solution de $\tan(t) = x$.

Pour la deuxième partie :

$$\begin{aligned} \text{on a } \frac{1}{x} > 0 \text{ donc } 0 < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{2} \\ \text{d'où } 0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

En particulier, $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est aussi élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi, $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est LA solution de $\tan(t) = x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ce qui donne :

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puis la relation puisque x est un réel strictement positif quelconque.

Cherchons de même un lien entre $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x < 0$. Soit $x < 0$ fixé, on a toujours la relation :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x = \tan(\arctan(x)).$$

mais cette fois, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} < 0 \text{ donc } -\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \\ \text{d'où } \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \pi. \end{aligned}$$

En particulier, $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est élément de $\left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$, et donc pas dans le « même ensemble » que $\arctan(x)$. Précisément, ils ne sont pas élément d'un ensemble sur lequel la fonction tangente est injective.

Il faut alors « enlever » π pour avoir les deux éléments dans le même ensemble.

Cela s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{on sait } \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \tan(\arctan(x)) \\ \text{on en déduit : } \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \pi\right) &= \tan(\arctan(x)) \\ &\text{par périodicité de la fonction tangente} \\ \text{c'est-à-dire} \tan\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \tan(\arctan(x)). \end{aligned}$$

Cette fois-ci, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} < 0 \text{ donc comme on l'a vu } -\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \\ \text{d'où } -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < 0. \end{aligned}$$

En particulier, $-\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ainsi que $\arctan(x)$.

On est donc sur un intervalle sur lequel la fonction tangente est injective, donc de la relation : $\tan\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \tan(\arctan(x))$, on déduit :

$$-\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(x),$$

ce qui s'écrit puisque x est quelconque :

$$\forall x < 0, \ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Obtenir cette relation en dérivant

Considérons la fonction :

$$f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, comme somme et composée de fonctions dérivables.

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de la fonction f est nulle sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. La fonction f est donc constante sur ces deux intervalles.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ f(x) &= f(1) = \frac{\pi}{2} \\ \text{et } \forall x < 0,\ f(x) &= f(-1) = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

R On peut aussi calculer la limite de f en $\pm\infty$.

7 — Équations différentielles linéaires

Définition .4 — Équation différentielle. Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées.
Résoudre une équation différentielle c'est trouver un ensemble de fonctions solutions du problème posé.

■ **Exemple .11** L'équation différentielle du pendule est :

$$(E) \qquad \theta'' + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

où $\omega_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ est une constante connue. ■

L'étude des équations différentielles est un sujet d'étude en mathématiques. On ne sait résoudre les équations différentielles que dans des cas particuliers. On étudie dans ce chapitre quelques cas particuliers où l'on connaît la solution pour leur utilisation en physique.

On ne sait pas résoudre analytiquement l'équation du pendule, il faut utiliser des outils d'approximation numérique de la solution. On ne connaît la solution que dans le cas d'une approximation des petits angles, c'est-à-dire l'équation :

$$(E) \qquad \theta'' + \omega_0^2 \theta = 0,$$

qui est une équation linéaire.

Plus précisément, les deux types d'équations différentielles que l'on va étudier sont :
Premier ordre : de la forme $y' + a(x)y = b(x)$
Deuxième ordre à coefficients constants : de la forme $y'' + ay' + by = c(x)$.

I Premier ordre

I.1 Généralités

Définition I.1 — Équation différentielle linéaire du premier ordre. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre, une équation différentielle qui s'écrit :

$$(E) \qquad y' + a(x)y = b(x),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une solution de (E) sur I est une fonction y définie et dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

L'équation homogène associée est l'équation :

$$(H) \qquad y' + a(x)y = 0.$$

R On oublie le x dans l'inconnue y lorsque l'on écrit : $E : y' + a(x)y = b(x)$.
Si a et b sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors y aussi.

Attention, ici I doit être un intervalle.
Si l'intervalle n'est pas précisé, c'est l'intervalle le plus grand sur lequel les fonctions a et b sont définies et continues.
Dans le cas d'une équation (dite **non résolue**) qui s'écrit :

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x),$$

il faut diviser par $\alpha(x)$ pour obtenir une équation sous la forme précédente. On doit alors découper I en parties sur lesquelles $\alpha(x)$ ne s'annule pas, puis reconstruire les fonctions solutions sur l'intervalle I entier (problème de **recollement des solutions**).

En écrivant $\forall x \in I$, $y'(x) = b(x) - a(x)y(x)$, il est clair que y' est continue. Si a et b sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$, on en déduit rapidement par récurrence que y est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$.

I.2 Résolution de l'équation homogène

⋆ Cas particulier d'une équation à coefficients constants

Proposition I.1 Si a est un réel fixé, les solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$y_h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{-ax} \end{array} \right. \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si a est complexe, les solutions de la même équations sont les fonctions de la forme :

$$y_h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{-ax} \end{array} \right. \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}.$$

On écrit donc (dans le cas réel) :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-ax} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Les solutions sont dans ce cas définies sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas réel.

Il s'agit de montrer que tout fonction solution de (H) s'écrit sous cette forme et que tout fonction de cette forme est solution de (H).

Pour la première partie, la fonction $y_0 : x \mapsto e^{-ax}$ est solution de (H) puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) = -ae^{-ax} = -ay_0(x) \qquad \text{d'où} \qquad y_0' + ay_0 = 0.$$

D'autre part, si y_0 est solution de (H) et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction $y = \lambda y_0$ est solution de (H) puisque :

$$y' + ay = \lambda y_0' + a\lambda y_0 = \lambda(y_0' + ay_0).$$

R C'est une conséquence de la linéarité : si y_0 est solution de (H) alors toute fonction de la forme λy_0 est aussi solution.

Ainsi, on en déduit que toute fonction de la forme : $y : x \longmapsto \lambda e^{-ax}$ est solution de (H).

Pour la deuxième partie, considérons y une solution quelconque de (H). On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + ay(x) = 0 \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x)e^{ax} + ay(x)e^{ax} = 0 \\ \text{ce qui s'écrit } \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}\left(e^{ax}y(x)\right) = 0 \\ \text{ainsi, la fonction } x \longmapsto e^{ax}y(x) \text{ est constante sur l'intervalle } \mathbb{R} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, e^{ax}y(x) = \lambda \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, y : x \longmapsto \lambda e^{-ax}. \end{aligned}$$

■

R En fait, λ est $y(0)$.

■ **Exemple I.1** En dynamique des population, on note $N(t)$ le nombre d'individu au temps t (qui est un réel), et on suppose que $N(t)$ suit l'équation différentielle (modèle de Malthus) :

$$N'(t) = aN(t).$$

avec a est le taux de croissance relatif.

La population N s'écrit alors : $N : t \longmapsto N_0 e^{at}$. On a donc une croissance exponentielle. ■

Une méthode rapide pour retrouver ce résultat est la suivante : On considère y solution, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -a && \\ \text{donc } \ln(|y|) &= -ax + C && \text{avec } C \in \mathbb{R} \\ \text{et } y &= \lambda e^{-ax} && \text{en posant } \lambda = \pm e^{C}. \end{aligned}$$

Cette démonstration est valable uniquement si on sait par avance que la fonction y solution ne s'annule pas.

> En cas de doute, il est ainsi très facile de retrouver les solutions !

⋆ Cas général

Théorème I.2 — Résolution de l'équation homogène du premier ordre. Si $a(x) : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et A une primitive de a sur I (qui existe puisqu'on a supposé que a était une fonction continue), alors les solutions de l'équations différentielles

$$(E) \qquad y' + a(x)y = 0$$

sont les fonction $y : I \to \mathbb{R}$, telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda e^{-A(x)}$.

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Si a est une fonction de I dans $\mathbb{C}$, on a de même :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

Démonstration. On fait le cas réel.

Il faut montrer une égalité d'ensemble par double inclusion.

Considérons y solution

$$\begin{array}{rrcl} \forall x \in I, & y'(x) + a(x)y(x) & = & 0 \\ \text{donc : } \forall x \in I, & e^{A(x)}y'(x) + a(x)e^{A(x)}y(x) & = & 0 \\ & \text{ie } \dfrac{d(e^{A(x)}y(x))}{dx} & = & 0 \\ & \forall x \in \mathbb{R},\ e^{A(x)}y(x) & = & \lambda \text{ où } \lambda \text{ est une constante réelle} \\ \text{on obtient} & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) & = & \lambda e^{-A(x)} \end{array}$$

Ainsi, toute solution y de E s'écrit sous la forme : $y \mapsto \lambda e^{-A(x)}$.

Réciproquement, toute fonction y de cette forme est dérivable et vérifie :

$$\forall x \in I, \qquad y'(x) = -a(x)y(x).$$

Ainsi, y est solution de (E).

∎

R On a donc ramener le problème de résoudre une équation différentielle par le problème de rechercher une primitive de $x \mapsto a(x)$.

Remarquons que la primitive étant définies à une constante près, changer de primitive revient à changer la constante λ, donc l'ensemble des solutions ne dépend pas de la primitive choisie $A(x)$.
Il y a une infinité de solution, on parle de **solution générale** de l'équation homogène, dans le sens où la solution dépend d'un paramètre λ.

On peut voir que si y_0 est une solution non nulle de l'équation homogène, alors les solutions sont :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \lambda y_0 \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

I.3 Ensemble des solutions de l'équation avec second membre

⋆ Structure de l'ensemble des solutions de (H)

Proposition I.3 Pour l'équation homogène : $(H): \; y' + a(x)y = 0$, avec a fonction réelle.
La fonction nulle est solution.
Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène (H), et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $y_1 + y_2$ et λy_1 sont aussi solutions de (H).

Démonstration. C'est une conséquence de la linéarité de l'équation. ■

R On dira que l'ensemble des solutions de l'équation homogène forment un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonction $I \to \mathbb{R}$. Plus précisément, c'est un sous-espace vectoriel de dimension 1 puisque toutes les solutions sont proportionnelles à $x \mapsto e^{-A(x)}$.
On a le même résultat pour une fonction a à valeurs complexes.

⋆ Structure de l'ensemble des solutions

Proposition I.4 Considérons l'équation :

$$(E): \; y' + a(x)y = b(x)$$

et soit y_0 une solution de (E) sur I, alors toutes les autres solutions y de (E) s'écrivent sous la forme :

$$y = y_0 + y_h \qquad \text{avec } y_h \in \mathscr{S}_H.$$

Et réciproquement toute fonction de cette forme est solution.
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_E &= \left\{ y_0 + y_h \middle| y_h \in \mathscr{S}_H \right\} \\ &= y_0 + \mathscr{S}_H \end{aligned}$$

y_0 est **une solution particulière** de (E) sur I.
On résume cela en disant que la forme générale d'une solution d'une équation linéaire du premier ordre (E) est obtenu en sommant une particulière de l'équation avec second membre (E) et la solution générale de l'équation homogène (H).
C'est une conséquence de la **linéarité de l'équation différentielle**.

Démonstration. Soit y une autre solution, alors on pose $y_H = y - y_0$, et on a :

$$(y-y_0)' + a(x)(y-y_0) = \underbrace{y' + a(x)y}_{b(x)} - \underbrace{(y_0' + a(x)y_0)}_{b(x)} = 0.$$

Ainsi, $y_H \in \mathscr{S}_H$. Au final, en écrivant $y = y_0 + (y - y_0)$ on obtient $y = y_0 + y_H$ avec $y_H \in \mathscr{S}_H$.

Réciproquement, pour tout choix de y_H, une telle fonction est solution. ■

Ainsi pour résoudre une équation différentielle, il faut dans l'ordre :
- Résoudre l'équation homogène,
- trouver une solution particulière,
- sommer les deux pour écrire l'ensemble des solutions.

R La suite du chapitre est donc quasiment entièrement consacré à la recherche de solution particulière.

■ **Exemple I.2** Si on veut résoudre $(E) \qquad y' + 2y = -1$. On a :
- l'équation homogène (H) a pour solution générale : $y(x) = \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- une solution particulière de (E) est la fonction constante $yx \mapsto -\frac{1}{2}$,
- donc l'ensemble des solutions est : $y = -\frac{1}{2} + \lambda e^{-2x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

■

☆ Principe de superposition des solutions

Proposition I.5 — principe de superposition des solutions. Soit les équations :

$$\begin{aligned} (E) :& \quad y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x) \\ (e_1) :& \quad y' + a(x)y = b_1(x) \\ (e_2) :& \quad y' + a(x)y = b_2(x) \end{aligned}$$

si y_1 est une solution de (e_1) et y_2 une solution de (e_2) alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E).

R Bien évidement, ceci reste vrai lorsque b s'écrit comme la somme de n fonction

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$\begin{array}{r l} y_1' + a(x)y_1 = & b_1(x) \\ y_2' + a(x)y_2 = & b_2(x) \\ \hline (y_1+y_2)' + a(x)(y_1+y_2) = & b_1(x) + b_2(x) \end{array}$$

■

I.4 Recherche de solution particulière dans le cas de coefficients constants

✯ Second membre particulier

Dans le cas où la fonction a est une constante et pour certains seconds membres particuliers, on peut prouver dans certain cas qu'une solution particulière s'écrit sous une forme donnée. On cherche alors une solution sous cette forme ce qui ramène le problème a la résolution d'un système (généralement linéaire).

Par exemple : on cherche une solution particulière sous la forme $y_0 : x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer et on obtient des conditions sur α et β pour que y_0 soit solution.

Pour trouver une solution particulière :

Second membre polynôme : $(E) : \; y' + ay = P(x)$

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.

En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Second membre polynôme exponentiel $(E) : \; y' + ay = P(x)e^{mx}$.

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = \begin{cases} Q(x)e^{mx} & \text{si } m \neq -a \\ xQ(x)e^{mx} & \text{si } m = -a \end{cases} \qquad \text{avec } d(Q) = d(P).$$

(*i.e.* on rajoute un degré lorsque l'exponentiel au second membre est la même que dans la solution générale de (H).)

En particulier, si on veut résoudre, $(E) : \; y' + ay = e^{mx}$, on va chercher une solution sous la forme

$$y_0(x) = \begin{cases} Ce^{mx} & \text{si } m \neq -a \\ Cxe^{mx} & \text{si } m \neq -a \end{cases} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Si le second membre est solution de l'équation homogène, il faut alors « augmenter d'un degré ».

Second membre polynôme cosinus/sinus Si $a \in \mathbb{R}$ et $(E) : \; y' + ay = P(x)\cos mx$, ou $(E) : \; y' + ay = P(x)\sin mx$.

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = Q_1 \cos mx + Q_2 \sin mx \qquad \text{avec} \qquad d(Q_1) = d(Q_2) = d(P).$$

(comme pour les primitives : il peut y avoir du cosinus ET du sinus).

En particulier, si on veut résoudre, $(E) : \; y' + ay = \cos(mx)$, on va chercher une solution sous la forme

$$y_0(x) = A\cos(mx) + B\sin(mx) \qquad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Cela revient à chercher une solution sous la forme,

$$y_0(x) = A\cos(mx + \varphi) \qquad A \text{ amplitude } \geqslant 0 \text{ et } \varphi \text{ déphasage } \in [0, 2\pi[.$$

c'est-à-dire une oscillation avec la même pulsation que l'excitation, mais avec ne amplitude et un déphasage. Les calculs sont plus faciles avec la forme : $A\cos(mx)+B\sin(mx)$ qu'avec $A\cos(mx+\varphi)$.

Second membre cosinus/sinus exponentiel (E) : $y'+ay=\cos mxe^{\alpha x}$ ou (E) : $y'+ay=\sin mxe^{\alpha x}$
On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x)=(a\cos mx+b\sin mx)e^{\alpha x}, \qquad (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Principe général À retenir : la solution particulière est de la même forme que le second membre.

R Si le second membre est de la forme : $\cos(mx)$, on va chercher une solution sous la forme : $A\cos(mx)+B\sin(mx)$. Dit de manière différente, sous la forme : $A\cos(mx+\varphi)$. Cela signifie donc que l'on cherche comme solution une fonction périodique, de même fréquence que le second membre (mais qui peut avoir une amplitude différente et un déphasage).

■ **Exemple I.3** On veut résoudre :

$$(E): \qquad y'+2y=2x^2+(2x+1+\cos 3x)e^{-2x}$$

Déjà la solution générale de l'équation homogène est : $y=\lambda e^{-2x}$.
Pour la solution particulière, on utilise le principe de superposition des solutions.
Une solution particulière de l'équation :

$$(E_1): \qquad y'+2y=2x^2$$

est à chercher sous la forme $y_0=ax^2+bx+c$. en dérivant, on obtient

$$y'+2y=2ax^2+(2b+2a)x+c+b,$$

en résolvant le système linéaire la solution est $y_0(x)=x^2-x+\frac{1}{2}$.
Une solution particulière de l'équation :

$$(E_2): \qquad y'+2y=(2x+1)e^{-2x}$$

est à chercher sous la forme

$$y_0=x(ax+b)e^{-2x}=(ax^2+bx)e^{-2x}.$$

R On peut aussi chercher une solution sous la forme : $y_0=(ax^2+bx+c)e^{-2x}$, il est clair alors que l'on aura aucune condition sur c du fait de la structure de l'ensemble des solutions.

En dérivant, on trouve :

$$\begin{aligned}y'+2y=&(-2ax^2-2b+ax^2+b+2ax^2+2b)e^{-2x}\\=&(2ax+b)e^{-2x}\end{aligned}$$

D'où il faut $a = 1$ et $b = 1$. et la solution particulière est $y_0(x) = x(x+1)e^{-2x}$.

Une solution particulière de l'équation :

$$(E_3) : \qquad y' + 2y = \cos 3x e^{-2x}$$

est à chercher sous la forme

$$y_0 = (a\cos 3x + b\sin 3x)e^{-2x}.$$

En dérivant on trouve :

$$\begin{aligned} y' + 2y =& ((-2a+3b+2a)\cos 3x + (-2b-3a+2b)\sin 3x)e^{-2x} \\ =& (3b\cos 3x - 3a\sin 3x)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Donc on obtient : $b = \frac{1}{3}$, et $a = 0$, et donc la solution particulière est $y_0(x) = (\frac{1}{3}\sin 3x)e^{-2x}$.

D'où la solution particulière à (E) :

$$y_0(x) = x^2 - x + \frac{1}{2} + x(x+1)e^{-2x} + (\frac{1}{3}\sin 3x)e^{-2x}.$$

Et les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{2} + x(x+1)e^{-2x} + (\frac{1}{3}\sin 3x)e^{-2x} + \lambda e^{-2x} \quad \middle| \lambda \in \mathbb{R}. \right\}$$

■

⋆ Second membres à valeurs complexes

Proposition I.6 Soit l'équation $(E) : y' + ay = b(x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

On note b_r et b_i les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad b(x) = b_r(x) + ib_i(x)$$

i.e. b_r et b_i sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de b.

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une solution de (E), on note de même y_r et y_i les parties réelles et imaginaires :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = y_r(x) + iy_i(x)$$

On a alors : y_r est solution de (E_r) et y_i est solution de (E_i), où on a noté (E_r) et (E_i) les équations différentielles :

$$\begin{aligned} (E_r) : \qquad & y' + ay = b_r(x) \\ (E_i) : \qquad & y' + ay = b_i(x). \end{aligned}$$

Réciproquement, avec les mêmes notations, si y_r est solution de E_r et y_i est solution de E_i, alors y est solution de E.

Démonstration. Provient de la linéarité de la dérivation.

$$\begin{array}{rl} l1 & y_r' + ay_r = b_r(x) \\ l2 & y_i' + ay_i = b_i(x) \\ \hline l1 + il2 & y' + ay' = b(x) \end{array}$$

La réciproque est évidente. ■

Ainsi, pour résoudre des équations différentielles dans $\mathbb{R}$, on pourra résoudre dans $\mathbb{C}$ puis considérer la partie réelle et imaginaire du second membre et de la solution.

Ceci s'applique évidement en particulier au cas de second membre de la forme

$$y' + ay = P(x)\cos mx \qquad \text{ou} \qquad y' + ay = P(x)\sin mx$$

pour lesquels, on résout : l'équation (E) : $y' + ay = P(x)e^{imx}$ puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

■ **Exemple I.4** On reprends une partie de l'exemple précédent :

$$(E_3): \qquad y' + 2y = \cos 3xe^{-2x}$$

On considère alors l'équation différentielle (avec second membre à valeurs complexes) :

$$(E_{\mathbb{C}}): \qquad y' + 2y = e^{(-2+3i)x}$$

On rappelle que :

$$\begin{aligned} \cos 3xe^{-2x} + i\sin 3xe^{-2x} =& e^{-2x}(\cos 3x + i\sin 3x) \\ =& e^{-2x}e^{3ix} \\ =& e^{-2x+3ix} = e^{(-2+3i)x}. \end{aligned}$$

En particulier, $\cos 3xe^{-2x}$ est la partie réelle de $e^{(-2+3i)x}$.

Le second membre étant de forme exponentielle, on cherche une solution (à valeurs complexes) sous la forme :

$$y_C : x \mapsto \lambda e^{(-2+3i)x} \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

On obtient facilement :

$$\begin{aligned} y_C(x) =& \lambda e^{(-2+3i)x} \\ y_C'(x) =& \lambda(-2+3i)e^{(-2+3i)x} \\ y_C'(x) + 2y_C(x) =& \lambda 3ie^{(-2+3i)x} \end{aligned}$$

D'où $\lambda = \frac{1}{3i} = -\frac{i}{3}$.

Une solution particulière de $E_{\mathbb{C}}$ est donc :

$$y_C : x \mapsto -\frac{i}{3}e^{(-2+3i)x}$$

On décompose en partie réelle/ partie imaginaire :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_C(x) &= -\frac{i}{3}e^{-2x}(\cos 3x + i \sin 3x) \\ &= \frac{1}{3}\sin(3x)e^{-2x} - \frac{i}{3}\cos(3x)e^{-2x}\end{aligned}$$

Comme $\cos 3xe^{-2x}$ est la partie réelle de $e^{(-2+3i)x}$, la partie réelle de y_C est solution particulière de (E_3).

On retrouve la solution particulière de (E_3) : $y_0 : x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x)e^{-2x}$. ∎

I.5 Recherche de solution particulière dans le cas général

✯ Problème de Cauchy

Théorème I.7 Soit une équation différentielle sur I :

$$(E): \quad y' + a(x)y = b(x),$$

avec a et b sont deux fonctions continues sur I. On considère aussi un point $x_0 \in I$, et un réel y_0, alors il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) sur I, qui vérifie $y(x_0) = y_0$.

On appelle cette solution la solution du problème de Cauchy.

R Vrai aussi en prenant $y_0 \in \mathbb{C}$, et donc $y : I \to \mathbb{C}$.

En physique, cela signifie que l'on a trouvé l'unique solution où l'on a fixé les **conditions initiales** : $y(x_0) = y_0$. Très souvent, on fixe la valeur de y en 0 ou on cherche l'unique solution qui s'annule en un point donné.

Démonstration. On utilise la même technique que précédemment : on considère une solution y et on multiplie par $e^{A(x)}$, où $A(x)$ est une primitive de A. On a alors :

$$\begin{aligned}e^{A(x)}y'(x) + a(x)e^{A(x)}y(x) &= b(x)e^{A(x)} \\ \frac{d(e^{A(x)}y(x))}{dx} &= \underbrace{b(x)e^{A(x)}}_{\in \mathscr{C}^0(I)}\end{aligned}$$

On note alors $f(x)$ une primitive de $b(x)e^{A(x)}$, on a alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ e^{A(x)}y(x) &= f(x) + \lambda \text{ où } \lambda \text{ est une constante réelle} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) &= f(x)e^{-A(x)} + \lambda e^{-A(x)}.\end{aligned}$$

Ainsi, toutes les solutions s'écrivent sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \underbrace{\lambda e^{-A(x)}}_{\text{solution générale de } (H)} + \underbrace{f(x)e^{-A(x)}}_{\text{solution particulière de } (E)}.$$

Réciproquement pour tout choix de λ une telle fonction est solution.

Pour construire une solution au problème de Cauchy, on intègre entre x_0 et x.

Soit $y(x)$ une solution du problème de Cauchy, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d(e^{A(x)}y(x))}{dx} &= b(x)e^{A(x)} \\
\forall x \in \mathbb{R},\ e^{A(x)}y(x) - e^{A(x_0)}y(x_0) &= \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt \\
\forall x \in \mathbb{R},\ e^{A(x)}y(x) - e^{A(x_0)}y(x_0) &= \int_{x_0}^{t} b(t)e^{A(t)}dt \\
\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) &= e^{-A(x)}\left(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right) + e^{A(x_0)-A(x)}y(x_0) \\
\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) &= \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}dt + e^{A(x_0)-A(x)}y(x_0)
\end{aligned}$$

■

R La dernière ligne montre clairement que la solution du problème de Cauchy est indépendant du choix fait sur la fonction A.

✎ Cette formule est théorique, il vaut mieux utiliser la méthode de variation de la constante (qui lui est équivalente).

✯ Méthode de variation de la constante

Cette méthode part du principe que les solutions de (E) sont obtenues à partir de celle de (H). On cherche donc une solution sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, avec λ fonction de x inconnue.

R C'est un changement d'inconnue : la nouvelle inconnue est la fonction : $\lambda : x \mapsto y(x)e^{A(x)}$.
Ce changement permet de simplifier les calculs.

On a alors :

$$y'(x) = \big(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\big)e^{-A(x)}$$

Ainsi, $y(x)$ est solution ssi :

$$\big(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\big)e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = \big(\lambda'(x)\big)e^{-A(x)} = b(x).$$

Soit si :

$$\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}.$$

On se ramène donc à calculer une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

R Il faut apprendre la méthode, en aucun cas la formule.

■ **Exemple I.5** Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(E) : \quad y' + xy = x$$

On résout l'équation homogène associée : $(H) :\ y' + xy = 0$. La solution générale est $\lambda e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Ensuite un utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme : $y(x) = \lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, on a : $y'(x) = (\lambda'(x) - x\lambda(x))e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit : $y' + xy = (\lambda'(x))e^{-\frac{x^2}{2}}$, et y est solution que si $\lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$, c'est-à-dire $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$, D'où une solution particulière : $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$.

Ainsi, les solutions sont : $x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

R La méthode de la variation de la constante est à utiliser en particulier lorsque la fonction $a(x)$ n'est pas une constante. Mais on peut aussi « deviner » une solution particulière, par exemple en cherchant sous une forme particulière.

■ **Exemple I.6** On veut résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \qquad y' + (\tan x)y = \cos x + \sin 2x$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$x \mapsto \lambda e^{\ln(\cos(x))} = \lambda cos(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(attention au signe de cos dans le ln qui est ici positif sur I).

Pour trouver des solution particulière, on utilise la variation de la constante en découpant le second membre en 2. si on pose $y(x) = \lambda(x)\cos(x)$, alors : $y'(x) = \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x)$, et donc $y' + \tan xy = \lambda'(x)\cos(x)$

Donc y n'est solution avec second membre $\cos x$ que si $\lambda'(x)\cos(x) = \cos(x)$, soit $\lambda = x$, et avec second membre $\sin x$ que si $\lambda'(x)\cos(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, soit $\lambda'(x) = 2\sin(x)$ et donc $\lambda = -2\cos(x)$.

Ainsi une solution particulière est : $y(x) = -2\cos^2(x) + x\cos(x)$, et les solutions sont :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \mapsto -2\cos^2(x) + x\cos(x) + \lambda\cos(x) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

■

II Lien avec la physique

⋆ Équation à coefficients constants

En physique, on écrit souvent les équation du premier ordre (avec coefficient constant) sous la forme :

$$(E) : \qquad y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{C}{\tau}$$

La constante $\tau \in \mathbb{R}^{+*}$ a la dimension d'un temps corresponds à un temps caractéristique du système.

Une solution particulière est la fonction constante $y_0 : t \longmapsto C$, c'est le régime stationnaire.

Les solutions sont les fonctions qui s'écrivent sous la forme :

$$y : t \longmapsto C + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

On voit que si $\tau > 0$, C est la limite lorsque t rends vers $+\infty$. On voit donc que l'on tends vers l'état stationnaire.

Dans de nombreux cas en physique, on dispose d'une condition initiale, c'est à dire la valeur de la fonction y en 0. On peut alors déterminer λ et l'unique solution :

$$y(0) = C + \lambda \qquad \text{ie} \qquad \lambda = C - y(0).$$

En mathématique, on dit que l'on résout le problème de Cauchy.

■ **Exemple II.1** Soit un circuit RC, alors la physique apprends que la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$(E): \qquad u_c'(t) + \frac{1}{RC}u_c(t) = E/(RC)$$

La tension d'équilibre est la constante : E, c'est le régime stationnaire.

- L'équation homogène est : $u_c'(t) + \frac{1}{RC}u_c(t) = 0$. Les solutions sont de la forme :
$$u_c : t \longmapsto \lambda e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
- Une solution particulière est la constante : $u_c = E$ (état stationnaire).
- Les solutions sont alors :
$$\mathscr{S} = \left\{ t \longmapsto \lambda e^{-\frac{t}{RC}} + E \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche maintenant l'unique fonction u_c solution de l'équation vérifiant $u_c(0) = 0$, *i.e.* la tension est nulle au début de l'expérience.

On a vu que u_c s'écrit sous la forme : $u_c : t \longmapsto \lambda e^{-\frac{t}{RC}} + E$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ la condition $u_c(0) = 0$ devient alors : $\lambda + E = 0$, *i.e.* $\lambda = -E$. Au final, on obtient l'unique solution :

$$u_c : t \longmapsto E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

■

☆ **Vocabulaire**

En physique lorsque l'on cherche la solution y d'une équation différentielle de la forme :

$$(E) \qquad y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{b(x)}{\tau}$$

- le réel τ corresponds aux paramètres intrinsèques du système (caractéristiques physique d'un circuit électrique, rigidité d'un ressort, etc.),
- la fonction b corresponds à l'excitation / l'entrée / la contrainte du système,
- la solution y corresponds à la sortie du système (mesure dans une circuit électrique, position du ressort, etc.)

On a le vocabulaire suivant :

Le régime libre corresponds au *régime observé quand toutes les sources sont éteintes*, ie à la solution de l'équation homogène : $y : t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Le régime forcé corresponds à *l'évolution de la solution lorsque la solution homogène est négligeable devant la solution particulière.*

Le régime transitoire corresponds à *l'évolution de la solution lorsque la solution* *homogène est non négligeable devant la solution particulière.*

Le régime permanent corresponds à *l'évolution de la solution quand il s'est écoulé suffisamment de temps depuis l'enclenchement du système*) corresponds au comportement de $y(t)$ lorsque $t \to +\infty$ (par exemple à la limite $\lim_{t\infty} y(t)$ si elle existe).

⋆ Interprétation des résultats mathématiques

✎ Le principe de superposition des solutions s'explique en physique en disant que **les sorties du système** (les solutions) **s'expriment linéairement en fonction des entrée** (le second membre).

✎ Si on cherche à résoudre : $(E): \ y' + ay = e^{-ax}$. La solution générale de l'équation homogène est : $y : x \mapsto e^{-ax}$.
On ne peut donc pas chercher une solution particulière sous la forme : $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-ax}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, en effet ces fonctions sont solutions de l'équation homogène, il faut « augmenter d'un degré » et chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \lambda x e^{-ax}$.
En physique c'est le **phénomène de résonance** : soumis à une excitation à la bonne fréquence, il y a un mélange entre solutions de l'équation homogène et second membre.
Le même phénomène s'observe pour les seconds membres polynôme exponentiel $(E): \ y' + ay = P(x)e^{-ax}$, pour lesquels, on cherche des solutions particulières sous la forme : $y_0 : x \mapsto Q(x)e^{-ax}$.

⋆ Cas de second membre sinusoïdal

Considérons l'équation :

$$(E): \qquad y' + \frac{1}{\tau} y = \frac{A_0}{\tau}\cos(\omega t).$$

C'est le cas d'une excitation de type sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude A_0.

La solution générale de l'équation homogène est toujours $y : x \mapsto e^{-\frac{t}{\tau}}$. Vu la forme du second membre, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0 : t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \text{ à déterminer.}$$

Autrement dit, on cherche une solution sous la forme d'une oscillation à la même fréquence que l'entrée (que le second membre). En effet, c'est équivalent à chercher une solution sous la forme :

$$y_0 : t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{avec } A > 0 \text{ et } \varphi \in [0, 2\pi[\text{ à déterminer.}$$

C'est à dire une oscillation à la même fréquence, avec une amplitude et un déphasage.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \ y_0(t) =& A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\
y_0'(t) =& -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \\
y_0'(t) + \frac{1}{\tau} y_0(t) =& \left(B\omega + \frac{A}{\tau}\right)\cos(\omega t) + \left(-A\omega + \frac{B}{\tau}\right)\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

On veut donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{A_0}{\tau}\cos(\omega t) = \left(B\omega + \frac{A}{\tau}\right)\cos(\omega t) + \left(-A\omega + \frac{B}{\tau}\right)\sin(\omega t)$$

Ce qui donne le système (linéaire d'inconnue (A,B)) :

$$\begin{cases} \frac{A_0}{\tau} = & B\omega + \frac{A}{\tau} \\ 0 = & -A\omega + \frac{B}{\tau} \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0 = & A + B\omega\tau \\ 0 = & -A\omega\tau + B \end{cases}$$

que l'on peut écrire : $\begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega\tau \\ -\omega\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

On résout donc facilement :

$$l_2 + \omega\tau l_1 : \qquad B\left(\omega^2\tau^2 + 1\right) = \omega\tau A_0$$

$$\text{et donc : } B = \frac{\omega\tau A_0}{\omega^2\tau + 1}$$

$$l_1 - \omega\tau l_2 : \qquad A\left(1 + \omega^2\tau^2\right) = A_0$$

$$\text{et donc : } A = \frac{A_0}{\omega^2\tau + 1}$$

Au final la solution est :

$$y_0 : x \mapsto \frac{A_0}{1+\omega^2\tau^2}\Big(\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)\Big)$$

R On peut transformer en forme : $\frac{A_0}{1+\omega^2\tau^2}\Big(\cos(\omega t - \varphi)\Big)$.
On peut aussi obtenir ce résultat en utilisant le second membre complexe : $\frac{A_0}{\tau}e^{i\omega t}$.

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme :

$$y : x \mapsto \frac{A_0}{1+\omega^2\tau^2}\Big(\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)\Big) + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On trouve généralement la valeur de λ en utilisant la valeur de $y(0)$:

$$y(0) = \frac{A_0}{1+\omega^2\tau^2} + \lambda \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = y(0) - \frac{A_0}{1+\omega^2\tau^2}$$

Le régime permanent est :

$$t \mapsto \frac{A_0}{1+\omega^2\tau^2}\Big(\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)\Big)$$

C'est le comportement lorsque t est grand.

R Bien sûr, il ne faut pas retenir ce résultat par cœur, mais savoir refaire le calcul.

III Second ordre à coefficients constants

III.1 Généralités

Définition III.1 On appelle équation différentielle linéaire à coefficient constant du premier ordre sur I, une équation différentielle qui s'écrit :

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c(x),$$

où a, b sont des réels ou des complexes, c une fonction continue sur l'intervalle I (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et y est la fonction inconnue.

L'équation homogène associée est :

$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$

On appelle solution de cette équation une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie :

$$\forall x \in I,\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

R Dans le programme, il n'y a que le cas des coefficients constants. On peut aussi étudier (en exercice) le cas des équations de la forme : $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$.

III.2 Résolution dans le cas homogène

Dans cette sous-section, on cherche à résoudre l'équation homogène

$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$

Si a et b sont réels, les solutions sont des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sinon ce sont des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

⋆ Recherche de solution exponentielle

En suivant ce qui est fait pour le cas du premier ordre, on cherche une solution sous la forme exponentielle.

Proposition III.1 La fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (H), si et seulement si r est racine de l'**équation caractéristique** associée :

$$(e): \qquad r^2 + ar + b = 0.$$

Démonstration. En effet soit une fonction $y(x) = e^{rx}$ alors :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (H) &\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0\right) \\ &\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0\right) \\ &\iff r^2 + ar + b = 0. \end{aligned}$$

■

Nous allons donc séparer le cas où (e) admet deux solutions, aucune solutions, une solution double sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire selon si $\Delta = a^2 - 4b$ est positif strict, négatif, ou nul. Dans le cas où a ou b sont complexes, on ne considère que les deux premiers cas.

⋆ Structure de l'ensemble des solutions de (H)

On a le même résultat que pour le premier ordre :

Proposition III.2 Pour l'équation homogène : $(H): \; y'' + ay' + by = 0$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

La fonction nulle est solution.

Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène (H), et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $y_1 + y_2$ et λy_1 sont aussi solutions de (H).

R Même résultat bien sûr sur $\mathbb{C}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Démonstration. C'est évident et bien sûr c'est une conséquence de la linéarité. ∎

R On peut aussi écrire : si $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont n solutions de (H) et $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont n scalaires, alors :

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \qquad \text{est solution de } (H)$$

En première conséquence : si l'équation caractéristique (e) a deux racines r_1 et r_2, alors toute fonction y de la forme $y : x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ est solution de (H).

⋆ Cas où $\Delta > 0$, deux solutions réelles

Soit r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation caractéristique (e), remarquons que l'on a les relations : $r_1 + r_2 = -a$ et $r_1 r_2 = b$.

Considérons tout d'abords le cas où a et b sont réels et montrons que dans ce cas, les solutions de (H) sont de la forme :

$$x \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} \right. \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

On a déjà vu que $x \mapsto e^{r_1} x$ et $x \mapsto e^{r_2} x$ sont solutions, donc que toute fonction de la forme : $x \mapsto \lambda_1 e^{r_2 x} + \lambda_2 e^{r_1 x}$ est solution. Il reste donc la réciproque.

Soit y une solution de (H), on peut alors écrire $y(x) = z(x) e^{r_1 x}$, avec z une fonction inconnue deux fois dérivables puisque $e^{r_1 x}$ ne s'annule pas.

R Cela revient à utiliser la méthode de variation de la constante, puisque $x \mapsto e^{r_1 x}$ est une solution de (H).

En dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x)e^{r_1 x} \\ y'(x) &= \left(z'(x) + r_1 z(x)\right) e^{r_1 x} \\ y''(x) &= \left(z''(x) + 2r_1 z'(x) + r_1^2 z(x)\right) e^{r_1 x} \end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{aligned} y''(x) + ay'(x) + by(x) &= \left(z''(x) + 2r_1 z'(x) + r_1^2 z(x) + az'(x) + ar_1 z(x) + bz(x)\right) e^{r_1 x} \\ &= \left(z''(x) + (2r_1 + a)z'(x) + \underbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)}_{=0} z(x) \right) e^{r_1 x} \end{aligned}$$

Comme y est solution de (H), on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) + \underbrace{(2r_1 + a)}_{\neq 0} z'(x) = 0$$

En effet, $2r_1 + a = \pm\sqrt{\Delta} \neq 0$ (le $\pm$ provient du chois de r_1).

Ainsi, z' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre résolue et homogène :

$$(H_z) : \qquad Y + (2r_1 + a)Y' = 0$$

Dont la solution générale ont $Ce^{(-2r_1+a)x}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Ainsi, z' est de la forme

$$z' : x \mapsto Ce^{(-2r_1+a)x} \text{ avec } C \in \mathbb{R},$$

et donc z est aussi de la forme

$$z : x \mapsto \frac{C}{-2r_1 + a} e^{(-2r_1+a)x} + K \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

On a en écrivant les constantes différemment

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda_1 e^{(-2r_1+a)x} + \lambda_2.$$

ainsi,

$$y(x) = z(x)e^{r_1 x} = \lambda_1 e^{(-r_1+a)x} + \lambda_2 e^{r_1 x} = \lambda_1 e^{r_2 x} + \lambda_2 e^{r_1 x},$$

en se servant de la relation $r_1 + r_2 = -a$

On a donc démontré

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda_1 e^{r_2 x} + \lambda_2 e^{r_1 x}.$$

Dans le cas complexe, si $\Delta \neq 0$ les solutions de (H) sont les fonctions qui s'écrivent sous la forme :

$$y : x \mapsto \lambda_1 e^{r_2 x} + \lambda_2 e^{r_1 x} \qquad\qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$$

✯ Cas où $\Delta = 0$, une racine double

Soit r la solution de l'équation caractéristique (e), remarquons que l'on a la relations $r = -\frac{a}{2}$.

Continuons le cas réel et montrons que dans ce cas, les solutions de (H) sont de la forme :

$$y \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda_1 + \lambda_2 x)\, e^{rx} \end{array} \right. \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Soit y une solution de (H), on peut alors écrire $y(x) = z(x)e^{rx}$, avec z une fonction inconnue deux fois dérivables puisque e^{rx} ne s'annule pas. En dérivant on obtient :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x)e^{rx} \\ y'(x) &= \left(z'(x) + rz(x)\right) e^{rx} \\ y''(x) &= \left(z''(x) + 2rz'(x) + r^2 z(x)\right) e^{rx} \end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{aligned} y''(x) + ay'(x) + by(x) &= \left(z''(x) + 2rz'(x) + r^2 z(x) + az'(x) + arz(x) + bz(x)\right) e^{rx} \\ &= \left(z''(x) + \underbrace{(2r+a)}_{=0} z'(x) + \underbrace{(r^2 + ar + br)}_{=0} z(x) \right) e^{rx} \\ &= z''(x)e^{rx}. \end{aligned}$$

Comme y est solution de (H), on a donc :

$$z'' = 0$$

Ce qui signifie que $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$, et ainsi :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)\, e^{rx}.$$

Réciproquement, montrons qu'une telle fonction est solution. D'une part, on a déjà vu que $x \mapsto e^{rx}$ est solution (car r est racine de l'équation caractéristique), il reste donc à montrer que : $y : x \mapsto xe^{rx}$ est aussi solution. On a : $y'(x) = (1 + rx)e^{rx}$, et $y''(x) = (2r + r^2 x)r^{rx}$, donc :

$$y'' + ay' + by = \left(\underbrace{(r^2 + ar + b)}_{=0} x + \underbrace{2r + a}_{=0}\right) e^{rx}$$

On a bien y solution et donc toute fonction de la forme

$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)\, e^{rx} \text{ est solution.}$$

✎ On a donc résolu le problème dans le cas complexe. Si $\Delta = 0$ les solutions sont de la forme :

$$y : x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)\, e^{rx} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$$

⋆ Cas où $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées

R Cette partie ne concerne que le cas où a et b sont réels.

Soit r_1 et r_2 les deux solutions complexes de (e), r_1 et r_2 ont alors une partie imaginaire non nulle (égale à $\pm\sqrt{|\Delta|}$), et on a alors la relation : $\overline{r_1} = r_2$. On note α et β les réels tels que $r_1 = \alpha + i\beta$, et $r_1 = \alpha - i\beta$.

Si a et b sont réels, alors les solutions de (H) sont de la forme :

$$x \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\alpha x}(\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)) \end{array} \right. \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

En effet, soit y une solution de (H), on peut alors appliquer alors la partie précédente dans le cas complexe :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}.$$

Lorsque l'on a fait cela, on a déterminé les solutions dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

! Ici A et B sont complexes, puisque l'on a cherché les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Pour se restreindre aux solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il faut considérer les solutions vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \overline{y(x)} = y(x).$$

Comme on sait que y s'écrit sous la forme : $Ae^{r_2 x} + Be^{r_1 x}$, avec deux constantes complexes, on a :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R},\ \overline{y(x)} & = & y(x) \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \overline{Ae^{r_1 x}} + \overline{Be^{r_2 x}} & = & Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \overline{A}e^{r_2 x} + \overline{B}e^{r_1 x} & = & Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\overline{A} - B)e^{r_2 x} & = & (A - \overline{B})e^{r_1 x} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{(\overline{A} - B)}_{\text{constant}} & = & \underbrace{(A - \overline{B})e^{(r_1 - r_2)x}}_{\text{non constant}} \end{array}$$

Ainsi, $A = \overline{B}$, et donc :

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & Ae^{r_2 x} + \overline{A}e^{r_1 x} \\ & = & (\mathrm{Re}(A) + i\,\mathrm{Im}(A))\,e^{\alpha x + i\beta x} + (\mathrm{Re}(A) - i\,\mathrm{Im}(A))\,e^{\alpha x - i\beta x} \\ & = & e^{\alpha x}\left(\mathrm{Re}(A)\underbrace{\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right)}_{2\cos\beta x} + i\,\mathrm{Im}(A)\underbrace{\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right)}_{2i\sin\beta x} \right) \\ & = & e^{\alpha x}(2\,\mathrm{Re}(A)\cos(\beta x) - 2\,\mathrm{Im}(A)\sin(\beta x)) \end{array}$$

On obtient donc :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{\alpha x}(\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x))$$

Réciproquement, soit $y_1 : x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, on a :

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= e^{\alpha x}\big(-\beta\sin(\beta x)+\alpha\cos(\beta x)\big) \text{ et} \\ y_1''(x) &= e^{\alpha x}\big(-\beta^2\cos(\beta x)-\alpha\beta\sin(\beta x)-\alpha\beta\sin(\beta x)+\alpha^2\cos(\beta x)\big) \\ &= e^{\alpha x}\big((\alpha^2-\beta^2)\cos(\beta x)-2\alpha\beta\sin(\beta x)\big) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y_1''+ay_1'+by_1 &= e^{\alpha x}\big((\alpha^2-\beta^2)\cos(\beta x)-2\alpha\beta\sin(\beta x)-a\beta\sin(\beta x)+a\alpha\cos(\beta x)+b\cos(\beta x)\big) \\ &= e^{\alpha x}\big((\alpha^2-\beta^2+a\alpha+b)\cos(\beta x)+(-2\alpha\beta-a\beta)\sin(\beta x)\big) \end{aligned}$$

Or $(\alpha+i\beta)^2+a(\alpha+i\beta)+b=0$, c'est à dire (en prenant les parties réelles et imaginaires) $\alpha^2-\beta^2+a\alpha+b=0$ et $2\alpha\beta+a\beta=0$. Ainsi, y_1 est solution de (H). En refaisant le même calcul pour $y_2 x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, on obtient le même résultat.

Ainsi, y_1 et y_2 sont solutions donc toute fonction de la forme $y : x \mapsto \lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$ aussi et on a trouvé les solutions réelles de l'équation homogène.

⋆ Conclusion, méthode de résolution

Pour conclure, on a le théorème :

Théorème III.3 Pour résoudre l'équation différentielle homogène :

$$(H) \qquad y''+ay'+by=0,$$

dans le cas où a et b sont réels.

On forme l'équation caractéristique :

$$(e): \qquad r^2+ar+b=0.$$

et on calcule $\Delta = a^2-4b$.

- Si $\Delta>0$, il y a deux racines r_1 et r_2, la solution générale de l'équation homogène est alors :

$$x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x}+\lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta=0$, il y a une racine double r, la solution générale de l'équation homogène est alors :

$$x \mapsto (\lambda_1+\lambda_2 x)e^{rx}, \qquad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta<0$, il y a deux racines réelles conjuguées $r_1=\alpha+i\beta$, et $r_2=\alpha-i\beta$ la solution générale de l'équation homogène est alors :

$$x \mapsto e^{\alpha x}\left(\lambda_1\cos(\beta x)+\lambda_2\sin(\beta x)\right), \qquad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2.$$

✎ Si a et b ne sont pas réels. Il n'y a que deux cas :

– Si $\Delta\neq 0$, il y a deux racines distinctes r_1 et r_2 :

$$x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x}+\lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2.$$

– Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r :

$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{rx}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Pour faire un lien avec le premier ordre, si on considère l'équation du premier ordre (à coefficient constant) : $(E) : y' + ay = 0$, l'équation caractéristique est $r + a = 0$, dont l'unique solution est $r = -a$. On retrouve bien la forme générale de la solution :

$$y : t \longmapsto \lambda e^{rt} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } r \text{ la racine de l'équation.}$$

■ **Exemple III.1** Soit (H_1) : $y'' - y' - 2y = 0$, on a alors : (e) : $r^2 - r - 2 = 0$ a deux racines : -1 et 2. D'où la solution générale :

$$x \mapsto \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

■

■ **Exemple III.2** Soit (H_2) : $y'' + 2y' + y = 0$, on a alors : (e) : $r^2 + 2r + 1 = 0$ a une racine double : -1 D'où la solution générale :

$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

■

■ **Exemple III.3** Soit (H_3) : $y'' + 2y' + 5y = 0$, on a alors : (e) : $r^2 + r + 5 = 0$ a deux racines complexes conjugués : $-1 \pm 2i$. D'où la solution générale :

$$x \mapsto e^{-x}\big(\lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x)\big), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

■

III.3 Structure de l'ensemble des solutions d'une équation non homogène

Comme dans le cas d'une équation de degré 1, supposons dans un premier temps que l'on connaisse une **solution particulière** y_0 sur I, et soit y une autre solution, alors $y - y_0$ est solution de l'équation homogène, puisque :

$$(y - y_0)'' + a(y - y_0)' + b(y - y_0) = \underbrace{y'' + ay' + by}_{c(x)} - (\underbrace{y_0'' - ay_0' + by_0'}_{c(x)}) = 0.$$

Proposition III.4 Si y_0 est une solution de (E) sur I, toutes les autres solutions de (E) s'écrivent

$$y = y_0 + y_h, \qquad \text{avec} \qquad y_h \text{ solution de } (H).$$

on peut écrire : $\mathscr{S}_E = y_0 + \mathscr{S}_H$

Ainsi, comme dans le cas du premier ordre, la solution générale de l'équation avec second membre, est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (H).

Pour résoudre une équation différentielle du second ordre, il faut encore :
- Résoudre l'équation homogène,
- trouver une solution particulière,
- sommer les deux pour écrire l'ensemble des solutions.

III.4 Trouver une solution particulière

⋆ Principe de superposition des solutions

C'est le même résultat que le premier ordre.

Si le second membre est une somme, on peut chercher une solution particulière en prenant comme second membre chacun des termes puis ajouter ces solutions pour trouver une solution de l'équation originale.

⋆ Second membre particulier

Pour trouver une solution particulière :

Second membre polynôme : $(E): \ y'' + ay' + by = P(x)$, avec P un polynôme.

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme : $y_0 = Q(x)$, de degré égal à celui de P.

En particulier, si le second membre est une constante, on cherche une solution sous la forme d'une constante.

Interprétation : si le système physique est excité avec une force constante, alors il va finir par atteindre un équilibre.

Second membre exponentiel $(E): \ y'' + ay' + by = Ae^{\lambda x}$, avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$.

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\begin{aligned}
y_0(x) = & Ce^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\
& \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique } r^2 + ar + b = 0 \\
y_0(x) = & Cxe^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\
& \text{si } \lambda \text{ est racine simple de l'équation caractéristique } r^2 + ar + b = 0 \\
y_0(x) = & Cx^2e^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\
& \text{si } \lambda \text{ est racine double de l'équation caractéristique } r^2 + ar + b = 0
\end{aligned}$$

(*i.e.* on rajoute un degré ou deux lorsque l'exponentiel au second membre est la même que dans la solution générale de (H).)

Second membre cosinus/sinus $(E): \ y'' + ay' + by = A\cos(\omega x)$, ou $(E): \ y'' + ay' + by = A\sin(\omega x)$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(A, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\begin{aligned}
y_0(x) = & \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\
& \text{si } i\omega \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique } r^2 + ar + b = 0 \\
y_0(x) = & \alpha x \cos \omega x + \beta x \sin \omega x \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\
& \text{si } i\omega \text{ est racine (simple) de l'équation caractéristique } r^2 + ar + b = 0
\end{aligned}$$

Principe général À retenir : la solution particulière est de la même forme que le second membre.
Si le second membre contient une partie oscillante à une pulsation ω alors on recherche *a priori* une solution oscillante à la même pulsation, mais avec un déphasage.
Si le second membre est solution de l'équation homogène, alors il y a résonance et il faut donc « augmenter d'un degré ».

■ **Exemple III.4** $(E):\ y''+2y'+y=4$
- L'équation caractéristique est $r^2+2r+1=0$, dont la racine double est -1.
- On cherche la solution sous la forme d'une constante, on voit que 4 est solution,
- donc les solutions sont :

$$x \mapsto 4+(\lambda_1+\lambda_2 x)e^{-x} \qquad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$$

■

■ **Exemple III.5** $(E):\ y''-y'-2y=x$
- L'équation caractéristique est $r^2-r-2=0$, dont les solutions sont -1 et 2
- On cherche la solution sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y(x)=ax+b$. On alors $y'=a$ et $y''=0$, donc l'équation : $-2ax-2b-a=x$, soit $a=-\frac{1}{2}$, et $b=\frac{1}{4}$
- donc les solutions sont :

$$x\mapsto -\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\lambda_1 e^{-x}+\lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$$

■

■ **Exemple III.6** $(E):\ y''-y'-2y=e^{2x}$
- L'équation caractéristique est $r^2-r-2=0$, dont les solutions sont -1 et 2
- On cherche des solutions sous la forme $y(x)=Cxe^{2x}$. On a alors, $y'(x)=(C+2Cx)e^{2x}$ et $y''(x)=(4C+4Cx)e^{2x}$, donc l'équation : $\big(4C-C\big)+\big(\underbrace{4C-2C-2C}_{=0}\big)x\big)e^{2x}=xe^{2x}$, soit $C=\frac{1}{3}$.

  R On voit bien qu'il est inutile de chercher des solutions sous la forme : $x\mapsto Ce^{2x}$ vu les solutions de l'équation homogène. Il faut augmenter d'un degré.

- donc les solutions sont :

$$x\mapsto \frac{x}{3}e^{2x}+\lambda_1 e^{-x}+\lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$$

■

■ **Exemple III.7** $(E):\ y''+y=\cos x+\sin 2x$.
- L'équation caractéristique est $r^2+1=0$, donc les solutions sont i et $-i$, la solution générale de l'équation homogène est alors : $x\mapsto \lambda_1\cos(x)+\lambda_2\sin(x)$.
- On sépare alors le second membre en deux parties : $\cos x$ et $\sin 2x$.

- La première équation est donc : $(E_1) : \ y'' + y = \cos x$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha x \cos(x) + \beta x \sin(x)$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \ y_0(x) =& \alpha x \cos(x) + \beta x \sin(x) \\
y_0'(x) =& \alpha\Big(\cos(x) - x\sin(x)\Big) + \beta\Big(\sin(x) + x\cos(x)\Big) \\
=& \Big(\alpha + \beta x\Big)\cos(x) + \Big(\beta - \alpha x\Big)\sin(x) \\
y_0''(x) =& -\Big(\alpha + \beta x\Big)\sin(x) + \beta\cos(x) \\
& + \Big(\beta - \alpha x\Big)\cos(x) - \alpha\sin(x) \\
=& \Big(2\beta - \alpha x\Big)\cos(x) - \Big(2\alpha + \beta x\Big)\sin(x) \\
y_0''(x) + y_0(x) =& 2\beta\cos(x) - 2\alpha\sin(x).
\end{aligned}$$

On veut donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \cos(x) = 2\beta\cos(x) - 2\alpha\sin(x).$$

Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$. Au final, la solution particulière de (E_1) est : $x \mapsto \frac{1}{2}x\sin(x)$.

- La première équation est donc : $(E_2) : \ y'' + y = \sin(2x)$. Il faut chercher des solutions sous la forme : $y_0 : x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$.

R Ici pas besoin d'augmenter d'un degré : il n'y a pas de mélange entre le second membre et les solutions générales de l'équation homogène.

Cela donne :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \ y_0(x) =& \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x) \\
y_0'(x) =& -2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x) \\
y_0''(x) =& -4\alpha\cos(2x) + 2\beta\sin(2x) \\
y_0''(x) + y_0(x) =& -3\alpha\cos(2x) + 3\beta\sin(2x).
\end{aligned}$$

On veut donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sin(2x) = -3\alpha\cos(2x) + 3\beta\sin(2x).$$

Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{3}$. Au final, la solution particulière de (E_2) est : $x \mapsto \frac{1}{3}\sin(2x)$.

- On déduit par le principe de superposition une solution particulière de (E) : $y_0(x) = \frac{x}{2}\sin x - \frac{\sin 2x}{3}$.
- On déduit que les solutions de (E) sont de la forme :

$$x \mapsto \frac{x}{2}\sin x - \frac{\sin 2x}{3}\lambda_1\cos(x) + \lambda_2\sin(x), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

■

⋆ Second membres à valeurs complexes

C'est le même résultat que pour le premier ordre.

> Dans le cas où a et b sont réels.
>
> Pour trouver une solution particulière, de l'équation, on peut écrire le second membre $c(x)$ comme la partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction $\tilde{c}$ à valeurs complexes. On écrit alors $(\tilde{E})$ l'équation avec second membre $\tilde{c}$. On trouve alors une solution particulière $\tilde{y_0}$ de cette nouvelle équation $(\tilde{E})$. On construit une solution particulière y_0 de (E) en prenant la partie réelle (ou imaginaire) de $\tilde{y_0}$

On applique bien sûr au cas où le second membre est sinusoïdal.

■ **Exemple III.8** On reprends l'exemple précédent : $(E): \ y'' + y = \cos x + \sin 2x$

- On sépare le second membre en deux parties : $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$ et $\sin 2x = \mathrm{Im}(e^{i2x})$.
- On résout tout d'abords $y'' + y = e^{ix}$, pour cela on cherche des solutions sous la forme : $y(x) = xCe^{ix}$, avec $C \in \mathbb{C}$.
  On obtient :
  $$\begin{aligned} y'(x) =&(C + iCx)e^{ix} \\ y''(x) =&(2iC - Cx)e^{ix} \end{aligned}$$
  il faut donc $C = -\frac{i}{2}$, c'est-à-dire, $y(x) = -\frac{ix}{2}e^{ix}$.
- On obtient donc une solution sur $\mathbb{C}$, de l'équation $y'' + y = e^{ix}$, qui est $x \mapsto -\frac{ix}{2}e^{ix}$.
  En prenant la partie réelle, on obtient une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y = \cos x$, qui est $x \mapsto \frac{x}{2}\sin x$.
- On résout ensuite $y'' + y = e^{2ix}$, pour cela on cherche des solutions sous la forme : $y(x) = Ce^{2ix}$, avec $C \in \mathbb{C}$. On obtient :
  $$\begin{aligned} y'(x) =&2iCe^{2ix} \\ y''(x) =&-4Ce^{2ix} \end{aligned}$$
  donc $y'' + y = -3Ce^{2ix}$, il faut donc $C = -\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, $y(x) = -\frac{1}{3}e^{2ix}$.
- On obtient donc une solution sur $\mathbb{C}$, de l'équation $y'' + y = e^{2ix}$, qui est $x \mapsto -\frac{1}{3}e^{2ix}$.
  En prenant la partie imaginaire, on obtient une solution sur $\mathbb{R}$ de $(E): \ y'' + y = \sin 2x$, qui est $x \mapsto -\frac{\sin 2x}{3}$.

■

III.5 Existence de solutions, problème de Cauchy

Théorème III.5 Soit (a, b) deux réels (resp. complexes) et c une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Alors l'équation :

$$(E) \qquad\qquad y'' + ay' + by = c(x)$$

admet une infinité de solutions.

Plus précisément, si on fixe un point $x_0 \in I$, et deux conditions initiales : $y_0 \in \mathbb{R}$ (resp. $y_0 \in \mathbb{C}$) pour la valeur de la fonction et $v_0 \in \mathbb{R}$ (resp. $v_0 \in \mathbb{C}$) pour la valeur de la dérivée, alors il existe une unique solution y de (E) telle que :

$$y(0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = v_0.$$

Démonstration. Ce théorème est admis conformément au programme. ■

R Ce résultat théorique est particulièrement utile pour la résolution d'équation fonctionnelle : on ramène l'équation fonctionnelle à une équation différentielle pour laquelle on sait qu'il existe une unique solution.

IV Lien avec la physique

On a le même vocabulaire que pour le premier ordre.

⋆ **Oscillateur harmonique non amorti**

On considère l'équation :

$$(E): \qquad y'' + \omega^2 y = \omega^2 C.$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$.

Son équation caractéristique est : $r^2 + \omega^2 = 0$, *i.e.* $r = \pm i\omega$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme :

$$y : t \longmapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

R On peut aussi écrire :

$$y : t \longmapsto A \sin(\omega t + B), \text{ avec } A \text{ l'amplitude (positive) et } B \text{ la phase.}$$

La fonction constante $y : t \mapsto C$ est solution. C'est le régime stationnaire.

Les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto C + \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On détermine (λ, μ) en utilisant les conditions initiales : $y(0)$ et $y'(0)$.

⋆ **Oscillateur harmonique amorti en régime libre**

On considère l'équation :

$$(E): \qquad y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$$

avec $\lambda > 0$. C'est l'équation différentielle d'un oscillateur en régime libre (sans force extérieure) avec présence de frottement. Le coefficient λ mesure l'amortissement du système.

On note aussi $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$ le **facteur de qualité**, l'équation s'écrit alors :

$$(E): \qquad y'' + \frac{\omega_0}{Q} y' + \omega_0^2 y = 0$$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2$. Le discriminant est :

$$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

Frottement faible

Si $\lambda < \omega_0$ ce que l'on peut aussi écrire $Q > \frac{1}{2}$, on a $\Delta < 0$ et il n'y a pas de racines réelles. Les racines complexes sont :

$$r_1 = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \qquad\qquad r_2 = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Pour faciliter les notations, on note $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, c'est la **pseudo-pulsation**.
On a alors :

$$r_1 = -\lambda + i\omega \qquad\qquad r_2 = -\lambda - i\omega$$

Les solutions sont de la forme :

$$y : t \longmapsto e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$$

On parle de mouvement **pseudo-périodique** car on observe des oscillations (de pulsation ω) dont l'amplitude est amortie. On peut aussi écrire les solutions sous la forme :

$$y : t \longmapsto e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega t + \varphi)\right) \qquad A \geqslant 0,\ \varphi \in [0, 2\pi[.$$

On remarque que : $\lim_{t\infty} y(t) = 0$ ce qui signifie que le régime permanent est la fonction nulle.

Frottement fort

Si $\lambda > \omega_0$ ce que l'on peut aussi écrire $Q < \frac{1}{2}$, on a $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles :

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \qquad\qquad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Ces deux racines sont négatives.

Les solutions sont de la forme :

$$y : t \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

on écrit souvent : $y : t \longmapsto e^{-\lambda t}\left(Ae^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}t} + Be^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}t}\right)$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On parle de mouvement **apériodique** : la fonction s'annule rapidement sans osciller. On a encore : $\lim_{t\infty} y(t) = 0$.

Régime critique

Le cas critique est $\lambda = \omega_0$, c'est-à-dire $Q = \frac{1}{2}$, *i.e.* $\Delta = 0$. L'unique solution est alors $r = \lambda$.

Les solutions sont alors :

$$y : t \longmapsto e^{-\lambda t}(A + Bt).$$

On a encore : $\lim_{t\infty} y(t) = 0$. la fonction s'annule sans osciller, mais la décroissance est moins rapide que dans le cas précédent.

R Bien sûr il ne faut pas retenir ces formules par cœur mais être capable de refaire le calcul.

Faire un dessin des trois cas.

⋆ **Second membre sinusoïdal**

On considère l'équation avec second membre :

$$(E) \qquad y'' + \omega^2 y = \cos(mt).$$

Les solutions de (H) sont :

$$y : t \longmapsto A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $m \neq \omega$, on va chercher une solution sous la forme : $t \mapsto A\cos mt + B\sin mt$.

On trouve :

$$\begin{aligned} y(t) &= A\cos mt + B\sin mt \\ y'(t) &= -mA\sin mt + Bm\cos mt \\ y''(t) &= -m^2A\cos mt + Bm^2\sin mt \\ y''(t) + \omega^2 y(t) &= A(\omega^2 - m^2)\cos mt - B(\omega^2 + m^2)\sin mt. \end{aligned}$$

Par identification, cela donne :

$$A = \frac{1}{\omega^2 - m^2} \qquad B = 0$$

Ainsi, les solutions sont :

$$y : t \mapsto \frac{1}{\omega^2 - m^2}\cos(mt) + A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

On a alors une somme de deux fonctions oscillantes : l'une à la pulsation ω (liée au système), l'autre à la pulsation m (liée à l'excitation).

On constate que si $m = \omega$ ce calcul n'est plus valable (on divise par 0). Lorsque l'on cherche la solution de :

$$(E) \qquad y'' + \omega^2 y = \cos(\omega t)$$

il faut augmenter d'un degré, en cherchant une solution sous la forme :

$$t \mapsto At\cos\omega t + Bt\sin\omega t.$$

On trouve :

$$\begin{aligned} y(t) &= At\cos\omega t + Bt\sin\omega t \\ y'(t) &= A\cos\omega t - A\omega t\sin\omega t + B\sin\omega t + B\omega t\cos\omega t \\ &= (A + B\omega t)\cos\omega t + (B - A\omega t)\sin\omega t \\ y''(t) &= B\omega\cos\omega t - (A\omega + B\omega^2 t)\sin\omega t - A\omega\sin\omega t + (B\omega - A\omega^2 t)\cos\omega t \\ &= (2B\omega - A\omega^2 t)\cos\omega t - (2A\omega + B\omega^2 t)\sin\omega t \\ y''(t) + \omega^2 y(t) &= 2B\omega\cos\omega t - 2A\omega\sin\omega t. \end{aligned}$$

On voit que les termes en $t \mapsto t\cos\omega t$ et $t \mapsto t\sin\omega t$ se simplifient. Par identification, cela donne :

$$A = 0 \qquad B = \frac{1}{2}$$

Ainsi, les solutions sont :

$$y : t \mapsto \frac{1}{2} t \sin \omega t + A \cos \omega t + B \sin \omega t \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

On voit bien ici le phénomène de résonance : lorsque l'entrée du système (ie le second membre de l'équation) est une sinusoïde de la bonne pulsation, il y a mélange entre la solution de l'équation homogène et le second membre. La sortie du système (ie la solution de l'équation) n'a alors plus la même forme. En particulier ici la solution n'est plus bornée.

Équations différentielles linéaires

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

✭ Applications directes du cours

Exercice 1 Premier ordre homogène

Résoudre :

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \qquad y' + \frac{1}{1+x^2}y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$y' + \cos(x)y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Correction :

Une primitive de $x \mapsto -\frac{2}{x}$ est $x \mapsto -\ln(x)$, donc les solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda 2x^2$.
Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto arctan(x)$, donc les solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\arctan(x)}$.
Une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ est $x \mapsto \sin(x)$, donc les solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\sin(x)}$.
Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, donc les solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 2 Premier ordre avec second membre

Résoudre :

$$y' + (\sin x)y = 2\sin x \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad y' + \frac{1}{x}y = \frac{x}{x-1} \quad \text{sur }]1, +\infty[$$

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad xy' - y = x^2 \ln x \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

Correction :

Méthode de variation de la constante.

Une primitive de $x \mapsto \sin(x)$ est $x \mapsto -\cos(x)$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto e^{\cos(x)}$. On trouve 2 comme solution particulière.

Les solutions de l'équation homogènes sont de la forme : $\lambda \frac{1}{x}$, On cherche ensuite une solution sous la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda(x)\frac{1}{x} \\ y'(x) &= \lambda'(x)\frac{1}{x} - \lambda(x)\frac{1}{x^2} \\ \hline y'(x) + \frac{1}{x}y(x) &= \lambda'(x)\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} \lambda'(x) &= \frac{x^2}{x-1} = \frac{(x-1)^2 + 2x - 1}{x-1} = (x-1) + \frac{2(x-1)+1}{x-1} \\ &= (x-1) + 2\frac{1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x-1)$.

Les solutions sont les fonctions de la forme : $\lambda x^2 + 1$. On cherche une solution sous la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda(x)\left(x^2+1\right) \\ y'(x) &= \lambda'(x)\left(x^2+1\right) + \lambda(x)(2x) \\ \hline y' - \frac{2x}{x^2+1}y &= \lambda'(x)\left(x^2+1\right) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\lambda'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

et donc :

$$\lambda(x) = \arctan(x).$$

Exercice 3 Problème de Cauchy au premier ordre

Déterminer l'unique solution sur $]0,\pi[$ de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' + \frac{\cos x}{\sin x} y = 1 \qquad \text{s'annulant en } \frac{\pi}{2}.$$

Correction :
Résolution de l'équation :

$$y : x \mapsto \frac{\lambda - \cos(x)}{\sin(x)} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

En regardant la valeur de $\frac{\pi}{2}$, on obtient l'unique solution :

$$y : x \mapsto \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 4 Second ordre homogène

Résoudre :

$$y'' + 4y' - 5y = 0 \qquad y'' - 2y' + y = 0 \qquad y'' + 2y' + 2y = 0$$

Correction : Résultat du cours.

Exercice 5 Second ordre avec second membre

Résoudre :

$$y'' - 4y' + 3y = e^{-x} + e^x \qquad y'' - 2y' + 2y = e^x$$
$$y'' + y' - 2y = 8\sin(2x) \qquad y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos x + 7e^{-x}\sin x - 4e^x \sin 2x$$

Correction : Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3) = 0$. Donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme : $yx \mapsto \alpha e^x + \beta e^{3x}$.

On cherche une solution de la forme :

$$\begin{array}{rl} y(x) = & Ce^{-x} \\ y'(x) = & -Ce^{-x} \\ y''(x) = & Ce^{-x} \\ \hline y'' - 4y' + 3y = & Ce^{-x}8 \end{array}$$

D'où $C = \frac{1}{8}$.

On cherche une solution de la forme :

$$\begin{array}{rl} y(x) = & Cxe^x \\ y'(x) = & C(1+x)e^x \\ y''(x) = & C(2+x)e^x \\ \hline y'' - 4y' + 3y = & Ce^x(1) \end{array}$$

D'où $C=1$.

équation caractéristique : $r^2-2r+2=0$, $\Delta=4-8=-4$, les racines sont $1+i$ et $1-i$, les solutions de (H) sont de la forme : $x\mapsto \lambda e^x(\alpha\cos(x)+\beta\sin(x))$.

On cherche une solution sous la forme :

$$\begin{aligned}
y(x) =& Ce^x\\
y'(x) =& Ce^x\\
y''(x) =& Ce^x\\
\hline
y''-2y'+2y =& Ce^x, \text{ d'où } C=1.
\end{aligned}$$

équation caractéristique : $r^2+r-2=0=(r-1)(r+2)$ solution de l'équation homogène : $x\mapsto \alpha e^x+\beta e^{-2x}$. On cherche une solution sous la forme :

$$\begin{aligned}
y(x) =& A\cos(2x)+B\sin(2x)\\
y'(x) =& -2A\sin(2x)+2B\cos(2x)\\
y''(x) =& -4A\cos(2x)-4B\sin(2x)\\
\hline
y''+y'-2y =& \cos(2x)\,(-6A+2B)+\sin(2x)\,(-6B-2A)
\end{aligned}$$

Ce qui donne à résoudre :

$$\begin{cases}-6A+2B=0\\ -6B-2A=8.\end{cases}$$

⋆ Autres équations

Exercice 6 Résoudre l'équation différentielle suivante sur tout intervalle ne contenant pas -1 :

$$(1+x^2)y''+(1+x)y'-2=0.$$

Correction : L'équation est équivalente à :

$$(E)\qquad y''+\frac{1+x}{1+x^2}y'=\frac{2}{1+x^2}$$

La fonction y' est ainsi solution de :

$$(E')\qquad z'+\frac{1+x}{1+x^2}z=\frac{2}{1+x^2}\ \text{d'inconnue } z$$

Pour l'équation homogène : une primitive de : $x\mapsto \frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}$ est : $x\mapsto \arctan(x)+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$. Ainsi :

$$\mathscr{S}_{H'}=\left\{x\mapsto \lambda e^{-\arctan(x)}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

puis on cherche une solution de (E') avec la variation de la constante

$$\begin{aligned}
z(x) =& \lambda(x)e^{-\arctan(x)}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\\
z'(x) =& \lambda'(x)e^{-\arctan(x)}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1+x}{1+x^2}\lambda(x)e^{-\arctan(x)}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\\
\hline
z'+\frac{1+x}{1+x^2}z =& \lambda'(x)e^{-\arctan(x)}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2}{1+x^2}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\lambda'(x)=2\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan(x)}$$

Exercice 7 On considère l'équation :

$$(1-x^2)y''-xy'+y=0.$$

Résoudre cette équation sur $I=]-1,1[$ en considérant la fonction $z:t\mapsto y(\sin t)$.

Correction :

Soit y solution de l'équation. On considère $z:t\mapsto y(\sin(t))$. La fonction z est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, elle est deux fois dérivable par composition.

On a aussi la relation :

$$\forall x\in]-1,1[,\ y(x)=z(\arcsin(x)).$$

On dérive :

$$\begin{aligned}
z(t)&=y(\sin(t))\\
z'(t)&=\cos(t)y'(\sin(t))\\
z''(t)&=\cos^2(t)y''(\sin(t))-\sin(t)y'(\sin(t))
\end{aligned}$$

En utilisant la relation :

$$\begin{aligned}
\forall x\in]-1,1[,\ (1-x^2)y''(x)-xy'(x)+y(x)&=0\\
\text{c'est-à-dire : }\forall t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \cos^2(t)y''(\sin(t))-\sin(t)y'(\sin(t))+y(\sin(t))&=0
\end{aligned}$$

On obtient que z est solution de l'équation $z''+z=0$, et donc qu'il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$, tel que :

$$\forall t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ z(t)=A\cos(t)+B\sin(t).$$

Cela donne :

$$\forall x\in]-1,1[,\ y(x)=A\sqrt{1-x^2}+Bx$$

Réciproquement, il faut vérifier qu'une fonction de cette forme est solution. On sépare en deux parties :

$$\begin{aligned}
y(x)&=x\\
y'(x)&=1\\
y''(x)&=0\\
\hline
(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+y(x)&=0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y(x)&=\sqrt{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\\
y'(x)&=\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\\
&=-x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\\
y''(x)&=(-x)\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\\
&=-x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\\
&=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\left(-x^2-(1-x^2)\right)\\
&=-(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\\
\hline
(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+y(x)&=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(-1-x^2+1+x^2\right)=0.
\end{aligned}$$

D'où la réciproque.

Exercice 8 Équation d'Euler homogène

On appelle équation d'Euler homogène une équation différentielle du type :

$$(1) \qquad ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

où a, b, c sont des réels fixés (a est supposé non nul).

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $I = \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si la fonction :
$$z : t \longmapsto y\left(e^t\right)$$
est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on donnera.
2. Résoudre l'équation :
$$x^2y'' - xy' + y = 0$$
sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Discuter de l'existence de solutions sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. On a :
$$\begin{aligned} z(t) &= y\left(e^t\right) \\ z'(t) &= e^t y'\left(e^t\right) \\ z''(t) &= e^{2t} y''\left(e^t\right) + e^t y'\left(e^t\right) \end{aligned}$$
En faisant $al_3 + (b-a)l_2 + cl_1$, on obtient :
$$az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t) = ae^{2t}y''\left(e^t\right) + be^t y'\left(e^t\right) + cy\left(e^t\right)$$
On peut obtenir aussi cette relation en écrivant $y(x) = z(\ln(x))$
On a donc :
$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ ax^2y''(x) + bxy(x) + cy(x) = 0 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ ae^{2t}y''\left(e^t\right) + be^t y'\left(e^t\right) + cy\left(e^t\right) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t) \\ &\iff z \text{ est solution de } (E') \end{aligned}$$
Avec (E') l'équation linéaire :
$$az'' + (b-a)z' + cz = 0.$$
2. On applique ce qui précède : Soit y solution de l'équation, on considère alors z comme ci-dessus et on a : z est solution de :
$$(E') \quad z'' - 2z' + z = 0$$
L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, l'unique racine est 1. On sait alors que :
$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = (\alpha + \beta t)e^t$$
Cela donne :
$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ y(x) = (\alpha + \beta \ln(x))\,x$$
Réciproquement, si y est de la forme ci-dessus, on considère z la fonction définie par : $z : t \longmapsto y\left(e^t\right)$. On obtient alors : $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = (\alpha + \beta t)e^t$, et donc z est solution de l'équation : $z'' - 2z' + z = 0$ et donc y est solution de (E).
NB : il ne faut pas faire de réciproque détaillée, il faut utiliser le fait que la question précédente est une équivalence.

⋆ Équation différentielle et équation fonctionnelle

Exercice 9 Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe une unique application g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x (x-t)g(t)dt + f(x).$$
Indication : montrer que g est dérivable et déterminer une équation différentielle vérifiée par g. Utiliser le théorème de Cauchy.
2. Trouver la fonction g dans le cas où f est la fonction cosinus.

Correction : analyse synthèse : Si g existe, alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = x\int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt + f(x)$$
On peut alors dériver :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) &= \int_0^x g(t)dt + xg(x) - xg(x) + f'(x)\\ &= \int_0^x g(t)dt + f'(x)\end{aligned}$$
On peut alors re-dériver, pour obtenir :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g''(x) = g(x) + f''(x)$$
Ainsi, g est solution de l'équation $y'' - y = f(x)$.

De plus, on a : $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$. D'après le théorème de Cauchy, il existe une unique fonction qui vérifie ces hypothèses.

Synthèse : On considère la fonction solution du pb de Cauchy, on vérifie qu'elle convient.

Pour le cas particulier, l'équation est :
$$y'' - y = -\cos(x)$$
Les solutions de l'équation homogènes sont $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$. Une solution particulière est : $\frac{1}{2}\cos(x)$ (trouvé sous la forme $A\cos(x)$). Ainsi, g s'écrit :
$$gx \mapsto Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}\cos(x)$$
Il reste à ajouter les conditions initiales $g(0) = f(0) = 1$ et $g'(0) = f'(0) = 0$. Au final :
$$gx \mapsto \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

Exercice 10 Trouver toutes les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

Correction :

Analyse synthèse : Soit f solution, alors $f(0)^2 = f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, on a $f(x) = f(x+0) = 0$, et f est nulle (qui est bien solution).

Si $f(0) = 1$, on dérive par rapport à x :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f'(x+y) = f'(x)f(y)$$
et donc :
$$\forall y \in \mathbb{R}, f'(y) = f'(0)f(y)$$
Ainsi, f est solution de $y' = \lambda y$ avec $\lambda = f'(0)$. On en déduit que f s'écrit sous la forme :
$$f : x \mapsto e^{\lambda x}$$
pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproque à faire.

Exercice 11 Trouver toutes les applications f non nulles et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Parmi ces applications déterminer celles qui sont à valeurs réelles.

Correction : Analyse synthèse : $f(0) = f(0)^2$.
Si $f(0) = 0$, alors $f(x)+f(x) = 0$, donc f est nulle. Ainsi, $f(0) = 1$.
Par suite :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(y)+f(-y) = 2f(y)$$

et f est paire.
On dérive la relation par rapport à x :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x+y)+f'(x-y) = 2f'(x)f(y).$$

puis en dérivant une deuxième fois :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x+y)+f''(x-y) = 2f''(x)f(y).$$

On fait ensuite le contraire : on fixe x et dérive par rapport à y, deux fois :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x+y)-f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x+y)+f''(x-y) = 2f(x)f''(y).$$

Cela donne :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f''(y) = f''(x)f(y)$$

avec $y = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f''(0) = f''(x)$$

Ainsi, f est solution d'une équation de la forme $y''-\omega^2 y = 0$, avec $\omega \in \mathbb{C}$, tel que : $\omega^2 = f''(0)$. De plus, on a : $f(0) = 1$, et $f'(0) = 0$ (par parité).
On en déduit que f s'écrit : $x \mapsto \frac{e^{\omega x}+e^{-\omega x}}{2}$.
Réciproque à écrire ainsi que déterminer les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonctions trigonométriques hyperboliques

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Généralités, définitions

Définition IV.1 La fonction cosinus hyperbolique notée ch (ou parfois cosh) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

La fonction sinus hyperbolique notée sh (ou parfois sinh) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

R On voit le lien avec les fonctions sinus et cosinus par la formule d'Euler.

On a la proposition évidente :

Proposition IV.1 — parité/imparité. La fonction cosinus hyperbolique est paire.
La fonction sinus hyperbolique est impaire.

Autre propriété partagée avec cosinus et sinus :

Théorème IV.2 Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont dérivable avec :

$$\text{sh}' = \text{ch} \qquad \text{et} \qquad \text{ch}' = \text{sh}$$

⋆ Représentation graphique

On a les tableaux de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variation de $\text{sh}(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$
variation de $\text{ch}(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↗	$+\infty$

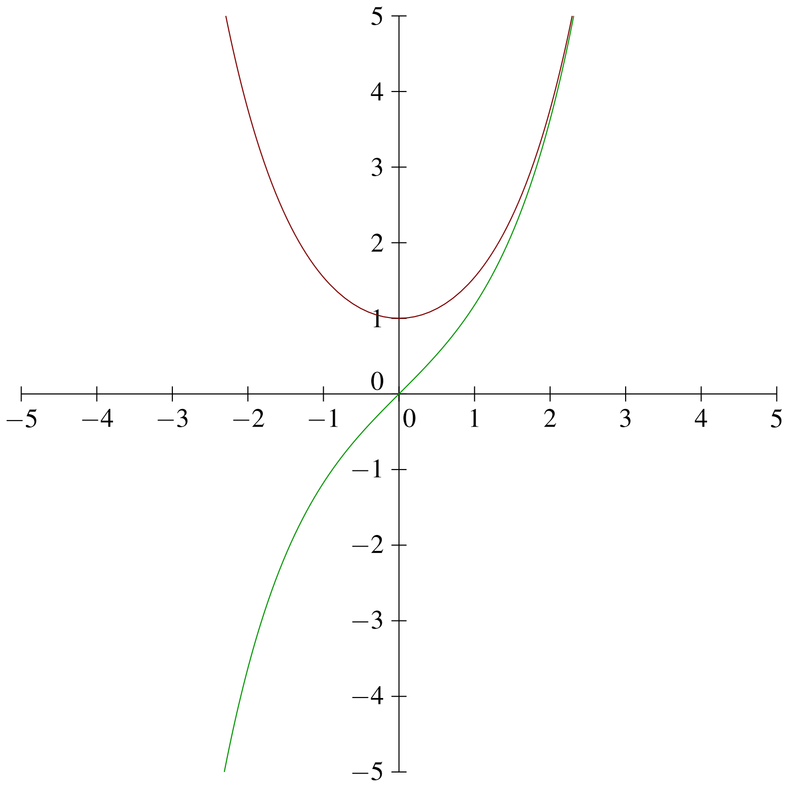
Proposition IV.3 On déduit de ces tableaux de variation :
- La fonction sinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- La fonction cosinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$

R On peut donc étudier leur bijection réciproque, c'est les fonctions argument cosinus hyperbolique et argument sinus hyperbolique, dont l'étude est hors-programme mais sujet de nombreux exercices.

En particulier, on pourra retenir que ces fonctions arcsinus et arccosinus hyperbolique admettent des expressions explicites, c'est-à-dire que l'on peut exprimer la solution de $\text{ch}(x) = y$ en fonction de y.

⋆ Représentation graphique

On a la représentation :



★ **Relations fondamentales**

Proposition IV.4 On a pour tout t réel :

$$\exp(t) = \text{ch}(t) + \text{sh}(t) \qquad \exp(-t) = \text{ch}(t) - \text{sh}(t) \qquad \text{ch}^2(t) - \text{sh}^2(t) = 1.$$

Démonstration. Les deux premières relations sont évidentes, la dernière s'obtient à partir de :

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(t) &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) \\ \text{sh}^2(t) &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) \end{aligned}$$

■

- Pour une fonction f quelconque, la **partie paire** de f est définie par la fonction $p : x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$. La **partie impaire** de f est définie par la fonction $i : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. Ces définitions montrent que tout fonction f s'écrit de manière unique sous la forme $f = p + i$ avec p paire et i impaire.
  La fonction ch est ainsi la partie paire de la fonction exponentielle, et sh est la partie impaire.

★ **Interprétation sur l'hyperbole**

Considérons l'hyperbole H, c'est la partie du plan définie par :

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 - y^2 = 1\right\}$$

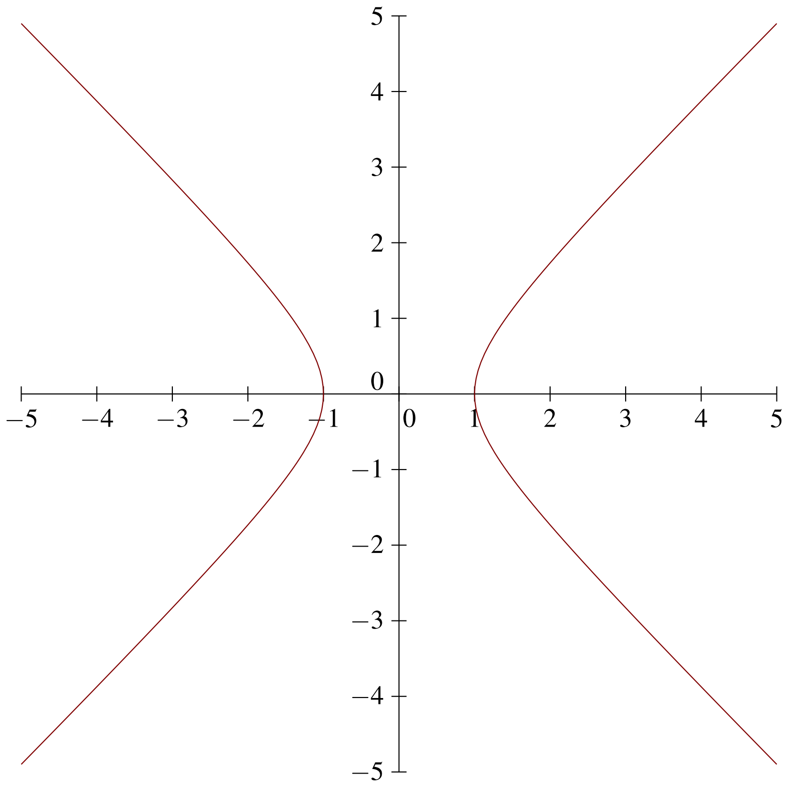
Si on considère $(x, y) \in H$, alors, on peut construire $t \in \mathbb{R}$, tel que : $y = \text{sh}(t)$. On a alors :

$$|x| = \sqrt{1 - \text{sh}^2(t)} = |\text{ch}(t)|$$

Ainsi : $x = \pm\text{ch}(t)$. Réciproquement, si $t \in \mathbb{R}$, alors $\Big(\text{ch}(t), \text{sh}(t)\Big)$ et $\Big(-\text{ch}(t), \text{sh}(t)\Big)$ sont des éléments de H.

On en déduit une écriture paramétrique de H :

$$H = \left\{\Big(\text{ch}(t), \text{sh}(t)\Big) \middle| t \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\Big(-\text{ch}(t), \text{sh}(t)\Big) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$$



⋆ Lien avec les équations différentielles

Proposition IV.5 Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$(E): \qquad y'' - \omega^2 y = 0.$$

Alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$y : x \longmapsto A\mathrm{ch}(\omega x) + B\mathrm{sh}(\omega x) \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

Démonstration. L'équation caractéristique est $(e) : x^2 - \omega^2 = 0$, les racines sont : ω et $-\omega$, d'après le théorème du cours, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$y : x \longmapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x} \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

En particulier, on constate que $x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x)$ et $x \mapsto \mathrm{sh}(\omega x)$ sont deux solutions, donc toute fonction de la forme :

$$y : x \longmapsto A\mathrm{ch}(\omega x) + B\mathrm{sh}(\omega x) \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

est aussi solution.

Soit y maintenant qui s'écrit sous la forme : $y : x \longmapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ En remplaçant $e^{\omega x}$ et $e^{-\omega x}$ par leur expression en fonction de $\mathrm{ch}(\omega x)$ et $\mathrm{sh}(\omega x)$, cela donne :

$$y(x) = (a+b)\mathrm{ch}(\omega x) + (a-b)\mathrm{sh}(\omega x).$$

Ainsi, toute solution s'écrit sous la forme :

$$y : x \longmapsto A\mathrm{ch}(\omega x) + B\mathrm{sh}(\omega x) \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

■

⋆ Extension aux valeurs complexes

Soit $\omega \in \mathbb{C}$, on peut aussi considérer les fonctions :

$$\mathrm{ch} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{2} \end{array} \right.$$

Ces fonctions sont définies à l'aide de l'exponentielle complexe.

Ces fonctions vérifient les mêmes propriétés :

la dérivée de $x \mapsto \mathrm{sh}(\omega t)$ est $x \mapsto \omega \mathrm{ch}(\omega t)$
la dérivée de $x \mapsto \mathrm{ch}(\omega t)$ est $x \mapsto \omega \mathrm{sh}(\omega t)$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(\omega t) = \mathrm{ch}(\omega t) + \mathrm{sh}(\omega t) \qquad \exp(-\omega t) = \mathrm{ch}(\omega t) - \mathrm{sh}(\omega t) \qquad \mathrm{ch}^2(\omega t) - \mathrm{sh}^2(\omega t) = 1$$

Les solutions de (H) : $y'' - \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{C}$
sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto A\mathrm{ch}(\omega x) + B\mathrm{sh}(\omega x) \quad (A,B) \in \mathbb{C}^2$

Enfin, on constate que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(ix) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(ix) = i\sin(x)$$

✯ Exercices

Exercice 1 Exprimer $\cosh(x+y)$ et $\sinh(x+y)$ en fonction de $\sinh(x)$, $\sinh(y)$ et $\cosh(x)$, $\cosh(y)$

Correction : Il faut remplacer e^x et e^{-x} par leur expression en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$. Cela donne :

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

R Il existe des formulaires de trigonométrie hyperboliques très semblables au formulaire de trigonométrie circulaire.

Exercice 2 Résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ d'inconnue $x \geqslant 0$ de paramètre $y \geqslant 1$.
Étudier ainsi la bijection réciproque de ch.

Correction : On peut travailler par équivalence :

$$\mathrm{ch}(x) = y \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

On résout alors l'équation du second degré $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Les solutions sont $y + \sqrt{y^2-1}$ et $y - \sqrt{y^2-1}$. En étudiant le signe, on constate qu'elles sont toutes les deux positives strictement. Cela donne :

$$\mathrm{ch}(x) = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \text{ ou } x = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right)$$

On a facilement :

$$y + \sqrt{y^2-1} \geqslant 1 \text{ donc } \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \geqslant 0.$$

Mais :

$$y - \sqrt{y^2-1} = \frac{y^2 - (y^2-1)}{y + \sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2-1}} \leqslant 1.$$

Ainsi : $\ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) \leqslant 0$, or on veut $x \geqslant 0$. cela donne :

$$\mathrm{ch}(x) = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

Ainsi :

$$\mathrm{arccosh} : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \end{array}$$

On peut tracer la courbe par symétrie.

Exercice 3 Résoudre l'équation $\text{sh}(x) = y$ d'inconnue x de paramètre $y \in \mathbb{R}$. Étudier ainsi la bijection réciproque de sh.

Correction : On procède de même.

$$\text{ch}(x) = y \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

On résout alors l'équation du second degré $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Les solutions sont $y + \sqrt{y^2+1}$ et $y - \sqrt{y^2+1}$. En étudiant le signe, on constate qu'elles sont toutes les deux positives strictement.

En faisant une disjonction des cas, on constate que $y - \sqrt{y^2+1} < 0$. Ainsi :

$$\text{ch}(x) = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Au final :

$$\text{arcsinh} \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{array}$$

On peut tracer la courbe par symétrie.

Exercice 4 La fonction **tangente hyperbolique** notée th (ou tanh) est définie ainsi :

$$\text{th} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \end{array}$$

1. Vérifier les relations :

$$\begin{aligned} \text{th}(x) =& \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \\ =& 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1 + \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

2. Dériver la fonction th. Trouver une relation entre th$'$ et ch et une relation entre th$'$ et th.
3. Représenter la fonction th. Vérifier qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.
4. Déterminer la bijection réciproque explicitement.

Correction :

1. Évident
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$
3. Tableau de variation. la fonction th est continue est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. On a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \text{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Problème de recollement

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Considérons l'équation :

$$(E): \qquad \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x),$$

avec α, β et γ des fonctions définies et continues sur I à valeurs réelles.

Une solution de cette équation est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que :

$$\forall x \in I, \quad \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x).$$

Contrairement au cours, CETTE ÉQUATION N'EST PAS RÉSOLUE.

Si la fonction α s'annule sur I, on ne peut pas diviser et retrouver la forme du cours. En pratique, on découpe l'intervalle I en deux (ou plus) intervalles où α ne s'annule pas, notés I_1 et I_2. On résout l'équation différentielle sur I_1 et I_2.

On essaie ensuite de raccorder les solutions en cherchant une solution sur I entier. Généralement, on passe par une analyse/synthèse : on suppose qu'une solution existe sur I entier, on connaît alors sa forme sur I_1 et I_2, et on regarde si on peut choisir les paramètres pour obtenir une solution sur I entier.

Soit l'équation différentielle

$$(E): \qquad 3xy'(x) - 4y(x) = x$$

On sait résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ mais aucun résultat du cours ne s'applique à la résolution sur $\mathbb{R}$.

★ **Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$**

Sur $\mathbb{R}_+^*$, (E) s'écrit aussi

$$(E,\mathbb{R}_+^*) \qquad y'(x) - \frac{4}{3x}y(x) = \frac{1}{3}$$

Une primitive de $x \mapsto -\frac{4}{3x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto -\frac{4}{3}\ln(x)$

On peut donc appliquer le cours, qui donne l'ensemble des solutions homogènes :

$$\mathscr{S}_{(H),\mathbb{R}_+^*} = \left\{ y : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x^{\frac{4}{3}} \end{array} \right. \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On remarque que

$$y : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{array} \right. \text{ est solution particulière de } (E,\mathbb{R}_+^*).$$

D'où l'ensemble des solutions :

$$\mathscr{S}_{(E),\mathbb{R}_+^*} = \left\{ y : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x^{\frac{4}{3}} - x \end{array} \right. \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

R Bien écrire que les fonctions considérées ici sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$

★ **Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$**

Sur $\mathbb{R}_-^*$, mêmes raisonnements.

Une primitive de $x \mapsto -\frac{4}{3x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x \mapsto -\frac{4}{3}\ln(-x)$

On trouve :

$$\mathscr{S}_{(E),\mathbb{R}_-^*} = \left\{ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu(-x)^{\frac{4}{3}} - x \end{array} \right. \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

! La résolution sur le deuxième ensemble ne demande généralement pas de calculs mais attention aux signes.

⋆ **Existence de solutions sur $\mathbb{R}$**

Analyse

On suppose l'existence d'une telle solution f solution sur $\mathbb{R}$.

La fonction f (ou plus exactement sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$) est en particulier solution sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc on a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x > 0, f(x) = \lambda x^{\frac{4}{3}} - x$$

De même,

$$\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall x < 0, f(x) = \mu(-x)^{\frac{4}{3}} - x$$

On cherche la valeur de $f(0)$ et les conditions éventuelles sur λ et μ, pour que f soit continue et dérivable en 0 et vérifie l'équation en ce point.

Comme $\lim\limits_{0^+} f(x) = 0$, et que la fonction f doit être continue en 0, on a : $f(0) = 0$.

Regardons maintenant si elle est dérivable en 0.

On va regarder la limite à gauche et à droite du taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \lambda x^{\frac{1}{3}} - 1 = -1 \qquad \text{dérivée à droite}$$

$$\text{de même : } \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} -\mu(-x)^{\frac{1}{3}} - 1 = -1 \qquad \text{dérivée à gauche}$$

Ainsi, on constate donc que la fonction est dérivable en 0 quelque soit le choix de λ et de μ avec $f'(0) = -1$.

Enfin, on sait déjà que la restriction de la fonction f à $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ est solution de l'équation (E). Ainsi :

$$\forall x \neq 0, \quad 3xf'(x) - 4f(x) = x$$

Pour $x = 0$, on a :

$$3 \times 0 \times f'(0) - 4\underbrace{f(0)}_{=0} = 0.$$

La relation est donc bien vérifiée en 0.

Synthèse

Soit λ et μ deux réels quelconque.

Considérons la fonction :

$$f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \lambda x^{\frac{4}{3}} - x & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mu(-x)^{\frac{4}{3}} - x & \text{pour } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

La fonction f est continue à gauche et à droite en 0, donc continue en 0. Elle est continue ailleurs, donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable en 0 et sur $\mathbb{R}$ d'après le calcul fait dans l'analyse.

La relation différentielle est vérifiée en tout point de $\mathbb{R}^*$ et en 0 (calcul fait dans l'analyse). On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3xf'(x) - 4f(x) = x$$

La relation est ainsi vérifiée partout. Au total, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

⋆ **Conclusion**

$$\mathscr{S}^{\mathbb{R}}_{(E),\mathbb{R}} : \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \lambda x^{\frac{4}{3}} - x & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mu(-x)^{\frac{4}{3}} - x & \text{pour } x < 0 \end{cases} \end{cases} \middle| \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Toutes les solutions vérifient $f(0) = 0$, il n'y a pas d'unicité au problème de Cauchy.

⋆ Un deuxième exemple

On veut résoudre :

$$(E) \qquad ty' + y = 1$$

cette équation (E) est valable sur $\mathbb{R}$. On cherche donc *a priori* des fonctions solutions y définies sur $\mathbb{R}$.

Pour retrouver la forme classique du cours, on doit diviser par t et donc découper l'intervalle en deux parties : $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

On a alors deux équations :

$$\begin{aligned} (E_1) \qquad & y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t} \qquad && \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \\ \text{et } (E_2) \qquad & y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t} \qquad && \text{sur } \mathbb{R}^{-*}. \end{aligned}$$

Pour résoudre (E_1), on procède classiquement en résolvant (H) :

$$(H) \qquad y' + \frac{1}{t}y = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}$$

On trouve (puisqu'on est sur la partie $t > 0$) :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_H = & \left\{ y : t > 0 \mapsto \lambda e^{-\ln(t)} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ = & \left\{ y : t > 0 \mapsto \lambda \frac{1}{t} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de variation de la constante, qui donne ici :

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{\lambda(t)}{t} \\ y'(t) = & \frac{\lambda'(t)t - \lambda(t)}{t^2} \\ y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = & \frac{\lambda'(t)}{t} = \frac{1}{t} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda'(t) = 1$ et $\lambda(t) = t$. On obtient donc une solution : $y_0 : t \mapsto 1$ (ce qui aurait pu être trouvé directement).

D'où l'ensemble des solutions de (E_1) :

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ y : t > 0 \mapsto 1 + \frac{\lambda}{t} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour (E_2) on procède de même. L'équation (H) s'écrit de la même manière, mais cette fois-ci la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est$t \mapsto \ln(-t)$ (puisque $t < 0$).

Cela donne :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_H = & \left\{ y : t < 0 \mapsto \lambda e^{-\ln(-t)} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ = & \left\{ y : t < 0 \mapsto \frac{-\lambda}{t} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ = & \left\{ y : t < 0 \mapsto \frac{\lambda}{t} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

En effet, ces deux derniers ensembles de solutions sont les mêmes lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

R Souvent, comme ici, on trouve la même écriture de l'ensemble des solutions (à justifier soigneusement).

On cherche alors une solution particulière sous la même forme que précédemment et les calculs sont exactement les mêmes pour obtenir : $y \mapsto 1$ est solution particulière (on peut aussi tester directement cette solution).

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) :

$$\mathscr{S}_2 = \left\{ y : t < 0 \mapsto 1 + \frac{\lambda}{t} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Notre problème est de trouver les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Analyse : On considère alors y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ty'(t) + y(t) = 1.$$

Ainsi, la fonction :

$$y_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) \end{array} \right. \text{ ie la restriction de la fonction } y \text{ à } \mathbb{R}^{+*}$$

est solution de (E_1). On en déduit donc qu'il existe λ_1 tel que :

$$\forall t > 0,\ y(t) = 1 + \frac{\lambda_1}{t}.$$

En procédant de même sur l'autre intervalle, on obtient au final :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \neq 0,\ y(t) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda_1}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 + \frac{\lambda_2}{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Il faut alors trouver les valeurs de (λ_1, λ_2) qui permettent d'assurer que y est continue et dérivable en 0 et vérifie (E) en 0.

Si $\lambda_1 \neq 0$, alors la fonction y n'est pas continue en 0, puisque dans ce cas $\lim_{x \to 0^+} = \pm\infty$. On en déduit qu'il est nécessaire que λ_1 soit nul. De même, il est nécessaire que λ_2 est nul.

Ainsi, la seule solution candidate à (E) est la fonction $y : t \mapsto 1$.

Synthèse : Il reste à vérifier que cette fonction est bien solution.

On constate que cette fonction est dérivable et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, ty'(t) + y(t) = t \times 0 + 1 = 1.$$

Ainsi, l'équation est vérifiée en tout point.

Au final il y a une unique solution :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : t \longmapsto 1 \right\}.$$

Exercice 1

1. Résoudre $y' - \dfrac{x}{1-x} y = \dfrac{x}{1-x} e^{-x}$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
2. Rechercher les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(1-x)y' - xy = xe^{-x}$.

Correction : Sur $]-\infty, 1[$ Une primitive de

$$x \mapsto -\frac{x}{1-x} = 1 + \frac{1}{1-x}$$

est :

$$x \mapsto x + \ln(1-x).$$

Ainsi, l'ensemble des solutions homogènes est les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \frac{e^{-x}}{1-x} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution avec la variation de la constante :

$$\begin{aligned} y(x) =& \lambda(x)\frac{e^{-x}}{1-x} \\ y'(x) =& \lambda'(x)\frac{e^{-x}}{1-x} + \lambda(x)\frac{x}{1-x}\frac{e^{-x}}{1-x} \\ \hline y' - \frac{x}{1-x}y =& \lambda'(x)\frac{e^{-x}}{1-x} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\lambda'(x) = x \text{ et } \lambda(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Une solution particulière est ainsi : $x \mapsto \frac{x^2}{2}\frac{e^{-x}}{1-x}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : x \longmapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right)\frac{e^{-x}}{1-x} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Sur $]1, + \in [$ Une primitive de

$$x \mapsto -\frac{x}{1-x} \text{ est } x \mapsto x + \ln(x-1).$$

Ainsi, l'ensemble des solutions homogènes est les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda\frac{e^{-x}}{x-1} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

On obtient le même ensemble de solutions. On a la même solution particulière et donc le même ensemble de solutions.

On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$. Soit y solution sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{2} + \lambda_1\right)\frac{e^{-x}}{1-x} & \text{si } x > 1 \\ \left(\frac{x^2}{2} + \lambda_2\right)\frac{e^{-x}}{1-x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Si $\lambda_1 \neq \frac{1}{2}$, alors $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$, ainsi, la seule solution candidate est :

$$x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-x}}{1-x} = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}$$

Synthèse, on considère la fonction $y \mapsto -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$y'(x) = -\frac{1}{2}(1-x-1)e^{-x} = \frac{x}{2}e^{-x}$$

On constate :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - \frac{x}{x-1}y(x) = \frac{x}{1-x}e^{-x}.$$

8 — Suites numériques

I Généralités sur les suites réelles

I.1 Mode de définition d'une suite

Définition I.1 — suite réelle. Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{cases}$$

Une suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
L'ensemble des suites réelles est $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On définit de même les suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On parle aussi de suites pour des applications définies pour $n \geqslant 1$, $n \geqslant 2$, etc.

R Pour des raisons de rédaction, il faut bien séparer u_n qui désigne le n-ième terme de la suite (un réel), et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui désigne la suite elle-même (une fonction, soit une infinité de réels). Pour cela on mettra (u_n) entre parenthèse lorsqu'il s'agit de la suite.

Une suite peut être définie

Explicitement c'est-à-dire la valeur de u_n en fonction de n. Par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n)$.
Dans ce cas, étudier la suite revient généralement à étudier une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Par récurrence c'est-à-dire par le premier terme, et par l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

■ **Exemple I.1** Avec (a,b) deux réels :

$$u_0 \text{ donné} \qquad u_{n+1} = au_n + b$$

■

C'est l'axiome de récurrence qui assure que u_n est défini sans ambiguïté pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cette récurrence peut-être d'ordre supérieure, par exemple une suite peut être définie par ses deux premiers termes, et l'expression de u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n.

■ **Exemple I.2**

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

■

On peut aussi faire :

■ **Exemple I.3**

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 3, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

■

Implicitement Comme la solution d'une équation.
Par exemple : u_n est la solution de l'équation (E_n) : $\ln(x) + nx = 0$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

I.2 Monotonie

Définition I.2 La suite réelle (u_n) est dite :
croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$,
croissante stricte si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
On définit de même les suites décroissantes et décroissantes stricte.
La suite u_n est monotone si elle est croissante ou décroissante, strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

! Pas de suites complexes croissantes ou décroissantes !

Pour étudier la monotonie d'une suite :
- on regarde le signe de $u_{n+1} - u_n$,
- si la suite est positive, on peut aussi regarder si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$,
- si f est une fonction croissante strictement (attention mot strictement), on peut utiliser :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \Leftrightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}).$$

Exercice 1 Montrer que la somme de deux suites croissantes est croissantes, que peut-on dire du produit ?

Définition I.3 La suite réelle (u_n) est dite :
stationnaire si $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = u_N$, autrement dit si elle est constante

à partir d'un certain rang.
périodique de période $T \in \mathbb{N}$, si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+T} = u_n$.

Si une suite est périodique de période T alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+kT} = u_n.$$

I.3 Suite minorée, majorée, bornée

Définition I.4 Soit (u_n) une suite réelle.
On dit que la suite (u_n) est majorée si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$$

On dit que la suite u_n est minorée si :

$$\exists m \in \mathbb{R},\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m.$$

On dit que la suite u_n est bornée si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\quad \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M.$$

✎ La suite u_n est bornée/majorée/minorée si et seulement si le sous-ensemble de $\mathbb{R}$: $\left\{u_n | n \in \mathbb{N}\right\}$ est borné /majoré/ minoré. En particulier pour une telle suite, on peut appliquer le résultat de l'existence de la borne supérieure / inférieure.

✎ Une suite bornée est donc « majorée en valeur absolue ».
Une suite est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée. Le sens $\Rightarrow$ est évident, pour le sens $\Leftarrow$ faire un dessin et considérer la borne : $\max(|M|, |m|)$.
Une suite bornée réelle ne peut pas tendre vers une valeur infinie ($+\infty$ ou $-\infty$).
Les suites bornées sont donc « contrôlées ».

✎ Les suites complexes peuvent être bornées (au sens de « module majoré »), mais en aucun cas majorées ou minorées.

Proposition I.1 Si la suite (u_n) est bornée et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la suite (λu_n) est aussi bornée.
Si les suites (u_n) et (v_n) sont bornées alors la suite $(u_n + v_n)$ est aussi bornée.
Si les suites (u_n) et (v_n) sont bornées alors la suite $(u_n v_n)$ est aussi bornée.
Si la suite (u_n) est minorée par un certain $a > 0$ fixé, c'est-à-dire si

$$\exists a > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a,$$

alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est majorée par $\frac{1}{a}$ et minorée par 0.

Démonstration. Évident. ■

Cela peut paraître surprenant, mais le fait d'être bornée est une notion **asymptotique** : cela ne dépend que du comportement de la suite à l'infini.

Théorème I.2 Si la suite (u_n) vérifie :

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant p,\ |u_n| \leqslant M,$$

alors la suite (u_n) est bornée.

Autrement dit, si la suite (u_n) est alors bornée par M à partir du rang p, alors elle est bornée (pas nécessairement par la même valeur).

R On a le même résultat en remplaçant « bornée » par « majorée » et « minorée ».

Démonstration. Si on considère

$$M' = \max(M, |u_0|, |u_1|, \dots, |u_{p-1}|),$$

le maximum est pris sur un nombre **fini** de valeurs, on obtient alors un $M' \in \mathbb{R}$, qui vérifie (par disjonction des cas $n < p$, et $n \geqslant p$) : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$. ■

Proposition I.3 Une suite stationnaire est bornée.

Une suite périodique est bornée.

Démonstration. Évident mais néanmoins intéressant. ■

II Suites usuelles

II.1 Suites arithmétiques

Définition II.1 — suite arithmétique. On appelle suite arithmétique de raison r, la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

La suite (u_n) est réelle si r et u_0 sont réels, la suite (u_n) est complexe sinon. Le cas $r = 0$ est le cas où la suite arithmétique est constante.

L'interprétation classique est celle d'un compte en banque : on part d'une somme d'argent u_0 et chaque année on ajoute une somme r.

Théorème II.1 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Alors on a :

Expression du terme de rang n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + nr$$

Expression de la somme des termes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$
$$= \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$$

Démonstration. La première formule se démontre par récurrence, le reste suit. ■

Proposition II.2 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Voici quelques relations supplémentaires évidentes :

- un terme est la moyenne (arithmétique) des termes qui l'entourent :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}$$
- on peut exprimer le terme u_{p+k} en fonction du terme u_p :
$$\forall (k,p)^2 \in \mathbb{N}, \qquad u_{p+k} = u_p + kr$$
- On a une autre relation sur la somme :
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} u_{k+p} = \frac{u_{p+1}+u_{p+n}}{2}n$$
$$= \frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2} \times \text{ nombre de termes}$$

II.2 Suites géométriques

Définition II.2 — suite géométrique. On appelle suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$, la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

Lorsque $q = 1$ la suite géométrique est constante.

L'interprétation est que l'on pose une somme d'argent u_0 sur un compte en banque : chaque année, le solde du compte est multiplié par q.

Théorème II.3 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
On a alors :

Expression du terme de rang n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 q^n$$

Expression de la somme des termes :

Si $q \neq 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$= \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nbr de termes}}}{1-\text{raison}}$$

Si $|q| < 1$ (en module ou en valeur absolue) la suite tend vers 0,
Si $|q| > 1$, et $u_0 \neq 0$, la suite $|u_n|$ tend vers $+\infty$,
Dans le cas $u_0 > 0$ et $q \in \mathbb{R}$, si $q > 1$ la suite u_n tend vers $+\infty$, si $q < -1$, le signe est alterné.

Proposition II.4 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Voici quelques relations supplémentaires évidentes :

- un terme est la moyenne géométrique des termes qui l'entourent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n^2 = u_{n+1}u_{n-1}.$$

- En particulier si on a $u_0 > 0$ et $q > 0$, la suite (u_n) est à terme positif et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sqrt{u_{n+1}u_{n-1}}$$

  un terme est donc la moyenne (géométrique) des deux termes qui l'entourent.
- on peut exprimer le terme u_{p+k} en fonction du terme u_p :

$$\forall (k,p)^2 \in \mathbb{N}, \qquad u_{p+k} = u_p q^k$$

II.3 Suites arithmético-géométriques

Définition II.3 — Suite arithmético-géométrique. On appelle suite arithmético-géométrique, une suite u_n de la forme :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

Le cas $a = 1$ correspond donc à une suite arithmétique, le cas $b = 0$ à une suite géométrique, on est donc devant une généralisation de ces deux cas.

Attention : Les réels a et b ne dépendent pas de n. La définition précise est :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

⋆ Expression de u_n en fonction de n

Pour exprimer u_n en fonction de n, la méthode consiste à poser : $v_n = u_n - l$, où l est un paramètre libre que l'on fixera ensuite, pour permettre un calcul de v_n facile.

On a :

$$v_{n+1} = au_n + b - l = a(v_n + l) + b - l = av_n + l(a-1) + b.$$

On voit que si on peut trouver l tel que : $l(a-1)+b=0$, alors v_n est une suite géométrique.

Donc si $a \neq 1$, on pose $l = \dfrac{b}{1-a}$, notons que le cas $a=1$ est tout simple, la suite u_n est alors arithmétique.

Avec ce choix de l, on a :

$$v_n = a^n v_0 = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right).$$

Puis

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

On a donc :

Théorème II.5 Si $a \neq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0 + b\dfrac{1-a^n}{1-a}$.

Si $a=1$, la suite est arithmétique.

R Conformément au programme, cette formule n'est pas exigible. Par contre, il faut connaître la méthode pour la retrouver.

Si $|a|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$. Si $|a|>1$, en écrivant :

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a},$$

on voit que on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ (il faut regarder le signe de a et de $(u_0 - \frac{b}{1-a})$ pour avoir le signe de u_n).

Autre manière de voir, la suite (u_n) est définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = ax+b$. Donc si elle converge, alors elle converge vers un point fixe, *i.e.* une solution de $f(x)=x$. La seule solution si $a \neq 1$ est $l = \frac{b}{1-a}$. Ainsi l peut-être obtenu comme la limite de la suite (si elle existe) et la technique consiste à poser $v_n = u_n - l$, soit la distance entre u_n et sa limite.

✯ Interprétation

L'interprétation en terme de compte en banque est que l'on dépose une somme u_0 d'argent sur le compte, que celui-ci est placé au taux d'intérêt a, et que l'on ajoute chaque année la somme b.

La formule se comprends alors ainsi : à l'année n, il y a sur le compte

- l'argent initial u_0 qui a été placé au taux d'intérêt a, et qui représente donc $a^n u_0$,
- l'argent déposé la première année (b euros), qui a été aussi placé au taux d'intérêt a, et représente donc $a^{n-1}b$ à l'année n,
- de même l'argent déposé la deuxième année représente $a^{n-2}b$,
- etc. jusqu'à l'argent déposé l'année $n-1$ qui représente ab, puis pour finir l'argent que l'on vient de déposer (b euros).

Au final, se trouve sur le compte

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 a^n + a^{n-1} b + a^{n-2} b + \cdots + ab + b \\ &= u_0 a^n + b(1 + a + \ldots a^n) \\ \text{donc } u_n &= u_0 a^n + b \frac{1-a^n}{1-a}. \end{aligned}$$

■ **Exemple II.1** Soit u_n définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$.
On calcule la suite $v_n = u_n - l$ (la variable l étant à déterminer) et on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= 2u_n + 3 - l \\ &= 2(u_n - l) + 3 + l \\ &= 2v_n + 3 + l \end{aligned}$$

On pose donc $l = -3$ pour avoir $v_{n+1} = 2v_n$, et donc

$$v_n = u_n + 3 = 2^n v_0 = 2^n (u_0 + 3).$$

Ce qui fait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n (u_0 + 3) - 3$.

■

III Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

III.1 Généralités

Définition III.1 — Suite récurrente linéaire. On appelle suite récurrente linéaire, une suite définie par u_0, u_1, et la relation de récurrence :

$$(R) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

Précisément on parle de récurrence d'ordre 2, parce qu'il y a 2 pas de récurrence, et à coefficients constants, parce que a, et b ne dépendent pas de n (sinon c'est plus compliqué).

R On aurait pu aussi dire que les termes de la suite vérifient l'équation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} - a u_{n+1} - b u_n = 0$$

Le cas $b = 0$ n'est pas intéressant, car dans ce cas la relation s'écrit : $u_{n+2} = a u_{n+1}$, et (u_n) est une suite géométrique à partir du rang 1.

III.2 Recherche de suites particulières qui vérifient la relation (R)

Comme dans le cas précédent, cherchons une suite géométrique $v_n = q^n$ qui vérifie (R).

On a alors la relation :

$$q^{n+2} - a q^{n+1} - b q^n = 0,$$

soit en supposant $q \neq 0$ (sinon $v_n \equiv 0$), on a : $q^2 - aq - b = 0$. D'où l'idée d'introduire l'**équation caractéristique** :

$$(E) \quad : \quad x^2 = ax + b,$$

ou $x^2 - ax - b = 0$. Le **polynôme caractéristique** de l'équation est

$$P(X) = X^2 - aX - b.$$

On voit que ce que l'on va devoir chercher les solutions de (E), *i.e.* les racines du polynôme caractéristique. Le plus simple est alors de se placer dans $\mathbb{C}$, P a alors une ou deux racines.

> **Proposition III.1** Dans le cas où P a deux racines complexes q_1 et q_2, les suites $(q_1^n)_n$ et $(q_2^n)_n$ vérifient la relation (R).
>
> Dans le cas où P est de la forme $P(X) = (X - q)^2$, *i.e.* P n'a qu'une racine, les suites $(q^n)_n$ et $(nq^n)_n$ vérifient la relation (R).

Démonstration. On a vu que si q est racine de P, alors la suite (q^n) vérifie (R). On a donc démontré :

- que si P a deux racines complexes q_1 et q_2, les suites $(q_1^n)_n$ et $(q_2^n)_n$ vérifient la relation (R).
- que si P n'a qu'une racine, $(q^n)_n$ vérifie (R).

Il ne reste donc plus qu'à considérer le cas où P n'a qu'une racine et de montrer que la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = nq^n$ vérifie (R).

On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= (n+2)q^{n+2} \\
&= (n+2)q^2q^n \\
&= (n+2)(aq+b)q^n && \text{en utilisant } q^2 = aq+b \\
&= (anq + 2aq + nb + 2b)q^n \\
&= (\underline{anq + aq} + aq + nb + 2b)q^n \\
&= a(n+1)q^{n+1} + nbq^n + (aq+2b)q^n && \text{en regroupant les termes soulignés}
\end{aligned}$$

Or on a une relation entre la racine q et les coefficients de P, a et b. Précisément,

$$\text{on a } q = \frac{a}{2} \text{ et } q^2 = -b,$$

$$\text{donc } aq + 2b = \frac{a^2}{2} + 2b = \frac{a^2 + 4b}{4} = \frac{\Delta}{4} = 0$$

On remplace, ce qui donne : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Ainsi, la suite (u_n) vérifie (R). ■

À partir de ces deux suites, on peut en construire d'autres par combinaison linéaire :

Proposition III.2 Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui vérifient (R), α et β deux réels, alors la suite (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ vérifie aussi (R)

R L'ensemble des suites qui vérifient (R) est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites.

Démonstration. Il suffit de vérifier :

$$\begin{aligned} w_{n+2} =& \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} \\ =& \alpha(au_{n+1} + bu_n) + \beta(av_{n+1} + bv_n) \\ =& a(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + b(\alpha u_n + \beta v_n) \\ =& aw_{n+1} + bw_n. \end{aligned}$$

■

III.3 Résolution dans $\mathbb{C}$

Théorème III.3 Résolution dans $\mathbb{C}$

Dans le cas d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, avec $b \neq 0$, on a :

- Si P a deux racines dans $\mathbb{C}$ notées q_1 et q_2, alors il existe α et β complexes uniques tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$,
- Si P a une seule racine dans $\mathbb{C}$ notée q, alors il existe α et β complexes uniques tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha + \beta n) q^n$.

Les paramètres α et β se calculent en regardant le système d'équations obtenu lorsque $n = 0$ et $n = 1$.

R L'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Démonstration. **cas de deux racines distinctes**

Déjà l'hypothèse $b \neq 0$ implique que ni q_1 ni q_2 ne sont nuls.

L'unicité se démontre en remarquant que le système qui correspond au cas $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = \alpha' + \beta' \\ \alpha q_1 + \beta q_2 & = \alpha' q_1 + \beta' q_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta & = \alpha' + \beta' \\ \beta(q_2 - q_1) & = \beta'(q_2 - q_1) \qquad L_2 - q_1 L_1 \end{cases}$$

implique que $\beta = \beta'$ et $\alpha = \alpha'$ (puisque $q_1 \neq q_2$).

Commençons l'analyse : en reprenant le système ci-dessus, on voit qu'il existe (α,β) qui conviennent pour $n=0$ et $n=1$:

$$\begin{cases}\alpha+\beta & =u_0\\ \alpha q_1+\beta q_2 & =u_1\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha+\beta & =u_0\\ \beta(q_2-q_1) & =u_1-u_0q_1 \qquad L_2-q_1L_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta & =\dfrac{u_1-u_0q_1}{q_2-q_1}\\[2ex] \alpha & =\dfrac{u_0q_2-u_1}{q_2-q_1}\end{cases}.$$

Ainsi, si (α,β) conviennent, alors leurs valeurs sont données ci-dessus.

Pour la synthèse, vérifions par récurrence double sur n que cette valeur convient. On pose donc $P(n)\ :\ u_n=\alpha q_1^n+\beta q_2^n$. L'analyse permet d'affirmer que $P(0)$ et $P(1)$ est vraie.

Puis, si on suppose la propriété vraie pour n et $n+1$, on a :

$$\begin{aligned}u_{n+2} &=au_{n+1}+bu_n\\ &=\alpha q_1^n\underbrace{(aq_1+b)}_{q_1^2}+\beta q_2^n\underbrace{(aq_2+b)}_{q_2^2} \qquad \text{car } q_1^2=aq_1+b \qquad (q_1 \text{ est racine.})\\ &=\alpha q_1^{n+2}+\beta q_2^{n+2}\end{aligned}$$

D'où la propriété est vraie, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Cas d'une seule racine

Déjà, on peut remarquer que dans ce cas, $a=2q$ et $b=-q^2$.

La démonstration est identique.

Si (α,β) et (α',β') sont solutions, alors

$$\begin{cases}\alpha q & =\alpha' q\\ (\alpha+\beta)q & =(\alpha'+\beta')q\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha & =\alpha'\\ \beta & =\beta'\end{cases},$$

car $q\neq 0$ (provient de $b^2=-q^2$ et $b\neq 0$). D'où l'unicité.

L'analyse se fait en regardant les deux premiers termes, *i.e.* le même système :

$$\begin{cases}\alpha & =u_0\\ (\alpha+\beta)q & =u_1\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha & =u_0\\ \beta & =\frac{u_1-u_0}{q}\end{cases}.$$

D'où les valeurs de α et β.

L'existence se démontre aussi par récurrence double sur n, l'initialisation a été faite dans l'analyse.

Pour l'hérédité :

$$\begin{aligned}u_{n+2} &=au_{n+1}+bu_n\\ &=\alpha q^n(aq+b)+\beta q^n(n(aq+b)+aq)\\ &=\alpha q^{n+2}+\beta q^n(nq^2+2q^2)\\ &=(\alpha+(n+2)\beta)q^{n+2}\end{aligned}$$

■

III.4 Résolution dans $\mathbb{R}$

Maintenant si u_0 et u_1 sont réels, ainsi que a et b, une récurrence double immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}$.

On doit donc pouvoir exprimer u_n en fonction de n, sous la forme d'une suite de réel.

Si P a deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, les mêmes calculs que ci-dessus sont valables. De même, si P a une racine double. La difficulté est donc lorsque P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Notons déjà que P a alors deux racines complexes conjuguées, q et $\overline{q}$. De plus, la formule ci-dessus est toujours exacte.

Autrement dit, il existe α et β complexes uniques tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{u_n}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{\alpha q^n + \beta \overline{q}^n}_{\in\mathbb{C}},$$

avec $q \neq 0$ (puisque $b \neq 0$).

Montrons déjà que α et β sont conjugués. On sait qu'ils sont solution de :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = u_0 \\ \alpha q + \beta \overline{q} & = u_1 \end{cases}$$

En faisant $(L2) - \overline{q}(L1)$, on obtient :

$$\alpha = \frac{u_1 - \overline{q} u_0}{q - \overline{q}},$$

et en faisant $(L2) - q(L1)$, on obtient :

$$\beta = \frac{u_1 - q u_0}{\overline{q} - q} = \overline{\alpha}.$$

Rem : $q \neq \overline{q}$, car $q \notin \mathbb{R}$, donc les calculs sont bien licites.

Maintenant, si on note

$$q = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)),$$

on a

$$\begin{aligned} u_n &= \alpha q^n + \beta \overline{q}^n \\ &= \alpha \rho^n e^{in\theta} + \beta \rho^n e^{-in\theta} \\ &= \rho^n \Big(\alpha(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + \beta(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)) \Big) \\ &= \rho^n \Big((\alpha+\beta)\cos(n\theta) + i(\alpha-\beta)\sin(n\theta) \Big) \\ &= \rho^n \Big((\alpha+\overline{\alpha})\cos(n\theta) + i(\alpha-\overline{\alpha})\sin(n\theta) \Big) \\ &= \rho^n \Big(2Re(\alpha)\cos(n\theta) - 2Im(\alpha)\sin(n\theta) \Big). \end{aligned}$$

D'où le théorème :

Théorème III.4 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}$, avec $b \neq 0$. (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique P, avec u_0, u_1, a, et b réels, on a :

- Si P a deux racines réelles distinctes, notées q_1 et q_2, alors il existe α et β réels uniques tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n,$$

- Si P a une racine double, notée q alors il existe α et β uniques tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha + \beta n) q^n.$$

- Si P n'a pas de racine, en notant $\rho e^{i\theta}$ une des racines complexes, il existe α et β uniques, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)).$$

Les paramètres α et β se calculent en regardant le système d'équations obtenu lorsque $n = 0$ et $n = 1$.

R Si on connaît u_1 et u_2 au lieu de u_0 et u_1, on procède de la même manière : on détermine α et β comme solution du système pour $n = 1$ et $n = 2$.

III.5 Exemples

■ **Exemple III.1** Soit la suite :

$$\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}.$$

L'équation caractéristique associée est : $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$. Ainsi (u_n) s'écrit $u_n = (\alpha + \beta n)2^n$. On détermine α et β :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha = -1, \\ u_1 = (\alpha+\beta)\times 2 = 2, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = -1, \\ \beta = 2. \end{cases}.$$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (2n-1)2^n$.

■

■ **Exemple III.2** Soit la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 4,\ u_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}.$$

L'équation caractéristique associée est : $X^2 - 3x + 2 = (X-1)(X-2)$.

Ainsi (u_n) s'écrit $u_n = \alpha + \beta 2^n$ On détermine α et β :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta = 4, \\ u_1 = \alpha + 2\beta = 5. \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = 3, \\ \beta = 1. \end{cases}.$$

Ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3$. ■

■ **Exemple III.3** Soit la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = \sqrt{3} - \frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \end{cases}.$$

L'équation caractéristique associée est : $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \overline{j})$, avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
Ainsi (u_n) s'écrit dans $\mathbb{C}$ sous la forme :

$$u_n = \alpha j^n + \beta \overline{j}^n,\ \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}.$$

Mais en fait il est clair que u_n et une suite réelle, qui s'écrira donc (dans $\mathbb{R}$) :

$$u_n = \alpha \cos(n\frac{2\pi}{3}) + \beta \cos(n\frac{2\pi}{3}),\ \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}.$$

On détermine α et β :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha = 1, \\ u_1 = \frac{\alpha}{2} + \beta\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = 2. \end{cases}.$$

Ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\frac{2n\pi}{n} + 2\sin\frac{2n\pi}{n}$. ■

■ **Exemple III.4** Soit la suite :

$$\begin{cases} u_1 = 3,\ u_2 = 17, \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n \end{cases}.$$

L'équation caractéristique associée est : $X^2 - 3X - 4 = (X + 1)(X - 4)$.
Ainsi (u_n) s'écrit $u_n = \alpha(-1)^n + \beta 4^n$ On détermine α et β :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha + 4\beta = 3 \\ u_2 = \alpha + 16\beta = 17. \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n + 4^n$. ■

IV Limite d'une suite réelle

IV.1 Convergence d'une suite vers une limite finie

Définition IV.1 — convergence d'une suite. Soit (u_n) une suite réelle.
On dit que la suite (u_n) converge vers la valeur l si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon,$$

on note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

R Si la suite (u_n) est complexe, c'est le module et non la valeur absolue.

Généralement, on mesure les nombres à une précision près, et on ne distingue pas deux nombres a et b tels que $|a-b|$ est inférieur à cette précision. La définition d'une suite convergente peut alors se comprendre comme cela :

Quelle que soit la précision ε que l'on se fixe, il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suites u_n sont égaux à l à ε près.

(faire un dessin pour comprendre la situation)

Écrire : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ signifie deux choses : la suite (u_n) converge ET sa limite est l. En pratique, on évite d'utiliser lim tant que l'on ne sait pas qu'une suite converge.
On peut aussi écrire $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, ou plus simplement $u_n \to l$, mais cela est déconseillé dans les conclusions.

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**, terme qui rassemble les suites qui tendent vers $+\infty$, et les autres comportements non comme $(-1)^n$.

On voit aussi qu'une suite u_n tend vers l si et seulement si $|u_n-l|$ tend vers 0. En effet, c'est la distance à l qui intervient dans la définition (valeur absolue ou norme). Cette remarque permet en particulier de ramener le cas d'une suite complexe u_n, à une suite réelle à termes positifs $|u_n-l|$. Rien n'indique dans la définition comment la suite u_n se rapproche de l : par valeur supérieure ou inférieure, ou une fois inférieure puis supérieure, etc.

On peut aussi voir cette définition ainsi : pour toute précision ε, la suite vérifie $|u_n-l| \leqslant \varepsilon$ sauf pour un nombre **fini** de termes.

■ **Exemple IV.1** Les deux exemples classiques d'illustration de cette définition est :

la suite $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0 la suite $v_n = (-1)^n$ diverge .

■

⋆ Premiers résultats de convergence

Proposition IV.1 Soit (u_n) une suite et l un réel. On suppose qu'il existe une suite (b_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n-l| \leqslant b_n \text{ et } \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

alors (u_n) converge vers 0.

R Dans cette proposition l'hypothèse $|u_n| \leqslant b_n$ peut n'être valable qu'à partir d'un certain rang, cela ne change rien.

Démonstration. Soi $\varepsilon > 0$, on choisit alors le rang N tel que $\forall n \geqslant N,\ |b_n| \leqslant \varepsilon$. On a alors directement $\forall n \geqslant N,\ |u_n-l| \leqslant \varepsilon$. ■

Cette proposition permet de démontrer qu'une suite converge u_n converge vers l en majorant $|u_n-l|$, on peut ainsi déduire des limites à partir de limites connues.

Proposition IV.2 Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite de limite nulle, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Démonstration. On sait qu'il existe $M \in \mathbb{R}$, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$. Considérons $\varepsilon > 0$ et le rang $N \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \geqslant N,\ |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$$

On a alors :

$$\forall n \geqslant N,\ |v_n u_n| \leqslant |v_n||u_n| \leqslant \varepsilon.$$

■

Proposition IV.3 Soit (u_n) une suite périodique de période T qui converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, alors (u_n) est constante.

Soit (u_n) une suite stationnaire, alors (u_n) converge.

Démonstration. Évident mais intéressant. ■

IV.2 Unicité de la limite

La première propriété que permet de montrer cette définition est que si $u_n \to l$ la limite l est unique.

Proposition IV.4 — Unicité de la limite. La limite d'une suite convergent est unique.

Autrement dit :

$$\text{si } \lim_{n\infty} u_n = l \text{ et } \lim_{n\infty} u_n = l' \text{ alors } l = l'.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe deux limites l et l', alors je peux trouver une précision ε qui permette de distinguer ces deux nombres. On peut prendre par exemple $\frac{|l-l'|}{3}$, pour une telle précision, l et l' sont distants de 3 ε

La définition donne alors deux rang notés N respectivement N', tels que si $n \geqslant N$, u_n et l sont à distance inférieure à ε, et si $n \geqslant N'$, u_n et l' sont à distance inférieure à ε.

Si on choisit un $n \geqslant \max(N, N')$, ce qui est toujours possible, alors u_n sera à distance ε de l, et de l', ce qui est impossible puisque l et l' sont distants 3 ε, rigoureusement cela se démontre en remarquant que :

$$3\varepsilon = |l - l'| \leqslant |l - u_n| + |l' - u_n| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui est impossible. ■

Encore une fois on voit que faire un dessin permet de bien comprendre ce qui se passe.

IV.3 Une suite convergente est bornée

Théorème IV.5 Soit u_n une suite, si u_n converge, alors u_n est bornée. Autrement dit toute suite convergente est bornée.

La réciproque est bien sûr fausse, la suite $(-1)^n$ est bornée non convergente.
Le fait de ne pas être bornée ne signifie pas tendre vers $+\infty$. Par exemple la suite u_n définie par $u_{2n} = 0$, et $u_{2n+1} = 2n+1$ n'est pas bornée, mais ne tend pas vers $+\infty$ puisqu'un terme sur deux est nul.

Démonstration. Cette proposition se démontre en considérant un ε quelconque, par exemple $\varepsilon = 1$. On a alors un rang N à partir duquel $|u_n - l| \leqslant 1$. La suite u_n est donc contrôlée à partir du rang N. On a :

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n| = |u_n - l + l| \leqslant 1 + |l|,$$

ainsi la suite u_n est bornée par $1 + |l|$ à partir du rang N, donc la suite u_n est bornée. ■

IV.4 Suites qui divergent vers $+\infty$

En mathématiques, la notation $+\infty$ désigne un nombre (non réel) plus grand que tous les réels. D'où l'idée de dire qu'une suite tend vers $+\infty$ si elle est supérieure à tout réel à partir d'un certain rang.

Définition IV.2 Soit (u_n) une suite réelle, on dit que la suite u_n tend vers $+\infty$ ou (mieux) diverge vers $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M,$$

on note alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
De même, on définit une suite qui tend vers $-\infty$, si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant m.$$

Généralement, on se restreint au cas $M > 0$ et $m < 0$ (c'est bien sûr équivalent).
En particulier, on écrit qu'une suite tend vers $-\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant -M.$$

Cette définition est parfois plus parlante.
Dit de manière différente : $\lim_{n\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si $\lim_{n\infty}(-u_n) = +\infty$.
On fera attention de ne pas dire qu'une suite converge vers $+\infty$, les propriétés des suites convergentes et des suites qui tendent vers $+\infty$ sont très différentes.
Pour les suites complexes, il n'y a pas de notion de tendre vers $+\infty$, sauf de considérer $|u_n|$ Essentiellement parce qu'il n'y a pas que « deux directions infinies » dans $\mathbb{C}$, une suite qui diverge et part vers l'infini peut prendre toutes les directions possibles, mais aussi diverger en spirale.
On appelle **nature d'une suite** le fait de converger ou de diverger.
Une suite qui tends vers $\pm\infty$ est une suite non bornée. Comme on l'a vu la réciproque est fausse.

IV.5 Convergence et encadrement

⋆ Signe d'une suite de limite non nulles

Proposition IV.6 Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\infty} u_n = l$ avec $l > 0$.

On a alors :

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p, u_n > 0.$$

Autrement dit : une suite de limite strictement positive est à partir d'un certain rang strictement positive.

R On a en fait un résultat plus fort :

$$\exists a > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p, u_n > a$$

C'est-à-dire, on peut « séparer » la suite (u_n) et 0 à partir d'un certain rang

Bien entendu : une suite de limite strictement négative est à partir d'un certain rang strictement négative.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition avec $\varepsilon = \frac{l}{2}$ ■

⋆ Stabilité des inégalités larges par passage à la limite

On rappelle que si une suite tends vers une limite strictement positive, alors tous les termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

Proposition IV.7 Soit (u_n) une suite qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$, et qui converge vers l. On a alors : $l \geqslant 0$.

Si une suite u_n vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant b$, et converge vers l, alors $a \leqslant l \leqslant b$.

Soit u_n et v_n deux suites réelles, qui convergent vers l et l' respectivement, et telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$. On a alors : $l \leqslant l'$.

Démonstration. Par l'absurde, si $l < 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n < 0$.

Cette proposition se démontre en considérant $v_n - u_n \geqslant 0$, donc $l' - l \geqslant 0$.

La seconde partie se démontre en considérant les suites $u_n - a \geqslant 0$ et $b - u_n \geqslant 0$. ■

! On ne peut passer à la limite que dans des inégalités larges !

L'hypothèse : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, peut être remplacée par « à partir d'un certain rang » $u_n \leqslant v_n$.

Par contre, il faut penser à écrire un quantificateur $\forall$ avant de passer à la limite.

IV.6 Opérations sur les limites

Addition

Proposition IV.8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, on a :

- Si (u_n) et (v_n) convergent vers l et l' respectivement, alors $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$,

- Si (u_n) et (v_n) sont bornées, alors $(u_n + v_n)$ est bornée,
- Si (u_n) est bornée et si $v_n \to +\infty$, alors $u_n + v_n \to +\infty$, et de même avec $-\infty$.
- Le point précédent s'applique en particulier lorsque (u_n) converge.
- Si (u_n) et (v_n) tendent toutes les deux vers $+\infty$, alors $(u_n + v_n)$ tends vers $+\infty$.

Par contre, si u_n n'est pas bornée, en particulier si $u_n \to -\infty$, on ne peut rien dire pour $u_n + v_n$ (comme exemples, considérer les monômes $u_n = \pm n^k$.)

On résume souvent cette propriété avec le tableau suivant :

(u_n)	(v_n)	$(u_n + v_n)$
l	l'	$l + l'$
$+\infty$	l	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$
$+\infty$	minorée	$+\infty$

Démonstration. Pour démontrer le premier point, commençons par une remarque : si on sait que u_n est égal à l à ε près, et que v_n est égal à l' à la même précision, alors on sait que $u_n + v_n$ est égal à $l + l'$ à la précision 2ε.

Lorsqu'on ajoute des quantités, les incertitudes sont doublées.

Cela sugère de choisir le rang N tel que : $\forall n \geqslant N$, on ait $|u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour cela, il suffit d'appliquer la définition de la convergence avec $\frac{\varepsilon}{2}$, puis de choisir le max des deux rangs ainsi obtenus.

Si $n \geqslant N$, on a alors : $|u_n + v_n| \leqslant |v_n - l| + |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

La proposition sur les suites bornées est évidente : $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$.

Pour la proposition suivante, on sait que u_n est contrôlé par un M, on a alors $u_n + v_n \geqslant v_n - M$. Donc la suite $u_n + v_n$ est minorée par une suite $v_n - M$ qui tend vers $+\infty$. Remarquons que le résultat est le même si on suppose juste u_n minoré. Le résultat contraire s'obtient avec l'inégalité : $u_n + v_n \leqslant M + v_n$.

Enfin, la dernière proposition se démontre en remarquant que si $u_n \to \infty$, on a $u_n > 0$ (à partir d'un certain rang), donc on peut utiliser la démonstration précédente. ■

Exercice 2 Soient (u_n) et (v_n) tels que (u_n) ne converge pas, $(u_n + v_n)$ converge , montrer que (v_n) ne converge pas.

Multiplication

Proposition IV.9 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, on a :

- Si (u_n) et (v_n) convergent vers l et l', alors $(u_n v_n)$ converge vers ll'
- Si on a
$$\exists a > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a \leqslant u_n \quad \text{et} \quad v_n \to +\infty$$
alors $u_n v_n \to +\infty$,
- Si on a
$$\exists a > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant -a < 0 \quad \text{et} \quad v_n \to +\infty$$

alors $u_nv_n \to -\infty$,
- Les deux résultats précédents s'appliquent au cas où $u_n \to l \neq 0$, en regardant le signe de l : par exemple si $l > 0$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_nv_n \to +\infty$.
- Les résultats précédents s'appliquent aussi au cas où $u_n \to \pm\infty$, on a par exemple si $u_n \to -\infty$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_nv_n \to -\infty$.
- On a les mêmes proposition en remplaçant (partout) $+\infty$ par $-\infty$.

Bien sûr, si $v_n \to +\infty$ et $u_n \to 0$, on ne peut rien dire. (considérer encore les mônomes). Il faut pouvoir « éloigner » u_n d'une distance a fixe pour pouvoir conclure.

On résume souvent cette propriété avec le tableau suivant :

(u_n)	(v_n)	(u_nv_n)
l	l'	ll'
$+\infty$	$l \neq 0$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	$F.I.$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	minorée par un réel $a > 0$	$+\infty$
0	bornée	0

Démonstration. Pour démontrer la première proposition, il faut faire une majoration de $|u_nv_n - ll'|$ faisant apparaître les quantités $u_n - l$ et $v_n - l'$. On a :

$$u_nv_n - ll' = (u_n - l)v_n + lv_n - ll' = (u_n - l)v_n + l(v_n - l').$$

Et donc en utilisant l'inégalité triangulaire : $|u_nv_n - ll'| \leqslant |u_n - l||v_n| + |l||v_n - l'|$.

La quantité $|u_nv_n - ll'|$ est donc majoré par la somme de deux suites réelles. La première $|u_n - l||v_n|$ est produit d'un bornée, par une qui tend vers 0, donc converge vers 0. La seconde $|l||v_n - l'|$ tend aussi vers 0, car $v_n \to l'$. Donc $|u_nv_n - ll'| \to 0$, ce qui signifie que $u_nv_n \to ll'$.

Pour la seconde, on a $u_nv_n > av_n$, or $av_n \to +\infty$. d'où le résultat.

Les corollaires sont clairs : si $u_n \to \infty$, on a par exemple $u_n > 1$, de même, si $u_n \to l > 0$, on a $u_n > \frac{l}{2}$. (à partir d'un certain rang mais puisque la convergence est une propriété asymptotique cela ne compte pas). D'où si $v_n \to +\infty$, $u_nv_n \to \infty$. ■

Inversion

Considérons une suite u_n telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$. Cette propriété permet de définir la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition IV.10 Soit (u_n) une suite réelle qui ne s'annule pas, on a :
- si on a :

$$\exists a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geqslant a > 0$$

  alors $\frac{1}{u_n}$ est bornée par $\frac{1}{a}$.
- En particulier si $u_n \to l \neq 0$, alors $\frac{1}{u_n}$ est bornée.
- Si (u_n) converge vers $l \neq 0$, alors $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{l}$.
- Si (u_n) est réelle, et $u_n \to \pm\infty$, alors $\frac{1}{u_n} \to 0$.

- Si $u_n \to 0$, alors $\frac{1}{|u_n|} \to +\infty$ (attention : $\frac{1}{u_n}$ peut ne pas avoir de limite).
- En particulier si $u_n \to 0^+$, $\frac{1}{u_n} \to +\infty$.

On résume souvent cette propriété avec le tableau suivant :

(u_n)	$\dfrac{1}{u_n}$
$l \neq 0$	$\dfrac{1}{l}$
$\pm\infty$	0
0^+	$+\infty$

Démonstration. La première proposition est évidente, et pourtant importante : elle montre que si on contrôle la distance de u_n à 0, alors on peut contrôler $\frac{1}{u_n}$.

Le corollaire est aussi immédiat, puisque l'on sait que $|u_n| \to |l| \neq 0$, donc à partir d'un certain rang, $|u_n| > \frac{|l|}{2}$. On retombe alors sur la première proposition en se souvenant qu'être bornée est une propriété asymptotique : $\frac{1}{|u_n|}$ est bornée à partir d'un certain rang, donc est bornée.

Pour démontrer la proposition suivante, il faut majorer $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right|$, en faisant intervenir la quantité $|u_n - l|$. On réduit donc au même dénominateur :

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} = \frac{l - u_n}{u_n l}.$$

D'où, avec les valeurs absolues (ou le module, car la proposition est valable dans le cas complexes) :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|l - u_n|}{|u_n||l|}$$

Maintenant, on a la suite $|l - u_n|$, multipliée par la suite $\frac{1}{|u_n||l|}$. Le terme $|l - u_n|$ tend vers 0, l'autre terme est une suite bornée puisque $u_n \to l \neq 0$. Donc $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| \to 0$, et donc $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{l}$.

Supposons maintenant que $u_n \to +\infty$, u_n peut ainsi être rendu aussi grahnd que l'on veut, donc mécaniquement $\frac{1}{u_n}$ peut être rendu aussi petit que ce que l'on veut. Soit donc $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe un rang $p \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant p, u_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$.

Soit $n \geqslant p$, on a alors $\frac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon$, d'où le résultat. Remarquons aussi que si $u_n \to +\infty$, alors $\frac{1}{u_n} > 0$, ce qui veut dire que $u_n \to 0$ par valeur supérieure, on note $u_n \to 0^+$.

Supposons maintenant que $|u_n| \to 0$. On retourne la démonstration précédente : $|u_n|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut, donc son inverse aussi grand que l'on veut. Soit donc $M > 0$, on sait qu'il existe un rang p à partir duquel, $|u_n| \leqslant \frac{1}{M}$, si $n \geqslant p$, on a alors $\frac{1}{|u_n|} \geqslant M$. Et donc $\frac{1}{|u_n|} \to +\infty$.

Si u_n est de signe constant, on peut alors enlever les valeurs absolues et obtenir $\frac{1}{|u_n|} \to \pm\infty$, selon le signe de u_n. ■

Quotient

À partir de l'inverse, on peut regarder le cas du quotient de suites, qui correspond à multiplier une suite v_n par une suite $\frac{1}{u_n}$. Les propriétés sont alors sur

(u_n)	(v_n)	$(\frac{u_n}{v_n})$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
$+\infty$	$l \neq 0$	$+\infty$
l	$\pm\infty$	0
$l \neq 0$	0	$\pm\infty$
∞	∞	$F.I.$
0	0	$F.I.$

Passage à la limite et continuité

On admet pour l'instant le résultat suivant :

Proposition IV.11 Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et (x_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathscr{D}$. On peut donc construire la suite $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par composée.

Si on a :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

En particulier, si f est continue en x_0 et si (x_n) est une suite tel que $\lim_{x\to+\infty} x_n = x_0$ alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$.

Démonstration. La démonstration sera faite lorsque la continuité aura été définie. ■

! La continuité est essentielle et doit être indiqué.

Cela permet en particulier de passer à la limite pour une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

V Théorèmes d'existence d'une limite

Ces théorèmes assurent la convergence de la suite.

V.1 Théorème de convergence par encadrement

Théorème V.1 — Convergence par encadrement. Soient (u_n), (a_n) et (b_n) trois suites réelles telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \leqslant u_n \leqslant b_n \\ (a_n) \text{ et } (b_n) \text{convergent vers la même limite } l \end{cases}$$

Alors, on a u_n converge vers l.

✎ La différence avec les précédents est qu'on ne suppose plus que la suite est convergente, on le démontre.

Démonstration. Soit donc un $\varepsilon > 0$, d'après la définition, on a deux rangs p et p', tels que respectivement $|a_n - l| \leqslant \varepsilon$ et $|b_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Sur le dessin, cela signifie que les deux suites a_n et b_n sont coincées dans un tube de largeur ε et de centre l. La suite u_n étant comprise entre ces deux suites, elle est forcément coincée aussi dans ce tube.

Pour passer de cette idée à une démonstration, on prend le plus grand rang des deux $N = \max(p, p')$, les deux propriétés sont alors vérifiées $\forall n \geqslant N$.

Soit donc $n \geqslant N$, on a

$$l - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant u_n \leqslant b_n \leqslant l + \varepsilon$$

donc $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

On a donc montré que $\forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$, comme ε est arbitraire, u_n converge vers l. ■

V.2 Théorèmes de divergence par majoration ou minoration

Théorème V.2 — Divergence par majoration / minoration. Si (u_n) est une suite réelle, telle qu'il existe une suite réelle (b_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant b_n$ et b_n tend vers $+\infty$, alors u_n tend vers $+\infty$.

Démonstration. Immédiat. ■

V.3 Théorème de la limite monotone

Si (u_n) est croissante, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_0,$$

et même :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant p, u_n \geqslant u_p$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, et en supposant que la suite converge, on obtient ainsi que

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_p \leqslant \lim_{+\infty} u_n.$$

Autrement dit, **la limite est un majorant de** (u_n).

On va montrer que la limite est en fait le meilleur majorant, i.e. la borne supérieure. En effet, une suite est majorée si $\left\{ u_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$. On peut donc utiliser l'axiome de $\mathbb{R}$: cette partie a alors une borne supérieure.

Cela amène au théorème suivant :

Théorème V.3 — Limite monotone. Soit (u_n) une suite réelle croissante et majorée, alors (u_n) converge vers la borne supérieure de $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$, on note cette valeur $\sup(u_n)$.

Ainsi, toute suite croissante et majorée converge.

De plus, une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

De même, toute suite décroissante et minorée converge. Tandis qu'une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Ce théorème est important parce qu'il permet de montrer qu'une suite converge sans connaître la limite.

Démonstration. Soit donc l la borne supérieure de $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$.

On veut montrer que $u_n \to l$, c'est-à-dire que pour tout ε, on peut trouver un rang p à partir duquel $l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l + \varepsilon$. Mais comme $u_n \leqslant l$ (une borne supérieure est un majorant), cela revient à $l - \varepsilon \leqslant u_n$

La définition d'une borne supérieure donne :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in N,\ l - \varepsilon \leqslant u_p \leqslant l.$$

Ce qui est la traduction de dès qu'on diminue l même d'une toute petite valeur ε, $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de l'ensemble, donc on peut trouver un élément u_p entre $l - \varepsilon$ et l. La démonstration consiste donc à montrer que l'on peut choisir ce p comme rang.

Soient donc $\varepsilon > 0$, et le p tel que $l - \varepsilon \leqslant u_p \leqslant l$. Montrons que le rang p convient : Soit $n \geqslant p$, on a $u_p \leqslant u_n \leqslant l$, donc $l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l$. En particulier $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

On a donc bien le résultat : u_n converge vers l.

Supposons maintenant que u_n ne soit pas bornée. On a donc :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N} : u_p \geqslant M.$$

(ce qui est la traduction de pour tout seuil M, on le dépasse au moins une fois)

On veut montrer :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant p, u_n \geqslant M$$

(pour tout seuil M, il existe un rang à partir duquel u_n dépasse toujours ce seuil). Encore une fois, on va montrer que p convient comme seuil.

Soient donc $M \in \mathbb{R}$, et le p tel que $u_p \geqslant M$, soit $n \geqslant p$, on a alors : $u_n \geqslant u_p \geqslant M$. ■

V.4 Théorème des suites adjacentes

Définition V.1 — Suites adjacentes. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles, on dit que ces suites sont adjacentes si :

- (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante,
- $\lim a_n - b_n = 0$.

La suite $(a_n - b_n)$ est alors croissante (car c'est la somme de (a_n) croissante, et $(-b_n)$ croissante). On a vu qu'alors la limite est un majorant (c'est même la borne supérieure) donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n - b_n \leqslant 0$. Ce qui signifie $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b_n$.

R Parfois, on ajoute cette propriété à la définition des suites adjacentes.

En écrivant toutes les hypothèses, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_0.$$

(a_n) est donc croissante majorée par b_0 (et aussi par b_1, b_{1000}), tandis que (b_n) est décroissante et minorée par a_0. Donc les deux convergent vers l et l' respectivement, puis $l = l'$ car $a_n - b_n \to 0$.

On obtient donc le théorème suivant :

Théorème V.4 — Convergence des suites adjacentes. Soit a_n et b_n deux suites adjacentes, elles convergent alors vers la même limite, qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_0 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant l \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_0.$$

VI Suites extraites

Définition VI.1 — Suites extraites. Soit (u_n) une suite, et soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, une application strictement croissante, la suite $u_{\phi(n)}$ est alors une suite extraite ou une sous-suite de la suite (u_n).

■ **Exemple VI.1** Le premier exemple est celui des suites extraites de rangs pairs (u_{2n}) et impairs u_{2n+1}. On peut aussi faire la suite des carrés parfaits : u_{n^2}, ou encore u_{2^n}. ■

Un lemme qu'il faut garder en tête est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \phi(n) \geqslant n$$

Ce qui se démontre par récurrence.

Ainsi, pour construire $u_{\phi(n)}$ on a « effacé » certains u_n,ou on en a « sélectionnés » certains (les pairs, impairs et les carrés d'entier dans les exemples). En particulier, $\phi(n)$ tends vers $+\infty$.

Proposition VI.1 — Convergence et divergence des suites extraites. Soit (u_n) une suite, telle que (u_n) converge vers l, alors toute suite extraite $u_{\phi(n)}$ converge vers l.

Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors toute suite extraite $u_{\phi(n)}$ tend vers $+\infty$.

Corollaire VI.2 En conséquence, si on trouve deux suites extraites $u_{\phi(n)}$ et $u_{\psi(n)}$ qui convergent vers des limites différentes, alors la suite u_n ne converge pas.

■ **Exemple VI.2** $((-1)^n)$ ne converge pas, ainsi que la suite qui vaut n si n pair, 0 sinon.
■

Démonstration. Pour démontrer le résultat, prenons un $\varepsilon > 0$, on sait alors qu'il existe un rang p à partir duquel si $n \geqslant p, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Montrons que ce rang p convient aussi pour $u_{\phi(n)}$, en effet soit $n \geqslant p$, on a $\phi(n) \geqslant \phi(p) \geqslant p$, donc $|u_{\phi(n)} - l| \leqslant \varepsilon$.

La corollaire contredit le fait que la limite est unique.

Enfin, si (u_n) tend vers $+\infty$, les mêmes arguments montrent que $(u_{\phi(n)})$ tend vers $+\infty$. ■

Les sous-suites servent essentiellement à montrer qu'une suite ne converge pas. Le résultat suivant propose un cas de réciproque :

Proposition VI.3 Si une suite (u_n) vérifie (u_{2n}) converge vers l et (u_{2n+1}) converge vers l. Alors, (u_n) converge vers l.

Intuitivement cela provient du fait qu'un nombre est pair ou impair, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) balaient donc "tous les cas possibles".

Démonstration. Prenons un $\varepsilon > 0$, on a donc un rang p et un rang p' tel que : si $n \geqslant p, |u_{2n} - l| \leqslant \varepsilon$, si $n \geqslant p', |u_{2n+1} - l| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, u_{2p} vérifie $|u_{2p} - l|$ ainsi que tous les pairs suivants, de même $u_{2p'+1}$ vérifie $|u_{2p'+1} - l|$ ainsi que tous les impairs suivants.

Soit donc $N = \max(2p, 2p'+1)$, et soit $n \geqslant N$. Deux cas sont possibles : n pair et n impair.

Si n est pair, n est alors un nombre pair supérieur à $2p$. Donc $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Si n est impair, n est alors un nombre impair supérieur à $2p'+1$. Donc $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Si on veut démontrer proprement le cas pair : on sait qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $n = 2k$, de $n \geqslant 2p$, on obtient $k \geqslant p$ donc $|u_{2k} - l| \leqslant \varepsilon$. ■

VII Brève extension aux suites complexes

Définition VII.1 — Convergence d'une suite complexe. Soit (u_n) une suite complexe, on dit que (u_n) converge vers la limite $l \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon,$$

Ainsi, la définition est la même que pour une suite réelle avec le module à la place de la valeur absolue.

Étudier la convergence de la suite complexe (u_n) revient ainsi à étudier la suite réelle $|u_n - l|$.

Attention : il n'y a pas de relation d'ordre dans les complexes, donc pas de suite complexe majorée/minorée, croissante/décroissante. Il n'y a pas non plus de notion de suites qui tends vers $+\infty$

Proposition VII.1 — lien avec les parties réelles et imaginaires. Soit (u_n) une suite à valeurs complexes.

La suite u_n converge vers $l = a + ib$ si et seulement si la suite $\mathrm{Re}(u_n)$ converge vers a, et la suite $\mathrm{Im}(u_n)$ converge vers b.

Démonstration. On utilise :

$$\left|\mathrm{Re}(u_n) - a\right| \leqslant \left|\mathrm{Re}(u_n - l)\right| \leqslant \left|u_n - l\right|$$

(car un nombre complexe vérifie toujours $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$).

Ainsi, si $\left|u_n - l\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a $\left|\mathrm{Re}(u_n) - a\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On procède de même pour la partie imaginaire.

Pour la réciproque, on a :

$$\left|u_n - l\right| \leqslant \left|(\mathrm{Re}(u_n) - a) + i(\mathrm{Im}(u_n) - b)\right| \leqslant \left|\mathrm{Re}(u_n) - a\right| + \left|\mathrm{Im}(u_n) - b\right|.$$

Ainsi, si $\mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\infty]{} a$ et $\mathrm{Im}(u_n) \xrightarrow[n\infty]{} b$, on a $\lim_{n\infty} u_n = l$.

■

Proposition VII.2 — lien avec le module. Si la suite u_n converge vers l, alors la suite $|u_n|$ converge vers $|l|$.

Démonstration. Cela provient de l'inégalité triangulaire renversée :

$$\left||u_n| - |l|\right| \leqslant \left|u_n - l\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

■

Proposition VII.3 — Opérations sur les suites complexes et lien avec la convergence. On a les mêmes résultats que pour les suites réelles :

Addition Si $\lim_{n\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\infty} v_n = l'$ alors $\lim_{n\infty} u_n + v_n = l + l'$.

Produit Si $\lim_{n\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\infty} v_n = l'$ alors $\lim_{n\infty} u_n + v_n = ll'$.

Quotient Si $\lim_{n\infty} u_n = l \neq 0$ alors $\lim_{n\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.

Suites numériques

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Suite arithmético-géométrique

Exercice 1 Soit la suite arithmético-géométrique

$$\begin{cases} u_0 = 1224 \\ u_{n+1} = 0.5u_n + 100. \end{cases}$$

Expliciter le terme général de la suite.

Correction : cours.

Exercice 2 Soient α et β deux réels strictement positifs. Expliciter le terme général de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0, \text{ et} \\ u_{n+1} = \alpha(u_n)^\beta. \end{cases}$$

Correction : par récurrence immédiate $u_n > 0$, puis on pose $v_n = \ln(u_n)$, et v_n est arithmético-géométrique. (attention au cas où $\beta = 1$, etc.).

⋆ Suite récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 3 On définit la suite de Fibonacci par :

$$\begin{cases} F_0 = 0, \ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

On pose $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Déterminer F_n en fonction de n, (on écrira F_n en fonction de ϕ et de $\frac{1}{\phi}$).
2. Déterminer la limite de $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,
$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$,
5. Écrire deux fonctions `Python` donnant F_n en fonction de n en utilisant la formule de récurrence. La première fonction utilisant une liste dans laquelle sont stockées les valeurs successives de F_n, la deuxième n'utilisant que deux variables réelles.

Correction :

1. Suites récurrentes d'ordre 2 donc :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n + \frac{(-1)^n}{\phi^n}\right).$$

2.

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\left(\phi^{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{\phi^{n+1}}\right)}{\left(\phi^n + \frac{(-1)^n}{\phi^n}\right)} = \frac{\left(\phi + \frac{(-1)^n}{\phi^{2n+1}}\right)}{\left(1 + \frac{(-1)^n}{\phi^{2n}}\right)}.$$

Or $\phi > 1$ donc $\phi^n \to +\infty$ et donc $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \phi$.

3. Il faut voir que cela n'est pas évident parce que dans la parenthèse la limite est $+\infty$. Il s'agit donc de montrer que la limite se rapproche d'un $2k\pi$.
Par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}$. D'autre part, on a :

$$\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} = F_n - \frac{(-1)^n}{\phi^n}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2\pi\phi^n}{\sqrt{5}}\right) &= \sin\left(2\pi F_n - 2\pi\frac{(-1)^n}{\phi^n}\right)\\ &= \sin\left(-2\pi\frac{(-1)^n}{\phi^n}\right)\\ &\to 0.\end{aligned}$$

4. On peut faire une récurrence ou une manipulation de somme (en écrivant $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$ on obtient une télescopique).
5. Récurrence simple.
6. On a deux méthodes :

```
#initialisation:
F = [0]*n
F[1] = 1
# remplissage:
for i in range(2,n):
  F[i] = F[i-1] + F[i-2]
```

La valeur de F[n-1] est alors F_{n-1}. Ou avec moins de consommation mémoire (mais on a alors que le dernier terme) :

```
def fibDirect(n) :
  """
  entrée: entier n sortie valeur de Fn
  """

  # premières valeurs
  if n == 0 :
    return 0
  if n == 1
    return 1

  Fnm1 = 0 # valeur de Fn-1
  Fn = 1 # valeur de Fn
  for i in range(1,n) :
    # Fn devient Fn+1
    # et Fn-1 devient Fn
    Fn , Fnm1 = Fn + Fnm1 , Fn
  return Fn
```

Exercice 4 Soit une suite réelle d'ordre 2, telle que $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la suite est 6 périodique.

Correction :cours. Les racines du polynômes caractéristiques sont $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et son conjugué. Donc une telle suite s'écrit sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\cos(n\frac{\pi}{3}) + \beta\sin(n\frac{\pi}{3})$$

Donc elles sont 6 périodique.

⋆ D'autres suites récurrentes

Exercice 5 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 2,\ v_0 = \frac{1}{3} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + 3v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 2v_n \end{array} \right.$$

1. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1}, u_n et v_n. En déduire que $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$, puis exprimer u_n en fonction de n,
2. En déduire v_n en fonction de n.

Correction :

1. $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 6v_n$, soit $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$. On déduit : $u_n = (-1)^n + 4^n$.
2. $v_n = \frac{2}{3}(-1)^{n+1} + 4^n$.

Exercice 6 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 2$ et la relation :

$$(R): \qquad u_{n+1} = u_n + n + 1$$

1. Trouver une suite $v_n = an^2 + bn + c$ qui vérifie (R)
2. Quelles sont toutes les suites qui vérifient (R) ?
3. Exprimer u_n en fonction de n.

1. Résoudre le système obtenu par identification. On obtient : $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, c quelconque.
2. Soit (u_n) une suite quelconque qui vérifier (R). En faisant la différence, on a :

$$\begin{array}{r} u_{n+1} = u_n + n + 1 \\ v_{n+1} = v_n + n + 1 \\ \hline u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n. \end{array}$$

   Ainsi, $(u_n - v_n)$ est constant. Donc u_n s'écrit : $u_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Réciproque évidente.
3. Remplacer u_0 par sa valeur.

Exercice 7 Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = -1$ et la relation

$$(R): \qquad u_{n+1} = 2u_n + n + 1$$

1. Trouver une suite $v_n = bn + c$ qui satisfait la relation (R). Quelles sont toutes les suites (u_n) qui satisfont la relation (R) ?
2. Calculer u_n en fonction de n.

Correction :

1. Résoudre le système obtenu par identification. On constate que la suite $n \mapsto -n-2$ est solution.
2. Soit (u_n) qui vérifie (R). En faisant comme à l'exercice précédent, on obtient $(u_n - v_n)$ géométrique de raison 2. D'où l'expression de u_n.

⋆ Suites stationnaires

Définition VII.2 Une suite est stationnaire si :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant \mathbb{N},\ u_n = u_N$$

Exercice 8

1. Montrer que toute suite stationnaire est convergente.
2. Soit $l \in \mathbb{R}$, et (u_n) une suite qui vérifie :

$$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant \mathbb{N},\ |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

Montrer que (u_n) est stationnaire.

Correction : exercice de cours.

✯ Suites adjacentes

Exercice 9 **Le nombre e**

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.

Montrer que u_n et v_n sont deux suites adjacentes.

Correction : (u_n) croissante, $u_n - v_n \to 0$ évident. Puis faire $v_{n+1} - v_n$.

✯ Convergence des suites

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0$.

Montrer que $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$.

Correction : On a en utilisant les opérations sur les limites :

$$\begin{aligned}
&\text{On a : } \lim_{n\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0 \text{ or } \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{u_n+1-1}{1+u_n} = 1 - \frac{1}{1+u_n}\\
&\text{donc : } \lim_{n\infty} \frac{1}{1+u_n} = 1 \text{ et } \lim_{n\infty} 1+u_n = 1\\
&\text{d'où : } \lim_{n\infty} u_n = 0
\end{aligned}$$

Exercice 11 Si l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est injective, montrer que $\lim\limits_{n\infty} f(n) = +\infty$.

Correction : Soit $M \in \mathbb{R}$, on a alors $\{n \in \mathbb{N} | f(n) \leqslant M\}$ est un ensemble fini (contenant au plus $\lfloor M \rfloor + 1$ valeurs), donc en choisissant $p = \max\{n \in \mathbb{N} | f(n) \leqslant M\}$, on a :

$$\forall n \geqslant p,\ f(n) \notin \{n \in \mathbb{N} | f(n) \leqslant M\}$$

et donc : $\forall n \geqslant p,\ f(n) > M$.

Exercice 12 Soit u une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| < 1$.

1. Démontrer que :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \in \left]-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$$

2. Démontrer que :

$$\begin{aligned}
\exists N \in \mathbb{N},\ &\left(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \in \left]-\infty; -\frac{3}{4}\right]\right)\\
&\text{ou } \left(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[\right).
\end{aligned}$$

3. Dans le cas où $\forall n \geqslant N, u_n \geqslant \frac{3}{4}$, montrer que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \left(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - 1| \leqslant \frac{4}{7} \left| u_n^2 - 1 \right| \right)$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.

Correction :

1. On a : $\lim_{n\infty} |u_n| = 1$, donc en appliquant la définition de la convergence avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$ on obtient :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n| \geqslant \frac{3}{4}$$

Ainsi,

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n \in \left] -\infty ; -\frac{3}{4} \right] \cup \left[\frac{3}{4} ; +\infty \right[$$

2. On considère N définie par la question précédente. Supposons $u_N > \frac{3}{4}$, on a alors :

$$u_{N+1} > \frac{3}{4} \text{ ou } u_{N+1} < -\frac{3}{4} \text{ d'après la question précédente.}$$

D'un autre côté, on a aussi :

$$|u_{N+1} - u_N| < 1 \text{ d'après l'hypothèse sur la suite } (u_n)$$

Ainsi :

$$u_{N+1} = (u_{N+1} - u_N) + u_N \geqslant -1 + \frac{3}{4} \geqslant -\frac{1}{4} > -\frac{3}{4}$$

Donc : $u_{N+1} > \frac{3}{4}$. En raisonnant par équivalence sur la proposition définie pour $n \geqslant N$ par : $\mathscr{P}(n) :\ u_n > \frac{3}{4}$, on obtient ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \in \left[\frac{3}{4} ; +\infty \right[$$

Le cas où $u_N < -\frac{3}{4}$ est symétrique.

Exercice 13

1. Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.
2. Que dire de la somme de deux suites divergentes ?
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, et $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \in \mathbb{R}^4$ tels que $\Delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.
   Montrer que si $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha' u_n + \beta' v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites convergent, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Correction :

1. (u_n) converge, (v_n) diverge. Par l'absurde, si $(u_n + v_n)$ converge alors $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ converge.
2. On ne peut rien dire (par exemple : $v_n - v_n$ converge même si (v_n) diverge).
3. Il faut exprimer u_n en fonction de $\alpha u_n + \beta v_n$ et $\alpha' u_n + \beta' v_n$ en résolvant un système. On trouve :

$$u_n = \frac{1}{\Delta} \left(\beta' (\alpha u_n + \beta v_n) - \beta \left(\alpha' u_n + \beta' v_n \right) \right)$$

ainsi (u_n) converge.

Exercice 14 **Théorème de Césaro** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite.

On pose v_n la moyenne des n premiers termes de u, c'est-à-dire :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \text{ avec } n \geqslant 1.$$

1. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers 0.
2. Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ, il en va de même pour $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

3. Étudier la réciproque.
4. Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$, il en va de même pour $(v_n)_{n\geqslant 1}$. Étudier la réciproque.
5. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ croît, il en est de même pour la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$. Étudier la réciproque.

Commentaire : C'est l'exercice très classique qui nécessite de revenir au epsilon. Tombe parfois dans une partie d'écrit.

1. On considère $\varepsilon > 0$, on sait alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant N,\ |u_k| \leqslant \varepsilon$$

On écrit alors pour $n \geqslant N$:

$$v_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N-1} u_k\right) + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=N}^{n} u_k\right)$$

On a :

$$\lim_{n\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N-1} u_k\right) = 0$$

car N est fixé.
On choisit alors un rang $N' \geqslant N$, tel que :

$$\forall n \geqslant N',\ \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N-1} u_k\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

D'un autre côté, on a pour $n \geqslant N'$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=N}^{n} u_k\right)\right| &\leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=N}^{n} |u_k|\right)\\ &\leqslant \frac{1}{n}\varepsilon(n-N+1) \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

On obtient ainsi pour $n \geqslant N'$:

$$\begin{aligned}|v_n| \leqslant &\left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N-1} u_k\right)\right| + \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=N}^{n} u_k\right)\right|\\ \leqslant &2\varepsilon\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N,\ |v_n| \leqslant 2\varepsilon$$

En remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2}$, on obtient le résultat.

2. On applique le résultat précédent à $(u_n - l)$. En effet :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - l =& \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - l\\ =& \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k - l\right)\end{aligned}$$

La suite $(u_n - l)$ tends vers 0, donc la suite $(v_n - l)$ tends vers 0 (résultat précédent), et donc $\lim_{n\infty} v_n = l$.

3. En choisissant la suite $(u_n) = \Big((-1)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$v_n = (-1)\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = -\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair.}\\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.}\end{cases}$$

Ainsi, $\lim_{n\infty} v_n = 0$ mais (u_n) ne converge pas vers 0. La réciproque est donc fausse.

4. Soit (u_n) une suite qui tends vers $+\infty$. On considère $M \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on peut suppose $M \geqslant 0$. À partir d'un certain rang, on sait que : $u_n \geqslant M$. Ce qui s'écrit :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_1,\ u_n \geqslant M$$

On écrit alors :

$$v_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N_1-1} u_k\right) + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=N_1}^{n} u_k\right)$$

On a :

$$\lim_{n\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N_1-1} u_k\right) = 0$$

donc à partir d'un certain rang, on aura :

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N_1-1} u_k\right) \geqslant -1$$

D'autre part :

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=N_1}^{n} u_k\right) \geqslant \frac{1}{n} M(n - N_1 + 1)$$

Or :

$$\lim_{n\infty} \frac{n - N_1 + 1}{n} = 1$$

donc à partir d'un certain rang, on aura :

$$\frac{n - N_1 + 1}{n} \geqslant \frac{1}{2} \text{ et donc } \frac{1}{n}\left(\sum_{k=N_1}^{n} u_k\right) \geqslant \frac{M}{2}.$$

Au final, à partir d'un certain rang, on a :

$$\begin{aligned} v_n =& \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N_1-1} u_k\right) + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=N_1}^{n} u_k\right) \\ \geqslant& -1 + \frac{M}{2} = \frac{M-2}{2} \end{aligned}$$

On a donc démontré :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N,\ v_n \geqslant \frac{M-2}{2}.$$

En remplaçant M par $2M+2$, on obtient :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N,\ v_n \geqslant M.$$

Pour la réciproque, il suffit de prendre une suite du type :

$$u_n = \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour une telle suite, (v_n) tends vers $+\infty$ et pourtant (u_n) ne tends pas vers $+\infty$. La réciproque est fausse.

5. On suppose que la suite (u_n) est croissante. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1} u_k\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)\\ &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + \frac{1}{n+1}u_{n+1}\\ &= -\frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + \frac{1}{n+1}u_{n+1}\\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k\right)\\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k)\right)\end{aligned}$$

Or :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ u_k \leqslant u_{n+1}$$

et donc $v_{n+1} - v_n$ est positif comme somme de termes positifs. On en déduit que la suite (v_n) est croissante.
La réciproque est fausse.

Exercice 15

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Sachant que les suites extraites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Les deux premières hypothèses suffisent-elles ?

Correction : il est clair que les deux premières hypothèses sont insuffisantes. On le voit avec l'exemple de $(-1)^n$.
On note :

$$l_1 = \lim_{n\infty} x_{2n} \quad l_2 = \lim_{n\infty} x_{2n+1} \quad l_3 = \lim_{n\infty} x_{3n}$$

On veut montrer que $l_1 = l_2$.

On peut par exemple utiliser la suite extraite (x_{6n}). Elle est extraite de (x_{3n}) et de (x_{2n}) qui sont deux suites convergentes. En effet : $x_{6n} = x_{2(3n)} = x_{3(2n)}$. Donc :

$$\lim_{n\infty} x_{6n} = \lim_{n\infty} x_{3n} = l_3 = \lim_{n\infty} x_{2n} = l_1$$

D'où $l_1 = l_3$. On a aussi :

$$\begin{aligned}\lim_{n\infty} x_{6n+3} &= \lim_{n\infty} x_{3(2n+1)} = \lim_{n\infty} x_{3n} = l_3\\ &= \lim_{n\infty} x_{2(3n+1)+1} = \lim_{n\infty} x_{2n+1} = l_2\end{aligned}$$

Ainsi $l_3 = l_2$. On a ainsi $l_1 = l_2$ et donc la suite (x_n) converge.

9 — Calcul matriciel

Dans tout le chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires** (par opposition aux vecteurs), et sont traditionnellement notés avec des lettres grecques.

I Rappel sur $\mathbb{K}^n$

I.1 La structure vectorielle

Définition I.1 L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des n-uplets, c'est-à-dire des éléments de la forme : $x = (x_1, \cdots, x_n)$, où les $x_i \in \mathbb{K}$. Les x_i sont appelés les composantes du vecteur x.

Deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont égaux si et seulement si tous leurs éléments sont égaux.

Dans cet ensemble, on peut ajouter des éléments x et x' en ajoutant composante par composante :

$$x + x' = (x_1, \cdots, x_n) + (x'_1, \cdots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \cdots, x_n + x'_n).$$

(on parle d'**addition interne**).

On peut aussi multiplier un vecteur x par un **scalaire** λ *i.e.* un élément de $\mathbb{K}$, en multipliant toutes les composantes :

$$\lambda x = \lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n).$$

(on parle de **multiplication externe**).

Définition I.2 Considérons $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ une famille de p scalaires. On peut alors former la combinaison linéaire des vecteurs $(x_1,\dots,x_p)$ de poids $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)$, c'est le vecteur :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots \lambda_p x_p$$

On ne peut pas multiplier des vecteurs, mais il existe le **produit scalaire** entre deux vecteurs x et x' :

$$x \cdot x' = (x_1,\cdots,x_n)\cdot(x'_1,\cdots,x'_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i x'_i$$

Ce produit scalaire associe à deux vecteurs un scalaire *i.e.* un élément de $\mathbb{K}$. Il a un sens en géométrie, dans le cas où $\mathbb{K}$ est l'ensemble des réels.

I.2 Structure d'array en Python

La structure de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ correspond en python à la structure `array` (en une dimension) présente dans la bibliothèque `numpy`. On crée un `array` avec la fonction `ones`, ou la fonction `zeros`, la syntaxe est `ones(n)`, où `n` est la taille du vecteur. On peut aussi convertir depuis une liste avec la fonction `array`. Par exemple : `vec = array([1,2,3])`.

Avec ce type d'objet :

- l'addition de deux `array` correspond à l'addition terme à terme (donc à une boucle `for`),
- la multiplication d'un `float` par un `array` correspond à la multiplication externe (idem).

! Le produit de deux `array` de même taille existe : cela correspond au produit terme à terme.

De même, on peut faire `float + array`, cela corresponds à ajouter la même valeur à chaque terme de l'array (encore une boucle `for`).

La numérotation est différente en Python : les indices de lignes et colonnes commencent à 0 et finissent à $n-1$.

II Ensemble des matrices $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

Définition II.1 Une matrice A à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de $p\times q$ éléments $(a_{i,j})_{i=1\cdots p,\ j=1\cdots q}$.

C'est donc :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Une matrice est donc déterminée par ses dimensions p et q, et par ses $p\times q$ coefficients (qui sont éléments de $\mathbb{K}$).

Deux matrices A et B sont égales si elles ont mêmes dimensions et si elles ont

les mêmes **coefficients**, *i.e.* $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $j \in [\![1,q]\!]$, $A_{ij} = B_{ij}$.
On note $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices de taille p par q.

Dans les matrices, le 1er indice est l'indice de ligne, le suivant, l'indice de colonne.

Résoudre une équation matricielle, revient donc à déterminer la taille de la matrice inconnue et ses coefficients.

■ **Exemple II.1**

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$
- $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{C})$
- La matrice de taille (3×2) telle que $a_{i,j} = i + j$ est : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

■

Une matrice de taille n (entier générique) est représenté en donnant ses éléments, par exemple : $A_{ij} = \max(i,j)$, ou bien en donnant sa forme générale en utilisant $\cdots$, ici :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & n \\ n & n & n & & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

On utilise aussi souvent la convention que les termes non écrits sont nuls lorsque l'on écrit une matrice avec des ....

Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ peuvent s'identifier au **vecteur colonne** de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou au **vecteur ligne** $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

P En informatique, les matrices font appel à la structure `array` (en 2 dimension) du module `pylab` (ou `numpy`).

On peut créer un `array` en convertissant une liste de liste, ou avec les fonctions `ones` et `zeros`. Par exemple :

```
A = array([[1, 2, 3] , [4, 5, 6] ])
B = zeros( (4,5) )
```

Les fonctions `ones` et `zeros` ne prennent qu'un argument (une liste de 2 entiers).

Il existe aussi une structure `matrix` dont le produit corresponds au produit matriciel, mais on ne l'utilisera pas.

III Opération sur les matrices

III.1 Addition de matrices

Définition III.1 Soient A et B deux matrices de même taille p,q, la somme des matrices $A+B$ est définie comme la matrice de taille p,q, telle que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![1,q]\!],\ (A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

! On ne peut ajouter que des matrices de même taille.

L'addition de deux matrices correspond donc à l'addition dans $\mathbb{K}^{p\times q}$, *i.e.* l'addition élément par élément. C'est encore l'**addition interne** : à deux matrices de taille (p,q) on associe une matrice de taille (p,q).

Proposition III.1 On a les propriétés classiques de l'addition : pour trois matrice A, B et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

- l'addition est commutative : $A+B = B+A$
- l'addition est associative : $A+(B+C) = (A+B)+C$
- si on note 0_{pq} la matrice de taille p,q dont tous les éléments sont nuls, on a : $A+0_{pq} = 0_{pq}+A = A$.

Démonstration. C'est l'addition dans $\mathbb{K}^{p\times q}$, donc cela hérite des propriétés de l'addition. ■

Puisque l'addition est commutative et associative, on peut donc utiliser la notation $\sum$.

P En informatique, si A et B sont deux `array`, on peut faire $C = A+B$, ce qui corresponds à :

```
(n,m) = shape(A)
C = zeros( (n,m))
for i in range(n):
    for j in range(m):
        C[i,j] = A[i,j] + B[i,j]
```

■ **Exemple III.1**

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2i & 3i \\ 0 & 5i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2i & 4i \\ -i & 5+5i \end{bmatrix}$$

■

Il faut aussi être capable d'additionner des matrices écrites avec des $\cdots$ comme :

■ **Exemple III.2**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

■

III.2 Multiplication par un scalaire

Définition III.2 Soient A une matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, le produit de la matrice A avec le scalaire λ noté λA la matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, définie par

$$\forall i \in [\![1,p]\!], j \in [\![1,q]\!], \ (\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}.$$

Ici encore, c'est la simple multiplication d'un vecteur par un scalaire, on retrouve **la multiplication externe** de $\mathbb{K}^n$.

De plus, on peut maintenant parler de différence entre matrices, comme $A+(-B)$.

P En informatique cette opération est dans le type `array`. L'expression `C= lambda * A` est :

```
C = zeros( (n,m) )
for i in range(n):
    for j in range(m):
        C[i,j] = lambda * A[i,j]
```

Proposition III.2 On a les propriétés classiques : soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$,
- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

Démonstration. Encore une fois il n'y a rien à démontrer : ce sont les mêmes propriétés pour $\mathbb{R}^{p\times q}$ ■

Attention dans l'écriture $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$, les $+$ n'ont pas le même sens : cela peut être une addition dans $\mathbb{K}$, ou dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

Avec ces propriétés, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha A_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} A_k, \text{ et aussi } \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k A) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) A,$$

où le symbole $\sum$ a un sens différents selon si c'est une somme de matrices ou de scalaires.

■ Exemple III.3

$$\lambda \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x & \lambda y & \lambda z \\ \lambda u & \lambda v & \lambda w \end{bmatrix}$$

■

III.3 Produit matriciel

On quitte maintenant l'aspect purement vectoriel des matrices en ajoutant le produit de matrices.

Définition III.3 Soient $A \in \mathscr{M}_{p,q}$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}$ On définit le produit matriciel de A par B comme la matrice C de taille p,r telle que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \forall r \in [\![1,r]\!],\ C_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} B_{k,j}$$

✎ On ne peut pas faire le produit de n'importe quelle matrice par une autre : *il faut que les dimensions soient compatibles*, il faut qu'il y ait une dimension en commun (celle sur laquelle on fait la somme). En particulier, ce n'est pas parce que le produit AB est défini que le produit BA est défini.
On conserve le même nombre de lignes que la première et on prend le nombre de colonne de la seconde : si $A \in \mathscr{M}_{p,q}$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}$, on a $AB \in \mathscr{M}_{p,r}$.

■ **Exemple III.4**

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3b+5c & 2a+4b+6c \\ d+3e+5f & 2b+4e+6f \end{bmatrix}$$

Pour faire un produit matriciel, on utilise souvent la technique le produit ainsi :

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \end{array}$$

■

L'élément $(AB)_{ij}$ est donc le **produit scalaire de la ligne i de A et de la colonne j de B**. D'une manière générale, on fait toujours le produit d'une ligne par une colonne.

✎ La j-ème colonne de AB est le produit de A par la j-ème colonne de B. La i-ème ligne de AB est le produit de la i-ème ligne de A par B. En particulier, la colonne j de AB ne dépends que de la j-ième colonne de B, et la i-ième ligne de AB ne dépends que de la i-ième ligne de A.

La matrice AB est obtenue en mettant en décomposant la matrice B en colonne puis en calculant les produits de la matrice A par les colonnes :

$$A \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 & C_2 & & C_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ AC_1 & AC_2 & & AC_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Dans l'autre sens, la matrice AB est obtenue en mettant en décomposant la matrice 1 en ligne puis en calculant les produits de ces lignes avec la matrice B :

$$\begin{bmatrix} \dots L_1 \dots \\ \dots L_2 \dots \\ \\ \dots L_n \dots \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \dots L_1 B \dots \\ \dots L_2 B \dots \\ \\ \dots L_n B \dots \end{bmatrix}$$

III.4 Lien avec les systèmes

Remarquons qu'en particulier :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

Donc le système d'équations linéaire

$$\begin{cases} ax+by = x_0 \\ bx+cy = y_0 \end{cases}$$

peut s'écrire comme une équation matricielle : $AX = X_0$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur (colonne) des inconnues, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice (2×2) des coefficients, et $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ le vecteur de second membre, ce qui motive le produit matriciel.

Théorème III.3 Résoudre le système :

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1p}x_p & = & b_1 & (l_1) \\ a_{21}x_1 + \dots a_{2p}x_p & = & b_2 & (l_2) \\ \vdots & = & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \dots a_{np}x_p & = & b_n & (l_n) \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n)$ revient à résoudre l'équation : $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n1}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np} \qquad \text{la matrice des coefficients,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1} \qquad \text{le vecteur (colonne) du second membre,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p1} \qquad \text{le vecteur (colonne) des inconnues.}$$

III.5 Propriétés du produit matriciel

Proposition III.4 Certaines propriétés classiques de la multiplication sont conservées mais attention pas toutes (commutativité et intégrité).

- **Associativité :** Soient $A \in \mathscr{M}_{p,q}$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}$, et $C \in \mathscr{M}_{r,s}$, (*i.e.* telles que $(AB)C$ ait un sens).
  On a alors :
  $$(AB)C = A(BC) = ABC$$
- **Distributivité :** Soient $A \in \mathscr{M}_{p,q}$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}$, et $C \in \mathscr{M}_{q,r}$ (*i.e.* telles que $A(B+C)$ ait un sens).
  On a alors :
  $$A(B+C) = AB + AC.$$
  De même si $(A+B)C$ a un sens alors : $(A+B)C = AC+BC$.
- **Distributivité sur les scalaires :** Soient $A \in \mathscr{M}_{p,q}$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a alors
  $$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$$
- Soit $A \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$, et $r \in \mathbb{N}$, on a alors : $A0_{qr} = 0_{pr}$ et $0_{rp}A = 0_{rq}$,

! **Non commutativité :** En règle générale $AB \neq BA$. Dans le cas contraire, on dit que les matrices **commutent**.

Non intégrité : on peut avoir deux matrices $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $AB = 0$, De même, on peut avoir $AB = AC$, sans que $B = C$.

Commençons par les contre-exemples. Pour $AB \neq BA$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tandis que

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi les scalaires commutent avec les matrices mais pas les matrices entre elles.

Pour $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Démonstration. On commence par l'associativité, soient $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, et $C \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{K})$.

On a : $(AB) \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, et $(AB)C$ existe et $(AB)C \in \mathscr{M}_{p,s}(\mathbb{K})$. De même $(BC) \in \mathscr{M}_{q,s}(\mathbb{K})$, donc $A(BC)$ existe et $A(BC) \in \mathscr{M}_{p,s}(\mathbb{K})$.

Donc les matrices ont la bonne dimension.

De plus, d'après les formules du produit matriciel, $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik}B_{kj}$, et $(BC)_{kj} = \sum_{l=1}^{r} B_{kl}C_{lj}$ donc

$$\begin{aligned}
((AB)C)_{ij} &= \sum_{l=1}^{r}(AB)_{il}C_{lj} = \sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{q} A_{ik}B_{kl}\right)C_{lj}\\
&= \sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{q} A_{ik}B_{kl}C_{lj} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{r} A_{ik}B_{kl}C_{lj}\\
&= \sum_{k=1}^{q} A_{ik}\underbrace{\sum_{l=1}^{r} B_{kl}C_{lj}}_{(BC)_{kj}} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik}(BC)_{kj}\\
&= A(BC)_{ij}
\end{aligned}$$

Montrons la distributivité. Soient $A \in \mathscr{M}_{p,q}$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}$, et $C \in \mathscr{M}_{q,r}$ (*i.e.* telles que $A(B+C)$ ait un sens).

On a :

$$\begin{aligned}
[A(B+C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{q} A_{ik}(B+C)_{kj}\\
&= \sum_{k=1}^{q} \left(A_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{q} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{q} A_{ik}C_{kj}\\
&= (AB)_{ij} + (AC)_{ij}
\end{aligned}$$

Idem de l'autre côté.

Enfin la distributivité sur les scalaires :

$$(\lambda A)B = \sum_{k=1}^{q}(\lambda A_{ik})B_{kj} = \lambda\sum_{k=1}^{q} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik}(\lambda B_{kj}).$$

Le dernier point est évident :

$$(A0)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik}0_{kj} = 0.$$

■

III.6 Algorithme de produit matriciel en Python

Si `A` et `B` sont deux `array`, le produit `A*B` n'existe que si `A` et `B` ont la même taille, mais ce n'est pas le produit mathématique, il s'agit du produit « de tableau », ie terme à terme.

Pour faire le produit matriciel, il faut utiliser la fonction `dot(A,B)`.

Voici comment calculer la produit de deux `array` sans utiliser la fonction `dot` :

```
[p, q1] = shape(A)
[q2, r] = shape(B)
if q1 != q2 :
    print("ERREUR: pb de taille")
C= zeros( (p,r))
for i in range(p):
    for j in range(r):
        # calcul de la somme
        S = 0
        for k  in range(q1):
            S += A[k]*B[k]
        C[i,j] = S
```

P On peut aussi utiliser la structure `matrix` pour laquelle le produit correspond au produit matriciel.

IV Matrices carrées, ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

IV.1 Définition

Définition IV.1 Une matrice carrée est une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes. On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille p.

R L'intérêt principal de cet ensemble est que le produit de deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est toujours défini et est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On peut aussi multiplier une matrice carrée par elle-même.

! Le produit n'est pas commutatif.

Définition IV.2 On appelle matrice identité de taille n, la matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ notée I_n qui ne contient que des 1 sur la diagonale.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P Une fonction `identity` existe dans `numpy`, il est aussi facile de créer la matrice identité à la main.

Proposition IV.1 Cette matrice vérifie :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AI_n = I_nA = A.$$

Démonstration. On peut le constater en faisant le produit ou simplement écrire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \left[AI\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{ij}I_{kj} = A_{ij},$$

en effet le seul terme non nul est le terme pour $k = j$. ■

R Un corollaire important : I_n **commute avec toutes les matrices**.

On dit que la matrice I_n est **l'élément neutre pour la multiplication**. Elle joue le même rôle que 1 pour la multiplication des scalaires

! Attention à ne pas écrire 1 au lieu de I_n. En particulier si on fait `A+1` avec `A` un `array`, alors on ajoute 1 à chaque composante de `A`.

IV.2 Puissance d'une matrice carrée

Définition IV.3 Pour $n \in \mathbb{N}$, On appelle puissance n-ième d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $A^n = AA\cdots A$. Par convention : $A^0 = I_n$.

On a donc :

$$A^0 = I_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ A^{n+1} = A \times A^n.$$

Calculer une puissance n-ième d'une matrice n'est pas facile. C'est souvent le sujet des exercices. De plus cela a de nombreuses applications. Avec la définition, la seule méthode pour calculer A^n est la récurrence.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $(\lambda_0, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, alors on peut définir :

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_n A^n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A^i.$$

C'est un **polynôme en** A. Si on considère donc un polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, on voit alors que l'on peut calculer $P(A)$.

IV.3 Commutant d'une matrice

Un exercice classique consiste à chercher le **commutant** d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices B qui vérifient : $AB = BA$, *i.e.* qui commutent avec A. Aucun résultat n'est au programme, mais on peut simplement vérifier que :

Proposition IV.2 Pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

- A commute avec elle-même, avec l'identité et avec A^n pour tout n.
- De plus, si A commute avec B et C, alors elle commute avec $B+C$, BC et λB pour tout scalaire λ.

- Une conséquence importante est qu'une matrice A commute avec tout **polynôme** en A, *i.e.* toute matrice B qui s'écrit $B = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$.

IV.4 Formule du binôme

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut effectuer des **calculs algébriques**, en prenant garde au fait que deux matrices ne commutent pas. On a par exemple :

$$\begin{aligned}
& (A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA \\
\text{et} \quad & (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 - AB + BA
\end{aligned}$$

Pour revenir à l'identité classique, il faut que les matrices **commutent**, *i.e.* $AB = BA$. Un cas particulier où on est sûr qu'il n'y a rien à vérifier est le cas de l'identité (qui commute avec toutes les matrices).

Dans ce cas, on a, par exemple, la formule du binôme de Newton, et les formules de factorisation.

Théorème IV.3 Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$(I_n + A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \tag{9.1}$$

On a aussi :

$$I_n - A^n = (I_n - A) \sum_{k=0}^{n-1} A^k.$$

Si A et B sont deux matrices carrées qui commutent, alors :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

R À chaque fois que la formule en $(A+B)^n$ est utilisée, il faut préciser que les matrices commutent.

Démonstration. Les démonstrations sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Par exemple :

$$\begin{aligned}
(I_n - A) \sum_{k=0}^{n-1} A^k &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k - A \sum_{k=0}^{n-1} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A^k - \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A^k - \sum_{k=1}^{n} A^k = I_n - A^n.
\end{aligned}$$

■

R On voit en particulier ici l'intérêt d'apprendre la formule de Newton sous la forme $(1+x)^n$. En effet, la formule sur $(I+A)^n$ est vraie quelque soit la matrice A, tandis que celle sur $(A+B)^n$ n'est vraie que si A et B commute.

IV.5 Exemples d'utilisation du binôme de Newton pour le calcul de A^n

La formule du binôme de Newton est particulièrement utile pour calculer la puissance n-ième d'une matrice A qui s'écrit $A = \lambda I + \mu N$, où N est une matrice dont il est facile de calculer la puissance n-ième.

C'est le cas en particulier

- si la matrice N est **nilpotente** *i.e.* si $N^p = 0$ pour un certain p, dans ce cas la somme 9.1 se réduit à une somme pour $k < p$.
- si la matrice N vérifie $N^2 = \lambda N$. Dans ce cas, on peut écrire la formule 9.1 comme un scalaire multiplié par N.

■ **Exemple IV.1** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & a \end{bmatrix}$ avec a et b réels.

On écrit :

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = aI_2 + cN$$

avec $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En calculant, on obtient $N^2 = 0$. Ainsi on a : $\forall n \geqslant 2, N^n = N^{n-2}N^2 = 0$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} A^n =& (aI + bN)^n \\ =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI)^{n-k} (bN)^k \\ =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k N^k \\ =& \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k N^k \qquad \text{car } \forall k \geqslant 2 N^k = 0 \\ =& a^n I_2 + n a^{n-1} b N \\ =& \begin{bmatrix} a^n & n a^{n-1} b \\ 0 & a^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple IV.2** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{bmatrix}$ avec a et b réels. On écrit alors :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = aI_2 + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = aI_2 + bJ,$$

avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient facilement $J^2 = 2J$.

Puis, par récurrence, on démontre $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 2^{n-1}J$. (Attention la formule n'est pas vraie si $n = 0$).

On a alors :

$$\begin{aligned}
A^n =& (aI + bJ)^n \\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI)^{n-k}(bJ)^k \\
=& a^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (aI)^{n-k}(bJ)^k \\
=& a^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k 2^{k-1} J \\
=& a^n I_2 + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k 2^{k-1}\right]}_{\in\mathbb{R}} J
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k 2^{k-1} =& \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(2b)^k\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(2b)^k - a^n\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[(a+2b)^n - a^n\right].
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
A^n =& a^n I_2 + \frac{1}{2}\left[(a+2b)^n - a^n\right] J \\
=& \begin{bmatrix} a^n + \frac{1}{2}((a+2b)^n - a^n) & \frac{1}{2}((a+2b)^n - a^n) \\ \frac{1}{2}((a+2b)^n - a^n) & a^n + \frac{1}{2}((a+2b)^n - a^n) \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} \frac{1}{2}((a+2b)^n + a^n) & \frac{1}{2}((a+2b)^n - a^n) \\ \frac{1}{2}((a+2b)^n - a^n) & \frac{1}{2}((a+2b)^n + a^n) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

■

V Matrices carrées inversibles

V.1 Groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$

Définition V.1 Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

La matrice B est alors unique et on la note A^{-1}.

Notation V.1. *On appelle* ***groupe linéaire*** *et on note* $GL_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices inversibles de taille n.*

Par définition pour montrer qu'une matrice A est inversible et que son inverse est B, avec B une matrice donné, il suffit donc de vérifier $AB = I$ et $BA = I$.
Si on ne donne pas la matrice B, il faut la construire (on résout une équation matricielle). On verra la méthode de Gauss-Jordan permettant de calculer l'inverse d'une matrice.
Par contre, si l'énoncé est : montrer que A est inversible et que son inverse est B, il suffit de vérifier $AB = I_n$ et on a directement $BA = I_n$.

R En fait, on verra qu'il suffit que $AB = I_n$ pour avoir $BA = I_n$.
Une matrice commute toujours avec son inverse.

Démonstration. Démontrons que l'inverse est unique en supposant qu'il existe deux inverses B et B' vérifiant $AB = AB' = BA = B'A = I_n$. On a alors : $B'AB = B = B'$. ■

Proposition V.1 Si $AB = AC$ et A est inversible, alors on a $B = C$. En particulier, si $AB = 0$ et A est inversible, alors $B = 0$.
Ainsi, une matrice inversible est **simplifiable** dans une équation.

Démonstration. Cette conséquence est claire : si $AB = AC$ alors en multipliant par A^{-1}, on a $B = C$. ■

V.2 Exemple de calcul d'inverse par polynôme annulateur

■ **Exemple V.1** Soit une matrice A telle que $A^2 = \alpha A + \beta I$. On a alors :

$$A^2 - \alpha A = \beta I \qquad \text{et donc}$$
$$A(A - \alpha I) = \beta I \text{ et } (A - \alpha I)A = \beta I$$

Si $\beta \neq 0$, on peut alors écrire :

$$A\left[\frac{1}{\beta}(A - \alpha I)\right] = I \text{ et } \left[\frac{1}{\beta}(A - \alpha I)\right]A = I.$$

Ainsi, la matrice A est inversible, et $A^{-1} = \dfrac{1}{\beta}(A - \alpha I)$.
Si $\beta = 0$, on a :

$$A(A - \alpha I) = 0.$$

Ainsi, il y a deux solution : soit A n'est pas inversible, soit $A = \alpha I$ (avec dans ce cas forcément $\alpha \neq 0$). ■

V.3 Inverse d'un produit

Proposition V.2 Soient A B deux matrices carrées de taille n inversible, alors (AB) est inversible avec $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. En particulier, $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$, ce qui permet de définir la puissance négative d'une matrice inversible.

R Il y a un lien avec la formule : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. Pour démontrer que (AB) est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$, il suffit de former les deux produits :

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n \qquad \text{et} \qquad B^{-1}A^{-1}(AB) = BB^{-1} = I_n$$

■

La matrice 0 n'est évidement pas inversible, (on peut par exemple le démontrer en remarquant qu'elle n'est pas simplifiable dans l'équation $0A = 0$).
La somme de matrices inversibles n'est évidement pas inversible (dans le cas général), par exemple pour toute matrice A, $A + (-A) = 0$ n'est pas inversible.
Si A est inversible et $\lambda \neq 0$, alors (λA) est inversible d'inverse $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

VI Transposition, matrices symétriques et antisymétriques

VI.1 Transposition

Définition VI.1 Soit $A \in \mathscr{M}_{pq}$ On appelle transposée de A, la matrice ${}^tA \in \mathscr{M}_{qp}$, telle que

$$\forall i \in [\![1,q]\!], \forall j \in [\![1,p]\!], \left({}^tA\right)_{ij} = A_{ji}.$$

Autrement dit, les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A.

On verra en fin d'année une interprétation de la transposée.

! Il y a deux notations au programme : ${}^tA$ et A^T.

P En python, on utilise la fonction `transpose` du module `numpy`

■ **Exemple VI.1**

$${}^t\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

■

Proposition VI.1 On a les propriétés suivantes :
transposé de transposé Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{pq}$, on a ${}^t({}^tA) = A$,
transposé d'une somme Pour toutes matrices A et $B \in \mathscr{M}_{pq}$, on a ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

transposé d'un produit Pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_{pq}$ et $B \in \mathscr{M}_{qr}$, on a ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$,

transposé d'une puissance Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, ${}^t(A^n) = ({}^tA)^n$, que l'on note simplement ${}^tA^n$.

transposé de l'inverse Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p$ inversible, on a : ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration. Les deux premiers points sont évidents.

Démontrons la propriété sur le produit. Soient $A \in \mathscr{M}_{pq}$ et $B \in \mathscr{M}_{qr}$ deux matrices. On a :

$$\begin{aligned}
{}^t(AB)_{ij} &= (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{q} A_{jk}B_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{q} ({}^tA)_{kj}({}^tB)_{ik} = \sum_{k=1}^{q} {}^tB_{ik}\,{}^tA_{kj} \\
&= ({}^tB\,{}^tA)_{ij}
\end{aligned}$$

La relation $\forall n \in \mathbb{N}$, ${}^t(A^n) = ({}^tA)^n$, se démontre alors par récurrence en utilisant la propriété précédente.

Soit A inversible, la matrice ${}^t(A^{-1})$ existe alors et

$${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = I_n \qquad \text{et} \qquad {}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = I_n$$

Ce qui démontre que ${}^tA$ est inversible et la relation $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. ■

VI.2 Matrices symétriques et antisymétriques

En conséquence de la transposition, on définit

Définition VI.2 Soit $A \in \mathscr{M}_p$ une matrice carrée. On dit que A est une matrice symétrique si ${}^tA = A$, tandis qu'on dit qu'une matrice A est antisymétrique si ${}^tA = -A$.

Notation VI.1. *On note $\mathscr{S}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des* ***matrices carrées symétrique*** *et $\mathscr{A}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des* ***matrices carrées antisymétriques****.*

■ **Exemple VI.2** La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique.

La matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique. ■

Une matrice antisymétrique vérifie donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $A_{ii} = 0$, *i.e.* les coefficients diagonaux sont nuls.
La seule matrice symétrique et antisymétrique est la matrice nulle.

Proposition VI.2 Pour les matrices symétriques, on a :
- Si A et B sont symétriques, $A+B$ est symétrique, *i.e.* la somme de deux matrices symétriques est une matrice symétrique.
- Si A et B sont symétriques et si A et B commutent, alors AB est aussi symétrique.
- En particulier, si A est une matrice symétrique, alors $\forall n \in \mathbb{N}, A^n$ est une matrice symétrique.
- Si A est une matrice symétrique, et A inversible, alors A^{-1} est une matrice symétrique.

Démonstration. Soient A et B deux matrices symétriques, on a alors :
- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B$, donc $A+B$ est symétrique.
- ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = BA = AB$, donc AB est symétrique (si les matrices commutent).
- En raisonnant par récurrence on obtient alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, ${}^t(A^n)$ est symétrique.
- Si A est inversible et symétrique, alors on a ${}^t(A^{-1}) = \left[{}^tA\right]^{-1} = A^{-1}$, donc l'inverse de A est aussi symétrique.

■

Exercice 1 Montrer que toute matrice A s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

R Les propriétés des matrices antisymétriques sont un peu plus compliquée. On peut par contre facilement remarquer que si A et B sont antisymétriques, alors $A+B$ aussi.

VII Matrices diagonales et triangulaires, méthode de remontée

VII.1 Matrices diagonales

Définition VII.1 Une matrice diagonale est une matrice A qui vérifie : $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$, *i.e.* les seuls éléments non nuls sont sur la diagonale.

$$\text{Ainsi la matrice } A \text{ s'écrit : } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Notation VII.1. *On utilise parfois la notation* $A = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

R Les coefficients diagonaux peuvent être nuls. En particulier la matrice nulle est diagonale.

Proposition VII.1 On a les propriétés :

- La somme de matrices diagonales est diagonales, avec des coefficients diagonaux obtenus en faisant la somme des coefficients diagonaux.
  Cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_1+\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2+\alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n+\alpha_n \end{pmatrix}$$

- Le produit de matrices diagonales est diagonales, avec des coefficients diagonaux obtenus en faisant le produit des coefficients diagonaux.
  Cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_1\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2\alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\alpha_n \end{pmatrix}$$

- Une matrice diagonale est diagonale, si tous les éléments diagonaux sont non nuls. L'inverse est alors obtenue en inversant les coefficients diagonaux. Cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- La puissance p-ième d'une matrice diagonale se calcule facilement : il suffit de mettre les coefficients diagonaux à la puissance p :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

Démonstration. Il suffit de le vérifier. ■

R On retiendra en particulier qu'une matrice diagonale est très facile à inverser, ainsi qu'à mettre à la puissance n-ième.

Exercice 2 Soient D une matrice diagonale et P une matrice inversible. Soit une matrice A telle que $A = PDP^{-1}$. Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n.

VII.2 Matrices triangulaires

Définition VII.2 Une matrice triangulaire (supérieure) est une matrice carré A de taille n qui vérifie $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Ainsi, A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On définit aussi les matrices **triangulaires inférieures**.

On peut aussi définir les matrices triangulaires strictement inférieures/supérieures en imposant des coefficients diagonaux nuls.
La transposé d'une matrice triangulaire supérieure est évidemment une matrice triangulaire inférieure.

Proposition VII.2 On a les propriétés :

- La somme de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure). De plus, les coefficients diagonaux sont obtenus en faisant le produit des coefficients diagonaux.
- Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas, son inverse est aussi supérieure (resp. inférieure). De plus, les coefficients diagonaux sont alors les inverses des coefficients diagonaux.

Démonstration. Le mieux pour démontrer ces propositions est de le voir en faisant le produit de deux matrices génériques triangulaires supérieures et de voir que le **profil** est conservé par somme et produit.

Cela s'écrit avec deux matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

Et :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22}b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

Les termes marqués d'une étoile $*$ étant des termes qui sont (sauf exception) non nuls et que l'on ne calcule pas.

On peut aussi le démontrer en considérant $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$.

On a alors pour deux matrices A et B triangulaires supérieures :

- si $i > j$, on peut écrire : $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \underbrace{A_{ik}}_{0} B_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} A_{ik} \underbrace{B_{kj}}_{0} = 0$, car dans la première somme $i > j \geqslant k$, donc $A_{ik} = 0$ et dans la deuxième : $k > j$ donc $B_{kj} = 0$. Donc les termes en dessous de la diagonales sont nuls.
- si $i = j$, on a : $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{ik}}_{0} B_{kj} + A_{ii}B_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} A_{ik} \underbrace{B_{ki}}_{0} = 0$,

Le fait que l'inverse d'une triangulaire supérieure est triangulaire supérieure n'est pas évident, et se démontre en utilisant la méthode de remontée. ■

R Si une matrice est triangulaire inférieure/supérieure stricte, alors elle n'est pas inversible.

Exercice 3 Montrer qu'une matrice s'écrit toujours comme somme d'une diagonale, d'une triangulaire supérieure stricte et d'une triangulaire inférieure stricte.

Exercice 4 Montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure de taille 2×2 est triangulaire supérieure.

VII.3 Méthode de remontée

Le grand intérêt des matrices triangulaires est que si A est une matrice triangulaire et B un vecteur colonne, le système $AX = B$ se résout par **méthode de remontée**, c'est-à-dire qu'on part de la dernière ligne et que l'on calcule les inconnues au fur et à mesure, en partant de la dernière.

Soit A une matrice triangulaire supérieure de taille n et inversible, soit $B \in \mathscr{M}_{n1}$ un vecteur colonne. Le système $AX = B$ d'inconnu le vecteur $X \in \mathscr{M}_{n1}$ s'écrit :

$$
\begin{aligned}
AX =& B \\
\iff & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & & a_{nn} \\ & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Résoudre cette équation matricielle, revient donc à résoudre le système d'inconnues $(x_1, \dots, x_n)$:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \quad \dots \quad \dots \quad + a_{nn}x_n & = \quad b_1 \\
\qquad a_{22}x_2 + \quad \dots \quad + a_{2n}x_n & = \quad b_2 \\
\qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \vdots & = \quad \vdots \\
\qquad a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + \ a_{n-1\,n}x_n & = \quad b_{n-1} \\
\qquad a_{nn}x_n & = \quad b_n
\end{cases}
$$

Si la matrice A est inversible, alors comme dit dans la proposition VII.2, ses coefficients diagonaux sont alors non nuls. Le système a alors une unique solution qui se calcule rapidement :

- la dernière ligne donne x_n : $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$,
- l'avant-dernière ligne s'écrit :

$$a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n = b_{n-1},$$

on peut donc en déduire x_{n-1} sous la forme :

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1\,n-1}}\left(b_{n-1} - a_{n-1\,n}x_n\right).$$

Comme x_n est déjà calculé, on a bien x_{n-1}.

- On calcule de même les x_i pour $i = n \dots 1$. La ligne i s'écrit (avec le signe somme) :

$$\sum_{k=i}^{n} a_{ik}x_k = b_i,$$

ce qui donne x_i en utilisant les valeurs déjà calculées de x_k pour $k > j$:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k\right).$$

On voit donc qu'il y a une unique solution au système $AX = B$ si A est triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonales. On retrouve ainsi le fait que la matrice A est inversible.

De plus, on constate que chaque inconnue x_i s'exprime en fonction des (b_j) avec $j \geqslant i$. Autrement dit que la matrice A^{-1} qui vérifie donc $X = A^{-1}B$ est triangulaire supérieure.

VII.4 Algorithme de remontée en Python

Voici l'algorithme permettant de résoudre le système $AX = b$ pour une matrice A triangulaire supérieure et inversible :

```
def resoudRemontee(A,b)
    """
    entrée: A = array([n,n])
              = matrice triangulaire supérieure inversible
            b = array(n) = vecteur
    sortie: x = array(n) = vecteur solution de Ax=b
    """

    n, m = shape(A)
    k = len(b)
    if n!=m or k !=n :
        print("pb de taille!")
        return()

    x = zeros(n)

    x[n-1] = b[n-1] / A[n-1, n-1] # dernier élément

    for i in range(n-2,-1,-1):

        # on calcule la somme
        somme=0;
        for k in range(i+1,n)
            # nb: x[k] est déjà calculé
            somme +=   A[i,k]*x[k]
        x[i]= ( b[i] -somme ) / A[i,i]
```

R L'initialisation du dernier élément à part n'est pas utile : si $i = n-1$, la boucle `for k in range(i+1,n)` ne contient aucun terme, l'exécution ne rentre alors pas dans cette boucle.

On peut aussi écrire :

```
somme = sum( A[i,i+1:] * x[i+1,:])
```

VIII L'application $X \mapsto AX$

Comme on l'a vu : résoudre un système linéaire revient à déterminer les solutions d'une équation $AX = B$, avec A la matrices des coefficients, B le vecteur du second membre, et X le vecteur des inconnues. D'où l'idée d'écrire cette équation sous la forme d'une équation $\varphi_A(X) = B$.

On va ainsi découvrir par le calcul matriciel, certains résultats que l'on reverra avec plus de détails dans les chapitres sur les espaces vectoriels et les applications linéaires.

VIII.1 Image d'un matrice colonne par une matrice carrée

Rappel : On identifie les vecteurs colonnes de taille n, et les vecteurs de $\mathbb{K}^n$. En écrivant simplement :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n1} \text{ est identifié à } X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Si maintenant $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et X est un vecteur colonne de taille n, on peut effectuer le produit AX, qui est alors un vecteur colonne de taille n.

Cette opération permets d'associer à la matrice A l'application $\phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ définie par :

$$\phi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & \phi_A(X) = AX \end{array} \right.$$

On peut ainsi identifier la matrice A et l'application ϕ_A définie sur $\mathbb{K}^n$.

■ **Exemple VIII.1** Si $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, alors l'application est :

$$\phi_A : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + \cos\theta y) \\ & & = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On voit que cela corresponds à une rotation centrale de centre l'origine. ■

Définition VIII.1 On appelle l'image du vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n1}$ par la matrice $A \in \mathscr{M}_n$ le vecteur colonne AX.

On peut aussi rappeler que le calcul de la matrice AB se fait sous la forme

$$A\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 & C_2 & & C_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ AC_1 & AC_2 & & AC_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

en décomposant B par ses colonnes.

VIII.2 Linéarité de l'application ϕ_A

Proposition VIII.1 On a pour tout X et $Y \in \mathscr{M}_{n1}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\phi_A(X+Y) = \phi_A(X) + \phi_A(Y) \qquad \text{et} \qquad \phi_A(\lambda X) = \lambda\phi_A(X).$$

Démonstration. C'est la traduction de

$$A(X+Y) = AX + AY \qquad \text{et} \qquad A(\lambda X) = \lambda AX.$$

■

R La fonction ϕ_A est donc une *application linéaire*.

Il est aussi facile d'écrire une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sous forme matricielle, c'est ce que l'on fait lorsqu'on écrit un système sous forme matricielle.

■ Exemple VIII.2

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+3y+5z, x+z, 4x+3y) \\ & & = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$$

■

Proposition VIII.2 L'application ϕ_A est injective, si et seulement si pour tout vecteur X, $\phi_A(X) = 0 \Longrightarrow X = 0$.

R On trouve ainsi un premier résultat sur tous les systèmes $AX = B$: si le système homogène $AX = 0$ admet le vecteur nul comme unique solution, alors tous ces systèmes admettent au plus une solution.
On verra que pour une application linéaire, l'injectivité revient à étudier les antécédents du vecteurs nuls.

Démonstration. Supposons que l'application ϕ_A est injective, et considérons un vecteur X vérifiant : $\phi_A(X) = 0$, on peut écrire : $\phi_A(X) = \phi_A(0)$, et donc $X = 0$ puisque ϕ est injective.

Supposons que pour tout vecteur X vérifiant : $\phi_A(X) = 0$, on ait $X = 0$, et soit U et V deux vecteur colonnes tels que $\phi_A(U) = \phi_A(V)$, on a alors $\phi(U-V) = 0$ et donc $U - V = 0$ et $U = V$. D'où l'injectivité. ■

VIII.3 Décomposition d'une matrice en colonne et conséquences

Proposition VIII.3 Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ est un vecteur colonne, et A une matrice que l'on décompose en colonne :

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 & C_2 & & C_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Alors le vecteur AX (image de X par A) est la combinaison linéaire des colonnes de A :

$$AX = \sum_{i=1}^{n} x_i C_i$$

Notation VIII.1. *Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note e_i le vecteur colonne de taille n tel que $(e_i)_j$ (l'élément j de ce i-ième vecteur) est nul si $i \neq j$, vaut 1 sinon.*

Ainsi :

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \textit{ ligne } i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Ce vecteur s'interprètera plus tard comme le i-ème **vecteurs de la base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

On peut remarquer que de manière évidente, tout vecteur X est combinaison linéaire des vecteurs (e_i) :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Proposition VIII.4 Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors Ae_i est la colonne i de A. Ainsi, l'image par A du vecteur e_i (i-ième vecteur de la base canonique) est la colonne i de A.

On a aussi : ${}^t e_i A$ est la ligne i de A.

R On peut aussi voir que si deux matrices A et B vérifient : $\forall X \in \mathscr{M}_{n1}, AX = BX$, alors $A = B$. Autrement dit, si deux matrices vérifient $\phi_A = \phi_B$ alors $A = B$.

On peut aussi écrire : ${}^t e_i A e_j$ est le coefficient a_{ij}.

Démonstration. C'est un cas particulier du résultat précédent, que l'on peut facilement retrouver en faisant le produit à la main :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Sinon on peut voir :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ (Ae_i)_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(e_i)_k = A_{ji}.$$

Ce qui signifie que la j-ième coordonnée du vecteur (colonne) (Ae_i) est l'élément (j,i) de A, ce qui signifie bien que (Ae_i) est la colonne i de A.

La deuxième partie se démontre de même :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

■

D'une manière générale, la colonne j de (AB) ne dépend que de la colonne j de B, et de la ligne i de A, puisque

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{A_{ik}}_{\text{ligne } i \text{ de } A} \underbrace{B_{kj}}_{\text{colonne } j \text{ de } B}$$

On peut appliquer la proposition suivante pour calculer rapidement un produit de matrice.

■ **Exemple VIII.3** Soit $A \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$, on peut facilement faire les produits AB et BA avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit à droite revient à des opérations sur les colonnes (ou à prendre l'image de vecteurs) :

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2C_3+C_5 & C_1+C_5 & C_2+2C_5 & C_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

La produit à droite revient à des opérations sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & L_1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & L_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & L_3 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & L_4 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & L_5 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & L_2+L_4 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & L_3 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 2L_1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & L_1+L_2+2L_3 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

■

Proposition VIII.5 Supposons que l'on ait résolu les n systèmes

$$\mathscr{S}_i : AX = e_i \qquad \text{i.e. le système avec pour second membre le vecteur } e_i.$$

et que ces systèmes admettent tous une solution. On dispose donc de n vecteurs X_i vérifiant $AX_i = e_i$.

On a alors :

- d'une part tous les systèmes $AX = B$, *i.e.* avec les mêmes coefficients et un second membre quelconque, ont une solution.
- de plus une solution est : $\sum_{k=1}^{n} b_i X_i$, *i.e.* une combinaison linéaire des vecteur $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ avec les poids $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

R On verra que dans ce cas la solution est unique

Démonstration. Soit $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ un second membre d'un système $AX = B$ (donc avec les mêmes coefficients).

Alors on a facilement une solution :

$$A(\sum_{k=1}^{n} b_i X_i) = \sum_{k=1}^{n} b_i A X_i = \sum_{k=1}^{n} b_i e_i = B.$$

■

On peut dire le résultat précédent sous la forme :

Proposition VIII.6 L'application ϕ_A est surjective si et seulement si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \exists f_i \in \mathscr{M}_{n1} : \phi_A(f_i) = e_i.$$

R Ainsi, pour étudier la surjectivité, il suffit de trouver un antécédent au n vecteur e_i.

Démonstration. Si l'application ϕ_A est surjective, alors chacun des vecteurs e_i a un antécédent.

Supposons maintenant l'existence des n vecteurs f_i. On a vu qu'il y a une solution à tous les systèmes $AX = B$, quelque soit le second membre, c'est-à-dire, l'application ϕ_A est surjective. ■

R On reverra et interprétera ces résultats sur les systèmes linéaires.

IX Opérations élémentaires

Puisque résoudre un système linéaire revient à résoudre un système du type $AX = B$, avec A la matrice des coefficients et B le vecteur colonne du second membre. On cherche à faire le lien entre les opérations sur le système (échange de ligne, combinaison linéaire de lignes, etc.) et la multiplication matricielle.

Pour simplifier, on se restreint à des matrices carrées, *i.e.* des systèmes avec autant d'équations que d'inconnues. Les résultats généraux seront donnés au chapitre sur les systèmes linéaires.

Le but de cette partie est d'associer à chaque opérations élémentaires sur les systèmes une matrice.

IX.1 Vocabulaire

Définition IX.1 Deux système sont équivalents si ils ont le même ensemble de solution.

Proposition IX.1 Si P est une matrice inversible, alors les systèmes $AX = B$ et $PAX = PB$ sont équivalents.

Définition IX.2 Soient A et A' deux matrices, elles sont équivalentes par lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note alors $A \underset{L}{\sim} A'$.

IX.2 Échanger des lignes

Proposition IX.2 Soit A une matrice carré, k et l deux indices de $[\![1,n]\!]$. Faire l'opération $l_k \leftrightarrow l_l$ revient à multiplier la matrice A à gauche par une matrice inversible.

Autrement dit, il existe une matrice P_{kl} telle que pour toute matrice carrée A, $P_{kl}A$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $l_k \leftrightarrow l_l$. De plus P_{kl} est inversible.

En conséquence, on ne conserve l'équivalence des systèmes en inversant deux lignes.

On parle de l'opération de **permutation** ou de **transposition** de lignes.

Démonstration. Si la matrice P_{kl} existe alors on peut trouver son expression en remarquant que $P_{kl} = P_{kl}I$ et donc il faut effectuer l'opération élémentaire sur la matrice identité.

sur un exemple pour $n = 7$, $k = 2$ et $l = 5$, on pose donc :

$$P_{kl} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 0 & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow l_k \\ \\ \\ \leftarrow l_l \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & & \uparrow & & \\ & c_k & & & c_l & & \end{array} & \end{array}$$

On a pour toute matrice A :

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 0 & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix}$$

Enfin, il est clair que P_{kl} est inversible et $\left(P_{kl}\right)^{-1} = P_{kl}$ puisque si on effectue l'opération élémentaire sur P_{kl} on retombe sur l'identité. ■

IX.3 Multiplier une ligne par un scalaire β

Proposition IX.3 Soit A une matrice carré, i un indice de $[\![1,n]\!]$ et $\beta \in \mathbb{K}^*$. Faire l'opération $l_i \leftarrow \beta l_i$ revient à multiplier la matrice A à gauche par une matrice inversible.

Autrement dit, il existe une matrice $M_i(\beta)$ telle que pour toute matrice carrée A, $M_i(\beta)A$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $l_i \leftarrow \beta l_i$. De plus, $M_i(\beta)$ est inversible.

En conséquence, on ne conserve l'équivalence des systèmes faisant l'opération $l_i \leftarrow \beta l_i$ (avec $\beta \neq 0$).

On parle de **l'opération de dilatation** d'une ligne.

Démonstration. Toujours sur un exemple.

Par exemple si $n = 8$, on obtient $M_4(\beta)$ en faisant l'opération élémentaire sur l'identité.

$$M_4(\beta) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \beta & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow l_i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

C'est tout simplement un cas particulier très simple de multiplication par une matrice diagonale. Enfin, la matrice $M_i(\beta)$ est inversible (cas particulier d'une matrice diagonale).

On peut aussi voir que l'inverse de l'opération $l_i \rightarrow \beta l_i$ est $l_i \rightarrow \frac{1}{\beta} l_i$. ■

IX.4 Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne

Proposition IX.4 Soit A une matrice carré, $i \in [\![1,n]\!]$ et $k \in [\![1,n]\!]$, avec $k \neq i$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Faire l'opération $l_k \leftarrow l_k + \alpha l_i$ revient à multiplier la matrice A à gauche par une matrice inversible.

Autrement dit, il existe une matrice $L_{i,k}(\alpha)$ telle que pour toute matrice carrée A, $L_{i,k}(\alpha)$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $l_k \leftarrow l_k + \alpha l_i$. De plus, $L_{i,k}(\alpha)$ est inversible.

En conséquence, on ne conserve l'équivalence des systèmes faisant l'opération $l_k \leftarrow l_k + \alpha l_i$ (avec $k \neq i$).

On parle d'opérations de **transvection**.

Démonstration. Toujours sur un exemple, on obtient $L_{36}(\alpha)$ en faisant l'opération sur l'identité :

$$L_{36}(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& 1 && \\ && \alpha && & 1 & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow l_i \\ \\ \\ \leftarrow l_k \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & & & \\ && c_i &&&& \end{array} & \end{array}$$

Sur un exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& 1 && \\ && \alpha && & 1 & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61}+\alpha a_{31} & a_{62}+\alpha a_{32} & a_{63}+\alpha a_{33} & a_{64}+\alpha a_{34}a_{64} & a_{65}+\alpha a_{35} & a_{66}+\alpha a_{36} & a_{67}+\alpha a_{37} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix}$$

■

Proposition IX.5 La matrice $L_{ik}(\alpha)$ est inversible et $\Big(L_{ik}(\alpha)\Big)^{-1}$ est $L_{ik}(-\alpha)$.

Démonstration. Pour inverser l'opération $l_k \leftarrow l_k + \alpha l_i$, il faut faire : $l_k \leftarrow l_k - \alpha l_i$. ■

IX.5 Conclusion

On retiendra plusieurs points essentiels :

- Faire des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice A corresponds à multiplier la matrice A à gauche par des matrices particulières.
- Les opérations élémentaires actuellement connues sont :
  - Échanger deux lignes : $l_k \leftrightarrow l_l$. La matrice P correspondante est inversible.
  - Multiplier une ligne par un scalaire β : $l_i \leftarrow \beta l_i$. La matrice correspondante est alors inversible que dans le cas où $\beta \neq 0$.
  - Ajouter à une ligne k une autre ligne i multipliée par α : $l_k \leftarrow l_k + \alpha l_i$. La matrice $L_{ik}(\alpha)$ correspondante est alors inversible (quelque soit la valeur de α).

✎ En combinant ces opérations, on obtient les opérations élémentaires du type : $\forall k \neq i,\, l_k \leftarrow l_k + \alpha_k l_i$, qui sont inversibles quelque soit le choix des valeurs $(\alpha_k)_{k\neq i}$.
Ces opérations élémentaires seront les plus utilisées pour résoudre les systèmes : la ligne i reste inchangée et on ajoute à toutes les autres lignes $\alpha_k l_i$.
On pourra aussi faire des opérations du type : $l_k \leftarrow \beta l_k + \alpha l_i$, qui seront inversibles si $\beta \neq 0$.

✎ Lorsque l'on fait plusieurs opérations à la suite sur les lignes d'une matrice, cela revient à multiplier plusieurs fois la matrice A à gauche par différentes matrices (chaque matrice correspondant à une opération). Comme la multiplication n'est pas commutative, l'ordre dans lequel on fait ces opérations à de l'importance.

IX.6 Brêve extension aux opérations élémentaires sur les colonnes

On peut simplement constater qu'en multipliant à droite par une matrice d'opérations élémentaires, on effectue la même opération sur les colonnes.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & \alpha & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16}+\alpha a_{13} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26}+\alpha a_{23} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36}+\alpha a_{33} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46}+\alpha a_{43} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56}+\alpha a_{53} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66}+\alpha a_{63} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76}+\alpha a_{73} & a_{77} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier rapidement que c'est le cas pour toutes les opérations élémentaires.

IX.7 Opérations élémentaires en Python

En python, on peut réaliser toutes les opérations élémentaires facilement. une ligne d'une matrice s'obtient en utilisant le *slicing* : on extrait la ligne `i` avec `A[i,:]` qui est alors un `array`.

Les opérations s'écrivent alors :

Échange de ligne La technique consiste à utiliser l'affectation simultanée

```
A[i,:], A[j,:] = A [j,:], A[i,:]
```

On peut aussi passer par une variable temporaire :

```
tmp = A[i,:] # enregistre la ligne i
A[i,:] = A [j,:]
A[j,:] = tmp
```

Multiplier une ligne par un scalaire On utilise l'opération `float * array`

```
A[i,:] = beta*A[i,:]
```

Ajouter à une ligne une combinaison linéaire On utilise l'addition de `array` :

```
A[k,:] = A[k,:] + alpha*A[i,:]
```

ou encore :

```
A[k,:] += alpha*A[i,:]
```

Calcul matriciel

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Mots clés :

Matrices. Opérations sur les matrices. Produit matriciel. Matrices carrées. Formule du binôme pour les matrices. Matrices inversibles.

Transposition, matrices symétriques et antisymétriques.

Matrices particulières. Matrices diagonales. Matrices triangulaires.

Méthode de remontée. Algorithme de remontée en Python.

Savoir-faire :

- Résolution d'équation matricielle.
- Exercices classiques pour le calcul de A^n : récurrence, binôme de Newton, utilisation de suites, utilisation de la diagonalisation.
- Calcul de l'inverse par polynôme annulateur.

⋆ Équations matricielles simples

Exercice 1 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 11 & -2 \end{pmatrix}$

1. Effectuer le produit AB, que se passe-t-il pour BA ?
2. Trouver toutes les matrices X telles que $AX = B$
3. Trouver toutes les matrices X telles que $XA = B$.

Correction

1.
2. Il faut chercher les solutions avec des matrices de la forme : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. La résolution du système d'équation donne : $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (c'est la seule solution).
3. Si XA a un sens, c'est que X est de type $(p,2)$ on a alors XA de type $(p,2)$, ne peut

Exercice 2 Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les produits suivants :

$$AB,\ BA,\ AD,\ AE,\ EA,\ ED,\ EBD$$

2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $A - 2X = B$
   (b) $2A + 3(X - B) - C = 5(X + C) - 3B$

Correction : application directe du cours

Exercice 3 **Matrice nilpotente et commutant**

Soit la matrice : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer N^2 et N^3,
2. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec N, *i.e.* résoudre l'équation $XN = NX$, d'inconnue X.

Correction :

1. On obtient $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $N^3 = 0$
2. On fait l'équation $AN = NA$, avec A de taille $(3,3)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} AN = NA &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} d = g = h = 0 \\ d = e = i \\ b = d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow A = aI + bN + cN^2, \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

✯ Calcul de puissance

Exercice 4

Puissance d'une matrice et suites couplées

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$,
2. On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par la donnée de x_0 et y_0 et les relations de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n - y_n \\ y_{n+1} &= -x_n + y_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

Établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.x

3. En déduire une expression de x_n et y_n en fonction de x_0, y_0, et n.

Correction :

1. On a $A^n = 2^{n-1}A$, ce que l'on peut démontrer par récurrence.
2. $X_{n+1} = AX_n$, donc par récurrence, on a $X_n = A^n X_0$.
3. on obtient : $\begin{cases} x_n = & 2^{n-1}(x_0 - y_0) \\ y_n = & 2^{n-1}(y_0 - x_0) \end{cases}$

Exercice 5 Suite de Fibonacci et puissance

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la suite des nombres de Fibonacci $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer les coefficients de A^n au moyen des nombres de Fibonacci F_{n+1}, F_n et F_{n-1}.

Correction : récurrence. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$: « $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ »

- $\mathscr{P}_1$ est vraie, par définition de A.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A \times A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_n + F_{n+1} & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie également.

On a démontré le résultat par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 6 Formule de Newton et matrice nilpotente

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer λ et μ tels que $A = \lambda I_3 + \mu N$ avec N la matrice de l'exercice précédent.
2. Calculer A^2 et A^3 en fonction de I_3, N et N^2.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. $A = 2I + N$.
2. $A^2 = 4I + 4N + N^2$, et $A^3 = 8I + 12N + 6N^2$.
3. $A^n = 2^n I + n2^{n-1} I + \dfrac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2$.

Exercice 7 Étant donné un nombre complexe a, on définit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ On note $I = I_3$, et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer M en fonction de a, I et J.
2. Déterminer J^k pour $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de la matrice M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. (a) Exprimer M^2 en fonction de M et I,
   (b) En déduire les valeurs de a pour lesquels M est inversible et déterminer M^{-1} (lorsqu'elle existe).
   (c) Dans le cas où M est inversible, montrer que la formule trouvée au 3 est encore vraie pour $n = -1$, puis pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Correction :

1. $M = (a-1)I + J$.
2. $J^k = 3^{k-1} J$ (récurrence).
3. $M = (a-1)^n I + \dfrac{1}{3}\left[(a+2)^n - (a-1)^n\right] J$ (en utilisant Newton).
4. (a) En reprenant l'équation précédente pour $n = 2$, on obtient : $M^2 = (2a+1)M - (a-1)(a+2)M$
   (b) Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, On a :

$$M\left[\frac{1}{(a-1)(a+2)}\Big[(2a+1)I - M\Big]\right] = \left[\frac{1}{(a-1)(a+2)}\Big[(2a+1)I - M\Big]\right] M = I.$$

Si $a=1$ on obtient $M(3I-M)=0$, donc si M est inversible (par l'absurde) alors $M=3I$ (contradiction). Donc M n'est pas inversible. Pour $a=-2$, on obtient de même $M=-3I$, donc M non inversible.

(c) Pour $a\neq 1$ et $a\neq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
M^{-1} &= \frac{1}{(a-1)(a+2)}\Big[(2a+1)I-M\Big]\\
&= \frac{1}{(a-1)(a+2)}\Big[(2a+1)I-(a-1)I-J\Big]\\
&= \frac{1}{(a-1)(a+2)}(a+2)I-\frac{1}{(a-1)(a+2)}J\\
&= \frac{1}{(a-1)}I+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a-1}\right]J
\end{aligned}$$

Donc la formule est vrai pour $n=-1$.
Ai $n\in\mathbb{Z}$, on a soit $n\geqslant 0$ et la formule est vrai, soit $n=-m$ avec $m\in\mathbb{N}$, et il faut montrer que : $M^{-m}=(M^m)^{-1}=(a-1)^{-m}I+\frac{1}{3}\left[(a+2)^{-m}-(a-1)^{-m}\right]J$. Pour cela, il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}
&M^m(a-1)^{-m}I+\frac{1}{3}\left[(a+2)^{-m}-(a-1)^{-m}\right]J\\
&\qquad=\left[(a-1)^mI+\frac{1}{3}\left[(a+2)^m-(a-1)^m\right]J\right]\left[(a-1)^{-m}I+\frac{1}{3}\left[(a+2)^{-m}-(a-1)^{-m}\right]J\right].
\end{aligned}$$

Comme les matrices J et I commutent, et $J^2=3J$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&I+\frac{1}{3}\left[\frac{a-1}{a+2}^m-1+\frac{a+2}{a-1}^m-1\right]J\\
&+\frac{1}{9}\left[(a+2)^{-m}-(a-1)^{-m}\right]\left[(a+2)^m-(a-1)^m\right]J^2\\
&\qquad=I+\frac{1}{3}\left[\frac{a-1}{a+2}^m+\frac{a+2}{a-1}^m-2\right]J+\frac{1}{3}\left[1-\frac{a-1}{a+2}^m-\frac{a+2}{a-1}^m+1\right]J=I.
\end{aligned}$$

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par les valeurs de u_0 et de u_1 et la relation de récurrence

$$(R):\ u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n,$$

vraie pour tout entier naturel n.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n et de u_0 et u_1.
2. Soit la matrice
$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$
Montrer que A^n s'écrit :
$$A^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n&b_n\\b_n&a_n&b_n\\b_n&b_n&a_n\end{pmatrix}$$
avec les suites a_n et b_n vérifiant (R).
3. Déterminer A^n pour tout n.

Correction

1. suite récurrente linéaire d'ordre 2 : $r^2-r-2=(r-2)(r+1)$ $u_n=\alpha 2^n+\beta(-1)^n$ On trouve :
$$u_n=\frac{1}{3}[2^n(u_1+u_0)-(-1)^n(u_1-2u_0)].$$

2. Par récurrence.
3. En mettant ensemble les questions, on a :

$$a^n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n) \qquad b_n = \frac{1}{3}(-2^n + (-1)^n).$$

D'où A^n.

Exercice 9 Calcul de puissance par diagonalisation

Soit les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible d'inverse : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ et vérifier qu'elle est diagonale.
3. Exprimer A puis A^n en fonction de D, P et P^{-1}.
4. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

✯ Calcul d'inverse par polynôme annulateur

Exercice 10 Calcul de l'inverse par polynôme annulateur

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2,
2. Déterminer λ et μ tels que $A^2 + \lambda A + \mu I_2 = 0_2$.
3. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction :

1. On obtient : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. on a $A^2 = A + 2I$,
3. On obtient alors : $A\left(\frac{1}{2}(1-I)\right) = \left(\frac{1}{2}(1-I)\right)A = I$.

✯ Compléments

Exercice 11 On appelle **trace** d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ le réel $Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$, autrement dit la trace est la somme des éléments diagonaux.

1. Montrer que pour toutes matrices A et B, et tout scalaire λ, on a : $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$, et $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$.
2. Montrer que pour toutes matrices A et B, on a $Tr(AB) = Tr(BA)$
3. En déduire qu'il n'existe pas de matrice A et B telles que $AB - BA = I_n$.

Correction :

1. pour la somme :

$$Tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + B_{ii} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} Tr(A) + Tr(B)$$

pour le produit externe :

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda A\right)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \lambda A_{kk} = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_{kk} = \lambda Tr(A).$$

2. On a :

$$\begin{aligned}Tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki} A_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{ii} = Tr(BA).\end{aligned}$$

3. Par l'absurde, dans ce cas on obtient $Tr(AB) - Tr(BA) = 0 = n$.

Exercice 12 Matrices stochastiques

Une matrice carrée A d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est dite **stochastique** si elle vérifie les propriétés :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $A_{ij} \geqslant 0$, *i.e.* tous les coefficients de A sont positifs ou nuls,
- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 1$, *i.e.* la somme des coefficients sur chaque ligne de A fait 1.

Ces matrices interviennent dans le calcul des probabilités.

1. Donner des exemples de matrices stochastiques d'ordre n.
2. Soit A et B deux matrices stochastiques et α et β deux réels positifs ou nuls tels que $\alpha + \beta = 1$. Montrer que $\alpha A + \beta B$ est stochastique.
3. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.
4. Soit A une matrice stochastique dont toutes les lignes sont identiques, montrer que $A^2 = A$.

Correction :

1. Prendre un seul 1 par ligne, ou que des $\frac{1}{n}$ ...
2. Facile.
3. Soient A et B stochastique, et $C = AB$ on a :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \geqslant 0 \text{ somme de termes positifs}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(A_{ik} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} B_{kj}}_{=1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} = 1.\end{aligned}$$

4. On a $A_{ij} = v_i$ et les hypothèses : $v_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

On a :

$$\begin{aligned}A^2_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} v_k v_j \\ &= v_j \underbrace{\sum_{k=1}^{n} v_k}_{=1} = v_j = A_{ij}.\end{aligned}$$

Exercice 13 Un calcul d'inverse

1. Soit A et B deux matrices carrées de même ordre qui commutent. Factoriser $A^n - B^n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.
2. en déduire que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Correction :

1. C'est un résultat de cours :

$$A^n - B^n = (A-B)\left(\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k}B^k\right)$$

On peut démontrer en développant le second membre avec une somme téléscopique.

2. On écrit : $M = I + N$, où N vérifie $N^4 = 0$. Puis on applique le résultat précédent :

$$I^4 - (-N)^4 = (I - (-N))\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-N)^k\right)$$

c'est-à-dire : $I = M\left(I - N + N^2 - N^3\right)$

Comme M et N commutent (car $M = I + N$), on en déduit : M inversible et son inverse est $I - N + N^2 - N^3$.

Exercice 14 Matrices nilpotentes

Une matrice carrée M est dite **nilpotente** s'il existe un entier p tel que $M^p = 0$ (la matrice nulle).

1. Vérifier que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ dont nilpotentes.
2. Déterminer toutes les matrices nilpotentes et diagonales.
3. Montrer qu'une matrice nilpotente ne peut être inversible.
4. Montrer sur un exemple que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes n'est pas nécessairement une matrice nilpotente.
5. Soit maintenant deux matrices A et B nilpotente qui commutent.
   (a) Montrer que $A+B$ est nilpotente.
   (b) Montrer que AB est nilpotente

Correction :

1. La première est nilpotente d'ordre 2, la deuxième d'ordre 3, la dernière d'ordre 2.
2. Si $M = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M^p = diag(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)$.
   La seule matrice nilpotente et diagonale est ainsi la matrice nulle.
3. Si M est inversible, alors M est simplifiable dans une équation donc $M^p = 0$ implique $M = 0$.
4. On peut prendre l'exemple des deux matrice 2×2 proposé :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$ qui est inversible car son déterminant est non nul.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, donc :

$$M^p = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & (-1)^p \end{pmatrix}$$ un coef au moins est non nul.

5. Il faut appliquer la formule de Newton.

- Si on note p et q les ordres de nilpotence de A et de B, on a :

$$(A+B)^{p+q}=\sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}A^kB^{(p+q)-k}.$$

On a :

$$\forall k\geqslant p, A^k=0$$

et

$$\forall k\leqslant p, (p+q)-k\geqslant q,\ \text{donc } B^{(p+q)-k}=0.$$

Tous les termes sont donc nuls.

- Toujours avec les mêmes notations :

$$(AB)^{\min(p,q)}=A^{\min(p,q)}B^{\min(p,q)}=0$$

car un des deux termes est nul.

Exercice 15 Mines 2003

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3=A^2+A+I_n$.

Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B vérifiant $B^2=B$. Au sens où le terme ligne i colonne j de A^p converge vers le terme ligne i colonne j de B.

Correction :

On cherche une expression de A^p en fonction de A^2, A et I_n.

$$\begin{aligned}A^3=&\frac{1}{3}A^2+\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}I_n\\ A^4=&A\times A^3\\ =&\frac{1}{3}A^3+\frac{1}{3}A^2+\frac{1}{3}A\\ =&\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)A^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)A+\frac{1}{9}I_n\\ =&\frac{4}{9}A^2+\frac{4}{9}A+\frac{1}{9}I_n.\end{aligned}$$

On recommence :

$$\begin{aligned}A^5=&A\times A^4\\ =&\frac{4}{9}A^3+\frac{4}{9}A^2+\frac{1}{9}A\\ =&\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{27}\right)A^2+\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{27}\right)A+\frac{4}{9}I_n\\ =&\frac{16}{27}A^2+\frac{7}{27}A+\frac{4}{9}I_n.\end{aligned}$$

On démontre ainsi par récurrence :

$$\forall p\in\mathbb{N},\exists(\alpha_p,\beta_p,\gamma_p)\in\mathbb{R}^3,\ A^p=\alpha_pA^2+\beta_pA+\gamma_pI_n$$

précisément :

$$\begin{aligned}A^{p+1}=&A\times A^p\\ =&\alpha_pA^3+\beta_pA^2+\gamma_pA\\ =&\left(\beta_p+\frac{1}{3}\alpha_p\right)A^2+(\gamma_p+\frac{1}{3}\alpha_p)A+\frac{1}{3}\alpha_pI_n\end{aligned}$$

On est donc amené à étudier trois suites couplées définie par :

$$\begin{aligned}
\alpha_{p+1} &= \beta_p + \frac{1}{3}\alpha_p \\
\beta_{p+1} &= \gamma_p + \frac{1}{3}\alpha_p \\
\gamma_{p+1} &= \frac{1}{3}\alpha_p
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{p+1} \\ \beta_{p+1} \\ \gamma_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_p \\ \beta_p \\ \gamma_p \end{pmatrix}$$

On est donc ramené à calculer la puissance p-ième de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$A^p$$

Suites récurrentes réelles $u_{n+1} = f(u_n)$

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Tous les résultats donnés sur cette fiche sont à redémontrer au cas par cas. Le programme officiel parle simplement *d'exemples d'étude de suites définies par* $u_{n+1} = f(u_n)$.

Il s'agit donc ici simplement d'étudier des exemples « *en parallèle* » pour extraire une méthode générale.

Dans cette fiche, on définit le plan général d'étude des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in D \text{ donné}, \\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

où $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle. On parle de suites itérées ou de suites récurrentes.

Plusieurs remarques :

- tout d'abord se pose la question de la **définition** de la suite : il est possible que pour un n_0 donné on ait u_{n_0} qui existe mais qui ne soit pas un élément de D et donc $f(u_{n_0}) = u_{n_0+1}$ n'existe pas. On résout cette question généralement par récurrence en montrant que la suite ne « *sort* » pas de l'ensemble D.
  On utilise une proposition du type $\mathscr{P}(n)$: u_n existe et $u_n \in \mathscr{D}$.
- Les suites géométrique, arithmétique et arithmético-géométrique sont des exemples, mais hormis dans ces cas simples, **on n'a pas l'expression explicite** de u_n en fonction de n.
  De ce fait, on utilise très souvent le théorème sur **les suites monotones bornées** ou éventuellement le théorème d'encadrement.
- On utilise aussi la **récurrence**, puisque la suite est définie par récurrence.

Attention : le comportement de la suite n'est pas directement lié au comportement de la fonction : par exemple, ce n'est pas parce que la fonction f est croissante que la suite (u_n) va être croissante.
De même, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ ne signifie en rien que $\lim\limits_{n\infty} u_n = +\infty$.

⋆ Représentation graphique

La première étape de l'étude consiste à représenter les termes de la suite.

Il faut toujours faire cette étude graphique même (surtout) si cela n'est pas demandé.

Pour cela, il faut représenter la courbe $\mathscr{C}$: $y = f(x)$ et la droite Δ : $y = x$. Les points d'intersection sont les solutions de l'équation $x = f(x)$.

Ensuite, en partant de u_0 sur l'axe des abscisses,

- on le projette sur la courbe $\mathscr{C}$ (verticalement) de manière à calculer u_1. On est donc sur le point (u_0, u_1).
- On projette ce nouveau point sur Δ de manière à se mettre sur le point (u_1, u_1).
- On projette de nouveau sur la courbe $\mathscr{C}$ de manière à calculer u_2.
- Puis on retourne sur Δ pour obtenir le point (u_2, u_2).
- On réitère ce procédé (courbe $\mathscr{C}$ puis Δ).

On peut ainsi deviner la convergence et la monotonie de la suite. Il ne reste plus qu'à le démontrer.

! On commence verticalement jusqu'à la courbe de la fonction.

Les figures 9.1, 9.2 , 9.3 et 9.4 montrent le type de graphique obtenu.

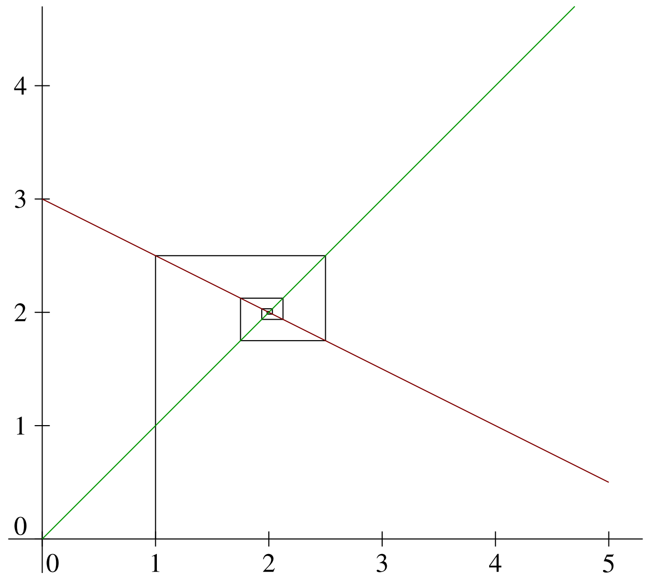


FIGURE 9.1 – Exemple de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + 3$.

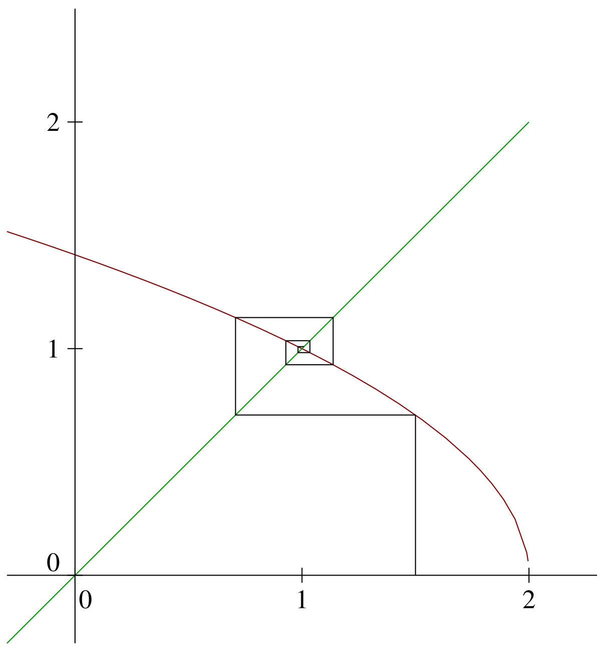


FIGURE 9.2 – Exemple de la suite définie par $u_0 = 1.5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

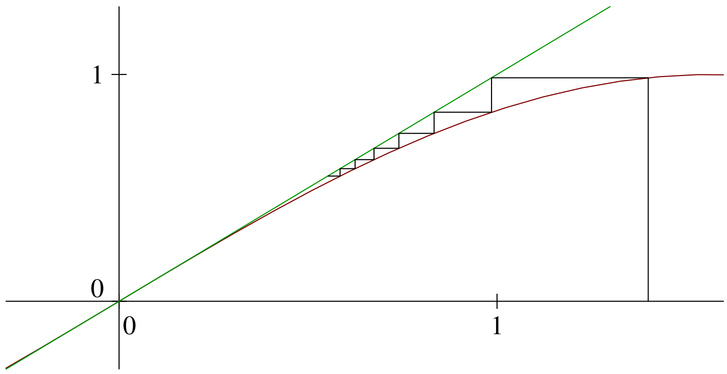


FIGURE 9.3 – Exemple de la suite définie par $u_0 = 1.5$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

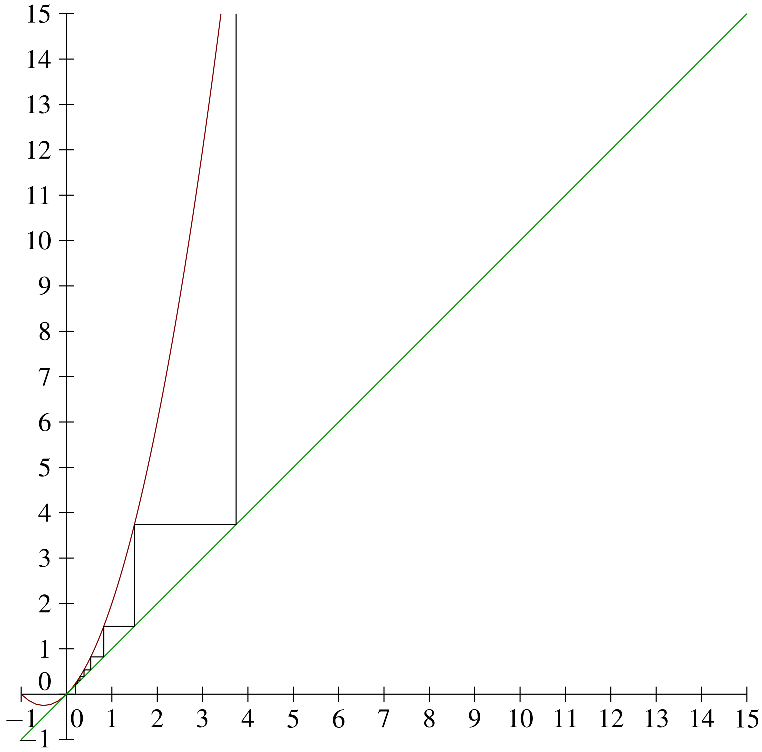


FIGURE 9.4 – Exemple de la suite définie par $u_0 = a > 0$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$

✯ Intervalle stable

La première étape consiste souvent à démontrer que la suite est bien définie. Pour cela, il s'agit de démontrer que la suite u_n ne « *sort pas* » de l'ensemble D. On utilise souvent un raisonnement par récurrence avec $\mathscr{P}(n) : u_n \in \mathscr{D}$. Pour l'hérédité, on est souvent amené à montrer que $u_n \in D \Rightarrow f(u_n) \in D$.

D'une manière générale, il est important de déterminer graphiquement les intervalles I, tels que : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$. (on dit alors que l'intervalle I est **stable** par f).

Pour déterminer un intervalle stable intéressante, il faut étudier le tableau de variation de la fonction f.

■ **Exemple IX.1** Pour la suite $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ et $u_0 = 1.5$, il s'agit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 2$. En essayant de procéder par récurrence, on voit que cela est impossible en utilisant un énoncé du type : $u_n \leqslant 2$. En étudiant les variations de la fonction f on voit que l'intervalle $[0,2]$ est stable par f. On regarde donc plus attentivement le graphique et on voit qu'en fait $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2]$.

Démontrons cette propriété par récurrence. L'initialisation est évidente. Pour l'hérédité, supposons n fixé tel que $u_n \in [0,2]$, on voit alors clairement que $0 \leqslant \sqrt{2-u_n} \leqslant 2$. D'où la proposition et l'existence de la suite.

■

Il est important de déterminer un ensemble D le plus petit possible, tel que tous les termes de la suite vérifient $u_n \in D$ à partir d'un certain rang. Cela permettra, par exemple, d'utiliser la propriété des suites monotones et bornées pour prouver la convergence.

■ **Exemple IX.2** Dans l'exemple précédent, on voit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left[0, \sqrt{2}\right]$$

■

★ Limite éventuelle, point fixe

Définition IX.3 On dit que l est un **point fixe** de f si $f(l) = l$.

Proposition IX.6 Si la fonction f est continue sur D, et si u_n converge vers une limite $l \in D$, alors u_n converge vers un point fixe.

Autrement dit la limite d'une suite itérée est toujours un point fixe.

Démonstration. En effet, si u_n converge vers l, alors $f(u_n)$ converge vers $f(l)$ par continuité, donc $l = f(l)$ et l est un point fixe. ■

À démontrer (en adaptant) à chaque utilisation. Ne pas oublier l'argument de continuité.

Il est donc important d'étudier les points fixes de la fonction f. Ce sont les intersections de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\Delta:\ y = x$. Éventuellement, on pourra étudier les variations de la fonction $g(x) = f(x) - x$ pour résoudre l'équation $(E): \quad f(x) = x$.

R Si f n'a pas de point fixe, la suite (u_n) ne peut pas converger. En particulier si la suite (u_n) est croissante, on obtient directement $\lim\limits_{n\infty} u_n = +\infty$.

! Ce n'est pas parce que la fonction a un point fixe que la suite converge vers ce point fixe.

■ **Exemple IX.3** Pour la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, et $u_{n+1} = e^{u_n}$. On voit facilement sur l'étude graphique que la suite est croissante et tends vers $+\infty$.

On étudie alors $g(x) = e^x - x$, ce qui permet de montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x > x$.

En particulier, l'équation $e^x = x$ n'a donc pas de solution, *i.e.* f n'a pas de points fixes. La suite (u_n) ne converge donc pas.

Cette même inégalité montre que la suite est croissante, puisque $u_{n+1} = e^{u_n} \geqslant 1 + u_n$.

Comme la suite est croissante et ne converge pas donc $\lim_{n\infty} u_n = +\infty$. ■

■ **Exemple IX.4** Pour la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. L'étude graphique montre que la suite est décroissante et converge vers 0.

On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$. Puis en étudiant $g(x) = \ln(1 + x) - x$, on obtient facilement : $\forall x > 0,\ 0 < \ln(1 + x) < x$, avec égalité si $x = 0$.

Ainsi :

- l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution : 0. Donc si (u_n) converge elle converge vers 0,
- Puisque $u_n \geqslant 0$, on peut remplacer x par u_n dans l'inégalité (ne pas oublier de vérifier ce point), ce qui donne $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc la suite est décroissante,
- La suite est minorée vers 0,
- En conclusion, elle converge vers 0.

■

R Ne pas oublier la relation $f(l) = l$ qui est souvent utile. En particulier si la fonction f est croissante, on a : Si $x \leqslant l$ alors $f(x) \leqslant l$, donc $]-\infty, l]$ est un intervalle stable par f.

⋆ **Monotonie**

Il y a plusieurs techniques pour démontrer la monotonie :

directement en montrant par exemple que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$. Pour cela, on peut étudier le signe de $g(x) = f(x) - x$, que l'on a déjà étudié pour déterminer les points fixes (voir les exemples ci-dessus).
Attention aux intervalles : Si l'on a $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant x$, on ne peut remplacer x par u_n que si on a déjà démontré $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$!.

par récurrence en utilisant par exemple une proposition du type $P(n):\ u_n \geqslant u_{n+1}$. C'est particulièrement utile si f est croissante. En effet, l'hérédité s'écrira par exemple : $u_n \geqslant u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$, *i.e.* $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$.
Attention : utiliser $\mathscr{P}(n)$: (u_n) est croissante n'a pas de sens !

■ **Exemple IX.5** Pour la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$, et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Déjà, on peut montrer rapidement que comme $[0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, on a par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0,1]$.

On peut ensuite montrer en étudiant la fonction définie par $g(x) = \sin(x) - x$ que $\forall x \in [0,1],\ \sin(x) \leqslant x$, avec égalité uniquement en 0.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi, la suite est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. Le seul point fixe étant 0, on obtient donc que $\lim_{n\infty} u_n = 0$. ■

Dans cet exemple, c'est plus simple de faire un raisonnement direct. Si on procède par récurrence, on est obligé de faire la démonstration directe pour l'initialisation.

■ **Exemple IX.6** Pour la suite définie par $u_0 = 0$ et la relation : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$,

On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2]$.

On démontre donc par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.

Déjà $u_2 = \sqrt{2} > u_1$, d'où l'initialisation. Pour l'hérédité, fixons $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_{n+1} \geqslant u_n$, on a alors $f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$, et donc $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$.

Ainsi, la suite est croissante. Comme la suite est croissante et majorée par 2, elle converge vers $l \in [0,2]$.

En regardant $f(l) = l$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. ■

Dans cet exemple, c'est plus simple de raisonner par récurrence.

⋆ **Étude des suites extraites u_{2n} et u_{2n+1}**

Dans certains cas (en particulier si f est décroissante), la suite n'est pas monotone, mais les suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} le sont. On est donc amené à étudier ces deux suites.

Si elles convergent vers la même limite, alors la suite (u_n) converge, sinon la suite (u_n) ne converge pas.

> On ne fait cela que si on constate sur l'étude graphique une convergence comme dans la figure 9.1.

■ **Exemple IX.7** Étudions par exemple la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

Étude graphique voir la figure 9.2, on voit une monotonie différente pour les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Intervalle : On a déjà vu $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2]$, et même $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, \sqrt{2}$.

Point fixe éventuel : En regardant l'équation $f(l) = l$, on peut aussi facilement voir qu'il n'y a qu'un point fixe qui est 1.

Monotonie : Il s'agit ensuite de démontrer que la suite extraite (u_{2n}) est décroissante. On doit donc comparer $u_{2n+2} = \sqrt{2 - \sqrt{2 - u_{2n}}}$ et u_{2n}. Si on procède directement, cela semble difficile. On choisit donc la récurrence : on utilise la proposition $P(n):\ u_{2n+2} \leqslant u_{2n}$.

Au rang 0, elle s'écrit $\sqrt{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \leqslant \frac{3}{2}$. C'est un simple calcul :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \leqslant \frac{3}{2} &\iff 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{9}{4} && \text{car les deux termes sont positifs}\\
&\iff -\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ce qui est vrai.}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'initialisation $P(0)$ est vraie.

Pour l'hérédité : on suppose $u_{2n+2} \leqslant u_{2n}$ pour un n fixé, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
f(u_{2n+2}) = u_{2n+3} \geqslant f(u_{2n}) = u_{2n+1} && \text{car } f \text{ est décroissante,}\\
f(u_{2n+3}) = u_{2n+4} \leqslant f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité.

En conclusion la suite des rangs pairs (u_{2n})est décroissante.

En procédant de même, on obtient : la suite (u_{2n+1}) est croissante.

Convergence : On a alors que (u_{2n}) est une suite décroissante minorée, qui converge donc vers une limite l. Tandis que la suite des termes impairs (u_{2n+1}) convergent vers l'.

Il reste à démontrer que $l = l' = 1$.

Des relations :

$$u_{2n+2} = \sqrt{2-\sqrt{2-u_{2n}}} = f \circ f(u_{2n}) \qquad \text{et} \qquad u_{2n+3} = \sqrt{2-\sqrt{2-u_{2n+1}}} = f \circ f(u_{2n+1}),$$

on déduit par continuité que les réels l et l' sont solutions de l'équation :

$$(E): \qquad l = \sqrt{2-\sqrt{2-l}} = f \circ f(l)$$

(ceux sont des points fixes de $f \circ f$).

Il reste à résoudre cette équation sur $\left[0, \sqrt{2}\right]$:

$$\begin{aligned}
(E) &\iff l^2 = 2-\sqrt{2-l} && \text{car } l \geqslant 0\\
&\iff \sqrt{2-l} = 2-l^2\\
&\iff 2-l = (2-l^2)^2 \text{ car } 2-l^2 \geqslant 0\\
&\iff 2-l = 4-4l^2+l^4 \iff 2+l-4l^2+l^4 = 0.
\end{aligned}$$

L'équation admet deux racines évidentes 1 (d'une manière générale, un point fixe de f est toujours point fixe de $f \circ f$) et -2. On a alors après quelques calculs :

$$\begin{aligned}
(E) &\iff (l+2)(l-1)(l^2-l-1) = 0\\
&\iff (l+2)(l-1)\left(l-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(l-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Il y a donc 4 solutions possibles : 1, -2, $\left(l-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, et $\left(l-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Seule 1 est dans l'intervalle $\left[0, \sqrt{2}\right]$.

R Il faut utiliser : $l \in \left[0, \sqrt{2}\right]$, et non $l \in [0, 2]$. D'où l'intérêt de diminuer le plus possible l'intervalle stable.

Ainsi, la limite de la suite (u_{2n}) et de la suite (u_{2n+1}) est 1.

Au final, les deux suites extraites convergent vers 1 et donc la suite (u_n) converge vers 1. ■

Voici un résumés des techniques à retenir de cet exemple :
- si f est décroissante, on peut regarder les suites extraites de rangs pairs u_{2n} et impairs u_{2n+1}.
- On peut prouver facilement la monotonie de ces suites extraites par récurrence, car comme f est impaire, les inégalités se « *renversent deux fois* ».
- Une fois prouvé la convergence de ces deux suites extraites, il reste à prouver qu'elles convergent vers la même limite, sinon bien sûr u_n ne converge pas.
- Si ces suites extraites convergent, elles convergent vers les points fixe de $f \circ f$. On est donc amené à étudier les solutions de cette équation.
- Les points fixes de f sont solution ce cette équation, qui peut en avoir d'autres.

✫ Python

En informatique, l'itération est très facile : on initialise une variable à la première valeur et on utilise l'instruction `x=f(x)` dans une boucle `for`.

■ **Exemple IX.8** Voici un exemple de code :

```
def iter(f, n, u0):
    """
    entrée: f = fonction R -> R
```

```
            n = entier = rang du terme calculé
            u0 = réel = premier terme
    sortie: u = réel = n-ième terme de la suite définie par u0 et u_{n+1} = f (u_n).
    """
    u = u0
    for i in range(n):
        u = f(u)
    return(u)
```

Il faut bien sûr adapter à chaque fois. ■

✯ Cas des fonctions contractantes

Un cas important est celui d'une fonction où il existe $0 < k < 1$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

(on dit que la fonction f est **contractante**.)

On suppose que la fonction f admet un point fixe c. On a alors : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - c| \leqslant k^n |u_0 - c|.$$

En particulier, la suite u_n converge vers le point fixe c.

La démonstration se fait par récurrence, on pose donc $P(n) :\ |u_n - u| \leqslant k^n |u_0 - u|$. Pour $n = 0$, la proposition $P(0)$ est évidente. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ est vraie, on a alors :

$$|f(u_n) - f(c)| = |u_{n+1} - c| < k|u_n - c| \leqslant k^{n+1}|u_0 - c| \text{ d'après HR.}$$

D'où la proposition.

La conclusion provient de $0 < k < 1$ donc $k^n \to 0$

Ici encore tout est à adapter à l'exercice.

Enfin, on démontre souvent qu'une fonction est contractante en utilisant le **théorème des accroissements finis,** et une majoration de la dérivée du type : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant k$.

En effet, on écrit alors pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$, ainsi :

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \leqslant k|x-y|.$$

Exercice 1 Étudier les suites suivantes :

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1). \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 \in [-1,0] \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1). \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{1+3u_n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}. \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 1 - u_n^2 \end{cases}$$

Exercice 2 Étudier la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 2} - 3$ en fonction du premier terme u_0

Correction :

1. Si $u_0 < -2$, la suite n'est pas défine sur $\mathbb{N}$.
2. Posons $D = [-2; +\infty[$ et

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\sqrt{x+2} - 3 \end{array} \right.$$

La fonction f est continue sur l'intervalle $[-2; +\infty[$ et dérivable sur $]-2; +\infty[$.

Nous avons :

$$\forall x > -2,\ f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x+2}} > 0$$

Elle est donc strictement croissante sur $[-2;+\infty[$. Elle y est continue et a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. (faire un tableau de variation).
Finalement, f réalise une bijection de $[-2;+\infty[$ dans $[-3;+\infty[$. D n'est pas stable par f. Essayons de partitionner D de manière à faire apparaître des sous-domaines stables. (Dessin du graphique de f, attention, point de tangence, intuitions des comportements).

3. Résolvons $f(x) \geqslant x$ sur $[-2;+\infty[$. Nous avons pour $x \geqslant -2$:

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant x &\iff 2\sqrt{x+2} \geqslant x+3 \\ &\iff 4(x+2) \geqslant (x+3)^2 && \text{car } x \geqslant -2 \text{ donc } x+3 \geqslant 0 \\ &\iff x^2+2x+1 \leqslant 0 \\ &\iff (x+1)^2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

4. Décomposons D en $[-2;-1[\cup\{-1\}\cup]-1;+\infty[$.
   (a) Si $u_0 \in]-1;+\infty[$. $]-1;+\infty[$ est stable par f (cf. variations et valeurs de f). $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît strictement. Elle est majorée par -1. Elle converge vers un réel $\ell \geqslant -1$. f est continue sur $[-1;+\infty[$. Par conséquent, ℓ est un point fixe de f. Ainsi, $\ell = -1$.
   (b) Si $u_0 = -1$, f est constante à -1.
   (c) Si $u_0 \in [-2;-1[$, et *si on suppose que la suite existe,* on montre par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît. Mais comme la suite existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait à valeurs dans $[-2;u_0]$ et convergerait vers un réel $\ell \in [-2;u_0] \subset [-2;-1[$. f est continue sur $[-2;u_0]$. Elle l'est en particulier en ℓ, donc ℓ serait un point fixe de f. Le seul point fixe de f est -1. Cela est incompatible avec $\ell \in [-2;u_0]$. Pour $u_0 \in [-2;-1[$, la suite n'est pas définie sur $\mathbb{N}$: il existe un rang N_0 où $u_{N_0} < -2$ et donc u_{N_0+1} n'existe pas.

10 — Systèmes linéaires

I Généralités sur les systèmes linéaires

I.1 Définitions

Définition I.1 On appelle système linéaire à n équations et p inconnues $x_1,\dots,x_p$ un système (S) de la forme :

$$(S)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+\dots a_{1p}x_p &= b_1 \qquad (l_1)\\ a_{21}x_1+\dots a_{2p}x_p &= b_2 \qquad (l_2)\\ \vdots &= \vdots \\ a_{n1}x_1+\dots a_{np}x_p &= b_n \qquad (l_n)\end{cases}$$

Comme on l'a vu, cela revient à regarder le système $AX=B$, avec :

- A est la matrice (n,p) qui contient les coefficients du système, *i.e.* les $(a_{ij})_{i=1\dots n,\, j=1\dots p}$,
- X est le vecteur des inconnues
- et B le second membre.

Une solution de ce système est un élément X de $\mathbb{K}^p$, avec $X=(x_1,\dots,x_p)$, qui vérifie toutes les équations.

Deux système sont équivalents s'ils ont le même ensemble solution.

Un système est dit compatible si il admet des solutions, sinon il est dit incompatible.

■ **Exemple I.1** Le système :

$$\begin{cases} x+y=3\\ x-y=2\end{cases}$$

en faisant la somme des lignes, on a $2x=5$, donc $x=\frac{5}{2}$, tandis que si on fait la différence des lignes, on a $2y = 1$, donc $y = \frac{1}{2}$. Donc ce système a une unique solution :

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Par contre, si on considère juste le système constitué de la première ligne :

$$\{x + y = 3$$

Tout élément de la forme $(3 - y, y)$ est solution, on, écrit alors :

$$\mathscr{S} = \left\{ (3 - y, y) | y \in \mathbb{R} \right\}$$

et le système a une infinité de solutions : on a un degré de liberté, $y \in \mathbb{R}$.

Cette représentation n'est pas unique, on peut en effet prendre x comme degré de liberté, et obtenir :

$$\mathscr{S} = \left\{ (x, 3 - x) | x \in \mathbb{R} \right\}.$$

La représentation est différente, mais bien sûr l'ensemble $\mathscr{S}$ est le même.

Enfin, si on ajoute une équation :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \\ 2x + y = \lambda \end{cases}$$

Pour que (x, y) soit solution, il faut nécessairement que les deux premières équations soient satisfaites, c'est-à-dire que $x = \frac{5}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$. Ainsi,

- Si $\lambda = \frac{11}{2}$, le système a toujours une unique solution :

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

- Si $\lambda \neq \frac{11}{2}$, le système n'a pas de solutions :

$$\mathscr{S} = \emptyset$$

■

Sur l'exemple, on voit qu'un système peut n'avoir aucune solution, une unique solution ou une infinité de solutions.

✎ Notons que la matrice A ne contient pas *a priori* de colonne de zéros : une colonne de zéros correspond à une inconnue qui n'intervient pas.
De même, une ligne de zéros correspond à une équation du type $0 = b_i$, ce qu'on appelle une **équation de compatibilité** : si elle n'est pas vérifié, il n'y a pas de solution.

✎ Si A est inversible, on a une unique solution quelque soit le second membre : $X = A^{-1}B$.

⋆ Interprétation géométrique

Toute droite D du plan admet une équation cartésienne de la forme :

$$D: \qquad ax+by+c=0$$

avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a,b) \neq 0$.

Autrement dit la droite D est l'ensemble des points $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient : $ax+by+c=0$. De plus, le vecteur (a,b) est un **vecteur normal** à la droite D et le vecteur $(-b,a)$ est un **vecteur directeur** de la droite D.

Ainsi, chercher l'intersection de la droite D d'équation $ax+by+c=0$ et de la droite D' d'équation $a'x+b'y+c'=0$ revient à étudier les solutions du système linéaires 2×2 :

$$\begin{cases} ax+by=-c \\ a'x+b'y=-c' \end{cases}$$

✎ On retrouve en particulier le fait que ce système peut

- n'avoir aucune solution (les deux droites D et D' sont parallèles),
- avoir une unique solution (les droites sont sécantes)
- ou une infinité de solutions (les deux droites sont confondues)

Tout plan P de l'espace admet une équation cartésienne de la forme :

$$P: \qquad ax+by+cz+d=0$$

avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et $(a,b,c) \neq 0$

C'est-à-dire que le plan P est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant $ax+by+cz+d=0$. Le vecteur (a,b,c) est **normal au plan** P.

Ainsi, chercher l'intersection du plan $P: ax+by+cz+d=0$ et du plan $P': a'x+b'y+c'z+d'=0$ revient à résoudre un système 3×3

$$\begin{cases} ax+by+cz=-d \\ a'x+b'y+c'z=-d' \end{cases}$$

I.2 Équivalence des systèmes et multiplication matricielle

Proposition I.1 Si P est une matrice inversible, alors le système

$$(S) \iff AX=B \iff PAX=PB,$$

donc on **garde l'équivalence du système** $AX=B$ **en multipliant** (à gauche) **la matrice** A **et le second membre** B **par une matrice inversible.**

Démonstration. En effet, si $AX=B$, alors $PAX=PB$, et si $PAX=PB$, alors en multipliant par P^{-1}, on obtient $AX=B$. ■

On utilise souvent la commodité d'écriture suivante :

Définition I.2 — Matrice augmentée. Pour représenter le système $AX = B$, on peut utiliser la matrice augmentée $(A|B)$ obtenue en ajoutant à la matrice A la colonne B.

Cela permet de simplifier l'écriture :

Proposition I.2 Soit le système $\mathscr{S}$ de matrice augmentée M, P une matrice inversible et $\mathscr{S}'$ le système de matrice augmentée PM. Alors $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ sont équivalents.

R Écrire le système sous forme matriciel permet de simplifier l'écriture et donc d'éviter les erreurs lors de la résolution « à la main ».

■ **Exemple I.2** Le système :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases}$$

s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

avec la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

■

I.3 Opérations élémentaires

Définition I.3 On considérera comme opération élémentaire :

- **La permutation** de deux lignes j et k, $l_j \leftrightarrow l_k$
- **La multiplication** d'une ligne par un scalaire β non nul, $l_i \leftarrow \beta l_i$ (appelée **dilatation**).
- **La transvection :** Ajouter la ligne i multipliée par un cœfficient α à la ligne k : $l_k \leftarrow l_k + \alpha l_i$ la ligne i restant inchangée.

Deux matrices A et A' sont **équivalentes par les lignes**, noté $A \underset{L}{\sim} A'$ si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite d'opérations élémentaires inversibles.

✎ On peut combiner ces opérations élémentaires, pour faire par exemple :

$$\forall k \neq i,\ l_k \leftarrow l_k + \alpha_k l_i$$

Ces opérations sont inversibles quelque soit les coefficient α_k choisis (mais la ligne i doit rester inchangée).
On utilisera aussi des opérations du type : $l_k \leftarrow \beta l_k + \alpha l_i$, qui sont inversibles si $\beta \neq 0$.

Chacune de ces opérations élémentaires corresponds, comme on l'a vu, à multiplier la matrice A à gauche par une matrice inversible. L'expression de cette matrice est obtenue en appliquant l'opération sur l'identité.

On obtient donc la proposition :

Proposition I.3 En effectuant des opérations élémentaires sur un système (coefficients et seconds membres), on conserve l'équivalence entre les systèmes.

✎ Lorsqu'on utilise les opérations élémentaires pour résoudre un systèmes, les points les plus importants sont donc :

- Indiquer quelles sont les opérations faites ,
- vérifier que ces opérations ont un sens (ne pas diviser par 0),
- vérifier que les opérations faites sur les matrices sont inversibles,
- indiquer l'ordre dans lequel on fait ces opérations, si celui-ci a de l'importance. Pour la rédaction :
  - ∗ on effectue un groupe d'opérations dont l'ordre est quelconque, il faut indiquer les opérations effectuées (ex : $l_2 \leftarrow l_2 + l_1$, $l_3 \leftarrow l_3 + 2l_1$),
  - ∗ puis, on écrit la matrice obtenue.
  - ∗ on recommence.

✎ Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes du système revient à effectuer ces opérations sur la matrice augmentée. Il est ainsi plus simple d'écrire le système sous forme matricielle. On peut écrire la matrice augmentée ou écrire le système sous la forme $AX = B$ en détaillant A et B.

✎ Il existe aussi la notation $A \underset{C}{\sim} A'$, mais les opérations sur les colonnes n'ont pas d'interprétation pour les systèmes. On rappelle qu'une opération élémentaire sur les colonnes revient à multiplier la matrice A à droite par la matrice inversible correspondante.

I.4 Systèmes échelonnés

Définition I.4 Une matrice est dite échelonnée par ligne si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

i Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;

ii À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Un système est dit échelonné si la matrice correspondante est échelonnée par ligne.

Lorsqu'une matrice est échelonnée par ligne, on appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

✎ Une matrice échelonnée a un profil *en escalier*. Par exemple, une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont tous non nuls. **La notion de matrice échelonnée généralise ainsi celle de matrice triangulaire supérieure**.

■ **Exemple I.3**

$$A = \begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & \square & * & * & * \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

où les $\square$ désignent des éléments non nuls, les $*$ des éléments quelconques, et les termes vides sont nuls. ■

En changeant l'ordre des inconnues, on peut toujours ramener un système échelonné à un système où le nombre de 0 augmente de 1 à chaque ligne, *i.e.* où A est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & \square & * & * & * \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

L'intérêt des systèmes échelonnés est qu'ils se résolvent facilement :

Proposition I.4 Pour résoudre un système échelonné on utilise la méthode de substitution, semblable la méthode de remonté :

- On regarde si **les équations de compatibilité** sont vérifiées, sinon il n'y a pas de solution.
- On part ensuite de la dernière équation, et on détermine la dernière inconnue. L'inconnue dont le coefficient est un pivot est une **inconnue principale**. Elle est déterminée éventuellement en fonction d'autres inconnues que l'on appelle On parle **d'inconnue secondaire**. Les inconnues secondaires peuvent prendre toutes les valeur de $\mathbb{K}$.
- On remonte ensuite en déterminant les inconnues en partant de la fin. À chaque ligne, on détermine une inconnue principale (celle qui a un coefficient pivot) en fonction des inconnues déjà déterminées (principales et secondaires).

On obtient alors les solutions du problème.

Plus précisément, un système échelonnée admet :

- aucune solution,
- une unique solution,
- une infinité de solutions avec des inconnues secondaires qui peuvent prendre toutes les valeurs de $\mathbb{K}$.

R Cette proposition pourrait être utilisée comme définition d'un système échelonné : un système est échelonné si il peut se résoudre par substitution.

Démonstration. Pour simplifier, on suppose que l'on a échangé l'ordre des inconnues comme dans la remarque ci-dessus. Une fois vérifiée les équations de compatibilité, on a un système de la forme :

$$\begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * \end{bmatrix} X = B$$

Soit l_r la dernière ligne du système, elle s'écrit :

$$\square x_r + *x_{r+1} + *x_{r+2} + \cdots * x_p = b_r$$

On a donc :

$$x_r = \frac{1}{\square}\left(b_r - *x_{r+1} + *x_{r+2} + \cdots * x_p\right).$$

La valeur de x_r s'exprime donc en fonction de $p-r$ paramètres, qui seront les degrés de liberté. On dit que x_r est une **inconnue principale** et que $(x_{r+1},\dots,x_p)$ sont des **inconnues secondaires**.

On reporte ensuite cette valeur dans les lignes du dessus, de proche en proche. La ligne i s'écrit :

$$\square x_i + \sum_{k=i+1}^{n} *x_k = b_i.$$

On peut donc écrire x_i en fonction des valeurs de $(x_k)_{k>i}$:

$$x_i = \frac{1}{\square}\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} *x_k\right),$$

Les valeurs $(x_k)_{i<k\leqslant r}$ étant déjà calculées par les lignes situées en-dessous, les autres valeurs $(x_k)_{k>r}$ étant libres. La variable x_i est alors une **inconnue principale**. Sa valeur s'exprime en fonction des précédente éventuellement en fonction des inconnues secondaires. ■

■ **Exemple I.4** Pour le système : $\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ 2y+z=3 \\ z=-1. \end{cases}$, l'inconnue z est déjà déterminé, on remplace donc dans la ligne 2 pour obtenir y : $\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ y=2 \\ z=-1. \end{cases}$ puis x en remplaçant dans la ligne 1 : $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-1. \end{cases}$.

Il y a donc une seule solution : $\mathscr{S} = \left\{(1,2,-1)\right\}$. (on a ici un système échelonné qui se résout par remontée). ■

■ **Exemple I.5** Pour le système : $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y=-1+z \end{cases} \iff \begin{cases} x=3+3z \\ y=-1+z \end{cases}$

L'ensemble des solutions est : $\mathscr{S} = \left\{(3+3z,-1+z,z) \,\middle|\, z\in\mathbb{R}\right\}$. (on a ici un système échelonné où un degré de liberté apparaît à la dernière ligne). ■

■ **Exemple I.6** Pour le système : $\begin{cases} x+y-z=1 \\ z=1 \end{cases} \iff \Big\{ x = 2-yz=1$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \Big\{ (2-y,y,1) \Big| y \in \mathbb{R} \Big\}$. (on a ici un système échelonné où un degré de liberté apparaît en remontant). ■

■ **Exemple I.7** Pour le système : $\begin{cases} -x-3y+z+t=0 \\ z=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-3y-3+t \\ z=-3 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \Big\{ (-3y-3+t,y,-3,t) \Big| (y,t) \in \mathbb{R}^2 \Big\}$. (on a ici un système échelonné où deux degrés de liberté apparaissent). ■

II Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss

II.1 Échelonnement d'une matrice

Proposition II.1 Soit A une matrice de taille (n,p), il existe une matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $U = MA$ soit échelonnée.

De plus, M peut s'écrire comme le produit de matrices d'opérations élémentaires.

Autrement dit, en effectuant des opérations élémentaires sur la matrice A, on peut la rendre échelonnée.

Ou encore : il existe une matrice échelonnée U telle que $A \underset{L}{\sim} U$

Algorithme de réduction de Gauss. La démonstration se fait en déterminant un algorithme permettant de calculer U. On procède colonne par colonne. Considérons tout d'abord la première colonne : si elle ne contient que des zéros alors on passe à la suivante.

Sinon,

- on regarde le premier élément non nul de la première colonne, supposons que ce soit l'élément ligne k,
- on fait l'opération : $l_1 \leftrightarrow l_k$, de cette manière l'élément a_{11} est non nul,
- on fait les opérations

$$\forall k > 1,\ l_k \leftarrow l_k + \alpha_{k1} l_1,$$

avec $\alpha_{k1} = -\frac{a_{j1}}{a_{11}}$. De cette manière, on met des éléments non nuls sur la première colonne des lignes 2 à n. On peut dire que l'on utilise la ligne 1, pour obtenir des termes nul en dessous, plus précisément, on utilise le terme non nul a_{11} pour obtenir : $\forall j > 1, a_{j1} = 0$.

La matrice ainsi obtenue est alors de la forme :

$$\begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Cette matrice est obtenue en multipliant la matrice A à gauche par un produit de matrice d'opérations élémentaires, puisque l'on a fait que des opérations élémentaires.

On applique alors le même procédé à la sous matrice de taille $(n-1, p-1)$, contituée des lignes de 2 à n et des colonnes de 2 à p :

- Si cette partie ne contient que des zéros, on ne fait rien,
- sinon on échange deux lignes de manière à avoir $a_{22} \neq 0$,
- on utilise cette valeur non nulle, pour éliminer les valeurs situées en dessous.

En appliquant le même procédé, on obtient une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

En continuant ainsi le procédé, on obtient une matrice échelonnée, on note U cette matrice.

De plus, on voit que l'on n'a fait que des opérations élémentaires, *i.e.* on a multiplié à gauche la matrce A par des matrices d'opérations élémentaires. La matrice U obtenue à la fin s'écrit donc : $U = \underbrace{M_p M_{p-1} \dots M_1}_{M} A$, où les matrices M_i correspondent à chaque opérations élémentaires faites sur la matrice A pour traiter la colonne p.

On obtient donc le résultat en posant $M = M_p M_{p-1} \dots M_1$. ■

✭ Réduction de Gauss d'un système

Proposition II.2 En utilisant une succession d'opérations élémentaires on peut trouver un système équivalent à (S) qui soit échelonné.

Démonstration. L'algorithme et la démonstration sont les mêmes que pour les matrices. Le système est équivalent à $AX = B$, en multipliant par M, cela s'écrit $UX = MB$. Ce qui signifie qu'en effectuant les mêmes opérations sur le second membre, on obtient un système équivalent échelonné. ■

On a ainsi obtenu une méthode pratique de résolution de système : on rend le système échelonné, puis on résout par substitution. Attention à faire les opérations sur le système ET sur le second membre, autrement dit de les faire sur la matrice augmentée.

II.2 Réduction complète, algorithme de Gauss-Jordan

On peut prolonger la réduction d'une matrice en éliminant les valeurs situés au dessus des pivots :

Définition II.1 Une matrice échelonnée est dite échelonnée réduite par ligne si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne

■ **Exemple II.1** Voici une forme possible pour une matrice échelonnée réduite par ligne :

$$\begin{bmatrix}
\boxed{1} & & * & & * & * & & * & * & * \\
& \boxed{1} & * & & * & * & & * & * & * \\
& & & \boxed{1} & * & * & & * & * & * \\
& & & & & & \boxed{1} & * & * & * \\
& & & & & & & & & \\
& & & & & & & & &
\end{bmatrix}$$

■

Proposition II.3 Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

R L'unicité est admise !

Démonstration. Il suffit de prolonger la réduction de Gauss : après avoir réduit la matrice en une matrice échelonnée, on utilise de nouveaux les opérations sur les lignes pour :

- Remplacer les pivots (qui sont non nuls) par des 1,
- Éliminer le reste des colonnes où il y a des pivots.

On obtient alors une matrice échelonnée réduire par ligne.

De manière symbolique, on a réduit la matrice en une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix}
\square & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
& \square & * & * & * & * & * & * & * & * \\
& & & \square & * & * & * & * & * & * \\
& & & & & & \square & * & * & * \\
& & & & & & & & & \\
& & & & & & & & &
\end{bmatrix}$$

Par des opérations de dilatation sur les lignes, on voit que l'on peut rendre les pivots égaux à 1. Ensuite, en utilisant le pivot l_4, on se ramène par des opérations élémentaires de transvection à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix}
\boxed{1} & * & * & * & * & * & & * & * & * \\
& \boxed{1} & * & * & * & * & & * & * & * \\
& & & \boxed{1} & * & * & & * & * & * \\
& & & & & & \boxed{1} & * & * & * \\
& & & & & & & & & \\
& & & & & & & & &
\end{bmatrix}$$

En utilisant de même les pivots de la ligne 3 puis de la ligne 2, on obtient une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & & * & & * & * & & * & * & * \\ & \boxed{1} & * & & * & * & & * & * & * \\ & & & \boxed{1} & * & * & & * & * & * \\ & & & & & & \boxed{1} & * & * & * \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

On a bien échelonné et réduit la matrice. ■

R On ne peut rien faire sur les colonnes qui ne contiennent pas de pivot avec des opérations sur les lignes.

En pratique, on peut aussi modifier l'algorithme de Gauss pour à chaque étape obtenir des colonnes avec un unique 1 là où il y a un pivot.

III Ensemble des solutions d'un système linéaire

III.1 Notion de rang

Définition III.1 Le rang d'une matrice A est le nombre de pivot dans l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente à la matrice A.

Le rang d'un système est le rang de la matrice de ces coefficients.

✎ Le rang d'un système ne dépend donc pas du second membre. On l'obtient en réduisant la matrice du système en une matrice échelonnée par lignes et en comptant les pivots.
On n'est pas obligé de la réduire entièrement, il suffit de l'échelonner par lignes.

✎ On verra une meilleure définition dans les chapitres suivants. On a admis l'unicité de la matrice échelonnée réduite par lignes. On admet ainsi que cela ne dépend pas de l'ordre des lignes ni de la manière dont on fait des opérations sur les lignes pour la réduire.

Toujours pour simplifier, on se place dans le cas où on a échangé l'ordre des inconnues dans le système, pour que le nombre de 0 qui commence chaque ligne augmente de 1 à chaque ligne.

On note p le nombre d'inconnues et n le nombre d'équations, r le rang. Quatre cas sont possibles :

- Cas 1 si $r = p = n$, la matrice est triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale (*i.e.* inversible),
- Cas 2 si $r = n < p$, la matrice contient une dernière ligne non réduite à un seul élément,
- Cas 3 si $r = p < n$, la matrice contient des lignes de 0 à la fin.
- Cas 4 si $r < p$ et $r < n$, la matrice contient des lignes de 0 à la fin. et une dernière ligne non réduite à un seul élément.

Ces quatre cas s'écrivent de manière symbolique par :

$$1 = \begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & \square & * & * & * \\ & & & & \square & * & * \\ & & & & & \square & * \\ & & & & & & \square \end{bmatrix} \qquad 2 = \begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & \square & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$3 = \begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & \square & * & * & * \\ & & & & \square & * & * \\ & & & & & \square & * \\ & & & & & & \square \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \qquad 4 = \begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & \square & * & * & * \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

III.2 Systèmes de Cramer

Commençons par étudier de cas de **systèmes carrées** c'est à dire les systèmes qui ont autant d'équations que d'inconnues. De tels systèmes ne peuvent être que dans le cas 1 ou le cas 4.

Définition III.2 Un système est dit de Cramer (de rang plein) s'il a autant d'équations que d'inconnues et si le rang est égal aux nombres de lignes. *i.e.* $p = n = r$.
Autrement dit un système carrée est de Cramer si il se réduit dans le cas 1.

✎ Le fait d'être de Cramer ne dépend pas du second membre, uniquement de la matrice A.
Un système de Cramer se réduit en un système triangulaire avec une matrice inversible.
Si on poursuit la réduction, la matrice du système se réduit à l'identité, c'est-à-dire $A \underset{L}{\sim} I_n$.

Proposition III.1 — Système de Cramer et matrices inversibles. Pour une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on a l'équivalence entre :

i A est inversible, (on dit aussi de **rang plein**)
ii $A \underset{L}{\sim} I_n$ (autrement dit, on est dans le cas 1)
iii Le système $AX = 0$ n'admet comme solution que la solution nulle.
iv Pour tout second membre B, le système $AX = B$ admet au plus une solution ;
v Pour tout second membre B, le système $AX = B$ admet au moins une solution ;

Démonstration. Supposons la matrice A inversible, alors en la réduisant avec l'algorithme de Gauss, on sait qu'il existe une matrice M inversible et U une matrice échelonnée telle que $MA = U$. Ainsi, la matrice U est inversible comme produit de matrice inversible. Une matrice échelonnée et inversible est nécessairement triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale. Ainsi, on est dans le cas 1. En continuant la réduction pour obtenir une matrice échelonnée réduite, on voit que la matrice A se réduit en la matrice identité. Ainsi, $A \underset{L}{\sim} I_n$. D'autre par dans ce cas le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle comme solution, et pour tout second membre B, on a $AX = B$ admet une solution et une seule.

On a donc :

$$\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)} \quad \text{(i)} \Longrightarrow \text{(iii)} \quad \text{(i)} \Longrightarrow \text{(iv)} \quad \text{(i)} \Longrightarrow \text{(v)}$$

Pour la réciproque, remarquons déjà que si la matrice A se réduit dans le cas 1, alors elle est inversible. En effet, dans ce cas, on a : $A \underset{L}{\sim} I_n$ (c'est-à-dire (ii)) et on a alors l'existence d'une matrice M inversible correspondant aux opérations élémentaires permettant de passer de la matrice identité à la matrice A. Ainsi, on a $MI = A$ et A est inversible comme produit de matrice inversible.

Les réciproques en découlent immédiatement :

- Supposons (iii). Par l'absurde, supposons que l'on soit dans le cas 4, après réduction on obtient alors un système de la forme :

$$\begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & \square & * & * & * \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} X = 0$$

  Ce système admet des solutions non nulles (il suffit de mettre des termes non nuls sur les lignes vides par exemple la dernière). D'où la contradiction
  On ne peut donc pas être dans le cas 4 (autrement dit il n'y a pas d'inconnues secondaires), on est donc dans le cas 1. Et donc la matrice est inversible.
- Supposons (iv), alors en particulier le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle, c'est-à-dire (ii) donc la matrice est inversible d'après le cas précédent.
- Supposons (v), c'est-à-dire pour tout second membre B, le système $AX = B$ admet une solution. Raisonnons encore par l'absurde en supposant que l'on est dans le cas 4, on a alors :

$$\forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & \square & * & * & * \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} X = B$$

En choisissant B avec un terme non nuls sur les lignes vides (par exemple la dernière), on voit que cela n'est pas possible.
On ne peut donc pas être dans le cas 4 (autrement dit il ne peut pas y avoir de condition de compatibilité), on est donc dans le cas 1. Et donc la matrice est inversible.

On a donc :

$$(\text{ii}) \implies (\text{i}) \quad (\text{iii}) \implies (\text{i}) \quad (\text{iv}) \implies (\text{i}) \quad (\text{v}) \implies (\text{i})$$

et donc les équivalences. ■

✎ On retrouve ainsi le propriétés de l'application $X \mapsto AX$ vue au chapitre précédent.

Corollaire III.2 Toute matrice inversible est produit de matrices d'opérations élémentaires.

Démonstration. Si A est inversible, alors il existe une suite d'opérations élémentaires qui transforme I_n en A. Si la i-ième opérations corresponds à une matrice M_i, alors :

$$A = M_n M_{n-1} \dots M_1 I_n = M_n M_{n-1} \dots M_1$$

ainsi, A est produit de matrices d'opérations élémentaires. ■

Proposition III.3 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible (et par conséquence $B = A^{-1}$).

De même, si il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible (et donc $B = A^{-1}$).

Ainsi, pour démontrer qu'une matrice carrée A est inversible, il suffit de trouver une matrice B telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$

Démonstration. On suppose qu'il existe B telle que $AB = I_n$.

Montrons que B est en fait inversible pour cela, on considère X tel que $BX = 0$. On a alors $ABX = 0$ te donc $X = 0$. Ainsi, la seule solution de $BX = 0$ est $X = 0$, donc B est inversible. En multipliant par B^{-1}, on déduit de $AB = I_n$ que $A = B^{-1}$. Ainsi, A est inversible.

On suppose maintenant qu'il existe A telle que $BA = I_n$. On a alors de même B inversible (résultat précédent) et donc $A = B^{-1}$. ■

III.3 Les autres cas

Maintenant, supposons que l'on soit dans le cas 3 ou 4. Le système, une fois mis sous forme échelonnée, est alors fini par des équations du type $0 = b_i$. Ce sont les **équations de compatibilité**.

On a alors deux cas :

- Soit effectivement les dernières lignes sont l'évidence $0 = 0$, et on peut alors les enlever du système, cela revient alors au cas où il n'y a pas de ligne du type $0 = b_i$, *i.e.* au cas 1 (pour le 3) ou 2 (pour le 4).
- Soit ce n'est pas le cas, et le système n'a pas de solution, le système est incompatible.

Dans le cas 2, on a un système de la forme :

$$\begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * \end{bmatrix} X = B$$

comme on l'a vu avec la méthode de substitution, les solutions dépendent de $p-r$ inconnues secondaires, en particulier il y a une infinité de solutions.

III.4 Conclusion

On a donc le résultat théorique suivant :

Théorème III.4 Un système linéaire de rang r, à p inconnues et n équations admet toujours aucune, une unique ou une infinité de solutions.

Si il admet une infinité de solutions, celle-ci dépendent de $p-r$ inconnues secondaires.

Si, $n = p = r$ ie le système est un système de Cramer, alors il y a toujours une unique solution quelque soit le second membre. Dans le cas contraire l'existence de solution dépend du second membre.

R En particulier, on voit que si l'ensemble solution admet plusieurs représentation selon le choix des inconnues secondaires, le nombre de degré d'inconnues secondaires est toujours $p-r$, quelque soit le second membre, et quelque soit les opérations faites sur le système.

III.5 Structure de l'ensemble de solutions

Définition III.3 Soit un système linéaire (S) : $AX = B$, on appelle système linéaire homogène associé le système linéaire (S_h) : $AX = 0$.

Le système (S_h) est toujours **compatible** *i.e.* il a toujours au moins une solution, car le vecteur 0 est solution. D'après le résultat précédent, soit 0 est la seule solution soit il y en a une infinité.

Notons $\mathscr{S}_h$ l'ensemble des solutions de (S_h), et $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (S).

Supposons que l'on connaisse une solution X_0 du système (S),

Soit X_h une solution de (S_h), alors $X = X_0 + X_h$ est solution de (S), en effet $A(X + X_h) = AX + AX_h = AX = B$. Ainsi, si on ajoute la solution particulière de (S) et une solution de (S_h) on obtient une solution de (S)

Réciproquement, si X est solution de (S), alors $X - X_0$ est solution du système homogène (S_h), puisque $A(X - X_0) = B - B = 0$. On peut donc écrire $X = X_0 + (X - X_0)$ *i.e.* le vecteur X est somme de la solution particulière $X_0 \in \mathscr{S}$ et d'une solution du système homogène $(X - X_0) \in \mathscr{S}_h$.

Ainsi, la conclusion de cette étude est :

Proposition III.5 Si le système linéaire (S) : $AX = B$ est de Cramer, alors il admet une unique solution :

$$S = \left\{A^{-1}B\right\}.$$

Si le système n'admet aucune solution, on a $\mathscr{S} = \emptyset$,

Si le système admet une infinité de solutions, toutes les solutions sont de la forme la forme $X = X_0 + X_H$, où X_0 est une solution particulière et X_H une solution du système homogène. Dans ce dernier cas, on peut donc écrire :

$$\mathscr{S} = X_0 + \mathscr{S}_h$$

R On voit que pour la fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $X \mapsto AX$, est injective si et seulement si elle est surjective.

On retrouve bien sûr la même structure que pour les équations différentielles.

IV Calcul de l'inverse d'une matrice

On a vu qu'une matrice A est inversible si et seulement si $A \underset{L}{\sim} I_n$.

Proposition IV.1 Soit A une matrice inversible, on considère la suite d'opérations élémentaires sur les lignes nécessaires pour réduire la matrice A en la matrice identité.

Alors si on fait **la même suite d'opérations élémentaires** (dans le même ordre) sur les lignes de la matrice identité, on obtient A^{-1}.

Démonstration. La preuve est simple : la matrice M correspondant à cette suite d'opérations, on a $MA = I_n$, donc $M = A^{-1}$ puisque la matrice A est inversible.

Pour calculer M, il suffit de l'interpréter comme une suite d'opérations élémentaire : comme $M = MI_n$, on calcule M en faisant ces opérations élémentaires sur la matrice I_n. ∎

En pratique, on écrit les deux matrices A et I_n l'une à côté de l'autre, et on fait les opérations en parallèle.
C'est la méthode la plus simple pour savoir si la matrice A est inversible et calculer son inverse : si le calcul aboutit, c'est que la matrice est inversible. Sinon elle n'est pas de rang plein et donc elle n'est pas inversible.

R La même démonstration permet de montrer que si on part du vecteur colonne B et que l'on fait les mêmes opérations élémentaires, on obtient le vecteur $MB = A^{-1}B$, *i.e.* la solution de $AX = B$. Ainsi, si on on doit résoudre un système avec deux seconds membres B et B', on peut obtenir les solutions en faisant les opérations élémentaires parallèlement sur A et sur une matrice à n lignes et deux colonnes $[BB']$. Les deux solutions X et X' se lisent alors sur chacune des colonnes, après les opérations élémentaires.

> On a aussi vu un résultat plus théorique : la matrice est inversible si et seulement si pour tout second membre B, le système $AX = B$ admet une solution. De plus cette solution est $A^{-1}B$
>
> Pour démontrer qu'une matrice est inversible, on peut donc résoudre le système $AX = B$ en utilisant comme second membre un vecteur B quelconque.
>
> On obtient alors l'expression de X en fonction de B et donc la matrice B^{-1}.

En fait cette méthode est strictement équivalente à la méthode de Gauss-Jordan. Pour calculer l'inverse de la matrice A, on regarde en effet le système :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \qquad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \text{ quelconque}$$

Que l'on écrit :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de A, on la réduit en l'identité. Si ce n'est pas possible, c'est que A n'est pas inversible.

Ces opérations sont effectuées en parallèle sur le second membre, c'est-à-dire sur la matrice identité. On obtient après réduction :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

où B est la matrice obtenue à partir de l'identité en effectuant toutes les opérations sur les lignes. On a bien sûr : $B = A^{-1}$. On a ainsi calculé l'inverse de la matrice A.

V Algorithme de réduction de Gauss

Dans cette partie, on écrit l'algorithme de réduction de Gauss. Conformément au programme, on se contente d'un cas simple : La matrice A est carrée et inversible. Le système est alors de Cramer.

On réduit le système $AX = B$ et $UX = C$ avec U échelonnée.

```
def gauss(A, b) :
  """
  entree: A = array
            = matrice carrée inversible de taille nxn
          b = array
            = vecteur second membre.
  sortie: A = array
            = matrice triangulaire supérieure
          b = array
            = vecteur second membre.
  le système AX=b initial est équivalent au système final
  (qui se résout par remontée)
```

```
  """
  n, m = shape(A)
  for j in range(n):
    #on traite la colonne j

    #étape 1: on échange les lignes
    if A[j,j] != 0:
      # on cherche le premier terme non nul
      # dans la colonne j en dessous de ajj:
      # comme A est inversible, on est sûr de trouver.
      k =  chNonNul(A,j)
      # on échange lk et lj
      A[k,:], A[j,:] = A[j,:], A[k,:]
      b[k], b[j] = b[j], b[k]

    # arrivé ici, A[j,j] != 0

    #étape 2: on modifie toutes les lignes en dessous
    for k in range(j+1,n) :
      alpha = A[k,j] / A[j,j]
      A[k,:] += -alpha*A[j,:]
      b[k] += -alpha*b[j]
return(A,b)
```

Avec comme fonction `chNonNul` :

```
def chNonNul :
   """
   entrée: A = array
             = matrice carrée inversible de taille nxn
           j = entier
             = indice de ligne
   sortie: k = indice de ligne
   on cherche k >= j tel que A[k,j] !=0
   """
   n, m = shape(A)
   for k in range(j,n) :
      if A[k,j] != 0 :
         return(k)
   # normalement la suite est du code mort
   # car  A est inversible
   print("ERREUR matrice non inversible")
   return()
```

P L'échange de ligne peut s'écrire aussi :

```
tmp=A[k,:]; A[k,:]=A[j,:]; A[j,:]=tmp
tmp=b[k]; b[k]=b[j]; b[j]=tmp
```

Très souvent, plutôt que de chercher un terme non nul, on va chercher le pivot le plus grand (en valeur absolue). Cela assure une meilleure stabilité numérique. On parle de **pivot partiel**.

On va donc utiliser :

```
def chNonNul(A,j) :
    [n,m] = shape(A)
    pivotMax = abs(A[j,j])
    lPivot = j
    for k in range(j+1,n) :
        if abs(A[k,j]) > pivotMax :
            pivotMax = abs(A[k,j])
            lPivot = k
    return lPivot
```

P On peut aussi utiliser `Argmax(abs(A[j,:])) +j`.

VI Cas particulier des systèmes 2×2

Dans cette section on considère le cas particulier d'une matrice 2×2.

✯ Déterminant d'une matrice 2×2

Définition VI.1 Soit la matrice 2×2 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Le **déterminant** de la matrice M est le réel : $ad-cb$. On le note :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

R Il existe une définition du déterminant pour les tailles supérieures à 2, que l'on verra plus tard.
Pour retenir cette définition, on dessine souvent un γ sur la matrice.

Théorème VI.1 Soit une matrice 2×2 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors cette matrice est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$. Plus précisément dans ce cas l'inverse est :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \det(M)I \end{aligned}$$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \det(M)I \end{aligned}$$

Ainsi :

- si $\det(M) = 0$, on obtient : $M \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0$, donc M n'est pas inversible.
- si $\det(M) \neq 0$, on obtient : M inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

■

Cette formule est à connaître par cœur ou à savoir retrouver très rapidement.

⋆ Application à la résolution de système 2×2

Proposition VI.2 Soit le système 2×2 :

$$(S) \begin{cases} ax + by = & e \\ cx + dy = & f. \end{cases}$$

On note M la matrice associée, et $\det(M)$ son déterminant.

On suppose $\det(M)$ non nul. Alors ce système est de Cramer et admets donc une unique solution pour tout second membre.

Plus précisément, la solution est :

$$\frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} de - bf \\ -ce + af \end{pmatrix}$$

Démonstration. Il s'agit simplement de constater que la matrice M est inversible et donc que la solution est $M^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. ■

Systèmes linéaires

Pelletier Sylvain

PC, Lycée Descartes

⋆ Résolution de systèmes linéaires sans paramètre

Exercice 1 Résoudre les systèmes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x-10y-z-7t &=& 7 \\ x-2y+z-t &=& 1 \\ 2x-4y-z-3t &=& 3 \\ x-2y+4z &=& 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 5x-10y-z-7t &=& 7 \\ x-2y+z-t &=& 1 \\ 2x-4y-z-3t &=& 3 \\ x-2y+4z &=& 5 \end{array}\right.$$

Exercice 2 Résoudre le système :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcl} -y+z+t &=& 1 \\ -9x+2y+z+2t &=& 3 \\ x-y+z &=& 3 \\ -3x+z+t &=& 4 \end{array}\right.$$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x+4y+3z+t=1 \\ 2x+5y+4z-t=4 \\ x-3y-2z+3t=5 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x+y+2z+3t=1 \\ x+y+z-t=2. \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x+2y+3z+4t=10 \\ 2x-y+z-t=1 \\ 3x+y+4z+3t=11 \\ -2x+6y+4z+10t=18. \end{cases} \qquad (S_4) \begin{cases} 2x+y=8 \\ -6y+7z=-19 \\ -x+z=-2 \\ 4x+7y-z=25. \end{cases}$$

Correction :

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ (3-6t, -2-19t, 2+27t, t) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ \left(3-y+5t, y, -1-4t \middle| (y,t) \in \mathbb{R}^2 \right) \right\}$$

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ \left(\frac{12}{5} - z - \frac{2}{5}t, \frac{19}{5} - z - \frac{9}{5}t, z, t \middle| (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right) \right\}$$

$$\mathscr{S}_1 = \emptyset.$$

Exercice 4 Résoudre

$$\begin{cases} x+3y-z+t=1 \\ 2x+2y+z+2t=0 \\ x-y-2z+t=-1 \\ x+7y-4z+t=3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+z-t &=0 \\ x-y+z+t &=1 \\ 2x+y+3z-t &=2 \\ x+y+2z+t &=1. \end{cases}$$

Correction :

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(-\frac{1}{2} - t, \frac{1}{2}, 0, t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

puis

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{1}{7} \right) \right\}.$$

⋆ **Systèmes avec paramètres**

Pour résoudre un système avec paramètres :

- Bien comprendre la différence entre les paramètres et les solutions. On ne maîtrise pas les paramètres, qui sont donnés.
- Bien vérifier que les opérations effectuées ont bien un sens (pas de division par 0).
- À la fin on attend une conclusion du type : si le paramètre m est de telle forme alors les solutions sont ainsi.

Exercice 5 Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$ le système suivant :

$$(S) \begin{cases} mx + y + z & = 1 \\ x + my + z & = m \\ x + y + mz & = m^2 \end{cases}$$

Correction :

- Si $m = 1$, $\mathscr{S}_1 = \left\{ (x, y, 1 - x - y) \middle| (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
- Si $m = -2$, $\mathscr{S}_{-2} = \emptyset$.
- Si $m \neq -2$ et $m \neq 1$, $\mathscr{S}_m = \left\{ \left(\frac{-m-1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2} \right) \right\}$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ (en fonction de $m \in \mathbb{C}$)

$$(S) \begin{cases} x - my + m^2 z & = 2m \\ mx - m^2 y + mz & = 2m \\ mx + y - m^2 z & = 1 - m. \end{cases}$$

Correction :

- Si $m = 0$, $\mathscr{S} = \left\{ (0, 1, z) \middle| z \in \mathbb{C} \right\}$
- Si $m = 1$, $\mathscr{S} = \left\{ (1, z - 1, z) \middle| z \in \mathbb{C} \right\}$
- Si $m = -1$, $\mathscr{S} = \left\{ (-2 - z, 0, z) \middle| z \in \mathbb{C} \right\}$
- Si $m = i$ ou $m = -i$, $\mathscr{S} = \emptyset$.
- Dans les autres cas, $\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{m^3 + 3m}{(1 + m^2)(1 + m)}, \frac{1 - m}{1 + m^2}, \frac{2}{1 + m} \right) \right\}$

⋆ **Interprétation géométrique de la résolution de systèmes**

Exercice 7 Dans cet exercice on identifie $\mathbb{R}^2$ à un plan :

1. Soient les droites :

$$\mathscr{D}_1 = \left\{(x,y)\middle| y = 1\right\} \qquad \mathscr{D}_2 = \left\{(x,y)\middle| y = 4x-7\right\} \qquad \mathscr{D}_2 = \left\{(x,y)\middle| y = 4x\right\}$$

   (a) Représenter $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$.
   (b) Déterminer $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_2 \cap \mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_3$.
   Quel est la nature géométrique de ces ensembles ?

2. (a) Écrire l'équation de la droite Δ_1 passant par $O(0,0)$ et $P(2,2)$.
   (b) Écrire l'équation de la droite Δ_1 passant par $Q(1,2)$ et $R(2,1)$.
   (c) Déterminer $\Delta_1 \cap \Delta_2$.

Correction : on se ramène à des systèmes (en particulier déterminant 2x2).

Exercice 8 Résoudre les systèmes suivants en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ et donner une interprétation géométrique du résultat :

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=1 \\ \sin(\alpha)x-\cos(\alpha)y=0 \end{cases}$$

Correction : c'est des systèmes 2x2, il faut utiliser le déterminant.

Exercice 9 Trouver un système d'équations représentant la droite D de l'espace (muni d'un repère orthonormée) qui passe par les points de coordonnées $(1,2,1)$ et $(-2,3,0)$.

Déterminer ensuite l'intersection de D avec le plan d'équation $x+y+z=2$.

Correction : Trouver une équation de compatibilité pour le système à 2 équations et 3 inconnues.
Puis résoudre le système 3×3.

✯ Systèmes d'équations se ramenant à des systèmes linéaires

Exercice 10 En se ramenant à des systèmes linéaires, résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ xyz=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2+3y=8 \\ x^2-4y=-7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{y+1}=5 \\ \dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{y+1}=-8 \end{cases}$$

Correction : pour le premier faire une disjonction des cas $x=0$, $y=0$ ou $z=0$.
Pour le deuxième, poser $X=x^2$.
Pour la troisième, poser :

$$X=\frac{1}{x-3} \text{ et } Y=\frac{1}{y+1}.$$

Exercice 11 **Mines**

Soit $x_1,\dots,x_4,y_1,\dots,y_4,z_1,\dots,z_4,t_1,\dots,t_4$ fixés.
On considère le tableau suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z_1					t_1
z_2					t_2
z_3					t_3
z_4					t_4
	y_1	y_2	y_3	y_4	

On veut remplir les cases centrales par des réels a_{ij} tels que chacun soit la moyenne de ses quatre voisins. Montrer l'existence et l'unicité de la solution.

Correction : Écrire le système obtenu (il est 16×16). On a alors deux choix :

- montrer que le rang de la matrice est 16 par des opérations élémentaires (un peu long mais faisable).
- Puisque c'est un système carré, on peut se ramener à montrer que l'unique solution de $AX = 0$ est le vecteur nul, ce qui revient à considérer le problème avec des bords égaux à 0. Il faut donc montrer que l'unique solution lorsque les bords sont nuls est le tableau entièrement rempli de 0.
  On considère alors un tableau solution (avec les bords à 0) et on suppose alors par l'absurde qu'il n'est pas constitué de 0. On prends alors la plus grande valeur non nulle (en valeur absolue) et on obtient une contradiction.

Résolution d'un système avec paramètres

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Dans cette fiche, on détaille la résolution de l'exercice suivant :

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ (en fonction de $m \in \mathbb{C}$)

$$(S)\ \begin{cases} x - my + m^2 z &= 2m \\ mx - m^2 y + mz &= 2m \\ mx + y - m^2 z &= 1 - m. \end{cases}$$

On remarque que l'on peut diviser la deuxième ligne par m.

On utilise les opérations qui nous arrangent !

$\boxed{\text{Cas } m \neq 0}$

Bien indiquer les cas particuliers. Lorsqu'on les traitera on reprendra le calcul juste avant l'endroit où on a fait les hypothèses !

Le système est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 1 & -m & 1 \\ m & 1 & -m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ 2 \\ 1-m \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} l_1 \\ \frac{1}{m} l_2 \\ l_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1-m^2 \\ 0 & 1+m^2 & -m^2-m^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ 2-2m \\ 1-m-2m^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 - l_1 \\ l_3 - m l_1 \end{array}$$

On écrit : $1 - m - 2m^2 = (m+1)(-2m+1)$ car -1 est racine évidente.
De plus, $2 - 2m = 2(1-m)$, $1 - m^2 = (1-m)(1+m)$ et $-m^2 - m^3 = -m^2(1+m)$.

On simplifie les expressions avant de passer à la suite !

Cela donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 1+m^2 & -m^2(1+m) \\ 0 & 0 & (1-m)(1+m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ (m+1)(-2m+1) \\ 2(1-m) \end{pmatrix} \begin{array}{c} l_1 \\ l_3 \\ l_2 \end{array}$$

On obtient ainsi, le premier résultat :

si $m \notin \left\{1, -1, 0, i, -i\right\}$, le système est de rang 3 et donc admet une solution unique.

Pensez à indiquer dès maintenant ce résultat : il faut montrer que vous connaissez le cours

Il est écrit dans l'énoncé $m \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\text{Cas } m \notin \left\{1, -1, 0, i, -i\right\}}$

On suppose donc $m \notin \left\{1, -1, 0, i, -i\right\}$ et on continue le calcul par la méthode de remontée.

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 1+m^2 & -m^2(1+m) \\ 0 & 0 & (1+m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ (m+1)(-2m+1) \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ \frac{1}{1-m} l_3 \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
z =& \frac{2}{1+m} \\
y =& \frac{1}{1+m^2}\Big((m+1)(-2m+1) - m^2(1+m)z\Big) \\
=& \frac{1}{1+m^2}\Big((m+1)(-2m+1) - 2m^2\Big) \\
=& \frac{1}{1+m^2}\Big(1-m\Big) = \frac{1-m}{1+m^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x =& 2m + my - m^2 z \\
=& 2m + \frac{m(1-m)}{1+m^2} - \frac{2m^2}{1+m} \\
=& \frac{m}{(1+m^2)(1+m)}\Big(2(1+m)(1+m^2) + (1-m)(1+m) - 2m(1+m^2)\Big) \\
=& \frac{m}{(1+m^2)(1+m)}\Big(2(1+m+m^2+m^3) + 1 - m^2 - 2m - 2m^3\Big) \\
=& \frac{m}{(1+m^2)(1+m)}\Big(3+m^2\Big)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi, la solution dans le cas $m \notin \Big\{1, -1, 0, i, -i\Big\}$:

$$\left(\frac{m^3+3m}{(1+m^2)(1+m)}, \frac{1-m}{1+m^2}, \frac{2}{1+m}\right)$$

✎ On simplifie les expressions une par une. Attention aux erreurs de calculs !
Il reste les cas particulier.

✎ On revient en arrière **juste avant** d'avoir fait les hypothèses !

$\boxed{\text{Cas } m=0}$ le système devient :

$$\begin{cases} x = & 0 \\ 0 = & 0 \\ y = & 1 \end{cases} \text{ la solution est } (0,1,z) \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

$\boxed{\text{Cas } m=1}$ le rang est 2 et le système se réduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution est :

$$\begin{aligned}
y =& -1 + z \\
x =& y - z + 2 = 1
\end{aligned}$$

la solution est $(1, z-1, z)$ avec $z \in \mathbb{C}$

$\boxed{\text{Cas } m=-1}$ le rang est 2 et le système se réduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le système est incompatible et $\mathscr{S} = \emptyset$.

$\boxed{\text{Cas } m = i}$ le rang est 2 et le système se réduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & (1-i)(1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ (i+1)(-2i+1) \\ 2(1-i) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ (-2i+1) \\ 2(1-i) \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ \frac{1}{1+i} l_2 \\ l_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ (-2i+1) \\ 4i \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ \frac{1}{1+i} l_2 \\ l_3 - 2l_2 \end{matrix}$$

Comme $4i \neq 0$ l'équation de compatibilité n'est pas vérifiée Le système est incompatible et $\mathscr{S} = \emptyset$.

$\boxed{\text{Cas } m = -i}$ le rang est 2 et le système se réduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & (1+i)(1-i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i \\ (1-i)(2i+1) \\ 2(1+i) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i \\ 2i+1 \\ 1+i \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ \frac{1}{1-i} l_2 \\ \frac{1}{2} l_3 \end{matrix}$$

or $2i+1 \neq i+1$, donc le système est incompatible.

En conclusion, on a :

- Si $m = 0$, $\mathscr{S} = \left\{ (0,1,z) \middle| z \in \mathbb{C} \right\}$
- Si $m = 1$, $\mathscr{S} = \left\{ (1,z-1,z) \middle| z \in \mathbb{C} \right\}$
- Si $m = -1$, $m = i$ ou $m = -i$, $\mathscr{S} = \emptyset$.
- Dans les autres cas, $\mathscr{S} = \left\{ \left(\dfrac{m^3+3m}{(1+m^2)(1+m)}, \dfrac{1-m}{1+m^2}, \dfrac{2}{1+m} \right) \right\}$

Une conclusion précise est attendue. Attention à l'écriture de l'ensemble des solutions !

11 — Limites et continuité

⋆ Notion de voisinage et convention

On reprends la convention utilisé pour le calcul des fonctions dérivées.

Plusieurs cas sont envisagés :

Cas 1 le point x_0 peut-être soit un élément de $\mathscr{D}$, donc $f(x_0)$ existe.
Par exemple, on regarde la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ au point 1. C'est le cas où on étudie la **continuité** de la fonction f. Le domaine $\mathscr{D}$ contient alors toujours un intervalle I de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, *i.e.* centré autour de x_0 de taille 2ε.

Cas 2 le point x_0 peut ne pas être un élément de $\mathscr{D}$, donc $f(x_0)$ n'existe pas.
Par exemple, on étudie la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au point 0.
On parle de la **limite** de cette fonction. Le domaine $\mathscr{D}$ contient alors toujours un intervalle I de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \varepsilon[$.

Cas 3 On peut aussi avoir le cas où f n'est définie que pour les $x < x_0$ (resp. $x > x_0$), ou le cas où on étudie séparément le comportement de f à gauche (resp. à droite de x_0), *i.e.* pour les $x < x_0$ (resp. $x > x_0$).
Par exemple, on étudie la fonction $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en 0 à droite et à gauche.
On parle de **limite à gauche et à droite** de x_0, on note alors x_0^+, ou x_0^-. Dans ce cas $\mathscr{D}$ contient toujours un intervalle I de la forme : $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ (limite à droite) ou $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ (limite à gauche).

Cas 4 Enfin, on peut aussi voir où x_0 tend vers $+\infty$, *i.e.* prends des valeurs de plus en plus grandes.
Dans ce cas où le domaine $\mathscr{D}$ contient toujours un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$, et où on regarde **la limite en** $+\infty$ de f. Par exemple la limite de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$.
De même, lorsqu'on regarde la limite en $-\infty$.

Implicitement on se placera donc systématiquement dans ces différent cas.

En particulier, on ne considère pas le cas ou f est définie sur un ensemble avec des points isolés du type $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$, ni le cas où l'on regarde le comportement en -1 de la fonction définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 2 \text{ si } x = -1 \end{cases}$$

Ces deux cas n'ayant pas grand intérêt.

I Limite d'une fonction en un point

I.1 Définition rigoureuse de la limite

⋆ Définition

Définition I.1 On dit que la fonction f admet une limite l au point x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathscr{D},\ |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

On écrit alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Pour un point $x_0 \in \mathscr{D}$, on dit que f est continue au point x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui s'écrit donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathscr{D},\ |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Comme pour les suites, on interprète cela sous la forme :

> Pour toute précision ε, on peut trouver un petit intervalle, (d'autant plus petit que ε est petit) tel que sur cette intervalle $f(x) = l$ à la précision ε près. Cet intervalle est non réduit à un point, centré en x_0 et de taille α.

✎ L'avantage de l'hypothèse qu'on a fait sur le domaine $\mathscr{D}$ est qu'on est sûr que si le α est suffisamment petit, f est forcément définie pour tout x tel que : $|x - x_0| \leqslant \alpha$. Donc $\forall x \in \mathscr{D},\ |x - x_0| \leqslant \alpha$ peut se comprendre comme : $\forall x \in \mathbb{R}$, tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$.
Le fait que α soit strictement positif (*i.e.* que l'intervalle n'est pas réduit à un point) est primordial.

✎ La convergence d'une suite est une notion **locale** : elle ne dépend de la fonction qu'au voisinage de x_0, *i.e.* si deux fonctions f et g sont tells que $\exists \varepsilon > 0$ tels que $\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$,
- si $f(x)$ existe alors $g(x)$ existe et réciproquement,
- dans ce cas, $f(x) = g(x)$,

alors la convergence de f est équivalente à la convergence de g.

✎ On voit clairement :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0} |f(x) - l| = 0$$

⋆ Lien entre limites et continuité

Proposition I.1 Si f est définie en x_0 avec $x_0 \in \mathscr{D}$, et si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ en x_0, alors nécessairement, $l = f(x_0)$.

Cela justifie donc la définition de la continuité.

Démonstration. $\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver le α correspondant, mais on a $x_0 \in \mathscr{D}$ et $|x_0 - x_0| \leqslant \alpha$ et donc : $|f(x_0) - l| \leqslant \varepsilon$. En conclusion : $\forall \varepsilon > 0$, $|f(x_0) - l| \leqslant \varepsilon$. Ce qui implique que $l = f(x_0)$. ■

⋆ **Limite de la suite** $(f(u_n))$

De même on peut voir :

Proposition I.2 Considérons une suite (u_n) et une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathscr{D}$. Autrement dit, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

On a alors

$$\text{si } \lim_{x\to x_0} f(x) = l \text{ et } \lim_{n\to\infty} u_n = x_0 \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$$

En particulier, si f est continue en x_0 et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$.

R Pour la rédaction, ne pas oublier l'élément clé : la continuité.
Valable aussi si $x_0 = \pm\infty$ et si $l = \pm\infty$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on sait que $\exists \alpha > 0 : \forall x \in \mathscr{D}, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon$, et on sait que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0$, $|x_n - x_0| \leqslant \alpha$. On a donc $\forall n \geqslant n_0$, $|f(x) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon$. Ceci pour un ε quelconque. D'où le résultat. ■

⋆ **D'autres conséquences**

Proposition I.3 Soit l un réel. Si il existe une fonction $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathscr{D},\ |f(x) - l| \leqslant g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = l,$$

alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

Démonstration. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, on a l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| \leqslant \alpha$, on a :

$$|f(x) - l| \leqslant g(x) \leqslant \varepsilon$$

■

Proposition I.4 La limite d'une fonction est unique.

Démonstration. Raisonner par l'absurde, en supposant deux limites $l_1 > l_2$ et choisir $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{3}$. ■

Exercice 1 Démontrer que l'on a :

$$\lim_{x\to+x_0} f(x) = l \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)-l| = 0 \iff \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = l$$

Exercice 2 Démontrer qu'une fonction affine est continue avec la définition.

I.2 Limite à droite et à gauche

Définition I.2 On dit que la limite à droite de la fonction f est l si :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in\mathscr{D},\ x_0<x\leqslant x_0+\alpha \implies |f(x)-l|\leqslant\varepsilon.$$

On écrit alors $\lim_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x) = l$.

On dit que la limite à gauche de la fonction f est l si :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in\mathscr{D},\ x_0-\alpha\leqslant x<x_0 \implies |f(x)-l|\leqslant\varepsilon.$$

On écrit alors $\lim_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x) = l$.

■ **Exemple I.1** Pour les limites à gauche/droite on considère généralement des fonctions en escalier comme la partie entière, ou la fonction signe. ■

Si f n'est pas définie pour $x<x_0$ alors parler de limite à droite ou parler de limite à gauche est la même chose. C'est le cas de la fonction $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ en 0.

Par convention, la valeur de la fonction en x_0 n'intervient pas dans la définition de la limite à droite et à gauche, tandis qu'elle intervient dans la définition de la limite.
D'après la définition « f admet une limite à droite en x_0 » est équivalent à « la restriction de f à $]x_0,+\infty[$ admet une limite en x_0 ».
Ces notions dépendent du comportement de f au voisinage droite (resp. gauche) de x_0.

Les rapports entre limites à droite et à gauche s'expriment selon :

Proposition I.5 Soit une fonction f définie à gauche et à droite de x_0.
Si $x_0\notin\mathscr{D}$, on a :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \textbf{ et } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

Si $x_0\in\mathscr{D}$, on a :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \textbf{ et } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Démonstration. On procède par double implication :

- si on a $|f(x)-l| \leqslant \varepsilon$ dès que $|x-x_0| \leqslant \alpha$, on a le même résultat pour $x_0 < x \leqslant x_0+\alpha$ et $x_0-\alpha \leqslant x < x_0$.
- si on a $|f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon, \forall x \in \mathscr{D}$ vérifiant $x_0 < x \leqslant x_0+\alpha_1$ ou $x_0-\alpha_2 \leqslant x < x_0$, alors en prenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, on a cette propriété dès que $|x-x_0| \leqslant \alpha$.

■

R On est obligé de séparer ces deux cas car on pourrait avoir une fonction telle que : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ mais $f(x_0) \neq L$. En pratique ce n'est jamais le cas.

I.3 Limite en $\pm\infty$

On définit aussi les limites en $+\infty$:

Définition I.3 Soit une fonction f définie sur un domaine $\mathscr{D}$, qui contient une partie de la forme : $]B, +\infty[$, On dit que f a pour limite le réel l en $+\infty$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{D}, x \geqslant M \implies |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$$

On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Cette définition est assez proche des suites :

Pour toute précision, on peut trouver un rang à partir duquel $f(x)$ est égal à l à la précision ε près.

■ **Exemple I.2** La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$. ■

On a aussi de manière symétrique :

Définition I.4 Soit une fonction f définie sur un domaine $\mathscr{D}$, qui contient une partie de la forme $]-\infty, B[$, On dit que f a pour limite le réel l en $-\infty$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{D}, x \leqslant m \implies |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$$

On écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

✎ Il s'agit cette fois-ci de notion asymptotique, donc dépendent de f pour de grandes (resp. petites) valeurs.
La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f possède alors une **asymptote horizontale** : la droite $\Delta : y = l$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

I.4 Limite infinie

Définition I.5 On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en x_0 si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathscr{D},\ |x-x_0| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant M.$$

On écrit alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

De même, on dit que la fonction f tend vers $-\infty$ en x_0 si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathscr{D},\ |x - x_0| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant M.$$

On peut définir de même les notions de limites infinies à droite et à gauche.

On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathscr{D},\ x \geqslant A \implies f(x) \geqslant M.$$

On écrit alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

On peut définir de même les notions de limites infinies en $-\infty$.

La proposition I.5 est encore valable avec des limites infinies : pour qu'il y ait une limite infinie il faut et il suffit que les limites à gauche et à droite soient infinies. De même, la proposition I.2 est valable pour des suites qui tendent vers $\pm\infty$: on peut composer les limites avec des fonctions qui tendent vers $+\infty$.

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f possède alors une **asymptote verticale** : la droite $\Delta : x = x_0$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

II Opérations sur les limites

Le principe des démonstrations est le même que pour les suites, on ne démontrera donc pas tout.

La lettre a désigne soit un réel, soit $\pm\infty$. Tous les résultats sont valables que ce soit pour des limites à droite, à gauche ou en $\pm\infty$.

⋆ Multiplication par un scalaire

Proposition II.1 Soit une fonction f et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$.

- si $f(x) \to l$, alors $\lambda f(x) \to \lambda l$,
- si $f(x) \to +\infty$, alors $\lambda f(x) \to +\infty$ si $\lambda > 0$ et $\lambda f(x) \to -\infty$ si $\lambda < 0$,
- idem si $f(x) \to -\infty$.

⋆ Somme

Proposition II.2 On a de manière abrégée :

$\lim_a f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_a g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a (f+g)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Et même : si f est bornée et $g \to +\infty$, alors $f + g \to +\infty$.

⋆ Produit

Proposition II.3 On a de manière abrégée :

$\lim_a f$	L	$L \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim_a g$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a (fg)$	LL'	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$

les $\pm$ se décident selon la règle de multiplication des signes.

Enfin, comme pour les suites, le produit d'une fonction bornée, par une fonction qui tend vers 0, tend vers 0.

✯ Inverse

Proposition II.4 On a de manière abrégée :

$\lim_a f$	$L \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim_a \left(\frac{1}{f}\right)$	$\frac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0

✯ Quotient

Proposition II.5 On a de manière abrégée :

$\lim_a f$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$	0	L	$\pm\infty$
$\lim_a g$	$L' \neq 0$	0^+	0^-	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a (\frac{f}{g})$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	0	FI

✯ Composée

Proposition II.6 Soit g une fonction de $\mathscr{D}'$ dans $\mathbb{R}$, et f une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \in \mathscr{D}$, $f(x) \in \mathscr{D}'$. De sorte que $g \circ f$ est bien définie sur $\mathscr{D}$.

On suppose que $\lim_a f = b$, où b est soit un élément de $\mathscr{D}'$, soit une borne de $\mathscr{D}'$, et que $\lim_b g = L$, on a alors : $\lim_a g \circ f = L$.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas où a et b sont des valeurs finies, les autres cas étant laissées en exercice.

Soit $\varepsilon > 0$, on sait que

$$\exists \alpha_1 > 0, \forall x \in \mathscr{D}',\ |x-b| \leqslant \alpha_1 \implies |g(x) - L| \leqslant \varepsilon.$$

D'autre par :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathscr{D},\ |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \alpha_1.$$

Soit $x \in \mathscr{D}$, tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, on a alors $|f(x)-b| \leqslant \alpha_1$ et $f(x) \in \mathscr{D}'$, donc $|g \circ f(x) - L| \leqslant \varepsilon$. ■

Attention au cas d'une fonction $(u(x))^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$, les cas 0^0 et 1^∞ doivent être considérées comme des « formes indéterminées ». Dans ce cas, il faut revenir à la *forme exponentielle :* $e^{v(x)\ln(u(x))}$ et donc à des limites composées et des produits.

Comme on l'a vu, on peut aussi composer avec des suites :

$$\text{Si } \lim_{n\infty} u_n = a \text{ et } \lim_a f = b \text{ alors } \lim_{n\to\infty} f(u_n) = b$$

que a et b soient finis ou non.

Ce résultat sert par exemple à montrer qu'une fonction n'a pas de limite par exemple si on considère la fonction : $f:\ x \mapsto \frac{x}{|x|}$, on a $f(\frac{1}{n}) = 1 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$, tandis que $f(-\frac{1}{n}) = -1 \underset{n\infty}{\longrightarrow} -1$. Donc la fonction n'a pas de limite en 1.

Exercice 3 Montrer que la fonction $x \mapsto 2-\cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

III Limites et encadrements

La lettre a désigne soit un réel, soit $\pm\infty$.

III.1 Passage à la limite dans les inégalités larges

De la même manière qu'avec les suites, on peut *« passer à la limite dans les inégalités **larges** »* que ce soit des limites en un point x_0, ou en $\pm\infty$.

Proposition III.1 Soit une fonction f telle que $\forall x \in \mathscr{D}$, $f(x) > 0$, alors f ne peut converger que vers une limite $l \geqslant 0$.

Si f converge en a vers une limite $l > 0$, alors $f(x) > 0$, au voisinage de a, *i.e.* à partir d'une certaine valeur si $a = +\infty$, ou assez proche de a si a est fini.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas d'une limite a finie, en notant $a = x_0$. Le cas d'une limite en $+\infty$ est en exercice.

Si la fonction converge vers $l < 0$, alors en prenant $\varepsilon = -\frac{l}{2} > 0$, on a : $\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathscr{D}, |x-x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x)-l| > 0 \implies f(x) < 0$.

Avec hypothèse de départ sur $\mathscr{D}$: il existe des x tels que $x \in \mathscr{D}$, et $|x-x_0| \leqslant \alpha$, avec un tel x on abouti à une contradiction.

La deuxième propriété est clairement une conséquence de la première. ■

Bien entendu, la convergence étant une propriété locale, elle ne dépend que du comportement local de la fonction, on peut donc remplacer l'hypothèse $\forall x \in \mathscr{D}$, $f(x) > 0$, par

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathscr{D}, |x-x_0| \leqslant \varepsilon \implies f(x) > 0$$

dans le cas d'une limite en un point x_0, ou par :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{D}, x \geqslant M \implies f(x) > 0$$

dans le cas d'une limite en $\pm\infty$.

Comme pour les suites, on ne peut pas passer à la limite dans une inégalité stricte.

Proposition III.2 En conséquence :

- si une fonction vérifie $f(x) \geqslant m$ et si $\lim_a$ existe, alors on a $\lim_a f \geqslant m$.
- si une fonction vérifie $m \leqslant f(x) \leqslant M$ et si $\lim_a$ existe, alors on a $m \leqslant \lim_a f \leqslant M$.
- si deux fonctions vérifient $f(x) \geqslant g(x)$, et si ces fonctions admettent des limites, alors $\lim_a f(x) \geqslant \lim_a g(x)$.

! Il faut d'abords prouver que la limite existe avant de passer à la limite.

R Les hypothèses peuvent être valables localement.

III.2 Théorème des gendarmes

Proposition III.3 Soit trois fonctions f, g et h définies sur un même ensemble $\mathscr{D}$. Si on a :

$$\forall x \in \mathscr{D}, g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

et si $\lim_a g(x)$, et $\lim_a h(x)$ existent dans $\mathbb{R}$ avec $\lim_a h(x) = \lim_a g(x)$ (*i.e.* que les fonctions convergent vers la même limite), alors $\lim_a f(x)$ existe et

$$\lim_a h(x) = \lim_a g(x) = \lim_a f(x)$$

.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas où a est fini.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors α_1 et α_2 issus de la définition de la convergence de g et h. On prends alors $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, et on a pour $x \in \mathscr{D}$ avec $|x-a| \leqslant \alpha$ les relations :

$$l - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant l + \varepsilon.$$

En particulier, $\forall x \in \mathscr{D}, |x-a| \leqslant \alpha$, $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$. D'où la convergence de f vers l.

Le cas où a est infini est analogue aux suites.

■

Proposition III.4 Pour des fonctions f, g et h définies sur le même ensemble de définition $\mathscr{D}$, on a aussi :

- si $g \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, et $\forall x \in \mathscr{D}, g(x) \leqslant f(x)$, alors $f \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$
- si $h \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, et $\forall x \in \mathscr{D}, f(x) \leqslant h(x)$, alors $f \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

Démonstration. Faisons le cas où a est infini, avec $\lim_{+\infty} g(x) = +\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}$, on sait que $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x > A \implies g(x) \geqslant A$. Si $x > A$, on a alors $f(x) \geqslant g(x) \geqslant A$. Et ainsi $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$.

■

Exercice 4 Donner les limites de :

$$\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\cos(x))}{x}$$

IV Fonctions monotones et limites

IV.1 Fonctions majorées

Définition IV.1 On dit que la fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{D}, f(x) \leqslant M$. Cela est équivalent à $\left\{f(x) \middle| x \in \mathscr{D}\right\}$ est un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$.

Si f est majorée on note $\sup_{\mathscr{D}} f$ ou $\sup_{x\in\mathscr{D}} f(x)$ la borne supérieure de cet ensemble (qui existe car tout ensemble majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure).

On rappelle que $\sup_{\mathscr{D}} f$ est caractérisé par :

$$\forall x \in \mathscr{D}, f(x) \leqslant \sup_{\mathscr{D}} f, \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathscr{D} : \sup_{\mathscr{D}} f - \varepsilon \geqslant f(x)$$

De manière symétrique on définit :

Définition IV.2 On dit que la fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ est minorée si $\exists m \in \mathscr{D}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant m$. On peut alors définir $\inf_{\mathscr{D}} f$ comme la borne inférieure de l'ensemble $\left\{f(x) \middle| x \in \mathscr{D}\right\}$.

On dit que la fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ est bornée si $\exists M \in \mathscr{D}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant M$, ce qui est équivalent à dire que la fonction est majorée et minorée.

IV.2 Fonctions croissante, monotone

Enfin, on rappelle les définitions suivantes :

Définition IV.3 La fonction f est croissante sur $\mathscr{D}$ si :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y).$$

Elle est strictement croissante si :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2,\ x < y \implies f(x) < f(y).$$

On définit de même décroissante et strictement décroissante.

Enfin, on dit qu'une fonction f est monotone ou strictement monotone si elle est croissante ou décroissante.

R Il arrive parfois que le mot « strictement » soit primordial dans la rédaction.

Une autre définition très utiles des fonctions strictement croissante est :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2,\ x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y).$$

On a ainsi le résultat suivant : l'ordre des antécédents est exactement l'ordre des images.
Si une fonction est croissante (au sens large) alors l'ordre des antécédents indique l'ordre des images (mais pas l'inverse), tandis que dans le cas d'une fonction strictement croissante alors connaître l'ordre des images est équivalent à connaître l'ordre des antécédents.
Cette définition s'obtient en prenant la contraposée et en changeant le rôle de x et y :

$$\begin{array}{ll} & \forall (x,y) \in \mathscr{D}^2,\ x<y \implies f(x)<f(y) \\ \text{s'écrit aussi} & \forall (x,y) \in \mathscr{D}^2,\ f(x) \leqslant f(y) \implies x \leqslant y \end{array}$$

C'est particulièrement le cas pour l'étude des suites implicites, définies par $f_n(u_n)=0$.
Par exemple, si la fonction f_n est strictement croissante, et que l'on veut démontrer que $u_n \leqslant u_{n+1}$, on montre $f_n(u_n) = 0 \leqslant f_n(u_{n+1})$.

IV.3 Minimum et maximum

Définition IV.4 On dit que la fonction f admet un minimum sur $\mathscr{D}$ si :

$$\exists \alpha \in \mathscr{D},\ \forall x \in \mathscr{D},\ f(\alpha) \leqslant f(x).$$

La fonction est alors évidement minorée par $f(\alpha)$ et de manière plus précise : $f(\alpha) = \inf\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.

On dit alors que la borne inférieure est atteinte (en α) et on note alors $\min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$ cette borne inférieure.

On note de même $\max_{x\in\mathscr{D}} f(x)$ la borne supérieure lorsqu'elle est atteinte.

IV.4 Monotonie et limites

Proposition IV.1 Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathscr{D}$ de la forme $]a,b[$, a et b étant finis ou non. Si f est croissante, on a :

- si f est majorée sur I, alors $\lim_b f$ existe et $\lim_b f = \sup_{\mathscr{D}} f$,
- si f n'est pas majorée sur I, alors $\lim_b f = +\infty$,
- si f est minorée sur I, alors $\lim_a f$ existe et $\lim_a f = \sup_{\mathscr{D}} f$,
- si f n'est pas minorée sur I, alors $\lim_b f = -\infty$.

Démonstration. Étudions le cas de b, le cas de a est similaire et en exercice. Le principe est le même que pur les suites :

- si la fonction est majoré, alors $\sup_{\mathscr{D}} f - \varepsilon$ est dépassé au moins une fois en x_0, donc par monotonie pour tous les valeurs de $x \geqslant x_0$,
- tandis que si la fonction n'est pas majorée, on dépasse toute valeur M au moins une fois en x_0, donc par monotonie, pour tous les valeurs de $x \geqslant x_0$.

Si f est majorée, et notons $M = \sup_{\mathscr{D}} f$, soit $\varepsilon > 0$, on sait que $\exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) \geqslant M - \varepsilon$. On a alors $\forall x \in \mathscr{D}, x \geqslant x_0 \implies M \geqslant f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant M - \varepsilon \implies |f(x) - M| \leqslant \varepsilon$.

Si b est fini on peut alors poser $\alpha := b - x_0 > 0$, pour avoir $\forall x \in \mathscr{D}, |x-b| \leqslant \alpha \implies |f(x) - M| \leqslant \varepsilon$, et donc $\lim_b f = M$. Si $b = +\infty$, on peut poser $A := x_0$ pour avoir $\forall x \in \mathscr{D}, x \geqslant A \implies |f(x) - M| \leqslant \varepsilon$, et donc $\lim_{+\infty} f = M$.

Si f n'est pas majorée, soit $M \in \mathbb{R}$. On a alors : $\exists x_0 \in \mathscr{D}$, $f(x_0) \geqslant M$, puis $\forall x \geqslant x_0 \implies f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant M$.

Si b est fini on peut alors poser $\alpha := b - x_0 > 0$, pour avoir $\forall x \in \mathscr{D}, |x-b| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant M$. et donc $\lim_b f = +\infty$. Si b est infini, on peut poser $A := x_0$ pour avoir $\forall x \in \mathscr{D}, x \geqslant A \implies f(x) \geqslant M$, et donc $\lim_{+\infty} f = +\infty$. ■

R On a un résultat analogue pour les fonctions décroissantes.

Exercice 5 Montrer que la fonction définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x e^{-t^2} dt \end{array} \right.$$

admet une limite en $+\infty$.

V Méthodes de calcul des limites

V.1 Limites usuelles

On peut utiliser la valeur de la dérivée (limite du taux d'accroissement) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Ainsi que des limites de fonctions usuelles :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0^+.$$

Enfin les **croissance comparées** :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0} \ln(x) x = 0^-, \quad \lim_{x \to -\infty} x \exp(x) = 0.$$

Exercice 6 Calculer $\frac{\sin(2h)}{h}$.

Exercice 7 Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (e^x - 1) \ln(x)$.

V.2 Changement de variables

Lorsque l'on cherche à calculer $\lim_{x\to x_0} f(x)$, on peut écrire la fonction f comme une composée : $f(x) = g(t(x))$, et remplacer la variable x par t (plus précisément par la fonction $t : x \mapsto t(x)$).

On donne alors :
- la variable t en fonction de x,
- on donne $\lim_{x\to x_0} t(x)$ notée a. Souvent, on écrit : lorsque x tends vers x_0, on a t tends vers a.
- on calcule $\lim_{t\to a} g(t)$

On a alors :

$$\lim_{x\to x_0} g(t(x)) = \lim_{t\to a} g(t)$$

Dans le sens où puisque la limite $\lim_{t\to a} g(t)$ existe, on sait que la limite $\lim_{x\to x_0} g(t(x))$ existe par composition et on sait que ces limites sont égales.

R Il faut donc lire le résultat $\lim_{x\to x_0} g(t(x)) = \lim_{t\to a} g(t)$ à l'envers (la partie de droite existe donc la partie de gauche existe).

Cas particulier intéressant : si on regarde la limite en un réel a non nul, on peut se ramener au cas $a = 0$ en posant $x = a+h$, car on sait que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$.

Autres changements de variable classique :
- pour passer de $-\infty$ à $+\infty$, on pose $t = -x$,
- pour passer de $+\infty$ à 0, on peut poser $t = \frac{1}{x}$, ou $t = e^{-x}$.

■ **Exemple V.1** On veut calculer $\lim_{x\to\pi} \frac{\tan 2x}{x-\pi}$, on fait le changement de variable $x = \pi + h$:

$$\frac{\tan 2x}{x-\pi} = \frac{\tan(2\pi+2h)}{h} = \frac{\tan 2h}{2h} \times 2$$

D'où $\lim_{x\to\pi} \frac{\tan 2x}{x-\pi} = 2$. ■

■ **Exemple V.2** En posant $h = e^{-x}$, on a :

$$e^x \ln(1+e^{-x}) = \frac{\ln(1+h)}{h}$$

d'où $\lim_{x\to+\infty} e^x \ln(1+e^{-x}) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. ■

VI Continuité

VI.1 Généralités

Tout d'abords un bref rappel des rapports continuité/limites et de ces conséquences :

Définition VI.1 On considère une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $c_0 \in \mathscr{D}$.

- La fonction f est continue en x_0 si $\lim_{x_0} f = f(x_0)$. Dans le cas contraire, on dit que f est **discontinue** en x_0.
- La fonction f est **continue à droite** en x_0 si $\lim_{x_0^+} f = f(x_0)$. La fonction f est **continuité à gauche** si $\lim_{x_0^-} f = f(x_0)$.
- Si $\mathscr{D}$ est de la forme $]a,b[$, la continuité à gauche en b est équivalente à la continuité.
- Si x_0 n'est pas une extrémité, alors f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche.
- Enfin, on dit que f est **continue sur** $\mathscr{D}$ si elle est continue en tout point de $\mathscr{D}$,
- On note $C^0(\mathscr{D},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$. On note aussi $\mathscr{C}^0$ ou $\mathscr{C}^0(\mathscr{D})$ si il n'y a pas d'ambiguïté.

✎ La notion de continuité est surtout utile sur un intervalle (dans le but d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires).
Lorsque l'on demande : « Montrer que la fonction est continue en 0 », il faut vérifier que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
La continuité en x_0 est une définition locale : cela ne dépends que de l'expression de la fonction f autour du point x_0.

■ **Exemple VI.1** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La fonction est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Il reste à vérifier en 0. On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 = f(0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to +\infty} e^{-t} = 0 = f(0).$$

La fonction f est donc continue à droite et à gauche en 0, elle est donc continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

■

✯ Opérations, composition

Théorème VI.1 — Opérations sur les fonctions continues.

- La somme de fonction continue est continue,
- Le produit de fonction continue est continue,
- La composée de fonctions continues est continue,
- L'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas est continue. En conséquence, un quotient de deux fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas est continue.

✎ Pour montrer la continuité, il faut faire un schéma précis de la manière dont la fonction est construite. En particulier pour la composition.
Les polynômes, les fractions rationnelles, la fonction valeur absolue $|\cdot|$, la fonction exponentiel et la fonction ln, les fonctions sinus, cosinus et tangente, la fonction racine carrée sont continues sur leur ensemble de définition respectifs.
Contre-exemple : la fonction partie entière n'est pas continue aux points entiers.

■ **Exemple VI.2** Pour montrer que la fonction $x \longmapsto \ln(\cos(x)) + \ln(\sin(x))$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On a une première composition de fonctions continues :

$$\begin{array}{ccccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) & & \\ & & y & \mapsto & \ln(y) \end{array}$$

D'où :

$$\begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(\cos(x)) \end{array} \text{ est continue sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Une deuxième composition de fonctions continues :

$$\begin{array}{ccccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) & & \\ & & y & \mapsto & \ln(y) \end{array}$$

D'où :

$$\begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(\sin(x)) \end{array} \text{ est continue sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Par somme $x \mapsto \ln(\cos(x)) + \ln(\sin(x))$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. ■

✯ Prolongement par continuité

Définition VI.2 Soit f définie sur $\mathscr{D}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$, avec $x_0 \notin \mathscr{D}$, si f admet une limite finie y_0 en x_0, alors on appelle : prolongement par continuité de f en x_0 la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ y_0 & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Cette fonction est continue sur $\mathscr{D}$.

Démonstration. En effet,

- si $x \neq x_0$, il existe un intervalle de taille non nul sur lequel les fonctions f et g coïncident, on aura donc $\lim_x g = \lim_x f = f(x) = g(x)$,
- si $x = x_0$, on a $\lim_{x_0} g = \lim_{x_0} f = y_0 = g(x_0)$.

■

✎ Pour montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité en 0, il suffit de montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe (dans $\mathbb{R}$). On donne alors à $f(0)$ la valeur de la limite.
Le prolongement par continuité est unique : poser $f(x_0) = y_0$ et le seul moyen de prolonger f en une fonction continue.

! On identifie parfois f et son prolongement. Attention, ce n'est pas la même application.

■ **Exemple VI.3** Soit la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \end{cases}$$

On a $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, donc le prolongement par continuité en 0 est la fonction :

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

■

VII Image d'un intervalle par une fonction continue

✯ Rappel : notion d'intervalle

Définition VII.1 Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est caractérisé par le fait que si x et y sont des éléments de I, avec $x < y$ alors $[x,y] \subset I$. Autrement dit :

$$\forall (x,y) \in I^2, \text{ avec } x < y, \forall z \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x \leqslant z \leqslant y, \text{ on a } z \in I.$$

✎ Un intervalle de $\mathbb{R}$ est donc une partie de $\mathbb{R}$ « sans trou ».

■ **Exemple VII.1** $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, mais pas $\mathbb{R}^+_*$. ■

VII.1 Résolution de $f(x) = 0$ par dichotomie

Proposition VII.1 Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration. La démonstration est aussi un algorithme permettant de calculer c.

On construit trois suites (a_n) (b_n) et (c_n) définie par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $c_0 = \frac{a+b}{2}$, et les relations de récurrence :

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{le milieu de l'intervalle } [a_n, b_n]$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} c_{n+1} & \text{si } f(c_{n+1})f(a_n) > 0 \\ a_n & \text{sinon} \end{cases},$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} c_{n+1} & \text{si } f(c_{n+1})f(a_n) \geqslant 0 \\ b_n & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit :

- on regarde le centre c_n de l'intervalle $[a_n, b_n]$,
- si en ce point la fonction f est du même signe que a_n, on pose $a_{n+1} = c_n$, et $b_{n+1} = b_n$,
- sinon on pose $a_{n+1} = a_n$, et $b_{n+1} = c_n$.

On démontre facilement par récurrence que

- (a_n) est croissante, et (b_n) décroissante, avec $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n$,
- On conserve la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n)f(b_n) < 0$.
- La distance $[a_n, b_n]$ est divisée par 2 à chaque itération

$$|a_n - b_n| = \frac{|a_0 - b_0|}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Donc les deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite c.

Comme on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n)f(b_n) < 0$, on a par continuité en passant à la limite $f(c)^2 \leqslant 0$, *i.e.* $f(c) = 0$. ■

! Ce résultat est valable uniquement si la fonction est définie et continue sur $[a,b]$

Remarquons qu'on est sûr d'avoir $c \in]a,b[$, puisque $f(a)$ et $f(b)$ sont différent de 0.
Bien sûr, c n'est pas unique.

Ce résultat utilise les suites adjacentes, c'est donc une conséquence de l'axiome fondamental de $\mathbb{R}$.
C'est donc un résultat très important.

En conséquence :

Corollaire VII.2 Si f est une fonction continue sur un intervalle I qui change de signe alors f s'annule au moins une fois sur I.

Si f est une fonction continue sur un intervalle I qui ne s'annule pas, alors f garde un signe constant.

VII.2 Algorithme de Dichotomie en Python

L'algorithme de dichotomie permet de calculer une valeur approchée de c à une précision ε donné. Le principe est de remplacer a ou b par le milieu c de l'intervalle, selon le signe de $f(a)f(c)$, jusqu'à ce que la taille de l'intervalle soit plus petit que ε. Si au cours des itérations, on obtient la valeur exacte de c, *i.e.* si $f(c) = 0$, on stoppe les itérations en posant $a = b = c$.

```
def dichotomie(f,a,b,eps)
  """
  entrée: f fonction
          a,b réel avec a<b et f(a)f(b)<0
          eps>0 précision
  sortie: c valeur approchée d'une solution
            de f(c)=0 à 2 epsilon près
  """

  while (b-a>eps) :
    c=(a+b)/2      # c milieu de l'intervalle
    if f(a)*f(c) < 0 :
      b=c
    elif f(a)*f(c) > 0 :
      a=c
    else: #cas facultatif: f(c)=0
```

```
        return c
    return c
```

R Algorithme à savoir écrire en l'adaptant pour l'étude numérique de suites implicites.

VII.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème VII.3 Soit a et b avec $a < b$, et f une fonction continue sur $[a,b]$. Si y_0 est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe (au moins) un réel x_0 de l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas $f(a) \leqslant f(b)$.

Soit y_0 tel que $f(a) \leqslant y_0 \leqslant f(b)$.

La fonction continue $x \mapsto f(x) - y_0$, change alors de signe puisque $f(a) - y_0 \leqslant 0$, tandis que $f(b) - y_0 \geqslant 0$ il existe donc un point x_0 où elle s'annule.

Ce point est solution. ■

Le théorème des valeurs intermédiaires permets de démontrer l'existence d'une solution en utilisant la continuité sans calculer la solution.
Cela est particulièrement utile pour démontrer qu'une équation a une solution dans le cas où l'on a pas d'expression explicite de cette solution, par exemple pour définir une suite implicite.

Pour avoir l'unicité, il faut utiliser la stricte monotonie de la fonction, et le résultat suivant appelé corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

Corollaire VII.4 Soit a et b avec $a < b$, et f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$. Si y_0 est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un unique réel x_0 de l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas d'une fonction strictement croissante.

Soit x_0 solution (donnée par le théorème des valeurs intermédiaires), on a : $\forall x < x_0$, $f(x) < y_0$, et $\forall x > x_0$, $f(x) > y_0$. Ainsi : $f(x) = y_0 \iff x = x_0$. ■

R En fait on voit que si f est strictement monotone elle est injective.

La proposition suivante permet en plus de considérer les cas où les bornes a et b sont $\pm\infty$ et/ou $f(a)$ et $f(b)$ sont des limites qui peuvent être infinies.

Proposition VII.5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Autrement dit, l'image directe d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Rappel : définition de l'image directe d'un ensemble :

$$f(I) = \left\{ f(x) \middle| x \in I \right\}$$

Démonstration. Soit x et y deux éléments de $f(I)$ et $z \in [x,y]$ alors il existe $a \in I$ et $b \in I$ tel que $f(a) = x$ et $f(b) = y$, donc il existe $c \in [a,b] \subset I$ tel que $f(c) = z$. Par suite, $z \in f(I)$. ■

✎ Pour déterminer l'intervalle image de I par f on construit le **tableau de variation** de la fonction f. Dans un tel tableau, des flèches $\nearrow$ (ou $\searrow$), indique les intervalles sur lesquels la fonction f est continue et strictement croissante (ou décroissante). Toute valeur comprise entre les images des extrémités de ces intervalles est alors atteinte une fois et une seule.
Pour utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, on doit toujours se ramener au tableau des variations. Idem pour déterminer l'image directe d'un intervalle par une fonction.

■ **Exemple VII.2** $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$, $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$. Contre-exemple : $E(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ qui n'est pas un intervalle. ■

■ **Exemple VII.3** On a déjà vu : Soit P un polynôme de degré impair, alors P a au moins une racine. ■

■ **Exemple VII.4** Soit une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$, montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Il suffit de considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. On a alors :

$$g(0) = f(0) \geqslant 0 \text{ et } g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0.$$

Ainsi, il existe $c \in [0,1]$, tel que $g(c) = 0$. ■

■ **Exemple VII.5** Montrer que l'équation (E) : $\frac{e^x+e^{-x}}{10} = x$ admet une solution dans l'intervalle $[0,1]$.

On pose : $f : x \mapsto e^x + e^{-x} - 10x$. On a $(E) \iff f(x) = 0$. Or $f(0) = 2 > 0$ et $f(1) = e + \frac{1}{e} - 10$. Comme $e \approx 2.7$, on a $f(1) > 0$.

Donc, il existe $c \in [0,1]$, tel que $f(c) = 0$. ■

VIII Fonction continue sur un segment

On se restreint maintenant au cas où f est définie sur un **segment** $[a,b]$.

Théorème VIII.1 Soit une fonction f continue sur un segment $[a,b]$.

L'image $f([a,b])$ du segment $[a,b]$ par la fonction f est alors un segment de la forme $[m,M]$, où $m = \inf_I f$ et $M = \sup_I f$, avec $\exists(\alpha,\beta) \in [a,b]^2$ tel que : $f(\alpha) = m$ et $f(\beta) = M$.

On peut aussi écrire cela sous la forme :

$$\exists(\alpha,\beta) \in [a,b]^2, \text{ tq } \forall x \in [a,b],\ f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta).$$

✎ Cette proposition peut s'énoncer sous la forme : **Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes**.
C'est un résultat fondamental, puisqu'il utilise le théorème fondamental de $\mathbb{R}$

✎ Ce résultat permet d'obtenir des inégalités strictes, car la borne inférieure (qui est une limite) est atteinte (c'est une minimum).

Démonstration.

Cette démonstration est hors-programme et n'est pas faite en cours.

Étape 1 On démontre que la fonction f est bornée sur $[a,b]$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que la fonction f n'est pas bornée sur $[a,b]$.
Lemme : si on pose $c = \frac{a+b}{2}$, alors sur les deux intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$ il y a forcément un des deux sur lequel la fonction f n'est pas bornée.
En effet, si $\forall x \in [a,c], |f(x)| \leqslant M_1$ et $\forall x \in [c,b], |f(x)| \leqslant M_2$ alors $\forall x \in [a,b], |f(x)| \leqslant \max(M_1, M_2)$, ce qui est une contradiction avec f non bornée sur $[a,b]$.
Notons qu'il peut arriver que f ne soit bornée sur aucun des deux intervalles.
En utilisant cette remarque, et la même technique que la méthode de dichotomie, on peut alors construire deux suites (a_n) et (b_n) tels que :

$$a_0 = a,\ b_0 = b,\ f \text{ n'est pas bornée sur } [a_n, b_n] \text{ et } |a_n - b_n| \leqslant |a_0 - b_0| 2^{-n}.$$

En effet, on construit la suite par récurrence en posant :

- $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$ si f n'est pas bornée sur $[a_n, c_n]$,
- ou $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$ dans le cas contraire (où l'on est assuré que f n'est pas bornée sur $[c_n, b_n]$).

Ces deux suites sont adjacentes et convergent alors vers $c \in [a,b]$.
Or f est continue en c, ainsi $\lim_c f = f(c)$, donc il existe un intervalle autour de c sur lequel f est bornée.
En effet, en utilisant la définition de la continuité avec $\varepsilon = 1$, on a :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in [c-\alpha, c+\alpha] \leqslant \Longrightarrow\ f(c) - 1 \leqslant f(x) \leqslant f(c) + 1.$$

Or comme a_n et b_n tendent vers c, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$ $[a_n, b_n] \subset [c-\alpha, c+\alpha]$. et donc telle que $\forall x \in [a_n, b_n], f(c) - 1 \leqslant f(x) \leqslant f(c) + 1$. Ce qui est une contradiction, avec f n'est pas bornée sur $[a_n, b_n]$.
On a donc montré que la fonction f est bornée sur $[a,b]$.

Étape 2 L'image de $[a,b]$ étant un intervalle, borné d'après le résultat précédent. Il est donc forcément de la forme : $]m,M[$, $[m,M[$, $]m,M]$ ou $[m,M]$.
Montrons que seule la dernière forme convient, c'est-à-dire que les bornes supérieures et inférieures sont atteintes.
On raisonne de nouveau par l'absurde en supposant par exemple $\forall x \in [a,b], f(x) < M$.
On peut alors définir la fonction $g(x) = \dfrac{1}{(M - f(x))}$, cette fonction est définie sur $[a,b]$ et continue.
On applique alors le résultat précédent qui permets de montrer que la fonction g est alors bornée.
On a donc :

$$\exists k, K \in \mathbb{R},\ k \leqslant g(x) \leqslant K.$$

De plus $g(x) > 0$, donc $K > 0$, et :

$$\frac{1}{(M - f(x))} \leqslant K,\ \text{donc}\ \frac{1}{K} \leqslant (M - f(x)),$$

On a donc : $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant M - \frac{1}{K}$
On a donc trouvé un majorant $M - \frac{1}{K} < M$, ce qui est une contradiction avec la définition de la borne supérieure.
Ainsi, $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = M$ et la borne supérieure est atteinte.
De même (en utilisant la fonction $h(x) = \dfrac{1}{(m - f(x))}$) on montre que la borne inférieure est atteinte.

En conclusion, on obtient :

$$f([a,b]) = [m,M]$$

■

■ **Exemple VIII.1** Soit f continue sur $[0,1]$, tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) > 0$. La fonction f est alors minorée par 0, elle admet donc une borne inférieure. On a $\inf_{[0,1]} f \geqslant 0$.

En fait, on peut montrer :

$$\exists a > 0,\ \forall x \in [0,1], f(x) > a.$$

Autrement dit : démontrer que l'on peut séparer l'axe horizontal et la courbe représentative de f.

Il suffit de considérer $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \min_{x \in [0,1]} f(x)$. Ce minimum existe puisque f est continue sur le segment $[0,1]$.

Puis on pose $a = \frac{f(\alpha)}{2}$. On a bien $a > 0$, car $f(\alpha) > 0$. et

$$\forall x \in [0,1], f(\alpha) \leqslant f(x),\ \text{donc}\ \frac{f(\alpha)}{2} < f(\alpha) \leqslant f(x).$$

■

IX Bijections continues

IX.1 Théorème de la bijection

Le théorème des bijections concernent les fonctions strictement monotones et continues.

Théorème IX.1 Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I,

Alors :
- la fonction f réalise une bijection de I sur $f(I)$,
- $f(I)$ est un intervalle, noté J.
- la bijection réciproque f^{-1} de f est aussi continue de $J \to I$,
- la fonction f^{-1} est strictement monotone, de même monotonie que f.

Si on reprends les résultat précédent, on a vu que pour $f : I \to \mathbb{R}$ strictement croissante et continue :
- La stricte croissance assure l'injectivité,
- La continuité avec le théorème des valeurs intermédiaire assure que $J = f(I)$ est un intervalle et que $f : I \to f(I)$ est surjective.
- Ainsi, $f : I \to J$ est bijective.

- En utilisant la définition d'une fonction strictement croissante, on a pour $(a,b) \in f(I)$ et f croissante strictement :

$$\begin{aligned} f^{-1}(a) \leqslant f^{-1}(b) &\iff f\left(f^{-1}(a)\right) \leqslant f\left(f^{-1}(b)\right) \qquad \text{en appliquant } f \\ &\iff a \leqslant b \end{aligned}$$

  On en déduit ainsi que f^{-1} est aussi strictement croissante.
  Ainsi, la bijection réciproque f^{-1} a la même monotonie stricte que f
- Le théorème de la bijection donne alors un résultat nouveau : la continuité de la fonction f^{-1}.

Si on refait de même pour l'équation $y = f(x)$ pour une fonction f strictement croissante, on a :
- le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de solutions si $y \in f(I)$ (sans permettre de calculer la solution),
- la stricte monotonie assure l'injectivité et donc l'unicité de la solution,
- on peut montrer facilement la monotonie : si $y_1 < y_2$ les solutions correspondantes x_1 et x_2 vérifient : $x_1 < x_2$ (si f est strictement croissante, sinon c'est l'inverse).
- la théorème de la bijection assure que la solution x dépends continûment du second membre y.

R Ainsi, le grand intérêt du théorème de la bijection est la continuité !

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas où f est strictement croissante, le cas strictement décroissant est analogue.
- Montrons tout d'abords que f est injective.
  Soit x et x' tels que $f(x) = f(x')$, raisonnons par l'absurde et supposons que $x \neq x'$, quitte à changer l'ordre de x et x', on a alors $x < x'$, puis $f(x) < f(x')$, contradiction.
- Ensuite, par définition de $J = f(I)$, donc f est surjective.
- On a donc f est injective et surjective donc bijective. On peut donc définir la fonction $f^{-1} : J \to I$, réciproque de f. On rappelle que f^{-1} est caractérisé par : $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$.
- Montrons que f^{-1} est strictement croissante.
  Soit y et y' dans J tel que $y < y'$, on pose $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$, ceux sont par définition les uniques solutions de $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Supposons par l'absurde $x \geqslant x'$, alors $y = f(x) \geqslant f(x') = y'$, contradiction. Donc $x < x'$, et par suite f^{-1} est strictement croissante.

Comme on le voit ces premiers résultats sont assez élémentaires : **la continuité est le résultat fondamental de ce théorème.**

Montrons que f^{-1} est continue.

> Cette partie de la démonstration n'est pas faite en cours. Le résultat est admis (le programme le permet).

Soit $y_0 \in J$, et $x_0 \in I$, avec $f(x_0) = y_0$, on suppose de plus que x_0 n'est pas un bord de I, donc $\exists \varepsilon_0 > 0$, $[x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0] \subset I$.

Soit $\varepsilon > 0$, sans perte de généralité, on peut supposer que $\varepsilon < \varepsilon_0$ donc : $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$.

On regarde les pré-images des bornes de cet intervalle : soit $y_0^- = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_0^+ = f(x_0 + \varepsilon)$. On a : $y_0^- < y_0 < y_0^+$, car f est croissante, et

$$\forall y \in J, y_0^- \leqslant y \leqslant y_0^+ \implies x_0 - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant x_0 + \varepsilon \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc trouvé un petit intervalle $([y_0^-, y_0^+])$ non réduit à un point, autour de y_0 tel que sur cette intervalle on ait : $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leqslant \varepsilon$.

Si on veut revenir à la forme de la définition, il faut poser $\alpha = \min(y_0 - y_0^-, y_0^+ - y_0)$, on a alors $\alpha > 0$ et

$$\forall y \in J, |y - y_0| \leqslant \alpha \implies y_0^- \leqslant y \leqslant y_0^+ \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc démontré : $\lim_{y_0} f^{-1} = f^{-1}(y_0)$. Le cas où x_0 est un bords de l'intervalle se traite de la même manière.

■

■ **Exemple IX.1** Soit (y_n) une suite de J telle que $\lim_{n\infty} y_n = Y$, avec $Y \in J$ et (x_n) la suite d'élément de I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = y_n$$

on considère aussi l'unique $X \in I$ tel que $f(X) = Y$.

On a alors :

$$\lim_{n\infty} x_n = X$$

On a pu ainsi calculer la limite de la suite des solutions.

Ce résultat est évident en écrivant : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = f^{-1}(y_n)$ et

$$\begin{aligned}\lim_{n\infty} x_n =& \lim_{n\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(Y) \text{ par continuité de } f^{-1}\\ =& X.\end{aligned}$$

■

IX.2 Exemple d'étude de fonction implicite

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on pose $P_\lambda(x) = x^3 + \lambda x - 1$.

On fait le tableau de variation de P_λ qui est une fonction continue et strictement croissante (comme somme de fonctions strictement croissante et continue) :

x	$-\infty$	0	$u(\lambda)$	1	$+\infty$
$P_\lambda(x)$	$-\infty$	-1	0	λ	$-\infty$

On constate que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, le polynôme P_λ a une unique racine réelle notée $u(\lambda)$.

On dispose de plus de l'estimation : $u(\lambda) \in]0,1]$.

On veut étudier la fonction $u : \lambda \to u(\lambda)$.

On remarque (comme $u(\lambda) > 0$) :

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}^+,\ P_\lambda(u(\lambda)) = 0 &\iff u(\lambda)^3 + \lambda u(\lambda) - 1 = 0\\ &\iff \lambda = \frac{(1 - u(\lambda)^3)}{u(\lambda)}\end{aligned}$$

On note donc

$$f : \left\{\begin{array}{ccc}]0,1] & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \dfrac{(1-x^3)}{x} = \dfrac{1}{x} - x^2 \end{array}\right.$$

et on a :

$$\forall \lambda \in [0,+\infty[,\ \lambda = f(u(\lambda))$$

que l'on peut écrire :

$$f \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^+}$$

Voici le tableau de variation de la fonction f :

x	0		1
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$ ↘	0

La fonction f étant strictement décroissante et continue, elle est bijective de $]0,1]$ dans $f(]0,1]) = \mathbb{R}^+$.

Le théorème de la bijection assure alors que la bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to]0,1]$ est continue et strictement décroissante.

De la relation : $f \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^+}$ on obtient en composant par f^{-1} la relation $u = f^{-1}$. Ainsi, la fonction u est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Il faudrait ajouter à cette étude le résultat sur la dérivation des bijections réciproques, qui permet ici de calculer la dérivée de la fonction u.

X Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Dans cette section on considère une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$. La plupart des définitions se généralise en prenant le module à la place de la valeur absolue, la principale différence est l'absence de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.

Ainsi, dans $\mathbb{C}$, il ne peut y avoir de fonctions qui tendent vers $\pm\infty$, ni de fonction croissante, etc.

Définition X.1 Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que f(t) tends vers l lorsque t tends vers t_0 (avec $t_0 \in \mathbb{R}$) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in \mathscr{D},\ |t - t_0| \leqslant \alpha \implies |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$$

On dit que f(t) tends vers l lorsque t tends vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathscr{D},\ t \geqslant M \implies |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$$

On dit que f(t) tends vers l lorsque t tends vers $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathscr{D},\ t \leqslant M \implies |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $\lim_{t \to t0} f(t) = l$.

La limite d'une fonction est bien sur unique. On peut se ramener à étudier la limite de la fonction réelle $t \mapsto |f(t) - l|$.

Proposition X.1 Si $\lim_{t0} f = l$, alors f est localement bornée au sens où :
si $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in \mathscr{D},\ |t - t_0| \leqslant \alpha \implies |f(t)| \leqslant M$$

si $t_0 = +\infty$:

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathscr{D},\ t \geqslant A \implies |f(t)| \leqslant M$$

Définition X.2 Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ et $t_0 \in \mathscr{D}$. On dit que f est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$.
On dit que f est continue sur $\mathscr{D}$ si elle et continue en tout point de $\mathscr{D}$.

Proposition X.2 Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ et t_0 un réel ou $\pm\infty$.
On note u et v les fonctions $\mathscr{D} \to \mathbb{R}$, définies par :

$$\forall t \in \mathscr{D},\ f(t) = u(t) + iv(t).$$

On a alors équivalence entre :
(i) la fonction f admet une limite en t_0,
(ii) Les fonctions u et v admettent des limites finies en t_0.
De plus dans ce cas, on a :

$$\lim_{t_0} f = \lim_{t_0} u + i \lim_{t0} v.$$

Démonstration. Très semblable au cas des suites. On utilise essentiellement :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \text{ et } |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$$

si $\lim_{t0} f = l = a + ib$, alors

$$\forall x \in \mathscr{D},\ |u(x) - a| = |\mathrm{Re}\,(f(x) - l)| \leqslant |f(x) - l| \to 0$$

Réciproquement, si $\lim u = a$ et $\lim v = b$, alors en notant $l = a + ib$:

$$\forall x \in \mathscr{D},\ |f(x) - l| \leqslant |\mathrm{Re}\,(f(x) - l)| + |\mathrm{Im}\,(f(x) - l)| \to 0.$$

■

✎ En conséquence, on retrouve les résultats sur opérations (combinaisons linéaires, produit, quotient) et limites.
On en déduit aussi : si $\lim_{t_0} f = l$ alors $\lim_{t_0} \overline{f} = \overline{l}$
On a aussi le même résultat pour les fonctions continues en un point a : toute combinaison linéaire, produit et quotient de fonctions continues en un point a est continue en un point a.

Corollaire X.3 Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ et t_0 un réel ou $\pm\infty$.
On note u et v les fonctions $\mathscr{D} \to \mathbb{R}$, définies par :

$$\forall t \in \mathscr{D},\ f(t) = u(t) + iv(t).$$

On a alors équivalence entre :
(i) la fonction f est continue sur $\mathscr{D}$
(ii) Les fonctions u et v sont continues sur $\mathscr{D}$.
De plus, la combinaison linéaire, le produit et le quotient de fonction continue sur $\mathscr{D}$ est continue sur $\mathscr{D}$.

Limites et continuité

Pelletier Sylvain

PC, Lycée Descartes

⋆ Définition d'une limite

Exercice 1 Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ existe et soit finie. On note l cette limite.

1. Soit $\varepsilon > 0$, justifier :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall t \in]-\alpha,\alpha[,\ \left|\frac{f(2t)-f(t)}{t} - l\right| \leqslant \varepsilon$$

2. Montrer alors que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-\alpha,\alpha[$, on a :

$$\left|\frac{f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} - \frac{l}{2^n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$$

3. À l'aide d'une somme, en déduire :

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[,\ \left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - l\right| \leqslant \varepsilon$$

Conclure que f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$.

4. Trouver une fonction non continue en 0 vérifiant : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ existe et est finie.

Correction :

1. On utilise la définition de la limite.
2. On pose $t = \frac{x}{2^n}$, on a bien : $t = \frac{x}{2^n} \in]-\alpha,\alpha[$.
3. Considérons $x \in]-\alpha,\alpha[$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\frac{f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} - \frac{l}{2^n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Ce qui donne :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{x} - \frac{l}{2^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{x} - \frac{l}{2^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^k}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

et :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{x} = \frac{1}{x}\left(f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$$

On obtient ainsi :

$$\left|\frac{1}{x}\left(f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - l\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right| \leqslant \varepsilon\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, par continuité de la fonction f en 0, cela donne :

$$\left|\frac{1}{x}(f(x)-f(0)) - l\right| \leqslant \varepsilon.$$

Comme ε et x sont quelconque, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in]-\alpha, \alpha[,\ \left| \frac{1}{x}(f(x) - f(0)) - l \right| \leqslant \varepsilon.$$

et donc f dérivable en 0 avec $f'(0) = l$.

4. Si $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$, donc : $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$, mais f n'est pas dérivable en 0 (elle n'est même pas continue).

✯ Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 2 Nombres de racines réelles de $x^3 + 3px + 1$

On considère un réel p et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3px + 1$.

1. Écrire le tableau de variation de f, selon les cas $p < 0$, et $p \geqslant 0$.
2. En écrivant $f(a) = 1 + a(a^2 + 3p)$, montrer que $f(-a)f(a) = 1 - a^2(a^2 + 3p)^2$. En déduire que pour $p \leqslant 0$, $f(-\sqrt{-p})f(\sqrt{-p}) = 4p^3 + 1$.
3. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f admette trois racines réelles distinctes est $4p^3 + 1 < 0$.

Correction : Exercice assez simple.

1. Si $p \geqslant 0$, alors la fonction est strictement croissante, sinon elle est croissante jusqu'à $-\sqrt{-p}$, puis décroissante jusqu'à $\sqrt{-p}$, enfin croissante.
2. Simple calcul
3. Il faut bien rédiger l'équivalence : Si $4p^3 + 1 < 0$ alors $p < 0$, et $f(-\sqrt{-p}) > 0$ et $f(\sqrt{-p}) < 0$, d'où les trois racines distinctes sur le tableau de variation.
   Si f admet trois racines distinctes alors $p < 0$, et comme elle est injective sur $]-\infty, -\sqrt{-p}]$, $[-\sqrt{-p}, \sqrt{-p}]$, $[\sqrt{-p}, +\infty[$, chacun de ses intervalles contient au plus une racine. Comme il y a trois racines distinctes, chaque intervalle en contient un. Après avoir vérifié qu'aucune des racines n'est $\pm\sqrt{-p}$, on a trois racines distinctes.
   (on peut aussi faire par contraposé).

Exercice 3 Soit une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que l'équation $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$ possède une solution sur $[0, \frac{1}{2}]$.
2. Plus généralement, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$$

   possède une solution sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

   Indication : Poser $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, et en déduire qu'il existe deux entiers k et l, avec $0 \leqslant k < l \leqslant n-1$, tels que $g(\frac{k}{n})$ et $g(\frac{l}{n})$ soient de signes opposés.
3. Soit $\lambda \in]0,1[$, tel que λ ne s'écrive pas sous la forme $\frac{1}{n}$.
   On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{\lambda} - x \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}.$$

   Calculer $f(x+\lambda) - f(x)$ pour $x \in [0, 1-\lambda]$. Que peut-on en conclure ?

Correction : très classique sur le TVI.

1. Poser $g : x \mapsto f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$. On constate que $g(0)g(1) < 0$.
2. La somme fait 0 par somme téléscopique, et donc il y a un terme négatif et un terme positif.
3. On vérifie que

$$\forall x \in [0, 1-\lambda],\ f(x+\lambda) - f(x) = \lambda \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}$$

   qui est différent de 0 car $\forall k \in \mathbb{Z}, \lambda \neq k\pi$.

Exercice 4

1. Discuter en fonction de $t \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $\arctan(x-1)+\arctan(x)+\arctan(x+1)=t$.
2. Calculer $\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3$ En déduire, pour chaque entier n, les solutions de l'équation :

$$\arctan(x-1)+\arctan(x)+\arctan(x+1)=n\pi$$

Correction :

1. La fonction est strictement croissante (somme de fonction strictement croissante). Donc il n'y a pas de solution si $t<\frac{3\pi}{2}$ ou si $t>\frac{3\pi}{2}$, sinon il y a un unique solution.
2. Il faut écrire :

$$\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\frac{\pi}{4}+\arctan 2+\arctan 3$$

On calcule ensuite $\arctan 2+\arctan 3$ en calculant leur tangente. (Bien vérifier la réciproque).

$$\tan\left(\arctan 2+\arctan 3\right)=\frac{2+3}{1-2\times 3}=-1$$

Donc

$$\tan\left(\arctan 2+\arctan 3\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Comme $\frac{\pi}{2}<\arctan 2+\arctan 3<\pi$, cela donne :

$$\arctan 2+\arctan 3=\frac{3\pi}{4}.$$

Au final :

$$\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
&\arctan(x-1)+\arctan(x)+\arctan(x+1)=-\pi \text{ a pour unique solution } x=-2\\
&\arctan(x-1)+\arctan(x)+\arctan(x+1)=0 \text{ a pour unique solution } x=0\\
&\arctan(x-1)+\arctan(x)+\arctan(x+1)=\pi \text{ a pour unique solution } x=2
\end{aligned}$$

pour les autres valeurs de n, c'est aucune solution.

✯ Fonction continue sur un segment

Exercice 5 Soient $a<b$ deux réels et f et g deux fonctions continues $[a,b]\to\mathbb{R}$, telles que : $\forall x\in[a,b],\ f(x)<g(x)$. Montrer que

$$\exists\lambda>0,\ \forall x\in[a,b],\ f(x)<f(x)+\lambda<g(x).$$

Trouver des contre-exemples si on remplace $[a,b]$ par $]a,b]$.

Correction : Il faut regarder la fonction $h:x\mapsto g(x)-f(x)$. Cette fonction continue sur un segment est toujours strictement positive. Elle atteint son minimum en α On pose $\lambda=\frac{h(\alpha)}{2}$. On vérifie que λ convient.

Comme contre-exemple choisir $f:x\mapsto\frac{1}{x}$ et $g:x\mapsto\frac{1}{x^2}$ sur $[2,+\infty[$,

En effet : si

$$\forall x>2,\ \frac{1}{x^2}<\frac{1}{x^2}+\lambda<\frac{1}{x}$$

en faisant tendre x vers 2, on a $\lambda=0$, d'où la contradiction.

Comme contre-exemple choisir $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x} + x$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

$$\forall 0 < x < \frac{1}{2},\ \frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \lambda < \frac{1}{x} + x$$

On a :

$$\forall 0 < x < \frac{1}{2},\ 0 < \lambda < x$$

Contradiction en faisant tendre x vers 0.

Exercice 6 Soit une fonction $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive sur $[1,2]$. Montrer qu'il existe deux constantes k_1 et k_2, telles que $0 < k_1 \leqslant k_2$ et $\forall x \in [1,2]$, $k_1 x \leqslant f(x) \leqslant k_2 x$.

Correction : On regarde $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. Cette fonction est continue sur le segment $[1,2]$. Donc :

$$\exists (\alpha, \beta) \in [1,2]^2,\ \forall x \in [1,2],\ \frac{f(\alpha)}{\alpha} \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(\beta)}{\beta}$$

on note alors $k_1 = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$ et $k_2 = \frac{f(\beta)}{\beta}$. On vérifie qu'ils conviennent.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue :

1. Montrer que si f est périodique, f est bornée et atteint ses bornes.
2. Montrer que si f admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. alors elle est bornée,
3. Montrer que si f vérifie de plus $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = l \in \mathbb{R}$, alors f admet un minimum ou un maximum.
4. Montrer que si $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$, alors f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. f continue sur $[0,T]$ donc bornée sur $[0,T]$, et si $x \in \mathbb{R}$, alors on écrit $x = nT + y$ avec $y \in [0,T]$ et $f(x) = f(y)$.
2. Considérer le segment $[m,M]$ tel que si $x \geqslant M$ $|f(x) - \lim_{+\infty} f| \leqslant 1$ et si $x \leqslant m$ $|f(x) - \lim_{-\infty} f| \leqslant 1$. On borne alors sur chaque intervalle.
3.
4.

✯ Continuité d'une fonction

Exercice 8 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1 et en -1.
4. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Correction :

1. Il faut utiliser la forme exponentielle :

$$f(x) = \exp\left((x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) - \exp\left((x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)$$

On a :

$$x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \text{ est définie sur }]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$
$$x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ est définie sur }]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.$$

Ainsi f est définie sur

$$]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[.$$

On peut simplifier les calculs en écrivant :

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} &= \frac{x-1+1}{x-1} = 1+\frac{1}{x-1}\\ \frac{x+1}{x} &= 1+\frac{1}{x}\end{aligned}$$

2. Facile.
3. Lorsque x tends vers 1, on a :

$$\lim_{x\to 1} 1+\frac{1}{x} = 2$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 1} \exp\left((x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \exp(2\ln(2)) = 4.$$

et

$$(x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = (x-1)\ln(x) - (x-1)\ln(x-1)$$

Avec :

$$\begin{aligned}&(x-1)\ln(x) \to 0\times 0\\ &(x-1)\ln(x-1) \to 0 \text{ forme } t\ln(t) \text{ avec } t\to 0\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\exp\left((x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) \to 1.$$

et donc $\lim_{x\to 1} f(x) = -3$. Par imparité, on a $\lim_{x\to -1} f(x) = 3$.

4. On a :

$$(x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln\left(1-\frac{1}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{x-1} \to 1$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left((x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = e.$$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned}(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) &\underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} x\frac{1}{x} = 1.\end{aligned}$$

Et donc $f(x) \to 0$.

Exercice 9

1. Soient f et g deux fonctions continues $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, telles que $\forall x\in\mathbb{Q}$, $f(x)=g(x)$. Montrer que f et g sont égales.
2. Soit f une fonction continue $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, telle que $\forall x,y\in\mathbb{Q}, x\geqslant y \iff f(x)\geqslant f(y)$. Montrer que f est croissante.

Correction : Il faut utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, on considère une suite u_n telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\infty} u_n = x.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = g(u_n) && \\
&\lim_{n\infty} f(u_n) = f(x) && \text{par continuité} \\
&\lim_{n\infty} g(u_n) = g(x) && \text{par continuité}
\end{aligned}$$

donc $f(x) = g(x)$

2. Idem en considérant x et $y \in \mathbb{R}$, avec $x \leqslant y$ et les suites (u_n) et v_n telles ques :

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Q} \text{ et } v_n \in \mathbb{Q} \\
(u_n) \text{ croissante} \qquad &\lim_{n\infty} u_n = x \\
(v_n) \text{ décroissante} \qquad &\lim_{n\infty} v_n = y
\end{aligned}$$

⋆ Équations fonctionnelles

Exercice 10 Trouver toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = f(x).$$

Correction : on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$ ou 0.

La fonction f étant continue, on a forcément $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. Ce que l'on peut démontrer rigoureusement par exemple avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 11 Montrer que les fonctions constantes sont les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(2x) = f(x).$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(\frac{x}{2^n}) = f(x)$, et donc $f(x) = 0$ par passage à la limite.

Exercice 12 Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés :

$$\begin{aligned}
& f \text{ est continue en } 0 \\
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad & f(x+y) = f(x) + f(y).
\end{aligned}$$

Soit f une solution du problème.

- Montrer que $f(0) = 0$.
- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$.
- Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z},\ f(kx) = kf(x)$.
- Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(\frac{k}{n}x) = \frac{k}{n}f(x)$.
- En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$
  (*Indication :* utiliser le fait que $\forall x \in \mathbb{R}$, on peut trouver une suite u_n telle que $u_n \to x$, et $u_n \in \mathbb{Q}$, par exemple la suite des approximations décimales successives de x).
- Conclure sur l'ensemble des solutions.
- Même question si on suppose non plus que f est continue mais que f est croissante.

Correction :

1. $f(0+0) = f(0) = 2f(0)$

2. considérer $f(x+h) = f(x) + f(h)$, or $f(h) \to f(0) = 0$ par continuité en 0.
3. Récurrence.
4. Parité.
5.
$$f\left(n\frac{k}{n}x\right) = f(kx) = kf(x) = nf\left(\frac{k}{n}x\right).$$
6. pour $x \in \mathbb{R}$ fixé en considérant la suite proposée
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = u_n f(1)$$
en passant à la limite on a $f(u_n) \to f(x)$ par continuité, ce qui donne :
$$f(x) = xf(1)$$
7. Utiliser les suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers x en étant croissante/décroissante.

12 — Dénombrements

L'une des difficultés des probabilités est que l'on doit traduire les énoncés donnés « *en langage courant* » en « *terme mathématique* », c'est une étape de **modélisation**. La rédaction est donc très importante dans un exercice de dénombrements.

⋆ Rappels

Si p, et $q \in \mathbb{N}$, on note $[\![p,q]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre p et q, *i.e.* $[\![p,q]\!] = [p,q] \cap \mathbb{N}$).

! les notations $]|p,q|[$, ou $[|1+\infty|[$ ne sont pas acceptées.

La **factorielle** de n est définie par

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k$$

Par convention, on pose $0! = 1$, de manière à assurer $(n+1)! = n+1 \times n!$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $p \in [\![1,n]\!]$, on note l'**arrangement** :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$$

C'est le produit des p entiers « inférieur à n en partant de n »

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $p \in [\![0,n]\!]$, on note le **coefficient binomial**

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Par convention, si $p > n$ ou si $p < 0$, on pose $\binom{n}{p} = 0$. On a alors :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

ainsi que la relation de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in [\![0,n]\!],\ \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

qui permet de démontrer le binôme de Newton :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\text{que l'on écrit aussi } \forall x \in \mathbb{C},\ (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

I Cardinal d'un ensemble fini

I.1 Définition du cardinal d'un ensemble

Définition I.1 Soit E un ensemble, on dit qu'il est fini si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $[\![1,p]\!]$.

On admet qu'un tel p est alors unique, c'est le cardinal de l'ensemble E.

Notation I.1. *On note* $\mathrm{Card}(E)$, $|E|$ *ou encore* $\#E$ *le cardinal.*

La notion de cardinal corresponds ainsi à l'idée intuitive du nombre d'éléments d'un ensemble.

Par convention, on pose $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$. Enfin, si E n'est pas fini on dit qu'il est **infini**.

✎ On dit qu'une bijection de E dans $[\![1,p]\!]$ est une **numérotation**, puisque cela permet de numéroter les éléments de E sous la forme $E = \{e_1, \dots, e_p\}$.
Dénombrer un ensemble c'est donner son cardinal (ou dire qu'il est infini).

✎ Cette définition est théorique : on ne construit quasiment jamais la bijection.
À la place, on décrit un **processus de construction** de l'ensemble E permettant de numéroter les éléments. Ce processus doit construire **une et une seule fois** chaque éléments.

✎ Dénombrer c'est compter les éléments d'un ensemble, cela n'a rien à voir avec le hasard.
Cela signifie que dans un énoncé du type « on tire des cartes dans un jeu, déterminer le nombre de tirage tel que .... », on peut remplacer cet énoncé par « on choisit des cartes dans un jeu, déterminer le nombre de tirage tel que .... ». Le fait de connaître les cartes que l'on tire ne change pas le nombre de tirages possibles.
Une autre manière de voir est que l'étude des dénombrements est une partie de la théorie des ensembles, puisqu'on met en bijection des ensembles. Ce qui n'empêche pas les dénombrements d'être un outil pour le calcul des probabilités.

■ **Exemple I.1** $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$ sont infini, tandis que l'ensemble des lettres de l'alphabet {A,B,C, ...,Z} est de cardinal 26. ■

■ **Exemple I.2** Cette définition permet de montrer que $\mathrm{Card}([\![p,q]\!]) = q-p+1$. En considérant la bijection ϕ :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![p,q]\!] & \to & [\![1,q-p+1]\!] \\ k & \longmapsto & k-p+1 \end{array} \right. .$$

■

I.2 Théorème fondamental

Théorème I.1 Soit E et F deux ensembles finis, alors E et F ont même cardinal, si et seulement si il existe une bijection ϕ de E vers F (on dit que E et F sont en bijection).

Démonstration. La preuve est assez simple, et repose essentiellement sur le fait que la composée de bijections est une bijection.

Si E et F ont même cardinal, noté n, alors il existe une bijection ϕ de E vers $[\![1,n]\!]$, et une bijection ψ de F vers $[\![1,n]\!]$. En considérant $\phi \circ \psi^{-1}$, on obtient une bijection de E vers F.

D'un autre côté, si une telle bijection f de E vers F existe, comme F est fini on sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection ϕ de F vers $[\![1,n]\!]$. On $f \circ \phi$ est alors une bijection de E vers $[\![1,n]\!]$. ■

Ceci est la première technique pour dénombrer : **établir une bijection entre l'ensemble que l'on cherche à dénombrer et un ensemble dont on connaît le cardinal dans le cours**.

Cette bijection est rarement écrite explicitement. On se contente de décrire un procédé qui transforme les éléments de F en éléments de E. On veillera à bien vérifier qu'un élément dans l'ensemble de départ correspond bien à un élément et un seul dans l'ensemble d'arrivée, *i.e.* qu'on a bien établi une bijection entre les ensembles.

C'est le point de modélisation : on doit faire le lien entre la théorie du cours (par exemple : le nombre de parties d'un ensemble), et l'ensemble que l'on cherche à dénombrer qui est décrit dans le langage courant.

Une manière de trouver ce processus de construction est d'écrire plusieurs exemples d'éléments de l'ensemble à dénombrer, de manière à déterminer un processus de construction de cet ensemble, qui permet d'obtenir tous les éléments. On peut aussi considérer que l'on cherche à transmettre / représenter chaque élément de l'ensemble à dénombrer par une information complète mais minimale. L'ensemble des tirages est alors facilement mis en bijection avec des ensembles classiques.

■ Exemple I.3 Modélisation d'un ensemble comme une partie d'un ensemble

Supposons que l'on fait des tirages dans une urne avec 3 noirs et 2 blanches sans remise. On veut calculer le nombre de tirages possibles, *i.e.* dénombrer l'ensemble Ω des tirages possibles. On identifie un tirage avec la place des blanches, donc une partie de 2 éléments de $[\![1,5]\!]$.

À chaque tirage corresponds une partie (les deux places des boules blanches), à chaque partie corresponds un tirage (on sait quel tirage ont donné une boucle blanche, les autres sont noirs).

Ainsi, Ω est en bijection avec les parties à 2 éléments de $[\![1,5]\!]$, ensemble que l'on verra être de cardinal $\binom{5}{2}$. ■

■ Exemple I.4 Ordre non chronologique

Supposons que l'on tire des lettres dans une urne contenant 26 jetons avec les 26 lettres. On fait 26 tirages sans remises, *i.e.* on épuise les jetons.

On note E_1 l'ensemble des tirages qui commence par une voyelle. On le reverra, mais on a

$$\mathrm{Card}(E_1) = 6 \times 25!$$

En effet, on fait des choix successifs :

- 6 choix pour la première lettre,
- puis 25 choix pour la deuxième,
- puis 24, etc.

On expliquera ce résultat plus tard dans ce chapitre, ici on se contente de l'intuition. D'autre part la rédaction ci-dessus est un peu incorrect, du fait du « etc. ».

Maintenant si l'on veut dénombrer l'ensemble E_2 des tirages dont la deuxième lettre est une voyelle. si on procède de même, alors ce n'est pas simple : il faut considérer le cas où l'on tire une consonne en premier, puis une voyelle, etc. C'est faisable, mais alors comment dénombrer E_{17} qui est l'ensemble des tirages dont la 17^{me} lettre est une voyelle ?

En fait il y a plus simple : on peut mettre en bijection les tirages de E_{17} avec les tirages de E_1. Pour cela, il suffit d'utiliser l'application qui renverse les tirages 17 et les tirages 1. Cette application est une bijection de E_{17} dans E_1. Ainsi, $\mathrm{Card}(E_{17}) = 6 \times 25!$.

Autre rédaction possible, toujours avec des choix successifs :

- 6 choix pour la 17ème lettre,
- puis 25! choix pour les autres.

On peut en effet choisir en premier la 17ème lettre. ■

On voit ici une idée très importante : les dénombrements ne suivent pas nécessairement l'ordre chronologique.

■ **Exemple I.5** Ensemble des suites finies strictement croissante

Supposons que l'on veuille dénombrer l'ensemble :

$$E = \left\{ (i_1, i_2, i_3) \in [\![1,6]\!]^k \middle| i_1 < i_2 < i_3 \right\},$$

qui est l'ensemble des tirages de trois jets de dés, strictement croissante.

On voit que cet ensemble E peut être mis en bijection avec l'ensemble des parties à 3 éléments distincts de $[\![1,6]\!]$.

En effet, si $\{i, j, k\}$ est une telle partie, en notant $i_1 = \min(\{i, j, k\})$, puis $i_2 = \min(\{i, j, k\} \setminus i_1)$, et $i_3 = \max(\{i, j, k\})$, *i.e.* en les ordonnant par ordre croissant, on peut associer à la partie $\{i, j, k\}$ le triplet (i_1, i_2, i_3), qui vérifie bien $i_1 < i_2 < i_3$. Réciproquement au triplet (i_1, i_2, i_3), on peut toujours associer la partie $\{i_1, i_2, i_3\}$ qui est une partie à 3 éléments distincts de $[\![1,6]\!]$.

Ainsi, on déduit que le cardinal de E est $\binom{6}{3}$.

Pour la rédaction, on se contentera d'indiquer qu'à chaque partie à 3 éléments de $[\![1,6]\!]$, il existe une et une seule manière de les ordonner par ordre croissant.

On ne peut pas généraliser l'exemple précédent au cas de suites croissantes au sens larges, puisqu'il peut y avoir des éléments égaux.

■

I.3 Cardinal et opérations sur les ensembles

✯ Cardinal du complémentaire d'un ensemble

Proposition I.2 Soit E un ensemble fini, et $A \subset E$, on a alors : $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
De plus, on a l'égalité $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ si et seulement si $A = E$.
Enfin, en notant $C_E(A)$, le complémentaire de A dans E, on a :

$$\mathrm{Card}(C_E(A)) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$$

Démonstration. Ce résultat est admis. La preuve se fait en numérotant les éléments de E, en commençant par les éléments de A : on note $A = \{e_1, \dots, e_p\}$, et $E = \{e_1, \dots, e_p, \dots, e_n\}$. En admettant qu'une telle numérotation existe, on voit que $\mathrm{Card}(A) = p \leqslant n = \mathrm{Card}(E)$, avec égalité si et seulement si $A = E$. Et que $\mathrm{Card}(C_E(A)) = n - p$. ■

Ceci donne une deuxième technique pour dénombrer un ensemble : **dénombrer son complémentaire**. C'est le cas, où on dénombre l'ensemble des éléments qui ne vérifient pas telle propriété, on se ramène au calcul du nombre d'éléments qui vérifie la propriété.

■ **Exemple I.6** Dénombrement par utilisation du complémentaire

Pour le tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 contenant au moins un roi, on considère le complémentaire (*i.e.* les ensembles sans roi). Le complémentaire est de cardinal $\binom{28}{2}$ (choix de 2 cartes parmi 32), et l'ensemble des tirages possibles et de cardinal $\binom{32}{2}$. D'où le cardinal de l'ensemble cherché : $\binom{32}{2} - \binom{28}{2}$.

Attention, à ne pas faire l'erreur suivante : choisir le roi 4 choix, puis l'autre carte : 31 choix. On compte alors deux fois les tirages avec deux rois. ■

✯ Cardinal d'une union, cas de deux ensembles

Proposition I.3 Soient E et F deux ensembles **disjoints**, c'est-à-dire que $E \cap F = \emptyset$, on a alors :

$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F).$$

Dans le cas général de deux ensemble E et F, on a la relation :

$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}\, E + \mathrm{Card}\, F - \mathrm{Card}(E \cap F).$$

Démonstration. Ces résultats intuitifs sont admis. On peut penser numéroter les éléments de $E \cup F$, en commençant par ceux de E, puis ceux de F, pour obtenir : $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}\, E + \mathrm{Card}\, F$.

Le cas général se démontre en considérant $E \setminus (E \cap F)$ et F, qui sont deux ensembles disjoints dont la réunion est $E \cup F$. On obtient : $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E \setminus (E \cap F)) + \mathrm{Card}(F)$. Puis $\mathrm{Card}(E \setminus (E \cap F)) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(E \cap F)$. ■

Ainsi, **les cardinaux s'ajoutent lorsqu'on fait une réunion disjointe d'ensemble**. Cela correspond au cas, où l'on fait une disjonction des cas, en « *découpant* » l'ensemble que l'on veut dénombrer en sous-ensemble plus simple.

⋆ Cardinal d'une union quelconque, cas disjoint

Proposition I.4 Soit $A_1,\dots,A_n$, n ensembles finis, disjoints deux à deux , c'est à dire que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$$

alors on a :

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \cdots + \mathrm{Card}(A_n)$$

Ce que l'on peut écrire :

$$\mathrm{Card}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i).$$

Ce résultat donne une deuxième technique pour dénombrer un ensemble : le découper en sous-ensemble disjoint dont on connaît le cardinal. Dans ce contexte, les cardinaux s'ajoutent. Attention : les cardinaux doivent être disjoint, on peut comparer cela à une disjonction des cas.

■ **Exemple I.7** Toujours pour le tirage de 2 cartes parmi 32 et le nombre de tirage avec au moins un roi. Cet ensemble est la réunion disjointe de deux ensemble :

- L'ensemble des tirages avec 1 roi qui est de cardinal 4×28 (choix du roi et de l'autre carte)
- L'ensemble des tirages avec 2 rois, qui est de cardinal $\binom{4}{2}$ (un roi parmi les 4).

On trouve donc le cardinal de $E = 4 \times 28 + \binom{4}{2}$. ■

On peut aussi chercher le cardinal de trois ensembles quelconques (non disjoints). On obtient facilement :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = &\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C)\\ &- \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C)\\ &+ \mathrm{Card}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Une formule hors-programme permet de traiter le cas général de n ensembles.

I.4 Applications entre ensembles finis

Proposition I.5 Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- Si il existe une injection de E vers F, alors $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
- Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, toute injection de E vers F est bijective.
- Si il existe une surjection de E vers F, alors $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
- Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, toute surjection de E vers F est bijective.

Démonstration. Essentiellement, la preuve repose sur la proposition sur les parties d'un ensemble : il s'agit donc de mettre en bijection E (resp. F), avec une partie de F (resp. E).

Soit f un injection de E vers F, alors on peut considérer l'application :

$$\phi : \begin{cases} E & \to & f(E) \\ e & \mapsto & f(e) \end{cases},$$

i.e. on obtient ϕ à partir de f en restreignant l'ensemble d'arrivée à $f(E)$.

Cette application hérite de la propriété d'injectivité de f, elle est donc injective. Elle est aussi surjective, puisqu'on a choisi pour ensemble image, l'ensemble $f(E)$.

Ainsi, elle est bijective. Donc $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}\Big(f(E)\Big)$, qui est une partie de F, donc de cardinal inférieur à F. On obtient alors : $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.

Si maintenant, $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors $\mathrm{Card}\Big(f(E)\Big) = \mathrm{Card}(F)$, donc $f(E) = F$, donc f est surjective.

Soit maintenant f une surjection de E vers F. Pour tout élément $a \in F$, on sait qu'il existe un élément $x_a \in E$, tel que $f(x_a) = a$. On considère alors l'application

$$\phi : \begin{cases} F & \to & E \\ a \in F & \mapsto & \phi(a) = x_a \in E \end{cases}.$$

Cette application vérifie la propriété

$$\forall a \in F,\ f(\phi(a)) = a, \text{ mais pas la propriété } \forall x \in E,\ \phi(f(x)) = x,$$

puisque $\phi(f(x))$ est l'un des x' tel que $f(x') = f(x)$. On a ainsi construit *l'inverse à droite de* f, c'est-à-dire une application ϕ telle que $f \circ \phi = Id_F$.

Par contre, cette application ϕ est injective, en effet, si $\phi(a) = \phi(b)$, alors $f(\phi(a)) = a = f(\phi(b)) = b$. Ainsi, en appliquant le résultat précédent, on a $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.

Puis si $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$, alors ϕ est une bijection, on compose alors la relation $f \circ \phi = Id_F$ par la fonction ϕ^{-1} pour obtenir : $f \circ \phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1}$, ce qui donne $f = \phi^{-1}$, et donc montre que f est une bijection.

■

R La preuve montre que si f est surjective, on peut trouver ϕ tel que $f \circ \phi = Id$ (mais pas forcément $\phi \circ f = Id$)

Corollaire I.6 Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \to F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

■ **Exemple I.8** On considère un entier $n \geqslant 2$, et un réseaux de n ordinateurs.

Chaque ordinateur est relié à aucun, un ou plusieurs autres ordinateurs du réseaux

On considère que cette relation est symétrique : si un ordinateur A est relié à un ordinateur B, alors B est relié à A. Par contre, A n'est pas relié à lui-même.

On veut montrer qu'il existe deux ordinateurs dans le réseau qui ont le même nombre de connexion (qui sont reliés au même nombre d'ordinateur).

Cela provient du fait que l'application N qui à l'ordinateur $i \in [\![1,n]\!]$ associe le nombre de connexions N_i ne peut être injective.

En effet, il y a deux cas possibles :

- tous les ordinateurs ont au moins une connexion : dans ce cas la fonction N est à valeur dans $[\![1,n-1]\!]$, or $\text{Card}([\![1,n]\!]) \geqslant \text{Card}([\![1,n-1]\!])$, la fonction N ne peut donc pas être injective,
- si un ordinateur (au moins) n'est pas relié au réseaux : dans ce cas la fonction N est à valeurs dans $[\![0,n-2]\!]$ (puisqu'aucune machine n'est relié à la machine seule). On retrouve le même résultat.

Dans les deux cas, l'application N n'est pas injective, et donc $\exists(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $i \neq j$ et $N_i = N_j$, ce qui signifie qu'il existe deux machines avec le même nombre de connexions.

■

II Listes et combinaisons

II.1 Listes d'éléments quelconques

⋆ Cardinal d'un produit cartésien

On rappelle que le produit cartésien de deux ensemble E, F est l'ensemble des couples (x,y), avec $x \in E$ et $y \in F$.

Proposition II.1 Soit E et F deux ensembles finis. Alors le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini, avec :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E)\,\text{Card}(F).$$

Démonstration. Pour $x \in E$, notons $F_x = \left\{(x,y) \in E \times F \middle| y \in F\right\}$, *i.e.* l'ensemble des couples dont la première composante est x.

On a :

$$E = \bigcup_{x \in E} F_x \text{ union disjointe.}$$

En effet, un élément $(x,y) \in E \times F$ appartient à l'ensemble F_x (avec le x qui est la première composante du couple), et ces ensembles sont disjoints.

Ainsi : $\text{Card}(E) = \sum_{x \in E} card(F_x)$. Or de manière évidente, il y autant d'éléments dans F_x que dans F. D'où :

$$\text{Card}(E) = \sum_{x \in E} \text{Card}(F) = \text{Card}(F)\,\text{Card}(E).$$

■

⋆ Ensemble des listes quelconques

En raisonnant par récurrence, on obtient :

Proposition II.2 Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensemble finis, alors $E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$ est fini, avec :

$$\text{Card}\left(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n\right) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \cdots \times \text{Card}(E_n)$$

En particulier, pour un ensemble E, de cardinal p on a :

$$\mathrm{Card}(E^n) = \mathrm{Card}(E)^n = p^n.$$

Les éléments de E^n sont appelés des **n-uplets** ou **n-liste**.
Il y a ainsi p^n liste de longueur n de E.

Cela donne un autre moyen de dénombrer des ensembles : l'écrire comme un produit de deux ensembles et multiplier les cardinaux.

■ **Exemple II.1** Dans les tirages classiques :

- On tire n dés, l'ensemble des résultats possible est $[\![1,6]\!]^n$.
- On considère une urne dans laquelle on tire des boules noires (N), blanches (B) ou rouges (B). On tire 7 boules dans l'urne, l'ensemble des résultats possibles est alors $\{N,B,R\}^7$.
- L'ensemble des mots de 5 lettres est de cardinal 26^5.

■

D'une manière générale, un ensemble d'écrit comme des n-liste si il y a répétition avec une notion d'ordre ($(x,y) \neq (y,x)$), mais que les élément peuvent se répéter comme dans des tirages successifs avec remise.

✎ Écrire un ensemble comme un produit cartésien revient à **faire des choix successifs**. Le cardinal se multiplie alors dans ce contexte.
On construit alors le produit cartésien $E \times F$ par choix successifs :
- choix de la première composante x : $\mathrm{Card}(E)$ choix,
- choix de la deuxième composante y : $\mathrm{Card}(F)$ choix.

Au final, on a donc $\mathrm{Card}(E)\mathrm{Card}(F)$ choix.
La rédaction doit alors faire apparaître les mots choix multiples et les différentes étapes de la construction du produit cartésien. Les étapes de cette construction ne sont pas forcément les étapes chronologiques de l'expérience.

✎ **Attention** : la démonstration montre qu'en fait de produit il s'agit d'une somme sur les éléments de E.
Comme on ajoute toujours le même terme, cela revient à multiplier ce terme ($\mathrm{Card}(F)$) par le nombre de fois où on l'ajoute ($\mathrm{Card}(E)$).
C'est le cas simple où le nombre de choix à la deuxième étape ne dépends pas du choix fait à l'étape précédent. Si ce n'est pas le cas, on revient à un calcul de somme : on fait une disjonction des cas selon le choix fait à la première étape.

■ **Exemple II.2** Considérons le cas d'un tirage 2 cartes parmi 32, on cherche le nombre de tirages constitués d'un roi et d'une reine. Un tel tirage est construit en faisant deux choix successifs :

- Le choix du roi (4 choix),
- le choix de la reine (4 choix).

On a ainsi 16 tirages possibles.

De manière plus formelle, on a mis en bijection cet ensemble avec le produit cartésien de l'ensemble des rois et de l'ensemble des reines. ■

■ **Exemple II.3** On reprends un exemple précédent : on tire des lettres dans une urne contenant 26 jetons avec les 26 lettres. On fait 26 tirages sans remises, *i.e.* on épuise les jetons.

On note E_1 l'ensemble des tirages qui commence par une voyelle. On fait des choix successifs :

- 6 choix pour la première lettre,
- puis 25 choix pour la deuxième,
- puis 24, etc.

On a donc :

$$\mathrm{Card}(E_1) = 6 \times 25!$$

Les choix possibles à la deuxième étape dépendent des choix faits à l'étape 1. Et d'une manière générale, les choix possibles à l'étape i dépends des choix faits aux étapes précédentes puisqu'on choisit une lettre parmi les restantes.

Mais le nombre de choix possibles à l'étape i ne dépends pas des choix faits aux étapes précédentes.

■

■ **Exemple II.4** Contre-exemple où le nombre de choix à la deuxième étape dépends du choix de la première étape

Considérons l'ensemble : $\left\{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \middle| i < j\right\}$, *i.e.* l'ensemble des tirages de deux dés discernables, tels que le premier dés est strictement inférieur au second.

On a vu précédemment que cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des parties de 2 éléments de $[\![1,6]\!]$. Il y a donc $\binom{6}{2} = 15$ tirages dans E.

Retrouvons ce résultat par deux choix successifs :

- choix de $i \in [\![1,5]\!]$: 5 choix,
- choix de j : $6-i$ choix.

On voit que le nombre de choix à la deuxième étape dépends du choix de la première étape : on ne peut donc pas multiplier !

En fait, on a construit une partition de E en 5 ensembles :

$$E = \bigcup_{i=1}^{5} E_i \text{ où } E_i = \left\{(i,j) \middle| i < j\right\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des couples de E dont le premier jet de dés est i.

On a donc :

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{i=1}^{5} (6-i) = 30 - \frac{5 \times 6}{2} = 15.$$

■

II.2 listes d'éléments distincts

Définition II.1 Soit E un ensemble et $p \geqslant 1$ un entier.

On appelle arrangement de p éléments de E toute p-liste $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'éléments deux à deux distincts, c'est-à-dire que si $i \neq j$, $x_i \neq x_j$.

On dit aussi qu'un arrangement de p éléments de E est une p-liste sans répétition.

Le mot important dans cette définition est *distincts*. Ainsi, les arrangements sont utilisés pour dénombrer des ensembles qui contiennent des p-liste, dont les éléments sont toujours distincts, par exemple, des **tirages sans remises**.

■ **Exemple II.5** Si on tire 3 boules parmi 5 numérotées de 1 à 5, un tirage sera par exemple : $(1,4,2)$. C'est donc un 3-arrangements (= 3-liste sans répétition). ■

Proposition II.3 La nombre d'arrangements de p éléments de E est

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1).$$

Démonstration. La preuve consiste à dénombrer les p-arrangement $(x_1,\dots,x_p)$, en procédant par choix possibles avec p étapes.

- On a n choix pour x_1 (tous les éléments de E).
- Puis $n-1$ choix pour x_2 (tous les éléments de E sauf x_1).
- Puis $n-2$ choix pour x_3 (tous les éléments de E sauf x_1 et x_2).
- etc.
- jusqu'à l'élément x_p pour lequel on a $n-(p-1)$ choix.

Pour compter le nombre de p-arrangements, on fait donc le produit :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

■

✎ il faut éviter au maximum les rédactions avec des choix successifs de la forme « etc. » (comme on l'a fait ci-dessus). Il est préférable de les remplacer par un arrangements (ou une permutation).

II.3 Permutations

Définition II.2 Soit E un ensemble. On appelle permutation de E une n-liste de E contenant exactement une fois chaque élément de E.

On note $\sigma(E)$ l'ensemble des permutations de E.

Proposition II.4 Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de permutations de E est :

$$\operatorname{Card}(\sigma(E)) = \operatorname{Card}(E)! = n!$$

Démonstration. De la même manière que précédemment, on a n choix pour le premier élément, puis $n-1$ pour le deuxième élément, etc. ■

Le nombre de permutation correspond aux cas où l'ordre a de l'importance, mais où il l'on utilise / tire tous les éléments).

■ **Exemple II.6** Anagrammes Le nombre d'anagramme du mot PCSI est ainsi $4!$. ■

II.4 Nombres d'applications entre ensemble finis

On rappelle que F^E désigne l'ensemble des application de E dans F.

Proposition II.5 Soit E et F deux ensembles finis, avec $p = \mathrm{Card}(E)$, et $n = \mathrm{Card}(F)$.
L'ensemble des applications de E vers F, notée F^E est fini et :

$$\mathrm{Card}(F^E) = (\mathrm{Card}\, F)^{\mathrm{Card}\, E} = n^p.$$

Démonstration. Numérotons les éléments de E, sous la forme : $E = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$. Choisir une fonction f de E vers f, revient à choisir l'image de e_1, l'image de e_2 etc. , il y a donc p choix à faire dans F, soit n^p choix possibles.

On peut considérer que cela revient à choisir un élément dans : $\prod_{i=1}^{p} F$ ∎

On peut modéliser un ensemble comme l'ensemble des applications d'une ensemble dans un autre.

▪ **Exemple II.7** On a 3 boules numérotées et 5 boîtes (qui peuvent contenir autant de boules que l'on veut), le nombre de rangements possibles corresponds au nombre d'applications de $[\![1,3]\!]$ dans $[\![1,5]\!]$. Il y a donc 5^3 rangements possibles. ▪

On a aussi un résultat sur le nombre d'injections :

Proposition II.6 Soit E et F deux ensembles finis, avec $p = \mathrm{Card}(E)$ et $n = \mathrm{Card}(F)$.
On a alors A_n^p injections de E dans F.

Démonstration. Sans perte de généralité, on se ramène à $E = [\![1,p]\!]$ et $F = [\![1,n]\!]$

On a une bijection entre l'ensemble des injections et l'ensemble des liste de p éléments de $[\![1,n]\!]$ sans répétition : à une injection ϕ, on associe la liste $\big(\phi(1), \dots, \phi(p)\big)$.

C'est bien une p-liste de $[\![1,n]\!]$ d'éléments sans répétition et cette liste caractérise l'injection. ∎

On a aussi un résultat sur le nombre de permutations :

Proposition II.7 Soit E de cardinal n, alors il y a $n!$ bijection de $E \to E$.

Démonstration. Cela revient à choisir une liste de longueur n de $[\![1,n]\!]$ sans répétition. ∎

R Le nombre de surjections est compliqué à calculer.

III Cardinal des parties d'un ensemble

III.1 Parties quelconque d'un ensemble

On rappelle que $P(E)$ est l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des sous-ensemble de E.

Proposition III.1 Soit E un ensemble fini de cardinal p, alors $P(E)$ est fini et on a :

$$\operatorname{Card}(P(E)) = 2^p$$

Démonstration. On a vu dans le chapitre application que $P(E)$ est en bijection avec les fonctions $E \to \{0,1\}$ par les fonctions caractéristiques. L'application :

$$\begin{cases} P(E) & \to & \mathscr{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{cases}$$

est bijective. Rappel : pour $A \subset E$,

$$\mathbb{1}_A \quad \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

■

On peut aussi voir cela par choix successifs. On note $E = \left\{e_1, e_2, \dots, e_p\right\}$. On cherche à déterminer combien de choix on a pour construire une partie A de E.

- pour e_1, on a deux choix : mettre e_1 dans la partie ou pas,
- idem pour e_2, etc.

On a donc 2^p choix.

Le cas où l'on considère les parties d'un ensemble est celui où l'on tire un certain nombre d'éléments sans ordre (en tas). Le nombre d'éléments est quelconque.

■ **Exemple III.1** Toujours avec 5 boules numérotées et 3 boîtes, le contenu possible d'une des boîtes est l'ensemble des parties de $[\![1,5]\!]$, il y a donc 2^5 possibilités pour une boîte donnée. ■

III.2 Combinaisons

Définition III.1 Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$. On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E à p éléments. On note $P_p(E)$ l'ensemble des combinaisons à p éléments de E.

Ainsi $P_p(E)$ est une partie de $P(E)$ qui contient les ensembles à p éléments.

Proposition III.2 Si $\operatorname{Card}(E) = n$ Le nombre de combinaison de p éléments de E est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1))}{p!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Les combinaisons interviennent dans le cas où l'ordre n'a pas d'importance par exemple dans le cas de tirages simultanés. On peut aussi parler de tirage en tas, en connaissant le nombre d'éléments dans le tas.

R Par convention, si $p > n$, ou si $p < 0$ il n'y a pas de combinaisons à p éléments de E. Donc $\binom{n}{p} = 0$.

ADMIS : voir lemme des bergers. Une combinaisons à p éléments $\{x_1,x_2,\dots,x_p\}$ correspond à $p!$ arrangements : $(x_1,x_2,\dots,x_p)$, mais aussi $(x_2,x_1,x_3,\dots x_p)$ etc. Bref, à autant d'arrangements que de manière de permutations de l'ensemble $[\![1,p]\!]$.

Il y a donc $\frac{A_n^p}{p!}$ arrangements possibles. ■

III.3 Interprétation des formules sur les binomiaux en terme combinatoire

On peut ainsi interpréter différentes formules sur les binomiaux.

$\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a que l'ensemble vide qui contient un seul élément.

$\binom{n}{1} = n$ car on compte les singletons, *i.e.* les éléments.

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ car il y a autant de parties que de complémentaires de parties.

✫ Somme des binomiaux

Considérons les l'ensemble des parties $P(E)$.

C'est l'union disjointe des ensembles des parties à 0, 1, 2, jusqu'à n élément.

Ce qui s'écrit :

$$P(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k(E) \qquad \text{union disjointe}$$

Donc $\mathrm{Card}(P(E))$ vérifie :

$$\mathrm{Card}(P(E)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(P_k(E))$$

On retrouve donc la formule :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

✫ Propriété de Pascal

Considérons l'ensemble E des $p+1$ combinaison de $[\![1,n+1]\!]$, c'est donc l'ensemble des parties de $p+1$ éléments de $[\![1,n+1]\!]$. On a vu dans le cours que : $\mathrm{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.

On découpe E en deux parties disjointes :

- l'ensemble des parties contenant $n+1$ notée E_1,
- l'ensemble des parties ne contenant pas $n+1$ notée E_2.

On a clairement : $E = E_1 \cup E_2$, union disjointe. Ainsi, $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E_1) + \mathrm{Card}(E_2)$.

On cherche le cardinal de E_1 et E_2.

On a $\mathrm{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$ puisque l'on construit les parties à $p+1$ éléments de $[\![1,n+1]\!]$ ne contenant pas $n+1$, donc les parties à $p+1$ éléments de $[\![1,n]\!]$.

Une partie de E_1 est une partie de $p+1$ éléments de $[\![1,n+1]\!]$ contenant $n+1$, elle est donc entièrement déterminé par la donnée d'une partie de p éléments de $[\![1,n]\!]$ auquel on ajoute l'élément $n+1$.

Ainsi, $\mathrm{Card}(E_1) = \binom{n}{p}$.
Ce qui donne la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Dénombrements

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Pour résoudre les problèmes de dénombrements, il est important de commencer par déterminer l'univers Ω (*i.e.* l'ensemble des tirages possibles) et son cardinal. Les exercices types sont ceux où l'on tire une carte dans un jeu ou une boule dans une urne.

Il faut alors se demander si les tirages sont :

- **simultanés**, *i.e.* sans ordre, en tas. C'est alors des parties d'un ensemble. On peut alors séparer selon si :
  - le nombre d'éléments dans la partie est fixé (combinaison)
  - le nombre d'éléments dans la partie est quelconque (toutes les parties d'un ensemble).
- ou **successifs**, *i.e.* avec ordre, ce dernier cas se séparant en deux :
  - **avec remise** (produit cartésien du même ensemble),
  - ou **sans remise** (arrangements).

On a donc quatre cas possibles, qu'il faut bien avoir compris.

Un dernier cas, est celui où l'on part d'un ensemble de cardinal n et où l'on s'intéresse aux **permutations** de cet ensemble (ce qui revient à faire n tirages sans remise). C'est par exemple le nombre d'anagrammes.

Enfin, un raisonnement classique est le suivant : choisir une liste strictement croissante de longueur p revient à choisir une partie de p d'éléments distincts puis de les classer par ordre croissant.

! La réponse à un problème de dénombrement n'est pas le cardinal de l'ensemble, c'est la mise en bijection avec un ensemble connu. La rédaction est donc très importante.

✯ Dénombrements classiques

Exercice 1 On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

1. Quel est l'univers associé et son cardinal ?
2. Combien de tirages sont constitués de quatre trèfles ?
3. Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur).
4. Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ?
5. Combien de tirages sont constitués de quatre cartes qui sont de quatre couleurs distinctes deux à deux ?
6. Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur qui se suivent ?
7. Combien de tirages sont constitués de quatre cartes qui se suivent ?
8. Combien de tirages sont constitués de quatre cartes qui se suivent et qui sont de couleurs différentes ? de quatre couleurs distinctes deux à deux ?

Correction :

1. $\binom{32}{4}$.
2. $\binom{8}{4}$.
3. $4 \times \binom{8}{4}$.
4. $\binom{32}{4} - 4\binom{8}{4}$.
5. 8^4
6. 4×5.
7. 5×4^4.
8. $5 \times 4^4 - 4 \times 5$ ou $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Exercice 2 On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

1. Quel est l'univers associé et son cardinal ?
2. Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ?
3. Combien de tirages contiennent des consonnes aux rangs 2, 4 et 6, et des voyelles aux rangs 1, 3 et 5 ?
4. Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ?
5. Combien de tirages sont constitués de 6 jetons consécutifs dans l'alphabet sortis dans le bon ordre ?

6. Combien de tirages sont constitués de 6 jetons consécutifs dans l'alphabet non nécessairement sortis dans le bon ordre ?

Correction :
1. A_{26}^{6}.
2. $21 \times A_{25}^{5}$, autre méthode : séparer cas où la première est consonne/voyelle.
3. $A_{20}^{3} \times A_{6}^{3}$.
4. $\binom{26}{6}$.
5. 21 (attention au $+1$.)
6. $21 \times 6!$

Exercice 3 On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

1. Quel est l'univers associé et son cardinal ?
2. Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ?
3. Combien de tirages ne sont constitués que de nombres pairs ?
4. Combien sont formés de deux « 1 » et de trois « 2 » ?
5. Combien sont formés de deux « 1 » puis de trois « 2 » ?
6. Combien sont formés de deux « 1 » exactement ? De au moins deux « 1 » ?
7. Combien sont formés de au moins deux nombres différents ? De deux nombres différents et deux seulement ?
8. Combien sont formés de cinq nombres tirés dans l'ordre croissant ?

Correction :
1. 15^5
2. A_{15}^{5}.
3. 7^5
4. $\binom{2}{5}$ (place des 2 ou des 1)
5. 1
6. $\binom{2}{5} \times 14^3$.
   $\binom{2}{5} \times 15^3$ est faux, il faut $15^5 - 14^5 - 5 \times 14^4$.
7. $15^5 - 15$. $\binom{15}{2}(2^5 - 2)$, ou $15 \times \left[\binom{5}{3} + \binom{5}{4}\right] \times 14$.
8. $\binom{15}{5}$

Exercice 4 On distribue les 32 cartes d'un jeu de cartes à 4 joueurs, chacun recevant donc 8 cartes. Quel est le cardinal de l'univers associé ?

Correction : On peut décrire l'univers comme l'ensemble des partitions des 32 cartes en 4 parties à 8 éléments. $\binom{32}{8} \times \binom{24}{8} \times \binom{16}{8} \times \binom{8}{8}$, ce qui se simplifie.

Exercice 5

1. Combien y a-t-il de dominos dans un jeu normal ?
   Un domino est constitué de deux parties contenant un symbole de $[\![0,6]\!]$, les dominos $[1,3]$ et $[3,1]$ étant les mêmes.
2. Un octet est constitué de 8 symboles 0 ou 1. Combien y'a-t-il d'octets différents ?
3. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot `abracadabra` ?

Correction :
1. $7 + \binom{7}{2}$ (double + paire différentes)
2. 2^8.
3. $\binom{11}{5} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2$ (places des a, des b des r permutation de c et d). Cela se simplifie.

Exercice 6 On dispose d'une urne contenant trois boules blanches numérotées de 1 à 3 et de deux boules noires numérotées de 4 à 5. On tire une à une successivement les cinq boules de l'urne (sans remise). Combien y a-t-il de façons d'obtenir deux boules blanches lors des deux premiers tirages ?

Correction : Puisque les boules ont des numéros, elles sont discernables. Choix successifs :

- Choix des deux boules blanches dans les 2 premiers tirages : A_3^2,
- Choix des places des autres : $3!$.

Final : $3 \times 2 \times 3 \times 2$.

Autre méthode :

- Choix de la place de la troisième boule blanche : 3,
- permutation des boules blanches dans les places choisies : $3!$
- permutation des boules noires : $2!$.

✯ Dénombrements et applications

Exercice 7

1. Combien y a-t-il de surjections de l'ensemble $[\![0,n]\!]$ dans l'ensemble $[\![1,n]\!]$?
2. Combien y a-t-il de surjections de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ dans l'ensemble $\{0,1\}$?
3. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ pour $k < n$?
4. Même question pour les applications strictement décroissantes.
5. On choisit un élément $k \in [\![1,n]\!]$ fixé, combien de bijections vérifient $\phi(k) = k$?

Correction :

1. Par choix successifs :
   - Choix de l'élément de $[\![1,n]\!]$, qui a deux antécédents : n,
   - Choix de ces deux antécédents : $\binom{n+1}{2}$,
   - Choix de la permutation des $n-1$ éléments qui restent : $(n-1)!$.
2. On considère toutes les applications de $[\![1,n]\!]$ dans $\{0,1\}$, c'est-à-dire 2^n applications. Le complémentaire de l'ensemble que l'on cherche est celui constitué de deux applications : les applications constantes égales à 0 ou à 1. Le cardinal est donc $2^n - 2$.
3. Choisir une application strictement croissante revient à choisir une partie de k éléments parmi n. En effet, pour une application strictement croissante, la partie $f([\![k,n]\!])$ correspond à k entiers distincts de $[\![1,n]\!]$. Réciproquement pour une partie à k éléments parmi n, notée : $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, on pose $f : i \mapsto x_i$. On a alors construit une application strictement croissante. Au final : $\binom{n}{k}$.
4. Même raisonnement, donne le même résultat.
5. Si on impose $\phi(k) = k$, il reste une permutation de $n-1$ éléments restant, donc $(n-1)!$.

✯ Dénombrements des parties d'un ensemble

Exercice 8 Nombre de couple de parties incluses l'une dans l'autre

Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit

$$A = \left\{ (X,Y) \in P(E)^2 \middle| Y \subset X \right\}.$$

1. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose

   $$A_k = \left\{ (X,Y) \in P(E)^2 \middle| Y \subset X \text{ et } \mathrm{Card}(X) = k \right\}$$

   Démontrer que A est la réunion disjointe des A_k.
2. Calculer $\mathrm{Card}(A_k)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{Card}(A)$.

Correction : Il faut bien voir que les éléments de A sont des couples de parties de la forme $(X,Y) \in P(E)^2$.

1. Si $(X,Y) \in A$, on pose $k = \mathrm{Card}(X)$, et $(X,Y) \in A_k$, d'où $\cup_{k=0}^n A_k \subset A$. D'autre part, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $A_k \subset A$. Enfin, si $i \neq j$, montrons que $A_i \cap A_j = \emptyset$, par l'absurde, si $(X,Y) \in A_i \cap A_j$, alors $\mathrm{Card}(X) = i = j$.
2. Par choix successifs : choix de l'ensemble X : $\binom{n}{k}$ choix, choix de l'ensemble Y (une fois X choisi) 2^k. Au final : $\binom{n}{k}2^k$ choix.
3. Par somme, on a $\mathrm{Card}(A) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$ (Newton).

Exercice 9 Dénombrement des parties de $[\![1,n]\!]$ contenant deux entiers consécutifs

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \left\{ X \in P([\![1,n]\!]) \middle| \exists i \in [\![1,n-1]\!]\,,\ i \in X \text{ et } (i+1) \in X \right\}$$

et on note B_n le complémentaire de A_n dans $P([\![1,n]\!])$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n est l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ contenant (au moins) deux entiers consécutifs et l'ensemble B_n, l'ensemble des parties ne contenant pas deux entiers consécutifs.

1. Donner trois éléments de A_6, puis quatre éléments de B_{10}.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les ensembles A_n et B_n sont finis. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \mathrm{Card}(A_n)$ et $b_n = \mathrm{Card}(B_n)$.
   Expliciter les ensembles A_0, A_1, A_2, A_3 B_0, B_1, B_2 et B_3. En déduire les valeurs de a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 et b_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, en considérant les ensembles

$$H = \left\{ X \in B_{n+2} \middle| (n+2) \in X \right\} \qquad \text{et} \qquad K = \left\{ X \in B_{n+2} \middle| (n+2) \notin X \right\}$$

   trouver une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.
4. Donner une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.
5. Calculer a_n pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Trouver un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, la proportion dans $P([\![1,n]\!])$ des parties de $[\![1,n]\!]$ contenant deux entiers consécutifs est inférieure ou égale à 80%.

Correction :

1.
2. Clairement $A_n \subseteq P([\![1,n]\!])$, donc son cardinal est inférieur à 2^n. Plus précisément :

$$a_n + b_n = 2^n \text{ car } P([\![1,n]\!]) = A_n \cup B_n \text{ union disjointe}$$

   On trouve :

$$\begin{aligned} A_0 &= \emptyset, & B_0 &= \{\emptyset\} \\ A_1 &= \emptyset, & B_1 &= \left\{\emptyset, \{1\}\right\} \\ A_2 &= \left\{\{1,2\}\right\}, & B_2 &= \left\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\right\} \\ A_3 &= \left\{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3\}\right\}, & B_4 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}\right\} \end{aligned}$$

   Bien réfléchir à ces exemples (ensembles de parties)
3. H est en bijection avec B_n et K est en bijection avec B_{n+1}. D'autre part : $B_{n+2} = H \cup K$ union disjointe. Ainsi, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$
4. on utilise $a_n + b_n = 2^n$.
5. suite récurrentes linéaires d'ordre 2.
6. fait avec un programme.

Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{N}$

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Dans cette fiche, on revoit les notions minimales nécessaires en arithmétiques avec en particulier les liens avec l'algorithmique. La plupart de ces notions ont déjà été abordées dans les chapitres « *Nombres entiers, réels et rationnels* » et « *Relations binaires* ».

⋆ Multiple et diviseur

Définition III.2 Soient a et b deux entiers relatifs, on dit que b divise a et on note $b|a$ si il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $a = kb$.
On dit aussi que b est un **diviseur** de a et que a est un **multiple** de b

Notation III.1. *L'ensemble des diviseurs de a est noté $\mathscr{D}(a)$. L'ensemble des multiples de b est noté $b\mathbb{Z}$.*

R Ceci explique la notation

$$\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

■ **Exemple III.2** 1 et -1 divisent tous les entiers, mais ne sont divisibles que par 1 et -1.
0 est un multiple de tous les entiers, mais diviseur que de lui-même. ■

Si a est non nul et si b divise a, alors $|b| \leqslant |a|$. En effet, on sait que a s'écrit kb avec $k \in \mathbb{Z}^*$, donc $|k| \geqslant 1$. En particulier, si $a \neq 0$, $\mathscr{D}(a)$ est fini, inclus dans $[\![-a, a]\!]$.

Proposition III.3 On a :

$$a|b \text{ et } b|a \iff |a| = |b|$$

Autrement dit, si a divise b et b divise a, alors a et b sont égaux au signe près.
De tels entiers sont dits **associés**.

Démonstration. On peut écrire $a = kb$ et $b = k'a$ avec $(k, k') \in \mathbb{Z}$. Cela donne donc : $a = kk'a$, donc

- soit $a = 0$ et alors $b = 0$,
- soit $a \neq 0$ et $kk' = 1$, c'est-à-dire $(k, k') = (1, 1)$ ou $(k, k') = (-1, -1)$.

■

La relation « divise » est une relation donc une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ mais pas sur $\mathbb{Z}$.
Sur $\mathbb{N}$, cette relation admet un plus petit élément 1 (car 1 divise tous les entiers), et un plus grand élément 0 (car tous les entiers divisent 0).
Pour tout ce qui concerne la divisibilité, on peut se ramener aux entiers naturels. On a alors la relation :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^*, \qquad b|a \implies b \leqslant a.$$

Attention, c'est faux si $a = 0$.

Proposition III.4 — Divisibilité et opérations. Soient a et b deux entiers relatifs. On a :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \quad \Big(d|a \text{ et } d|b\Big) \implies d|au + bv$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad bn|an \implies b|a$$

Démonstration. Considérons $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, On sait :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ a = dk \text{ et } \exists k' \in \mathbb{Z},\ b = dk'$$

Cela donne :

$$au+bv = udk+vdk' = d(uk+vk')$$

Ainsi, $d|au+bv$.

Considérons $n \in \mathbb{Z}^*$, On sait : $\exists k \in \mathbb{Z},\ an = kbn$ en divisant par n (qui est non nul), on obtient : $a = kb$ et donc $b|a$. ■

✭ Division euclidienne

Théorème III.5 — Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.

Il existe alors un unique couple d'entiers relatifs (q,r) tel que :

$$a = bq + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r < b.$$

L'entier q est le **quotient de la division euclidienne** de a par b. Précisément, $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.

L'entier r est le **reste de la division euclidienne** de a par b.

P On obtient (q,r) par `q= a//b` et `r= a%b`.

Proposition III.6 Étant donné $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on a $b|a$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

✭ Congruence

Définition III.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que deux entiers relatifs a et b sont congrus modulo n si n divise $b-a$, c'est-à-dire si il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$, tel que $b = a + kn$.

On note alors $a \equiv b[n]$.

R Cela justifie ainsi la notation $x \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$ pour dire : $\exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$. Les classes d'équivalence sont les **classes de congruence**.

Proposition III.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ il existe exactement n classes de congruence modulo n. Plus précisément :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \exists! r \in [\![0, n-1]\!],\ k \equiv r[n].$$

Démonstration. C'est équivalent à dire qu'il existe un unique reste de la division euclidienne k par n. Ce reste r vérifie $r \in [\![0, n-1]\!]$. ■

Proposition III.8 — Congruence et opérations. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La congruence modulo n est compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

Ainsi, si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$, alors :

$$a + c \equiv b + d[n] \qquad \text{et} \qquad ac \equiv bd[n]$$

Démonstration. On a :

$$\exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2,\ a = b + kn \text{ et } c = d + k'n,$$

D'où :

$$\begin{aligned} a+c &= b+d+(k+k')n \qquad \text{et donc } a+c \equiv b+d[n] \\ \text{et } ac &= bd + n(bk'+dk+kk'n) \qquad \text{et donc } ac \equiv bd[n] \end{aligned}$$

■

✯ Plus grand diviseur commun de deux entiers

Soit a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls.

L'ensemble des diviseurs positifs communs à a et b, c'est-à-dire $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b) \cap \mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui est non vide (puisqu'elle contient 1) et majorée (puisque si a est non nul, $\mathscr{D}(a)$ est majorée par a). Cette partie **possède donc un plus grand élément supérieur ou égal à** 1.

Définition III.4 Soient a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls.
Le plus grand diviseur commun noté PGCD de a et b est le plus grand des entiers positifs qui divise a et b.

Notation III.2. *On note $a \wedge b$ le PGCD de a et b out tout simplement* $\text{pgcd}(a,b)$.

La définition peut s'écrire :

$$a \wedge b = \max \left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, k|a \text{ et } k|b \right\} = \max(\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b))$$

R Par définition, le PGCD de a et b divise a et b. Autrement dit : $a \wedge b | a$ et $a \wedge b | b$.

■ **Exemple III.3** $12 \wedge 15 = 3$. ■

Pour tout couples d'entiers naturels $(a,b) \neq (0,0)$, on a :

$$a \wedge 0 = a, \qquad a \wedge 1 = 1, \qquad a \wedge a = a \qquad a \wedge b = a \iff a|b.$$

Proposition III.9 — Lien avec la division euclidienne. Soit a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$.
On suppose que l'on a une relation de la forme : $a = bq + r$. Cette relation peut par exemple provenir de la division euclidienne de a par b :
On a alors :

$$\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b) = \mathscr{D}(b) \cap \mathscr{D}(r)$$

En particulier, $a \wedge b = b \wedge r$.

Démonstration. Considérons $k \in \mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b)$, on sait alors $k|a$ et $k|b$, alors $k|a - bq$ c'est-à-dire k divise r et donc $k \in \mathscr{D}(b) \cap \mathscr{D}(r)$.

Réciproquement, si $k \in \mathscr{D}(b) \cap \mathscr{D}(r)$, on sait alors $k|b$ et $k|r$, alors en écrivant : $a = bq + r$, on en déduit que $k|a$, donc $k \in \mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b)$. D'où l'égalité des ensembles de diviseurs.

En particulier, le plus petit diviseur commun $a \wedge b$ est le plus petit élément de $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b)$. C'est donc le plus petit élément de $\mathscr{D}(b) \cap \mathscr{D}(r)$ et donc on a : $a \wedge b = b \wedge r$. ■

✯ Algorithme d'Euclide

Théorème III.10 Soit a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls.
On considère alors l'algorithme suivant :

```
  def pgcd(a, b):
2   while b != 0 :
      a, b = b, a%b # invariant ici
4   return a
```

Alors cet algorithme se termine et retourne la valeur de $a \wedge b$.

Démonstration. La terminaison est assurée car la valeur de b est un entier naturel et décroît à chaque itération.

En effet, la valeur de b est remplacée par `a%b` (le reste de la division euclidienne de a par b). Cette valeur est un entier naturel strictement inférieur à b.

Notons d le PGCD de a et b, à l'itération k, on note a_k et b_k la valeur des variables a et b. On a alors la relation $a_{k+1} = b_k$ et b_{k+1} est le reste de la division euclidienne de a_k par b_k.

La correction est alors assurée par l'invariant

$$\text{à l'itération } k, \quad d = a_k \wedge b_k \text{ après la ligne 3.}$$

En effet :

- c'est vrai à l'entrée de la boucle (par définition de d),
- si on note r_k le reste de la division euclidienne de a_k par b_k, on a

$$\begin{aligned} a_k \wedge b_k &= b_k \wedge r_k && \text{résultat précédent} \\ &= a_{k+1} \wedge b_{k+1}. \end{aligned}$$

  donc la propriété $d = a \wedge b$ est vraie à l'itération suivante.

Lorsque l'on sort de la boucle, $b_k = 0$ et on a donc$a_k \wedge b_k = a_k \wedge 0 = a_k$. De plus d'après l'invariant $a_k \wedge b_k = d$. Ainsi, la valeur sortie par l'algorithme (ie la valeur de a_k) est la valeur d. L'algorithme calcule donc bien $a \wedge b$. ■

■ **Exemple III.4** On applique l'algorithme d'Euclide à $a = 119$ et $b = 544$
le premier reste est 119, car $119 = 0 \times 544 + 119$ donc $r = 119$, et on obtient : $a = 544$, $b = 119$.
On voit ainsi que dans l'algorithme, si $a < b$, la première étape échange la valeur de a et b.
On a ensuite
- $119 \neq 0$ et $544 = 4 \times 119 + 68$ donc $r = 68$, $a = 119$, $b = 68$.
- $68 \neq 0$ et $119 = 1 \times 68 + 51$ donc $r = 51$, $a = 68$, $b = 51$.
- $51 \neq 0$ et $68 = 1 \times 51 + 17$ donc $r = 17$, $a = 51$, $b = 17$.
- $17 \neq 0$ et $51 = 3 \times 17 + 0$ donc $r = 0$, $a = 17$, $b = 0$.
- la valeur sortie est 17

On peut vérifier :

$$117 = 17 \times 7 \qquad 544 = 17 \times 2^5 \qquad \text{et} \qquad 544 \wedge 117 = 17.$$

■

✯ Relation de Bezout

Proposition III.11 — Relation de Bezout. Soit a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls. On a :

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = a \wedge b.$$

Démonstration. On traite le cas $a \neq 0$ (sinon c'est évident avec $u = 0$ et $v = 1$).
Considérons :

$$A = \left\{ au + bv \middle| (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

A admet un plus petit élément strictement positif noté d.
Comme $d \in A$, on sait qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $d = au + bv$.
Montrons que $d = a \wedge b$.
Pour cela, on commence par montrer que $d|a$. On regarde la division euclidienne de a par d, que l'on écrit :

$$a = qd + r \qquad \text{avec } r \in [\![0, d-1]\!].$$

Il faut montrer que $r = 0$.
On a :

$$\begin{aligned} r &= a - qd = a - qau - qbv \\ &= a(1 - qu) + b(-qv) \in A. \end{aligned}$$

or $r \in [\![0, d-1]\!]$. Ainsi, si $r \neq 0$, on a $0 < r < d$ et $r \in A$, ce qui contredit la définition de d comme le plus petit élément strictement positif.
Ainsi, $r = 0$, en conséquence $d|a$. En procédant de même, on a $d|b$.
Si maintenant un entier k vérifie $k|a$ et $k|b$, alors puisque d s'écrit $d = au + bv$, on a $k|d$.
Ainsi, d est la plus grand diviseur commun à a et b, et donc $d = a \wedge b$.
On en déduit le résultat. ■

(P) L'algorithme d'Euclide étendu permet de calculer les valeurs de u et de v.

Proposition III.12 — Diviseur et PGCD. Soient a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(n|a \text{ et } n|b\right) \iff n|(a \wedge b)$$

On peut aussi écrire :

$$\mathscr{D}(a \wedge b) = \mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b).$$

Démonstration. La partie : $n|a \wedge b \implies \left(n|a \text{ et } n|b\right)$ est évidente, car $a \wedge b|a$ et $a \wedge b|b$

Pour la réciproque, il faut appliquer la relation de Bezout. On sait :

$$\exists (u,v) \in \mathbb{Z},\ au + bv = a \wedge b.$$

Ainsi, si un entier vérifie alors $n|a$ et $n|b$, alors $n|au+bv$ et donc $n|a \wedge b$. ■

R La relation :

$$\mathscr{D}(a \wedge b) = \mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b).$$

caractérise le PGCD.

⋆ Plus petit multiple commun de deux entiers

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

L'ensemble $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est une partie non vide de $\mathbb{Z}$, donc elle admet un plus petit élément positif non nul.

Définition III.5 Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Le plus petit multiple commun noté PPCM de a et b est le plus petit entiers positifs qui est multiple de a et b.

Notation III.3. *On note $a \vee b$ le PPCM de a et b ou simplement* $\text{ppcm}(\text{a}, \text{b})$.

La définition peut s'écrire :

$$a \wedge b = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; a|k \text{ et } b|k\right\} = \min\left(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}^*\right)$$

D'après la définition : $a|a \vee b$ et $b|a \vee b$.

On vérifie de plus facilement les relations :

$$a \vee a = a \qquad a \vee 1 = a \text{ et} \qquad a \vee b = b \iff a|b.$$

Proposition III.13 Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Les multiples communs à a et b sont les multiples de $a \vee b$. Autrement dit :

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$$

ou encore :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a|k \text{ et } b|k \iff a \vee b|k$$

Démonstration. Clairement, si $a \vee b|k$ alors $a|k$ et $b|k$ car $a|a \vee b$ et $b|a \vee b$.

Réciproquement, si $a|k$ et $b|k$ alors on fait la division euclidienne de k par $a \vee b$. On a alors :

$$k = qa \vee b + r \text{ avec } 0 \leqslant r < a \vee b \text{ et } q \in \mathbb{Z}.$$

on a $r = k - qa \vee b$, donc $a|r$ et $b|r$ et donc si $r \neq 0$, on a r est un entier strictement positif multiple de a et b qui est inférieur strictement à $a \vee b$, ce qui est une contradiction avec la définition de $a \vee b$. Ainsi, $r = 0$ et donc $a \vee b$ divise k. ■

⋆ Nombres premiers

Un entier naturel n non nul a au plus n diviseurs entiers (car si $k|n$, on a $1 \leqslant k \leqslant n$). Si $n \geqslant 2$, il y au moins deux diviseurs distincts : 1 et n. D'où la définition :

Définition III.6 Un entier naturel $p \geqslant 2$ est premier si il n'est divisible que par 1 et par lui-même.
Autrement dit, un nombre $p \geqslant 2$ est premier si :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ p = ab \implies (a = 1 \text{ ou } b = 1)$$

Un nombre non premier est dit factorisable car il peut s'écrire comme un produit non trivial.

Théorème III.14 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Alors n est produit de nombres premiers.
Plus précisément, il existe alors r nombres premiers $(p_1, \ldots, p_r)$ et des entiers naturels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ non nuls, tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Démonstration. Ce théorème est admis conformément au programme. ∎

- L'écriture en nombre premier d'un entier ne se calcule pas facilement.

Proposition III.15 Soit a et b deux nombres entiers supérieurs à 2. On les décompose en nombre premiers :

$$\begin{aligned} a =& p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \\ b =& p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r} \end{aligned}$$

on utilise dans cette écriture les mêmes nombres premiers en ajoutant éventuellement des puissances nulles.
Alors $a|b$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, r]\!],\ \alpha_i \leqslant \beta_i$.
En particulier :

$$\begin{aligned} a \wedge b =& p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \ldots p_r^{\min(\alpha_r,\beta_r)} \\ a \vee b =& p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \ldots p_r^{\max(\alpha_r,\beta_r)} \end{aligned}$$

Démonstration. Si $\forall i \in [\![1, r]\!],\ \alpha_i \leqslant \beta_i$, alors

$$b = a \underbrace{p_1^{\beta_1 - \alpha_i} p_2^{\beta_2 - \alpha_2} \ldots p_r^{\beta_r - \alpha_r}}_{\in \mathbb{N}}.$$

Réciproquement, si $a|b$, on écrit $b = ak$ et on décompose k en nombre premier. On en déduit alors le résultat en utilisant l'unicité de la décomposition. ∎

Proposition III.16 Soit (a,b) non tous nuls. On a alors la relation :

$$(a \wedge b)(a \vee b) = ab.$$

✯ Crible d'Érathosthène

Pour déterminer la liste des nombres premiers, on peut utiliser le crible d'Érathosthène : on écrit la liste des entiers, et on supprime au fur et à mesure ceux qui sont factorisables :
- 0 et 1 ne sont pas premiers.
- on conserve 2 mais on enlève tous les multiples de 2,
- on conserve 3 mais on enlève tous les multiples de 3,
- on conserve 5 mais on enlève tous les multiples de 5, etc.

Pour réaliser cet algorithme : On commence par construire une liste de booléens notée `listeBool` de longueur `n` telle que :
`listeBool[i]=True` si i est premier. Pour cela :
- On commence par mettre toutes les valeurs à `True` (*i.e.* tous les nombres sont *a priori* premiers)
- On initialise ensuite les termes 0 et 1 à `False`,

- 2 est premier : on enlève alors tous les multiples de 2, en posant `listeBool[j]=False` pour toutes les valeurs de j qui s'écrivent $j = 2k$ avec $k > 1$.
- 3 est premier : on enlève alors tous les multiples de 3, etc.
- pour chaque i qui n'a pas été enlevé précédemment, on enlève les multiples de i (sauf i lui-même). On peut commencer à i^2 car les autres ont déjà été enlevé.

Dans une deuxième étape, on reconstruit la liste des nombres premiers par concaténation à partir de `listeBool`
Cela donne :

```python
def tablePremier(nFinal) :
    """
    entrée: nFinal = entier
    sortie: listePrem = liste d'entiers
    construit la liste des entiers premiers <= nFinal
    """
    #étape 1: on va construire une liste listeBool True/False
    #avec listBool[i] = True si i est premier
    listeBool =[True]*(nFinal+1) #on intialise avec que des True

    listeBool[0] = False # 0 n'est pas premier
    listeBool[1] = False # 1 n'est pas premier

    for i in range(2,nFinal+1) :
        #si i n'est pas premier, il n'y a rien à faire
        if listeBool[i] :
            #on efface tous les multiples de i:
            for j in range(i*i,nFinal+1,i) :
                listeBool[j] = False

    #étape 2: à partir de listeBool, on construit listePrem
    #par concaténation
    listePrem = []
    for i in range(nFinal+1) :
        if listeBool[i] :
            listePrem.append(i)

    return listePrem
```

⋆ Exercices

Exercice 1 Justifier $5n-9 \wedge 2n-6 = (n+3) \wedge 12$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Donner $5n-9 \wedge 2n-6$ en fonction de la valeur de n modulo 12.

Correction : avec l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 5n-9 &= 2(2n-6)+n+3 && \text{donc } 5n-9 \wedge 2n-6 = 2n-6 \wedge n+3 \\ 2n-6 &= 2(n+3)-12 && \text{donc } 2n-6 \wedge n+3 = n+3 \wedge 12. \end{aligned}$$

Comme $12 = 2^2 \times 3$, ce pgcd peut être $1, 2, 3, 4, 6$ ou 12.
On note $a \in [\![0, 11]\!]$ tel que $n \equiv a[12]$. On a alors :

$$n+3 = 12k+3+a$$

et donc $n+3 \wedge 12 = 12 \wedge a+3$. Ainsi :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$a+3[12]$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
$12 \wedge a+3$	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12	1	2

Exercice 2 Soient $n \in \mathbb{N}$, $a = 2n+3$ et $b = 5n-2$. Déterminer selon les valeurs de n le pgcd de a et b.

Correction : On a la suite de division euclidienne :

$$5n-2 = 2(2n+3)+n-8$$
$$2n+3 = 2(n-8)+19$$

Ainsi : $(5n-2)\wedge(2n+3) = (n-8)\wedge 19$.

Comme 19 est premier, on en déduit :

$$5n-2\wedge 2n+3 = 19 \text{ si} n \equiv 8[19] 5n-2\wedge 2n+3 = 1 \qquad \text{sinon}$$

Exercice 3 Soient $d, m \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système $\begin{cases} \operatorname{pgcd}(x,y) = d \\ \operatorname{ppcm}(x,y) = m \end{cases}$ possède un couple $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ solution.

Correction : si il existe une solution noté (d,m) alors on écrit la décomposition en nombre premier de x et y en utilisant éventuellement des puissances nulles. Cela donne :

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$
$$y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$$

on sait alors :

$$d = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_r^{\min(\alpha_r,\beta_r)}$$
$$m = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_r^{\max(\alpha_r,\beta_r)}$$

ainsi, $d|m$ d'après la caractérisation de la divisibilité par la décomposition en nombres premiers.

Réciproquement, si $d|m$, on écrit :

$$d = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_r^{u_r}$$
$$m = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_r^{v_r}$$

toujours en utilisant éventuellement des puissances nulles, et on a $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $u_i \leqslant v_i$. On pose alors par exemple : $x = d$ et $y = m$. En effet, comme $d|m$, on a : $d \wedge m = d$ et $d \vee m = m$.

Exercice 4 Nombres de Mersenne

On note $M_n = 2^n - 1$ pour tout entier naturel n.

1. Établir que si M_n premier alors n est premier.
2. Justifier que M_{11} n'est pas premier.

Correction : On suppose M_n premier.

Soit d un diviseur de n. On écrit alors $n = dp$, et on a :

$$2^n - 1 = 2^{dp} - 1 = \left(2^d\right)^p - 1$$
$$= \left(2^d - 1\right)\left(1 + 2^d + 2^{2d} + \dots 2^{(p-1)d}\right)$$

Ainsi, $2^d - 1 | 2^n - 1$, d'où comme $2^n - 1$ est premier, on en déduit que $2^d - 1 = 1$ (et donc $d = 1$) ou $2^d - 1 = 2^n - 1$ (et donc $d = n$). Ainsi, n n'a pas de facteurs non triviaux et donc n est premier.

Par contre la réciproque est fausse : $2^{11} - 1 = 2047$ n'est pas premier. $2047 = 23 \times 89$.

Exercice 5 [Mines]

1. Montrer qu'un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est.
2. Même question lorsque l'on remplace 3 par 9.
3. Le calcul suivant est-il juste ?

$$1994996 \times 26399273 = 52666464037908$$

Correction :

1. Soit n un nombre entier, on décompose en base 10 :

$$n = \sum_{k=0}^{l} n_k 10^k.$$

Or $10 \equiv 1[3]$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ $10^k \equiv 1[3]$. Ainsi :

$$n \equiv \sum_{k=0}^{l} n_k [3]$$

On en déduit qu'un nombre n est divisible par 3 c'est-à-dire $n \equiv 0[3]$ si et seulement si la somme de ces chiffres $\sum_{k=0}^{l} n_k$ est divisible par 3.

2. On a : $10 \equiv 1[9]$, donc le même résultat.
3. Le calcul est faux en prenant la somme des chiffres modulo 9.

13 — Relations de comparaison

I Cas des suites

I.1 Définitions, notations

Définition I.1 — Relation de prépondérance. Soit (a_n) et (b_n) deux suites.
On dit que a_n est négligeable devant b_n si il existe un suite ε_n tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \varepsilon_n b_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

Dans le cas courant d'une suite b_n non nulle à partir d'un certains rang, c'est équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Notation I.1. *On note dans ce cas $a_n \underset{n+\infty}{=} o\,(b_n)$ et on appelle ce symbole « petit o ».*

Cela signifie que la quantité a_n est très petite devant la quantité b_n lorsque n est grand.

■ **Exemple I.1** $5n+3 \underset{+\infty}{=} o\,(n\ln(n))$ $\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} o\,\frac{1}{n}$ ■

Définition I.2 — Relation de domination. La suite (a_n) est dominée par la suite (b_n) si il existe une suite bornée (c_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n c_n.$$

Dans le cas courant d'une suite b_n non nulle à partir d'un certains rang, c'est équivalent à $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.

Cela signifie :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \qquad |a_n| \leqslant \alpha |b_n|$$

Notation I.2. *On note alors* $a_n \underset{+\infty}{=} O(b_n)$ *et on appelle ce symbole « grand o ».*

La notation O est utilisé en informatique pour l'étude de la complexité.

■ **Exemple I.2** $2n^2+3n+5 \underset{+\infty}{=} O(n^2)$ et $\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ■

Définition I.3 — Relation d'équivalence. Les deux suites a_n et b_n sont dites équivalentes si $a_n - b_n \underset{n+\infty}{=} o(b_n)$. Autrement dit, si il existe une suite ε_n tel que :

$$a_n = b_n + \varepsilon_n b_n, \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n\infty} \varepsilon_n = 0$$

Dans le cas courant d'une suite b_n non nulle à partir d'un certains rang, c'est équivalent à $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

On peut ainsi vérifier que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \iff b_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$.
Cela signifie que la quantité a_n est du même ordre que b_n lorsque n est grand.

Notation I.3. *On note alors* $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

✎ Dans le programme de PCSI : il est écrit explicitement que les définitions que l'on utilise sont celles faisant apparaître le quotient. **Pour démontrer une relation de comparaison, on étudiera systématiquement le quotient**.
La définition générale n'est donnée que pour bien comprendre la notion.
Une autre notation utilisée en physique est $a_n \ll b_n$ à la place de o, $a_n \approx b_n$ à la place de $\sim$.

✎ L'avantage d'une relation de comparaison sur la limite est que cela indique la vitesse de convergence : **une limite ne dépends pas de n, un équivalent oui**.
Le fait d'indiquer la vitesse va permettre de lever les formes indéterminées.

Piège 1 : Une suite (u_n) n'est jamais négligeable devant 0, ni équivalente à 0, ni dominée par 0 à moins d'être nulle à partir d'un certain rang (cela n'a alors pas grand intérêt).

En mettant l'une des relations de comparaison suivante : $u_n \underset{+\infty}{\sim} 0$, $u_n \underset{+\infty}{=} o(0)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} O(0)$ dans une copie, on est assuré d'avoir faux à la question.

Piège 2 : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, on a pas $u_n = v_n$. La notation o modifie donc le signe $=$, et il ne faut donc pas simplifier les o.

Une autre manière de voir les choses et de dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ signifie : *« la suite (u_n) appartient à l'ensemble des suites négligeables devant la suite (v_n) ».*

De la même manière l'écriture $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ est en fait une limite. On ne quantifie donc pas la variable n.

■ **Exemple I.3** Pour une suite polynomiale, on a facilement :

$$n^2+n+1 \underset{+\infty}{\sim} n^2+n \underset{+\infty}{\sim} n^2+1 \underset{+\infty}{\sim} n^2$$

la dernière forme étant la plus intéressante et en pratique c'est celle qui est utilisée.

On a aussi :

$$n^2+n+1 = \underset{+\infty}{O}(n^2) = \underset{+\infty}{O}(3n^2)$$

et $n^2+n+1 = o(n^3) = o(n^2\ln(n))$.

■

On peut dire : **Dans un équivalent, seul compte le premier terme**. Comme il n'y a pas d'unicité, on cherche la forme la plus simple.

■ **Exemple I.4**

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}+\frac{1}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$$

■

Il faut prendre l'habitude d'**écrire les termes dans le bon ordre** : du plus gros jusqu'au détail.

■ **Exemple I.5** Pour $\beta > 0$, la relation

$$\ln(n) = \underset{+\infty}{o}(n^2) = \underset{+\infty}{o}(n) = \underset{+\infty}{o}(n\sqrt{n}) = \underset{+\infty}{o}(n^\beta)$$

traduit le fait que ln croît moins vite que toute les fonction puissances.

De même : si $\alpha < \beta$, on a $n^\alpha = \underset{+\infty}{o}(n^\beta)$, c'est la croissance comparée des fonctions puissances, ■

■ **Exemple I.6** Par contre, $\exp(n^2+n+1)$ n'est pas équivalent à $\exp(n^2)$, puisque le rapport fait $\exp(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ■

Définition I.4 Pour trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n), l'écriture $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ signifie : $u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$.

De même, $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)$ signifie : $u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)$.

Cette écriture signifie que *« la suite u_n se comporte comme la suite v_n à un w_n près »*. Souvent, w_n est un polynôme ou une fraction rationnelle (une fonction simple).

Dans l'écriture $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$, on peut faire passer des quantités de *gauche à droite du signe égal*.

■ **Exemple I.7** On verra la relation : $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Ce qui signifie que pour calculer $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ pour n grand, on peut calculer $\frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3}$ et que l'erreur commise est petite devant $\frac{1}{n^3}$. ■

■ **Exemple I.8** L'écriture $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2n^2+5n+o(n)$ signifie que la suite u_n se comporte comme la suite $2n^2+5n$ (suite simple), plus quelque chose de très petit devant n. ■

I.2 Manipulation des relation de comparaisons

Pour comprendre comment on peut manipuler les symboles o, O et $\sim$. Il faut garder en tête que cela signifie qu'une suite est « *très petite* » devant une autre ou du « *même ordre* ». En cas de doute, il faut toujours revenir à la définition avec le quotient, la plupart des propriétés se démontrent en une ligne.

⋆ Lien avec les limites

Proposition I.1 Pour une suite (u_n), on a :

$$\begin{aligned} \text{Si } l \neq 0, \lim_{n\infty} u_n = l &\iff u_n \underset{+\infty}{\sim} l \\ \text{et } \lim_{n\to\infty} u_n = 0 &\iff u_n \underset{+\infty}{=} o(1) \\ u_n \text{ bornée} &\iff u_n = O(1). \end{aligned}$$

Ainsi, dans un calcul d'équivalent, on remplace une suite convergente par sa limite si celle-ci est non nulle.

Démonstration. C'est simplement la traduction du fait que $\lim_{n\infty} u_n = l$ est équivalent à

- $\lim_{n\infty} \frac{u_n}{l} = 1$ si $l \neq 0$
- et à $\lim_{n\infty} \frac{u_n}{1} = 0$ si $l = 0$.

Enfin, (u_n) bornée signifie $\left(\frac{u_n}{1}\right)$ est bornée. ■

Proposition I.2 Soit u_n et v_n deux suites telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors :

- Si u_n converge vers une limite l, alors v_n converge aussi vers l.
- Si u_n tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), alors v_n aussi.

Ainsi, **deux suites équivalentes ont la même limite**.

On peut donc calculer des limites avec des équivalents, ce qui permet de lever des indéterminations.

Démonstration. La démonstration consiste à regarder le quotient :

$$\text{Si } \lim_{n\infty} u_n = l, \text{alors } |v_n - l| = \underbrace{|u_n|}_{\xrightarrow[n\infty]{} l} \underbrace{\left|\frac{v_n}{u_n} - \frac{l}{u_n}\right|}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} \xrightarrow[n\infty]{} 0,$$

en effet, les deux quantités $\frac{v_n}{u_n}$ et $\frac{l}{u_n}$ tendent vers 1.

La deuxième se démontre (dans le cas de $+\infty$)en remarquant qu'à partir d'un certain rang on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{v_n}{u_n} \leqslant \frac{3}{2},$$

ce qui s'écrit, si $u_n > 0$, comme :

$$\frac{u_n}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{3u_n}{2}.$$

En particulier, si $u_n \to +\infty$, $v_n \to +\infty$. ■

Proposition I.3 Si $u_n = \underset{+\infty}{O}(v_n)$ et $\lim_{n\infty} v_n = 0$, alors (u_n) converge vers 0.

Démonstration. En effet : on sait qu'il existe α un réel, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant \alpha |v_n|$$

Donc, comme $\lim_{n\infty} v_n = 0$, on a par encadrement : $\lim_{n\infty} u_n = 0$. ■

✫ Transitivité

Proposition I.4 Si $a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$ et si $b_n = \underset{+\infty}{o}(c_n)$, alors $a_n = \underset{+\infty}{o}(c_n)$.

Si $a_n = \underset{+\infty}{O}(b_n)$ et si $b_n = \underset{+\infty}{O}(c_n)$, alors $a_n = \underset{+\infty}{O}(c_n)$.

Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et si $b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n$, alors $a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n$.

Démonstration. Il suffit de faire le quotient : $\dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{a_n}{b_n}\dfrac{b_n}{c_n}$ qui tends vers 0×0, ou qui est un produit de suites bornées ou qui tends vers 1×1. ■

✫ Multiplication par un scalaire (non nul)

Proposition I.5 Soit $\lambda \neq 0$, et $a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$, on a $a_n = \underset{+\infty}{o}(\lambda b_n)$, et $\lambda a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$.

Soit $\lambda \neq 0$, et $a_n = \underset{+\infty}{O}(b_n)$, on a $a_n = \underset{+\infty}{O}(\lambda b_n)$, et $\lambda a_n = \underset{+\infty}{O}(b_n)$.

Soit $\lambda \neq 0$, et $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, on a $\lambda a_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda b_n$.

En pratique, il ne faut donc pas écrire : $u_n = \underset{+\infty}{o}(2n)$, mais : $u_n = \underset{+\infty}{o}(n)$.
On cherche donc à comparer avec des suites de la forme la plus simple possible.

Démonstration. Évident avec le quotient.

■

✫ Compatibilité avec la multiplication

Proposition I.6 Si $a_n = \underset{+\infty}{o}(c_n)$ et si $b_n = \underset{+\infty}{o}(d_n)$, alors $a_n b_n = \underset{+\infty}{o}(c_n d_n)$.

Si $a_n = \underset{+\infty}{O}(c_n)$ et si $b_n = \underset{+\infty}{O}(d_n)$, alors $a_n b_n = \underset{+\infty}{O}(c_n d_n)$.

Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n$ et si $b_n \underset{+\infty}{\sim} d_n$, alors $a_n b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n d_n$.

Démonstration. Évident avec le quotient : $\dfrac{a_n b_n}{c_n d_n}$ tends vers « 0×0 » ou « est produit de suite bornées » ou tends vers « 1×1 ». ■

✫ Puissance et inverse

Proposition I.7 Pour la relation d'équivalence, on peut toujours mettre à la puissance (même négative) et à l'inverse :

Pour une suite (a_n) non nulle, telle que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, on a $\dfrac{1}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{b_n}$.

On a aussi :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad a_n^p \underset{+\infty}{\sim} b_n^p.$$

Pour une suite (a_n) strictement positive, telle que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, et x un réel quelconque, alors, on a $a_n^x \underset{+\infty}{\sim} b_n^x$.

Démonstration. Évident avec le quotient : $\frac{a_n^x}{b_n^x} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^x$ tends vers 1. ∎

Proposition I.8 Pour les relations de domination et de prépondérance, on peut mettre à la puissance positive : si $p \in \mathbb{N}^*$, et $a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$ alors $a_n^p = \underset{+\infty}{o}(b_n^p)$. De même, si $p \in \mathbb{N}^*$, et $a_n = \underset{+\infty}{O}(b_n)$ alors $a_n^p = \underset{+\infty}{O}(b_n^p)$.

Mais prendre l'inverse renverse ces relations : si (a_n) est non nulle, et vérifie $a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$ on a $\dfrac{1}{b_n} = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$.

De même, si (a_n) est non nulle, et vérifie $a_n = \underset{+\infty}{O}(b_n)$ on a $\dfrac{1}{b_n} = \underset{+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$.

Ainsi, les o et O passent à la puissance positive mais pas à l'inverse (ce qui est évident puisque la fonction inverse est décroissante), tandis que les $\sim$ passent à toute puissance (positive ou négative).

✩ Valeur absolue et signe

Proposition I.9 Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, alors $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$.

La réciproque est fausse comme le montre le cas de $|(-1)^n| \underset{+\infty}{\sim} 1$.

Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, et (a_n) et (b_n) réels alors a_n et b_n ont même signe à partir d'un certain rang, puisque leur quotient tend vers 1.

Enfin,

$$a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n) \iff |a_n| = \underset{+\infty}{o}(|b_n|),$$

$$\text{et } a_n = \underset{+\infty}{O}(b_n) \iff |a_n| = \underset{+\infty}{O}(|b_n|).$$

✩ Transitivité mixte

Proposition I.10 Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et $c_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$ alors $c_n = \underset{+\infty}{o}(a_n)$.

Si $a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$ et $b_n = \underset{+\infty}{O}(c_n)$ alors $a_n = \underset{+\infty}{o}(c_n)$.

Si $a_n = \underset{+\infty}{O}(b_n)$ et $b_n = \underset{+\infty}{o}(c_n)$ alors $a_n = \underset{+\infty}{o}(c_n)$.

Démonstration. Pour le premier : $\frac{c_n}{b_n} = \frac{c_n}{a_n}\frac{a_n}{b_n}$, le premier terme tends vers 0 et le deuxième terme tend vers 1, donc est borné.

Pour le deuxième : $\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n}\frac{b_n}{c_n}$ est un produit suite bornée × suite qui tends vers 0.

Pour le troisième $\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n}\frac{b_n}{c_n}$ est un produit suite bornée × suite qui tends vers 0. ■

Ainsi, on évite d'écrire : $a_n = \underset{+\infty}{o}(n^2+2n)$ et on remplace par $a_n = \underset{+\infty}{o}(n^2)$ puisque $n^2+2n \underset{+\infty}{\sim} n^2$.

✯ Le problème de l'addition

Piège 3 : Attention, ces symboles ne sont pas compatibles avec l'addition.

En particulier, on ne peut pas faire passer des termes de gauche à droite du symbole $\sim$.

Contre-exemple : $n^3+n^2+5n+3 \underset{n+\infty}{\sim} n^3$ et $-n^3+n^2+5n+3 \underset{n+\infty}{\sim} -n^3+n^2$ en faisant la somme, on obtiendrait : $2n^2+5n+3 \underset{n+\infty}{\sim} n^2$ ce qui est faux.

On voit où est le problème : lorsqu'on remplace n^3+n^2+5n+3, on néglige les termes en n^2, tandis que si on remplace $-n^3+n^2+5n+3$ par $-n^3+n^2$ on a un ordre de plus, puisqu'on a gardé aussi le terme en n^2, mais on aurait pu mettre n'importe quoi à la place de n^2 : seul le premier terme compte dans l'équivalent. En additionnant, le premier terme disparaît, et donc l'approximation est fausse.

Autre manière de voir : dans l'écriture $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$, on ne peut pas faire passer des termes de *gauche à droite* du symbole $\sim$. Puisque par exemple : $n^3+n^2+5n+3 \underset{n+\infty}{\sim} n^3+n$ mais n^2+5n+3 n'est pas équivalent à n.

R Le problème d'addition avec les équivalents provient souvent du fait qu'un terme disparaît, lorsqu'on ajoute des équivalents à des ordres différents, ce qui n'arrivera pas avec les développements limités.

Contre-exemple : $n = \underset{+\infty}{o}(n^2+1)$, et $n = \underset{+\infty}{o}(-n^2)$, mais on a pas $2n = \underset{+\infty}{o}(1)$. Encore plus grave, on pourrait faire : $n = \underset{+\infty}{o}(n^2)$, et $n = \underset{+\infty}{o}(-n^2)$, et donc $2n = \underset{+\infty}{o}(0)$.

R Quand on cherche l'équivalent d'une somme : il faut donc revenir au quotient.

Par contre, on a :

Proposition I.11 Pour deux suites (a_n) et (b_n), on a :

$$a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n),\text{ et } c_n = \underset{+\infty}{o}(b_n) \implies a_n + c_n = \underset{+\infty}{o}(b_n),$$

et

$$a_n = \underset{+\infty}{O}(b_n),\text{ et } c_n = \underset{+\infty}{O}(b_n) \implies a_n + c_n = \underset{+\infty}{O}(b_n),$$

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \text{ et } c_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \implies a_n + c_n \underset{+\infty}{\sim} 2b_n.$$

Ainsi, on peut ajouter les équivalents « *d'un seul côté* » du symbole $\sim$.

Démonstration. Pour démontrer il suffit encore de faire le quotient :

- dans le premier cas :

$$\frac{a_n + c_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{c_n}{d_n} \to 0 + 0$$

- dans le deuxième cas

$$\frac{a_n + c_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{c_n}{d_n} \text{ bornée } + \text{ bornée}$$

- dans le troisième

$$\frac{a_n + c_n}{2b_n} = \frac{a_n}{b_n} 0.5 + \frac{c_n}{d_n} 0.5 \to 1$$

■

I.3 Croissance comparée

⋆ Suite polynomiale

Soit une suite polynomiale du type :

$$u_n = a_p n^p, + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots a_1 n + a_0, \quad \text{avec } a_p \neq 0,$$

alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} a_p n^p$, $u_n = \underset{+\infty}{O}(n^p)$ et $u_n = \underset{+\infty}{o}(n^{p+1})$.

Autrement dit, **une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré**.

Ce résultat se généralise au puissance non entière. Par exemple : $n\sqrt{n} = \underset{+\infty}{o}(n^2)$.

Ce résultat se généralise aux suites « fraction rationnelle » :

$$u_n = \frac{\alpha}{n^p} + \frac{\beta}{n^{p+1}} + \ldots \frac{\gamma}{n^{p+k}} \text{ avec } \alpha \neq 0,$$

alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^p}$. Autrement dit, la suite est équivalente à son terme de plus haut degré, *i.e.* le moins négatif.

On peut aussi dire qu'un quotient de polynôme est équivalent au quotient des termes de plus haut degré.

D'une manière générale une somme est équivalente au terme qui tend le plus vite vers $+\infty$ (ou le moins vite vers 0). Par exemple :

$$n + e^n + 1 \underset{+\infty}{\sim} e^n \qquad \text{et} \qquad n^2 + n\sqrt{n} + 1 \underset{+\infty}{\sim} n^2$$

En effet, si u_n s'écrit $u_n = v_n + w_n$, avec $w_n = o(v_n)$, alors par définition $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

⋆ Fonctions classiques

Proposition I.12 Si la suite $u_n \to 0$, on a :

$$\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \qquad \ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \qquad \tan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$$

$$e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n \qquad \sqrt{1+u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n}{2} \qquad 1 - \cos(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$$

$$\arctan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$$

Démonstration. C'est une traduction des limites usuelles. Par exemple :

$$\lim_{n\infty} \frac{\sin(u_n)}{u_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

■

(!) Attention, ceci n'est valable que parce que $u_n \to 0$! !

Piège 4 : Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a pas en général $f(u_n) \underset{+\infty}{\sim} f(v_n)$, on **ne compose donc pas les équivalents**. Il faut toujours revenir au quotient.

Contre-exemple : $\frac{1}{n} \underset{n+\infty}{\sim} 1$, mais on n'a pas $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n+\infty}{\sim} \ln(1) = 0$, au contraire $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

✯ Comparaison factorielle, puissance, géométrique

Théorème I.13 Soit $\alpha > 0$ et a un réel $a > 1$. on a alors :

$$a^n = o\left(n!\right) \qquad n^\alpha = o\left(n!\right) \qquad n^\alpha = o\left(a^n\right)$$

Ce qui signifie :

$$\lim_{n\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

Autrement dit : la factorielle l'emporte sur la suite géométrique qui l'emporte sur la puissance

Démonstration. Pour $\lim_{n\infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$, on pose (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{n^\alpha}{n!}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^\alpha \frac{1}{(n+1)}. \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^\alpha &= exp\left[\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\ &\to 1. \end{aligned}$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$. Il reste à prouver rapidement que cela implique que la suite u_n tends vers 0.

On a :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 2 \text{ ie } u_{n+1} \leqslant 2u_n.$$

Car la suite (u_n) est à terme positif. Par récurrence, on en déduit :

$$\forall n \geqslant \mathbb{N}, u_n \leqslant 2^{n-N} u_N \text{ qui tends vers } 0.$$

En particulier, puisque la suite est à terme positif : $\lim_{n\infty} u_n = 0$. Ce qui donne : $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0$, Ainsi, la factorielle l'emporte sur la puissance.

Pour $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$, avec $a > 1$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{n^\alpha}{a^n} &= \frac{e^{\alpha \ln(n)}}{e^{n\ln(a)}} \\ &= e^{\alpha \ln n - n \ln a}.\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\alpha \ln n - n \ln a &= \ln(a) n \left(\alpha \frac{\ln n}{n} - 1\right) \\ &\underset{n\infty}{\sim} -\ln(a) n \to -\infty \text{ car } a > 1.\end{aligned}$$

On en déduit : $e^{\alpha \ln n - n \ln a} \to 0$, et donc : $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

Donc l'exposant l'emporte sur la puissance.

Pour $\lim_{n\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, on procède de même en notant : $u_n = \frac{a^n}{n!}$, la suite (u_n) est donc une suite à termes positifs. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \qquad a \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, $\lim_{n\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, ce qui donne encore : $\lim_{n\infty} u_n = 0 i.e.\ \lim_{n\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. ■

II Cas des fonctions

II.1 Définitions, généralités

Définition II.1 — relation de prépondérance. Soit f et g, on dit que f est négligeable devant g, ou que g est prépondérante sur f, en x_0, si il existe un fonction ε, qui vérifie

$$\text{pour tout } x \text{ au voisinage de } x_0,\ f(x) = g(x)\varepsilon(x), \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) \underset{x_0}{=} o(g)$.

Si g ne s'annule pas (cadre du programme), cela équivaut à $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

L'expression « au voisinage de x_0 » signifie précisément

- Si $x_0 \in \mathbb{R}$: $\exists \alpha > 0$, tel que l'égalité ait lieu sur l'intervalle $D \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.
- Si $x_0 = +\infty$: $\exists A \in \mathbb{R}$, tel que l'égalité ait lieu sur l'intervalle $D \cap [A, +\infty[$.
- Si $x_0 = -\infty$: $\exists A \in \mathbb{R}$, tel que l'égalité ait lieu sur l'intervalle $D \cap]-\infty, A]$.

Définition II.2 — relation de domination. Soit f et g, on dit que f est dominée par la fonction g en x_0, si il existe un fonction ε, qui vérifie

$$\text{pour tout } x \text{ au voisinage de } x_0, \ f(x) = g(x)\varepsilon(x), \text{ et } \varepsilon \text{ est une fonction bornée}$$

On note alors $f(x) \underset{x_0}{=} o(g)$.

Si g ne s'annule pas (cadre du programme), cela équivaut à $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est une fonction bornée dans un voisinage de x_0.

Définition II.3 — relation d'équivalence. On dit que f et g sont équivalente au point x_0, si $f - g \underset{x_0}{=} o(g)$, *i.e.* si il existe $\varepsilon(x)$ tel que : $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x)$ (au voisinage de x_0), avec $\lim\limits_{x_0} \varepsilon(x) = 0$. On note alors $f \underset{x_0}{\sim} g$.

Si g ne s'annule pas (cadre du programme), cela équivaut à $\lim_{x_0} \frac{f}{g} = 1$.

⋆ Équivalents usuels en 0

Voici les équivalent usuels en 0 :

$$\begin{array}{lll}
\sin(x) \underset{0}{\sim} x, & e^x - 1 \underset{0}{\sim} x, & \tan x \underset{0}{\sim} x, \\
\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, & \sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}, & 1 - \cos(x) \sim_0 \frac{x^2}{2} \\
\arctan(x) \underset{0}{\sim} x & (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x &
\end{array}$$

■ **Exemple II.1** D'autres exemples :

$$\sin x \underset{0}{=} o(\sqrt{x}) \qquad \ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1, \qquad x^2 + 5x + 3 \underset{+\infty}{\sim} x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2 + 3x,$$

■

Le dernière écriture peut se généraliser, puisqu'on voit que si $h = o(g)$ et $f \sim g$ alors $f \sim g + h$. On peut donc **toujours ajouter à un équivalent une quantité négligeable devant cet équivalent** (seul le premier terme compte). On cherchera donc toujours l'équivalent le plus simple, c'est-à-dire celui qui donne le plus d'information.

Souvent on écrit : $f(x) = g(x) + o(h(x))$, pour dire $f(x) - g(x) = o(h(x))$ ou encore $f(x) = g(x) + O(h(x))$, pour dire $f(x) - g(x) = O(h(x))$.

Cette écriture signifie : f est environ égal à g à l'erreur h près.

■ **Exemple II.2** Pour les fonctions usuelles

$$\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x), \qquad e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x), \qquad \ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x), \qquad \sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x),$$

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + o(x), \qquad \cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

■

■ **Exemple II.3** Pour un polynôme

$$P(x) = a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n,$$

avec $m < n$, on a $P(x) \underset{0}{\sim} a_m x^m$ et $P(x) \underset{\infty}{\sim} a_n x^n$.

Autrement dit, **un polynôme est équivalent en** 0 **à son terme de plus bas degré et en l'infini à son terme de plus haut degré**. ■

Comme pour les suites, l'intérêt est de calculer des limites, en utilisant le résultat :

$$\left.\begin{array}{r} f \underset{x_0}{\sim} g \\ \lim_{x_0} g = L \end{array}\right\} \implies \lim_a f = L$$

⋆ Croissances comparées des fonctions exponentielles, puissance et logarithmes

Les croissances comparées :

$$\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x), \text{ et même } \forall \beta > 0,\ \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \qquad x \underset{+\infty}{=} o(e^x) \text{ et même } \forall \beta > 0,\ x^\beta \underset{+\infty}{=} o(e^x)$$

II.2 Manipulation

On a les mêmes propriétés que pour les suites :

Lien avec les limites Si $L \neq 0$, $f \underset{x_0}{\sim} L \iff \lim_{x_0} f = L$.

$\lim_{x_0} f = 0 \iff f \underset{x_0}{=} o(1)$.

f bornée localement en$x_0 \iff f \underset{x_0}{=} O(1)$.

Transitivité Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et si $g \underset{x_0}{=} o(h)$ alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$.

Multiplication par un scalaire non nul Soit $\lambda \neq 0$, et $f \underset{x_0}{=} o\,(g)$, on a $f \underset{x_0}{=} o\,(\lambda g)$, et $\lambda f \underset{x_0}{=} o\,(g)$.

Soit $\lambda \neq 0$, et $f \underset{x_0}{=} O\,(g)$, on a $f \underset{x_0}{=} O\,(\lambda g)$, et $\lambda f \underset{x_0}{=} O\,(g)$.

Soit $\lambda \neq 0$, et $f \sim g$, on a $\lambda f \sim \lambda g$.

Compatibilité avec la multiplication Si $f \underset{x_0}{=} o\,(g)$ et si $f' \underset{x_0}{=} o\,(g')$, alors $fg \underset{x_0}{=} o\,(gg')$.

Si $f \underset{x_0}{=} O\,(g)$ et si $f' \underset{x_0}{=} O\,(g')$, alors $fg \underset{x_0}{=} O\,(gg')$.

Si $f \sim g$ et si $f' \sim g'$, alors $ff' \sim gg'$.

Puissance et inverse Si $p \in \mathbb{N}^*$, on a $f \underset{x_0}{=} o\,(g) \implies f^p \underset{x_0}{=} o\,(g^p)$. Par contre, $f \underset{x_0}{=} o\,(g) \implies \frac{1}{f} \underset{x_0}{=} o\,(\frac{1}{g})$.

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on a $f \sim g \implies f^p \sim g^p$.

Si $f \sim g \implies \frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$. En conséquence, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $f \sim g \implies f^p \sim g^p$.

Si les deux fonctions sont strictement positive, et $a \in \mathbb{R}$, on a alors $f \sim g \implies f^a \sim g^a$. Attention, il ne faut pas que a dépende de x.

Valeur absolue et signe Si $f \sim g$, alors $|f| \sim |g|$, mais la réciproque est fausse.

Par contre, $f \underset{x_0}{=} o\,(g) \Leftrightarrow |f| \underset{x_0}{=} o\,(|g|)$, et $f \underset{x_0}{=} O\,(g) \Leftrightarrow |f| \underset{x_0}{=} O\,(|g|)$,

Si $f \sim g$, alors f et g sont du même signe au voisnage de x_0.

Transitivité mixte Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et si $g \sim h$, alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$. En conséquence dans l'écriture $f \underset{x_0}{=} o(g)$, on peut remplacer g par une fonction équivalente.
Si $f \underset{x_0}{=} O(g)$ et si $g \underset{x_0}{=} o(h)$ alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.
Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et si $g \underset{x_0}{=} O(h)$ alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.

Le problème de l'addition Comme pour les suites, **on ne peut pas ajouter des équivalents**.
Contre exemple : $x^2+x+1 \sim_{+\infty} x^2$ et $-x^2 \sim_{+\infty} -x^2+2$, mais $x+1 \not\sim_{+\infty} -2$.
Autre contre-exemple (en 0) : $3x^3+2x^2 \sim_0 2x^2$, $-2x^2 \sim_0 -2x^2-4x^4$, mais on n'a pas : $3x^3 \sim_0 -4x^4$.
Même chose avec les o (en $+\infty$) : $x =_{+\infty} o(x^2)$ et $x =_{+\infty} o(1-x^2)$, mais $2x \neq o(1)$.

Combinaison linéaire Par contre, si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f_1 + \mu f_2 = o(g)$. Ainsi une **combinaison linéaire de fonctions négligeables** devant g est négligeables devant g.

Démonstration. La preuve est simple : $\dfrac{\lambda f_1+\mu f_2}{g} = \lambda \dfrac{f_1}{g} + \mu \dfrac{f_2}{g} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$. ■

Le problème de la composition On ne compose pas non plus les équivalents de fonctions :
Contre exemple : $x+1 \sim x$, mais e^x n'est pas équivalent à e^{x+1}, puisque le rapport tends vers e.

Substitution Par contre, on a la **substitution :**

> **Proposition II.1** Si $\lim\limits_{t_0} u(t) = a$ et si $f \sim_a g$ alors $f(u(t)) \sim_{t\to t_0} g(u(t))$. De même, si $\lim\limits_{t_0} u(t) = a$ et si $f =_a o(g)$ alors $f(u(t)) =_{t_0} o(g(u(t)))$.

Démonstration. La démonstration se fait en calculant la limite du quotient, et en utilisant le théorème de composition des limites :

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(u(t))}{g(u(t)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

■

Attention à ne pas confondre substitution et composée, et à **bien le faire apparaître dans la rédaction**.
Par exemple, la rédaction : $\ln(1+x) \sim_0 x$ et $\sin t \sim_0 t$ donc $\ln(1+\sin(t)) \sim_0 t$ est fausse (même si le résultat est juste). La rédaction correcte est : $\lim_{x\to 0} \sin t = 0$, et $\ln(1+u) \sim_0 u$, donc $\ln(1+\sin(t)) \sim_0 \sin(t) \sim_0 t$.
Lorsqu'on utilise la subsitution, il faut donc faire apparaître **une limite** et **un équivalent**, et on remplace la variable dans l'équivalent par la quantité qui converge vers 0.
On peut aussi faire une substitution par une suite :

> **Proposition II.2** Si $u_n \to a$ et $f \sim_a g$, alors $f(u_n) \sim_{n\to+\infty} g(u_n)$. et de même si $f =_a o(g)$, alors $f(u_n) = o(g(u_n))$.

Exercice 1 Donner une équivalent simple de $\sin\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}\right)$.

Exercice 2 Donner des équivalents au point entre parenthèse de :

$$\ln(1+t^2)\ (0), \qquad 1-\cos(t^3)\ (0), \qquad \tan\left(\frac{1}{t}\right)\ (+\infty), \qquad e^{\frac{1}{t}}-1\ (-\infty)$$

Exercice 3 Montrer que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos(x))}{x}=0, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x\ln(e^x+1)=0$$

Relations de comparaison

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Comparaison de suites

Exercice 1 Donner un équivalent simple et la limite éventuelle des suites (u_n) définies par :

$$u_n = n^2+2n, \qquad u_n = \sqrt{n}+(\ln(n))^{12}+\sin(n), \qquad u_n = e^n+n^e,$$
$$u_n = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}, \qquad u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \qquad u_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right),$$
$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{1}{n}}-1}, \qquad u_n = \frac{\left(1-\cos(\frac{1}{n})\right)\cos(\frac{1}{n})}{e^{\frac{1}{n^2}}-1}.$$

Correction :

$$n^2+2n \underset{n\infty}{\sim} n^2 \qquad \sqrt{n}+(\ln(n))^{12}+\sin(n) \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{n} \qquad e^n+n^e \underset{n\infty}{\sim} e^n$$
$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \underset{n\infty}{\sim} 2\sqrt{n} \qquad \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ (ou forme conjuguée)}$$
$$\frac{n+1}{n^2} \to 0 \text{ donc } \sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{n+1}{n^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{1}{n}}-1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \frac{\left(1-\cos(\frac{1}{n})\right)\cos(\frac{1}{n})}{e^{\frac{1}{n^2}}-1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2n^2}\times 1}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Exercice 2

1. Trouver un équivalent de $\sqrt{n^2+n}+\sqrt[3]{n^3+n^2}$.
2. Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{n^5+10n}{\sqrt[5]{n^2+n+1}}$.

Correction :

1.
$$\sqrt{n^2+n} \sim n \sqrt[3]{n^3+n^2} \sim n$$
$$\sqrt{n^2+n} \sim +\sqrt[3]{n^3+n^2} \sim 2n$$

2.
$$\frac{n^5+10n}{\sqrt[5]{n^2+n+1}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^{\frac{2}{5}}} n^{\frac{18}{5}} \to +\infty$$

Exercice 3 Déterminer un équivalent de la suite définie par :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0,$$
$$\text{donc : } \sin\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 4

1. Déterminer la limite de la suite définie par : $v_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$, puis chercher un équivalent de $v_n - l$.
2. Même question avec $v_n = \left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{n^2}$.
3. Laquelle de ces deux suites converge le plus rapidement ?

Correction :

1. On écrit :
$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \exp n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$
et on a :
$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$
donc :
$$n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n} \to 0$$
D'où $v_n \to 1$.
On écrit ensuite :
$$\begin{aligned} v_n - 1 &= \exp n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 1 \\ &\underset{n\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \text{ car } n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \to 0 \\ &\underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$
2. On écrit :
$$\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)\right)$$
De même :
$$\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$$
et donc :
$$n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \to 0$$
D'où
$$\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{n^2} \to 1$$
Puis de la même manière :
$$\begin{aligned} \exp\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)\right) - 1 &\underset{n\infty}{\sim} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right) \\ &\underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$
3. v_n donc.

Exercice 5 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$ fixés.

1. Montrer que $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{n}{k} x^n = 0$.

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{1}{k!}\left(n(n-1)\dots(n-k+1)\right)\\ &\underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{k!}\left(n^k\right)\end{aligned}$$

car on a un produit fini de termes.

2. On a :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} x^n &\underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{k!}\left(n^k\right)x^n\\ &\underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{k!}\frac{n^k}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}\end{aligned}$$

or $\frac{1}{x} > 1$, donc $n^k = \underset{n\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$. D'où la limite.

✯ Comparaison de fonctions

Exercice 6 Donner la limite d'expressions suivantes à l'aide d'équivalents :

$$\lim_0 \frac{1-\cos(x)}{\tan 2x}, \qquad \lim_0 \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}, \qquad \lim_0 \sin(x)\ln(\tan x),$$

$$\lim_1 \ln(1-x)\cos\frac{\pi x}{2}, \qquad \lim_0 \frac{(1-\cos x)\tan x}{x\sin^2 x}, \qquad \lim_1 \tan\left(\frac{x\pi}{2}\right)\ln(x),$$

$$\lim_0 (\cos x)^{\cot x^2}, \quad \text{avec : } \cot(u) = \frac{\cos u}{\sin u}$$

Exercice 7 Déterminer un équivalent de la fonction f donnée, au point indiqué entre crochets :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^a)}{\ln x}\ [+\infty], a>0, \qquad f(x) = \tan(x)\ [\frac{\pi}{2}], \qquad f(x) = \frac{\sqrt{\sin x}}{e^x-1}\ [0],$$

$$f(x) = \frac{\ln(2x^2+x+1)}{\ln(2x+3)}\ [+\infty], \qquad f(x) = (x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}}\ [+\infty],$$

$$f(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln(x)\ [+\infty], \qquad f(x) = E(x)\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ [+\infty],$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)\ [+\infty], \qquad f(x) = e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\ [+\infty],$$

$$f(x) = \frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}\ [1^+], \qquad f(x) = \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x}\ [0],$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\ [1], \qquad f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{1-\ln(x^2)}\ [0]$$

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+6x+5}{x^3+1},\qquad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+6x+2}-3}{x^3-1},\qquad \lim_{x\to\pi}\frac{\sin(2x)}{x-\pi},\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{2x}-3xe^x-x),\qquad \lim_{x\to+\infty}(\ln(1+e^x)-x+1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x+5}{x^3+1},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-3x}{x-1},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}(e^x-1)\ln(x),\qquad \lim_{x\to+\infty}e^x\ln(e^{-x}+1),\qquad \lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{1+e^{-x}}-1),$$

$$\lim_{x\to-\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\qquad \lim_{x\to0^+}(1+x^2)^{\frac{1}{2x^3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{mx^2+6x+5}{x^2+1},\qquad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-mx)$$

Compléments sur la manipulation des relations de comparaison

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

On présente ici quelques résultats de manipulation d'équivalent. Il ne faut pas apprendre ces résultats par cœur, il est préférable de les redémontrer.

✯ Les cas où l'on peut composer

le cas d'une limite équivalent de $e^{\cos(x)}$ en 0

On a $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, donc par continuité : $\lim_{x\to 0} e^{\cos(x)} = e$, ce qui s'écrit : $e^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} e$.

le cas de la puissance équivalent de $\sin^3(x)$ en 0.

On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\sin^3(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$.

R Cela est aussi valable pour les puissance non entière (ex prendre la racine carrée).

✯ Rédiger une substitution

■ **Exemple II.4** Équivalent de $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

On a : $\lim_{n\infty} \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 0$, donc par continuité $\lim_{n\infty} \cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1$, on est donc en train d'approximer la fonction logarithme népérien au voisinage de 1.

On écrit alors :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \ln\left(1+\underbrace{\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-1\right)}_{\to 0}\right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-1\right) = 0$, et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on a par substitution :

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - 1.$$

Puis on a : $\lim_{n\infty} \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} = 0$, et $\cos(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$, ce qui donne par substitution :

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 \\ &\underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

en effet, $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc en mettant au carré, on obtient : $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. ■

Remarquez qu'on utilise une limite et un équivalent. On substitue la variable dans l'équivalent par l'expression qui tend vers la bonne limite.

✯ Équivalent et fonction exponentielle

Proposition II.3 Si (u_n) et (v_n) vérifient $\lim_{n\infty}(u_n - v_n) = 0$, alors $\exp(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \exp(v_n)$.

Démonstration. En effet :

$$\frac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)} = \exp^{(u_n - v_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

■

■ **Exemple II.5** Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n\infty}(\ln(u_n) - 2n) = \ln 3$.

On a alors

$$\begin{aligned} \ln(u_n) - 2n - \ln(3) &\xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ \text{et donc } \exp(\ln(u_n) - 2n - \ln(3)) &\xrightarrow[n\infty]{} 1 \\ \text{c'est-à-dire } u_n \exp(-2n - \ln(3)) &\xrightarrow[n\infty]{} 1 \\ \text{ce qui s'écrit } u_n &\underset{+\infty}{\sim} e^{2n+\ln(3)}. \end{aligned}$$

Cette dernière écriture donne une idée de la vitesse avec laquelle u_n tend vers $+\infty$.

■

✯ Équivalent et fonction logarithme

Proposition II.4 Si on a $\lim_{n\infty} v_n = 1$, avec $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 1$, alors $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} v_n - 1$.

Démonstration. En effet, si on pose $u_n = v_n - 1$, alors $\lim_{n\infty} u_n = 0$, et donc

$$\ln(v_n) = \ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n = v_n - 1.$$

■

Proposition II.5 Si (u_n) et (v_n) sont deux suites strictement positives avec $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, et $\lim_{n\infty} v_n = L \neq 1$, alors on a : $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. Ce résultat est aussi valable si $L = +\infty$.

Démonstration. Si L est un réel non nul et différent de 1, alors cela provient de $u_n \to L$, $\ln(u_n) \to \ln(L)$ et $\ln(v_n) \to \ln(L)$, donc $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ ont la même limite (non nulle) $\ln(L)$, donc sont équivalentes. (On retrouve la composition dans le cas d'une limite).

Si $L = +\infty$, on écrit :

$$\ln(u_n) = \underbrace{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{\ln(v_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty}.$$

Ainsi :

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \underbrace{\frac{\ln(\frac{u_n}{v_n})}{\ln(v_n)}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} + 1$$

Si $L = 0^+$, on sait que $\frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$, avec $\frac{1}{v_n} \to +\infty$, donc en appliquant ce qui précède on a : $\ln\left(\frac{1}{u_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{1}{v_n}\right)$ soit $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. ■

■ **Exemple II.6** Si on cherche l'équivalent de $\ln(\tan x)$ au voisinage de 0, on peut par exemple écrire rapidement :

$$\begin{aligned}\ln(\tan x) &= \ln(x) + \ln\left(\frac{\tan x}{x}\right) \\ &\underset{0}{\sim} \ln(x)\end{aligned}$$

car $\ln(x) \to +\infty$ et $\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right) \to 0$. ■

R La rédaction est ici un peu différente pour bien mettre en évidence la point important de la méthode : forcer la factorisation pour utiliser la propriété fondamentale du logarithme.

On a les même résultats pour les fonctions :

Proposition II.6 Pour deux fonctions f et g :
- Si $\lim\limits_{x_0}(f(x) - g(x)) = 0$, alors $\exp(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \exp(g(x))$.
- Si f et g sont deux fonctions strictement positives avec $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, et $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 1$, on a : $\ln(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \ln(g(x))$. Ce résultat est aussi valable si $L = +\infty$.

14 — Dérivabilité

I Rappels

Définition I.1 — Dérivabilité en un point, nombre dérivé. On dit que le fonction f est dérivable au point x_0, si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tends vers x_0.

Le nombre L est alors appelé nombre dérivé et noté $f'(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, ou $Df(x_0)$.

Ainsi, f est dérivable en x_0 si on peut écrire :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\Big((x-x_0)\Big)$$

On reconnaît ainsi l'équation de la tangente en x_0 :

$$T : \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

L'écart à la tangente est donc négligeable devant $(x-x_0)$.

On en déduit aussi :

$$f(x) = f(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\Big(1\Big),$$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On retrouve ainsi un résultat déjà connu :

Proposition I.1 La dérivabilité en x_0 entraîne la continuité en x_0.

Définition I.2 On dit que la fonction f est dérivable à droite (resp. à gauche) si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite à droite (resp. à gauche) en x_0.

Notation I.1. *On note alors* $f'_d(x_0)$ *(resp.* $f'_g(x_0)$*).*

On a de plus la proposition :

Proposition I.2 Une fonction f définie autour et en x_0 est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite avec de plus $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Définition I.3 On dit que la fonction f est dérivable sur l'ensemble D, si elle est dérivable en tout point de D.

On peut alors définir l'application dérivée :

$$f'(x) = \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ & & = \lim_{y\to x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \end{cases}$$

On note aussi $f' = Df = \frac{df}{dx}$.

On rappelle les règles de dérivation suivante :

$$\begin{aligned} (\lambda f+\mu g)' &= \lambda f' + \mu g' \\ (fg)' &= f'g + g'f \\ (g\circ f)' &= (g'\circ f)\times f' \\ \left(\frac{1}{f}\right)' &= -\frac{f'}{f^2} \end{aligned}$$

On rappelle aussi la dérivation d'une bijection réciproque :

Proposition I.3 Soit f dérivable et strictement monotone sur un intervalle I avec $\forall x\in I,\ f'(x)\neq 0$.

On note $J = f(I)$. On a alors f bijective de I dans J.

La bijection réciproque est alors dérivable sur J, avec :

$$\forall x\in J,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

II Théorème de Rolle

II.1 Notion d'extremums

Rappelons les définitions :

Définition II.1 — Extremums. On dit que la fonction f admet un maximum absolu (ou global) sur I en $x_0 \in I$, si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(x_0).$$

On a alors $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$.

On dit que la fonction f admet un minimum absolu sur I en $x_0 \in I$, si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(x_0).$$

On a alors : $f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$.

On dit que la fonction f admet un extremum absolu sur I en $x_0 \in I$, si elle admet un minimum ou un maximum absolu.

Ces définitions se généralisent localement en disant :

- f admet un maximum local en x_0, si $\exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$,
- f admet un minimum local en x_0, si $\exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0)$,
- f admet un extremum local en x_0 si elle admet un maximum ou un minimum local.

Bien entendu un extremum global est local.

Le lien entre maximum global et borne supérieure est qu'un maximum est une borne supérieure qui est atteinte. Idem pour la borne inférieure et le minimum global. On sait d'autre part qu'une fonction continue sur un segment admet un maximum et un minimum global (autre formulation de bornée et atteint ses bornes).

II.2 Recherche d'extremums

Proposition II.1 Soit f définie et dérivable sur un intervalle $]a, b[$ et $c \in]a, b[$ telle que f admette en c un extremum local (ou global).

Alors $f'(c) = 0$.

C'est faux si c est au bords de l'intervalle !

Démonstration. Déjà f est définie autour de c puisque $c \in]a, b[$, on peut donc calculer les dérivées à droite et à gauche en c. (C'est ici que le fait que c n'est pas un bords intervient).

Considérons par exemple, le cas d'un minimum.

On a : pour x au voisinage de c, $f(x) \geqslant f(c)$, donc si $x > c$, on a :

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

Donc la dérivée à droite $f'_d(c)$ de c est positive.

En procédant de même, la dérivée à gauche $f'_g(c)$ est négative.

Comme ces deux dérivées sont égales (puisque f est dérivable en c), on a $f'(c) = 0$. ■

II.3 Théorème de Rolle

Théorème II.2 — Théorème de Rolle. Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, $\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = 0$.

Cela s'interprète en disant qu'il existe **au moins un point où la tangente est horizontale**.

✎ Ce théorème peut sembler évident, car si on avait f' continue, on pourrait dire :
- par l'absurde si f' était toujours positive stricte, alors f serait croissante stricte, donc $f(a) > f(b)$, contradiction, donc il existe un point où la dérivée est négative.
- de même f ne peut pas être strictement décroissante donc il existe un point où la dérivée est positive.
- la dérivée change donc de signe,
- la fonction f' étant continue, il y a donc un point où la dérivée s'annule.

Sauf que la dérivée f' n'est pas supposée continue.
On peut donc dire que ce théorème permet de montrer une propriété de continuité de la dérivée d'une fonction.

✎ Comme le théorème sur les fonctions continues sur un segment, ce théorème fait appel à l'axiome fondamental de $\mathbb{R}$: toute partie non vide et majorée a une borne supérieure, via le théorème sur les fonctions continues sur un segment.

✎ On l'applique parfois « en cascade » : si f a 5 racines, alors on applique le théorème de Rolle entre chaque racine, ainsi f' a quatre racines au moins, puis f'' a trois racines au moins, etc. Ce qui amène parfois à des raisonnement par récurrence.

Démonstration. f est continue sur $[a,b]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes.

Notons donc $m = \min_{[a,b]} f$ et $M = \max_{[a,b]} f$, et α et β les deux points de $[a,b]$ tels que $f(\alpha) = m$, et $f(\beta) = M$.

On sait que si $\alpha \in]a,b[$, alors $f'(\alpha) = 0$ et de même, si $\beta \in]a,b[$, alors $f'(\beta) = 0$. Donc si l'un des deux points α ou β n'est pas au bords de $[a,b]$, alors en posant pour valeurs pour c celui des deux qui n'est pas au bords de l'intervalle, on obtient le résultat.

Mais si α et β sont tous les deux égaux à a ou que α et β sont tous les deux égaux à a ou encore que l'un des deux est a et l'autre b, on a toujours : $f(\alpha) = f(\beta)$ puisque $f(a) = f(b)$.

Cela signifie que $m = M$, et que la fonction f est alors constante sur l'intervalle $[a,b]$. Tout point intérieur à $]a,b[$ convient. On choisit alors par exemple $c = \frac{a+b}{2}$. ■

III Accroissements finis

III.1 Égalité des accroissements finis

Proposition III.1 Soit $a < b$, et une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors :

$$\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b},$$

c'est-à-dire : $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.

✎ Autrement dit, il existe un point c où la **vitesse instantanée** $f'(c)$ est égal à la **vitesse moyenne** $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

✎ On peut écrire l'égalité des accroissements finis de plusieurs manières :
- $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$: la vitesse instantanée en c est égale à la vitesse moyenne sur $[a,b]$
- $f(a)-f(b) = f'(c)(b-a)$: on exprime la distance entre les images des points a et b *i.e.* $f(a)-f(b)$ en fonction de la distance entre ces points.
- $f(b) = f(a)+(b-a)f'(c)$: on compare la valeur de $f(b)$ est celle d'une estimation par une fonction affine $x \mapsto f(a)+(x-a)f'(c)$.

✎ La fait que c n'est pas un des bords de l'intervalle (*i.e.* $c \in]a,b[$ ouvert) a parfois de l'importance. Cela permet par exemple d'obtenir des inégalités strictes. La rédaction doit le faire apparaître.
L'existence de c est théorique : on ne peut jamais calculer la valeur de c explicitement. Par contre, on peut utiliser des estimations de $f'(c)$ pour obtenir des encadrements.
Le point c dépends des bornes a et b (ainsi que de la fonction f). il arrivera parfois que l'on ait besoin de cette dépendance.
L'égalité est vraie que $a < b$ (dans ce cas $c \in]a,b[$) ou $b < a$ (dans ce cas $c \in]b,a[$).
Le cas $a = b$ doit être traité à part (le point c n'existe pas).

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction :

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a).$$

Cette fonction correspond à retrancher à la fonction f la fonction affine $T : x \longmapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$, qui est la seule fonction affine qui vérifie : $T(a) = f(a)$ et $T(b) = f(b)$.

Un simple calcul montre alors que $\phi(a) = 0$, et $\phi(b) = 0$, ce qui est évident d'après le choix de T.

La fonction ϕ vérifie donc les hypothèse du Théorème de Rolle : continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$. Donc $\exists c \in]a,b[, \phi'(c) = 0$,

Or le calcul montre que

$$\forall x \in]a,b[,\ \phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

ce qui s'écrit :

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{b - a}$$

■

III.2 Inégalités des accroissements finis

Définition III.1 — Fonctions M-lipschitzienne. La fonction f est M-lipschitzienne sur l'intervalle I si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Conformément au programme,

R On peut vérifier qu'une fonction M lipschitzienne est continue (le contraire est faux).

Le M n'est pas unique. On le choisit le plus petit possible en valeur absolue.

Proposition III.2 Si f est dérivable sur I et si $|f|$ est bornée par M sur I , alors f est M-lipschitzienne sur I .

Démonstration. Soit $(x,y) \in I^2$, on a alors :

$$\forall c \in]x,y[,\ f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

cela donne : $$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$$

or $|f'(c)| \leqslant M$ d'après l'hypothèse. D'où :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

comme (x,y) sont quelconques, on en déduit la relation pour tout $(x,y) \in I^2$. ■

Exercice 1 Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin(x)$ est 1 lipschitzienne

IV Applications des accroissements finis

IV.1 Obtenir des inégalités

On peut montrer et interpréter la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x \text{ avec égalité si et seulement si } x = 0.$$

par les accroissements finis.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x = 0$, il est clair que l'on a égalité.

Si $x > 0$, on applique l'inégalité des accroissements finis sur $[0,x]$ Cela donne :

$$\begin{aligned} \exists c \in]0,x[,\ e^x =& e^0 + e^c(x-0) \\ \text{ie :} \qquad e^x =& 1 + e^c x \end{aligned}$$

Comme $c > 0$, on a $e^c > 1$ et donc $e^c x > x$ (car $x > 0$) et au final, on a bien : $e^x > 1+x$.

Si $x < 0$, on procède de même sur l'intervalle $[x,0]$, cela donne :

$$\begin{aligned} \exists c \in]x,0[,\ e^x =& e^0 + e^c(x-0) \\ \text{ie :} \qquad e^x =& 1 + e^c x \end{aligned}$$

Cette fois, $c < 0$, on a $e^c < 1$ et donc $e^c x > x$ (car $x < 0$ donc on renverse l'inégalité). Au final, on a bien encore : $e^x > 1+x$.

Montrons que

$$\forall x \in]0,1[,\ x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Soit $x \in]0,1[$, on applique l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0,x]$, $x \mapsto \arcsin x$ est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, on a donc :

$$\begin{aligned} \exists c \in]0,x[,\ \arcsin x =& \arcsin 0 + x \arcsin'(c) \\ \text{c'est-à-dire :} \qquad \arcsin x =& x\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}. \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que :

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{car } 0 < c < x.$$

On obtient alors en multipliant par $x > 0$:

$$x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

■ **Exemple IV.1** Montrer la relation :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant x^3.$$

La relation est évidente si $x = 0$.

Soit $x > 0$, on applique le théorème des accroissements finis à la fonction :

$$f : x \longmapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

Cette fonction est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ On a donc :

$$\exists c \in]0,x[,\ f(x) = f(0) + xf'(c).$$

on a $f(0) = 0$ et

$$\begin{aligned} \forall x \geqslant 0,\ f'(x) =& \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x}\left(1 - (1+x) + x(1+x)\right) \\ =& \frac{1}{1+x}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$f'(c) = \frac{1}{1+c}c^2 \leqslant c^2 \leqslant x^2.$$

en multipliant par $x > 0$, cela donne :

$$xf'(c) \leqslant x^3 \text{ c'est-à-dire } f(x) \leqslant x^3.$$

On en déduit le résultat. ■

IV.2 Application à l'étude des suites récurrentes

Voir la fiche sur l'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$: l'étude des fonctions contractantes (c'est-à-dire M-lipschitzienne avec $M < 1$).

IV.3 Monotonie et dérivée

Proposition IV.1 Soit une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On a alors :
- f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0$,
- f est décroissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leqslant 0$,
- f est constante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$,

Démonstration. On fait le cas croissant pour fixer les notations.

$\Rightarrow$ Supposons que f croissante sur $[a,b]$, soit $x \in]a,b[$, alors si $h > 0$, on a $f(x+h) \geqslant f(x)$,

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

Donc la dérivée à droite en x est positive, comme la dérivée à droite est égal à la dérivée à gauche est égal à la dérivé, on a : $f'(x) \geqslant 0$.

$\Leftarrow$ Supposons $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0$, Soit $a \leqslant x < y \leqslant b$. On sait que

$$\exists c \in]x,y[,\ f(y) = f(x) + \underbrace{f'(c)}_{\geqslant 0}\underbrace{(y-x)}_{\geqslant 0}.$$

D'où $f(x) \leqslant f(y)$ et f croissante sur $[a,b]$.

Faisons le cas où la fonction est constante : l'implication si f constante alors la fonction f' est nulle est évidente.

Considérons la réciproque en supposant que la fonction f' est nulle. Soit $x \in]a,b]$, montrons que $f(x) = f(a)$. On sait que $\exists c \in]a,x[$, tel que $f(x) = f(a) + (x-a)f'(c)$, comme $f'(c) = 0$, on obtient le résultat.

On voit ici le point important : il faut que $]a,b[$ soit un intervalle. ■

R Ce résultat s'étend au cas d'un intervalle quelconque I, mais pas au cas de domaine comme $\mathbb{R}^*$, il faut que ce soit un intervalle.

IV.4 Monotonie stricte

C'est plus compliqué pour la monotonie stricte : une fonction peut annuler sa dérivée et être strictement croissante (comme $x \mapsto x^3$). On a juste une implication :

Proposition IV.2 Si la fonction f est dérivable sur $]a,b[$ et : $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]a,b[$.

Si de plus la fonction f est continue en a, alors f est strictement croissante sur $[a,b[$.

Démonstration. Supposons donc que $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0$.

Soit x et y, avec $a < x < y < b$. On a f continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : alors on a $\exists z \in]x,y[,\ f(x) = f(y) + f'(z)(x-y)$, donc $f(x) > f(y)$. Ce qui démontre le premier point : la fonction est croissante sur $]a,b[$.

Considérons le deuxième point, on ajoute donc l'hypothèse f est continue sur a. Montrons que :

$$\forall (x,y) \in [a,b[^2, \text{ avec } x < y \text{ on a } f(x) < f(y).$$

Comme on a déjà montré que la fonction f est croissante strictement sur $]a,b[$, il ne reste que le cas où $x = a$. On montre donc la propriété $\forall y \in]a,b[,\ f(a) < f(y)$.

Soit donc un $y \in]a,b[$ fixé, on choisit x et z avec $a < x < z < y$, on a alors : $(x,z,y) \in]a,b[$ et donc la propriété précédente implique : $f(x) < f(z) < f(y)$

En faisant tendre x vers a, z et y restant fixé, on obtient par continuité : $f(a) \leqslant f(z) < f(y)$. Et donc $\forall y \in]a,b[,\ f(a) < f(y)$

■

✎ On a bien sûr la même chose en b : si f est continue en b elle est strictement croissante sur $]a,b]$, en particulier si elle est continue sur $[a,b]$, elle est strictement croissante sur $[a,b]$.

✎ La technique d'utiliser une autre variable pour obtenir une inégalité stricte (en évitant donc de passer à la limite dans l'inégalité stricte) est à retenir.
Elle est aussi utilisée dans ce cadre : si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et (u_n) est croissante et converge alors $\lim_{n\infty} u_n > 0$. Pour cela, on écrit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0$, et donc $\lim_{n\infty} u_n \geqslant u_0$.

On a un résultat plus fort : la dérivée peut s'annuler en un nombre fini de point.

Proposition IV.3 Soit f dérivable sur un intervalle $]a,b[$, telle que $\exists c_1, \dots c_n \in]a,b[$, tel que $f'(x) = 0$, et

$$\forall x \in]a,b[\setminus \{c_1, \dots c_n\},\ f'(x) > 0,$$

alors f est strictement croissante sur $]a,b[$.

Autrement dit : si f est dérivable sur $]a,b[$ telle que $f' > 0$ sur $]a,b[$ sauf en un nombre fini de point où la dérivée s'annule alors f est strictement croissante.

Ce résultat est valable en remplaçant $]a,b[$ par un intervalle.

Démonstration. On fait le cas d'un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$, et $\forall x \in]a,b[\setminus\{c\},\ f'(x) > 0$. On a alors, en utilisant le résultat précédent : $\forall x, y \in]a,b],\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, et : $\forall x, y \in [b,c[,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Soit donc $x, y \in]a,b[$, avec $x < y$. On raisonne par disjonction des cas :

- Si $a < x < y < c < b$, alors on a déjà démontré le résultat,
- Si $a < c < x < y < b$, idem,
- Si $a < x < c < y < b$, alors on a $f(x) < f(c)$ et $f(c) < f(y)$, donc $f(x) < f(y)$.

Le cas général se démontre en considérant chacun des sous intervalles : $]a, c_1[$, $]c_1, c_2[$ etc. ■

R Si la dérivée s'annule sans changer de signe sur un nombre finie de valeur, la fonction reste strictement monotone.

IV.5 Théorème de la limite de la dérivée

Soit f définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus a$. On souhaite savoir à quelle condition elle est dérivable en a.

On rappelle donc qu'il ne faut surtout pas dériver la fonction f et déterminer à partir de l'expression de f' obtenue si f est dérivable en a en faisant tendre x vers a dans l'expression de $f'(x)$. Dit de manière différente : l'ensemble de définition de l'expression de f' n'est pas nécessairement l'ensemble de dérivabilité de f.

Plus précisément, le théorème suivant précise les liens entre les limites de l'application dérivée et la dérivabilité en a.

Théorème IV.4 — Limite de la dérivée. Soit f définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus a$.

On suppose que l'application dérivée f' admet une limite L (finie ou non) en a. Alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

le taux d'accroissement en a tends aussi vers L

R a peut être un bords de l'intervalle I.

✎ Particulièrement utile dans le cas d'une fonction qui est pronlongée par continuité en a : on est assuré de la continuité et on montre la dérivabilité par la limite de l'application dérivée (plutôt que la limite du taux d'accroissement).
C'est en particulier le cas pour l'étude du problème de recollement de solutions d'équations différentielles.

Démonstration. On traite la dérivabilité à droite en a.

Soit $a < x < b$, f est alors continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$, donc on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$$\exists c_x \in]a,x[,\ f(x) = f(a) + f'(c_x)(x - a) \text{ soit } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

On sait que $\lim_{x\to a} c_x = a$ (d'après le théorème des gendarmes), puisque $c_x \in]a,x[$. Comme on sait que $\lim_{x\to a} f'(x) = L$, on a par composition des limites : $\lim_{x\to a} f'(c_x) = L$. Et donc : $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$. Ce qui s'écrit aussi f est dérivable (à droite) en a, avec $f'(a) = L$.

On traite de même la dérivabilité à gauche en a. ■

Corollaire IV.5 Soit f définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus a$.

On suppose que l'application dérivée f' admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en a. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

On suppose maintenant que l'application dérivée f' tends vers $+\infty$ en a. Alors $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale en a.

■ **Exemple IV.2** Soient λ un réel non nul et f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\cos(\lambda x)-1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrons que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On voit que f est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ (quotient de fcts continues). En 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}\lambda^2 x^2}{x} = \frac{\lambda^2 x}{2} \to 0 = f(0)$$

D'où la continuité en 0 et sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ (quotient de fcts $\mathscr{C}^1$).

En 0 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\lambda \sin(\lambda x)}{\sin x} + (\cos(\lambda x)-1)\frac{\cos(x)}{\sin^2 x} \\ &= -\lambda^2 + o(1) + \frac{\lambda^2}{2} + o(1) \\ &\to -\frac{\lambda^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut appliquer le théorème de la limite de la dérivée (en vérifiant proprement les hypothèses). Cela donne :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{\lambda^2}{2}.$$

Et donc f dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{\lambda^2}{2}$.

Ensuite f' est continue en 0, puisque $\lim x \to 0 f'(x) = f'(0)$.

Et enfin f est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. ■

R Pour obtenir ces mêmes résultats, on aurait pu faire :

- La limite du taux d'accroissement en 0 pour vérifier que f est dérivable et donc définir $f'(0)$
- Vérifier ensuite que $\lim_{x\to 0} f'(x)$ donne bien $f'(0)$.

On s'épargne donc la moitié des calculs.

V Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

V.1 Rappels

Définition V.1 On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, si elle est n fois dérivable et que la dérivée n-ième est continue sur I.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (classe infinie) si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que pour démontrer rigoureusement qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$, il faut donc démontrer (généralement par récurrence) que f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n. Cela n'est possible que

- pour les polynômes (dérivées n-ième nulle dès que n est supérieur au degré),
- les fonction cos et sin et exp pour lesquelles une formule existe par récurrence (il y en a d'autres).

Ou alors, il faut écrire la fonction f comme somme/composé/produit de fonction $\mathscr{C}^\infty$, comme on va le voir.

On a bien par définition $f \in \mathscr{C}^n \Leftrightarrow f' \in \mathscr{C}^{n-1}$. D'autre part, si $f \in \mathscr{C}^n$ alors les fonctions $f^{(p)}$, pour $p \in [\![1,n]\!]$ sont alors continues sur D.

On a le résultat classique pour les opérations sur les fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$:

Proposition V.1 La somme, le produit, le quotient, la composée de fonction de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

Ainsi, la somme, le produit, le quotient, la composée de fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Ainsi que le résultat pour les bijections réciproques de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$:

Proposition V.2 Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I et f est bijective sur I, avec $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors la bijection réciproque f^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^n$.

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et bijective sur I, avec $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors la bijection réciproque f^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$.

V.2 Formule de Leibniz

On a admis la propriété pour le produit, on la démontre en donnant la formule de la dérivée n-ième :

Proposition V.3 — Formule de Leibniz. Soit f et g de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors fg est aussi de classe $\mathscr{C}^n$, avec :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

En conséquence, si f et g sont $\mathscr{C}^\infty$, alors fg aussi.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence et est identique à la formule du binôme. L'initialisation pour $n = 1$ ne pose pas de problème, puisque : $(fg)' = f'g + gf'$.

L'hérédité s'écrit :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}g^{(n-k)}+f^{(k)}g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}g^{(n-k)}\right)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k)}g^{(n+1-k)}\right)
\end{aligned}$$

On fait alors le changement de variable

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\left(f^{(k)}g^{(n+1-k)}\right)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k)}g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)\left(f^{(k)}g^{(n+1-k)}\right)+f^{(0)}g^{(n+1)}+f^{(n+1)}g^{(0)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}+f^{(0)}g^{(n+1)}+f^{(n+1)}g^{(0)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

L'hérédité est donc démontrée.

Puis la conclusion. ■

✎ Comme pour la formule du binôme de Newton pour les matrices, la formule de Leibniz est particulièrement utile pour calculer la dérivée d'une fonction f qui s'écrit comme un produit $f = gh$ avec g une fonction dont il est facile de calculer la dérivée n-ième (par exemple une fonction cos, sin, ou un polynôme).

■ **Exemple V.1** On souhaite calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x^2e^x$.

On note $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto e^x$, on a donc $f = uv$.

En utilisant la formule de Leibniz :

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} u^{(k)}v^{(n-k)}$$

or :

$$\begin{aligned}
u^{(k)} &= 0 \text{ si } k \geqslant 3 \\
v^{(n-k)} &= v \text{ puisque } v \text{ est la fonction exponentielle}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) &= x^2e^x + \binom{n}{1}2xe^x + \binom{n}{2}2e^x \\
&= \left(x^2+2xn+n(n-1)\right)e^x
\end{aligned}$$

■

VI Fonctions complexes

VI.1 Rappels

Tout d'abords un rappel :

Attention : on étudie la dérivabilité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on ne dérive jamais une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ SAUF si c'est un polynôme.

On change ensuite notre définition de la dérivabilité d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

Définition VI.1 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ avec I un intervalle et x_0 un point de I.
On dit que f est dérivable en x_0, si

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ admet une limite finie lorsque } x \text{ tends vers } x_0.$$

On note alors cette limite $f'(a)$.
On définit alors la dérivabilité de f sur l'intervalle I comme la dérivabilité en tout point de I.

On a la caractérisation de la dérivée (précédemment définition de la dérivabilité en un point) :

Proposition VI.1 Soit $f :\ D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note a et b les fonction $D \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = a(x) + ib(x)$.
La fonction f est dérivable en un point x_0 (resp. sur D) si et seulement si a et b sont dérivable en x_0 (resp. en tout point de D).
De plus dans ce cas : $f'(x_0) = a'(x_0) + ib'(x_0)$ la fonction dérivée est alors aussi une fonction de $D \to \mathbb{C}$.

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$T(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{a(x)-a(x_0)}{x-x_0} + i\frac{b(x)-b(x_0)}{x-x_0}$$

C'est ensuite une ré-écriture de

$$\lim_{x\to x_0} T(x) = l \iff \begin{cases} \lim_{x\to x_0} \mathrm{Re}(T(x)) = \mathrm{Re}(l) \\ \lim_{x\to x_0} \mathrm{Im}(T(x)) = \mathrm{Im}(l) \end{cases}$$

■

✎ Si $f :\ I \to \mathbb{C}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, on interprète souvent en physique f comme la trajectoire d'un point mobile $M(t)$. À l'instant t, l'objet mobile est situé au point d'affixe $f(t)$.
La dérivée $f'(t)$ est alors interprété comme le vecteur vitesse.

✎ On peut définir la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I comme les fonctions dérivables dont l'application dérivée est continue. Par récurrence, on peut alors définir la notion de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$.

La plupart des formules de dérivation (dérivée d'une somme, d'un produit, formule de Leibniz) sont vraies pour les fonctions à valeurs complexes. Attention à la composée avec une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. La proposition précédente permet aussi de vérifier que $\overline{f'(a)} = \overline{f}'(a)$.

Les dérivées des fonctions complexes sont surtout utilisées en physique pour dériver des exponentielles complexes.

Proposition VI.2 Soit $\varphi : D \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable et

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{\varphi(x)} \end{array} \right.$$

ie : $f = \exp \circ \varphi$, alors on a : f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, \qquad f'(x) = \varphi'(x) e^{\varphi(x)}.$$

En particulier la dérivée de $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{C}$ est $x \mapsto ae^{ax}$

VI.2 Les difficultés

Le théorème de Rolle ne se généralise pas aux fonctions de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$. On le voit bien dans la démonstration puisque cela utilise l'axiome fondamental de $\mathbb{R}$.

■ **Exemple VI.1** Considérons $f : x \longmapsto e^{ix}$. On a $f(0) = f(2\pi)$, mais

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = ie^{ix} \neq 0.$$

Ainsi, le théorème de Rolle ne s'applique pas à ce cas.

■

On comprend bien le problème : il existe c_1 et c_2 deux réels distincts de $]0, \sqrt{2}\pi[$, tel que :

$$\sin(c_1) = 0 \text{ et } \cos(c_2) = 0.$$

autrement dit $\mathrm{Re}\left(f'(c_1)\right) = 0$ et $\mathrm{Im}\left(f'(c_2)\right) = 0$ mais il s'agit de deux points différents.

De ce fait, l'égalité des accroissements finis ne se généralise pas aux fonctions $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$. Par contre, on peut généraliser certaines conséquences du théorème de Rolle, en raisonnant sur les parties réelles et imaginaires :

Proposition VI.3 Une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ est constante si et seulement si $f' = 0$.

Démonstration. Clairement si f est constante alors la dérivée est la fonction nulle.

Réciproquement, si on suppose que $\forall x \in I, \ f'(x) = 0$, Considérons alors par l'absurde a et b avec $a < b$ tel que $f(a) \neq f(b)$. On a alors par exemple $\mathrm{Re}(a) \neq \mathrm{Re}(b)$. En appliquant alors les accroissements finis sur $x \mapsto \mathrm{Re}(x)$ (qui est bien une fonction $I \to \mathbb{R}$). On en déduit qu'il existe $c \in I$, $\mathrm{Re}(a) - \mathrm{Re}(b) = (a-b)\mathrm{Re}\left(f'(c)\right)$ et donc $\mathrm{Re}\left(f'(c)\right) \neq 0$ et par suite $f'(c) \neq 0$ contradiction. ■

On peut aussi généraliser l'inégalité des accroissements finis :

Proposition VI.4 Soit $f: I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$
Si il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in I, \ |f'(x)| \leqslant M$$

alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, \ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Démonstration. La démonstration sera faite dans le chapitre intégration. ∎

Dérivabilité

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Dérivation des fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 1 Montrer par dérivation que :

$$\forall x > 0, \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Que se passe-t-il pour $x < 0$?

Correction : On obtient facilement que la dérivée est nulle. Il reste à prendre la valeur en 1, ou la limite lorsque x tends vers 0^+ ou $+\infty$.

Exercice 2 On considère la fonction

$$f : x \longmapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition puis la régularité de la fonction f.
2. Calculer sa dérivée et en déduire une expression plus simple pour f.

Correction :

1. f est dérivable sur $]-1,1[$.
2. Il faut dériver proprement.

Exercice 3 Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[, x \leqslant \arcsin(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, |\arctan(x)| \leqslant |x|$$

Correction : cours.

⋆ Théorème de Rolle, accroissements finis et conséquences

Exercice 4 Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$, avec $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, telle que $f(a) = f'(a) = 0$ et $f(b) = f'(b) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à $g : x \mapsto e^{-x}(f(x) + f'(x))$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Correction : on vérifie que $g(a) = g(b)$ et que les hypothèses du thm de Rolle s'appliquent. On obtient facilement : $g'(x) = e^{-x}(f(x) - f''(x))$, et donc $g'(c) = 0$ signifie $f''(c) = f(c)$.

Exercice 5 Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, dérivable et telle que $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{+\infty} f'$ existent dans $\mathbb{R}$.
Montrer en utilisant la formule des accroissements finis que $\lim_{+\infty} f' = 0$.

Correction : On considère $n \in \mathbb{N}$ et on applique les accroissements finis sur $[n,n+1]$. Cela donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists c_n \in]n,n+1[,\ f(n+1) - f(n) = f'(c_n)$$

On vérifie : $\lim_{n\infty} f'(c_n) = l$ car $c_n \to +\infty$. En passant à la limite : $\lim_{n\infty} f'(c_n) = 0$. d'où $l = 0$.

Exercice 6 Soit α un réel appartenant à $]0,1[$. En appliquant la formule des accroissements fins à la fonction $x \mapsto x^\alpha$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

Soit la suite $(H_n)_n$ définie par :

$$H_n = \frac{1}{1^{1-\alpha}} + \frac{1}{2^{1-\alpha}} + \frac{1}{3^{1-\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{1-\alpha}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}}$$

Prouver que $H_n = \underset{+\infty}{O}(n^\alpha)$.

Lorsque $\alpha < 0$, montrer que H_n converge.

Correction : Accroissement finis :

$$\exists c_n \in]n, n+1[,\ (n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha \frac{1}{c_n^{1-\alpha}}$$

Comme $c_n \in]n, n+1[$ et $1-\alpha > 0$, cela donne :

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

On écrit l'inégalité pour tout $k \geqslant 1$, puis on somme, ce qui donne :

$$\alpha\left(H_n + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1\right) \leqslant (n+1)^\alpha \leqslant \alpha H_n$$

On obtient alors facilement le résultat.

⋆ Théorème de la limite de la dérivée

Exercice 7 Considérons la fonction $F : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Prolonger F par continuité en 0.
2. Vérifier que ce prolongement est dérivable en 0.

Indication : cet exercice nécessite les estimations suivantes :

$$\ln(1+x) = xx - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x).$$

Correction :

1. On a déjà vu que $\lim_{x\to 0} F(x) = 1$, ainsi, on peut prolonger la fonction F par continuité en posant $F(0) = 1$.
2. On sait que F est continue en 0 (puisqu'on a appliqué le prolongement par continuité). On a aussi :

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ F'(x) &= -\frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)} \\
&= \frac{1}{x}\left(-\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{1+x}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(-\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) + (1 - x + o(x))\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x\to 0} F'(x) = \frac{1}{2}$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, cela donne :

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

Donc F est dérivable en 0 avec $F'(0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 8 Soit r un réel quelconque. On définit une application f par : $f(0)=0$, $f(-1)=0$, et pour tout réel x différent de 0 et de -1, $f(x)=x\left|1+\frac{1}{x}\right|^r$.

Etudier la continuité de f, ainsi que l'existence et la continuité de f'.

Exercice 9 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, si $x\in\mathbb{R}^*$ et $f(0)=0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,
$$f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}f(x)$$
Donner l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n.
4. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Correction :

1. f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathbb{R}_*^-$. En 0 :
$$\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to+\infty}e^{-t}=0.$$
2. évident.
3. Par récurrence (à détailler). Initialisation évidente en posant $P_0=1$.
Hérédité :
$$\begin{aligned}\forall x\neq 0,\ f^{(n+1)}(x)&=\left(f^{(n)}\right)'\\&=\frac{P_n'(x)}{x^{3n}}f(x)-3n\frac{P_n(x)}{x^{3n+1}}f(x)+\frac{P_n(x)}{x^{3n}}f'(x)\\&=\frac{P_n'(x)}{x^{3n}}f(x)-3n\frac{P_n(x)}{x^{3n+1}}f(x)-\frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}}f(x)\\&=\frac{f(x)}{x^{3n+3}}\left(x^3P_n'(x)-3nx^2P_n(x)-2P_n(x)\right)\end{aligned}$$
On pose donc :
$$P_{n+1}=X^3P_n'(X)-3nX^2P_n(X)-2P_n(X)$$
C'est bien un polynôme, et on a bien la relation.
4. On montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété : f est de n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
L'initialisation est évidente pour $n=0$.
Pour l'hérédité, on constate que :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{Pn\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{t^{\frac{3n}{2}}}e^{-t}=0\end{aligned}$$
Par comparaison entre les puissance et l'exponentielle.
Comme $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, le théorème de la limite de la dérivée s'applique qui donne : le taux d'accroissement de $f^{(n)}$ en 0 tends vers 0 :
$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=0$$
Ainsi, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ ie f est $n+1$ fois dérivable en 0 et donc sur $\mathbb{R}$. D'où l'hérédité.
On constate que $f^{(n)}(0)=0$.

Exercice 10 **[Mines]**

Soit $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.

1. Montrer que si

$$\forall x \in [0,2],\ \exists c \in]0,2[,\ f(x) = x(x-1)(x-2)\frac{f^{(3)}(c)}{6}.$$

Indication : pour $x \in [0,2] \setminus \{0,1,2\}$, considérer la fonction :

$$\varphi : t \mapsto f(t) - At(t-1)(t-2)$$

en choisissant A, tel que : $\varphi(x) = 0$. Appliquer ensuite plusieurs fois le théorème de Rolle entre chaque racines de φ.

2. Soit $D = \sup\limits_{[0,2]} f''' - \inf\limits_{[0,2]} f'''$.

Déterminer un réel γ tel que

$$\left|\int_0^2 f(t)\,dt\right| \leqslant \gamma D.$$

---

1. Pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$. C'est évident (on peut choisir n'importe quelle valeur pour c).

On considère $x \in [0,2] \setminus \{0,1,2\}$ et $A = \dfrac{f(x)}{x(x-1)(x-2)}$. On considère ensuite la fonction :

$$\varphi : t \mapsto f(t) - At(t-1)(t-2)$$

comme conseillé dans l'indication.
On a alors : φ a 4 racines (0,1,2 et x) (au moins).
Par application du Thm de Rolle entre chaque racines, φ' a 3 racines (au moins), puis φ'' a 2 racines (au moins), enfin $\varphi^{(3)}$ a une racine (au moins), que l'on note c.
On a donc $\varphi^{(3)}(c) = 0$.
On écrit ensuite $\varphi(t) = f(t) - A(t^3 + \dots)$. Ce qui donne :

$$\varphi^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - 6A.$$

Ainsi, $\varphi^{(3)}(c) = 0$ signifie $\dfrac{f^{(3)}(c)}{6} = A$. Et donc :

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\frac{f^{(3)}(c)}{6}.$$

2. Déjà $f^{(3)}$ est continue sur $[0,2]$, donc les valeurs :

$$M = \sup_{[0,2]} f''' \qquad \text{et} \qquad m = \inf_{[0,2]} f'''$$

existent (et sont atteintes, mais on ne s'en sert pas ici). On a alors :

$$\begin{aligned} &\forall t \in [0,1], \quad t(t-1)(t-2) \geqslant 0 \\ &\forall t \in [1,2], \quad t(t-1)(t-2) \leqslant 0 \end{aligned}$$

donc en écrivant : $f(t) = t(t-1)(t-2)f^{(3)}(c)$ et

$$m \leqslant f^{(3)}(c) \leqslant M$$

en multipliant par $t(t-1)(t-2)$, cela donne :

$$\begin{aligned} &\forall t \in [0,1], \quad t(t-1)(t-2)m \leqslant f(t) \leqslant t(t-1)(t-2)M \\ &\forall t \in [1,2], \quad t(t-1)(t-2)M \leqslant f(t) \leqslant t(t-1)(t-2)m \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$m\int_0^1 t(t-1)(t-2)dt \leqslant \int_0^1 f(t)dt \leqslant M\int_0^1 t(t-1)(t-2)dt$$
$$M\int_1^2 t(t-1)(t-2)dt \leqslant \int_1^2 f(t)dt \leqslant m\int_1^2 t(t-1)(t-2)dt$$

Il reste à calculer ces quantités :

$$\int_0^1 t(t-1)(t-2)dt = \int_0^1 \left(t^3-3t^2+2t\right) dt = \left[\frac{t^4}{4}-t^3+t^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}$$

et :

$$\int_1^2 t(t-1)(t-2)dt = \left[\frac{t^4}{4}-t^3+t^2\right]_1^2$$
$$=(4-8+4)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

Cela donne :

$$\frac{1}{4}m \leqslant \int_0^1 f(t)dt \leqslant \frac{1}{4}M$$
$$-\frac{1}{4}M \leqslant \int_1^2 f(t)dt \leqslant -\frac{1}{4}m$$

Par somme :

$$-\frac{1}{4}D \leqslant \int_0^1 f(t)dt \leqslant \frac{1}{4}D.$$

D'où le résultat avec $\gamma = \frac{1}{4}$.

⋆ Dérivée n-ième, formule de Leibniz

Exercice 11 Calculer la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto e^{x \operatorname{ch} a}\operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$ où $a \in \mathbb{R}$ est donné.

Exercice 12 En dérivant n fois la relation $\forall x \in \mathbb{R}, x^{2n} = (x^n)^2$, en déduire :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Correction : D'un côté :

$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!}x^n$$

D'un autre côté, en notant $u : x \mapsto x^n$ et $v : x \mapsto x^n$:

$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = (u(x)v(x))^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k$$
$$=n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 x^n$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}$, et $H_n : x \mapsto e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$.

1. Vérifier que H_n est une fonction polynôme, dont on donnera degré et coefficient dominant.
2. Montrer le théorème de Rolle généralisé :
   Soit f une fonction définie de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continue sur cet intervalle, dérivable sur $]a;+\infty[$ et telle que $f(a)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
   Montrer qu'il existe c dans $]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.
3. Montrer que pour $n \geqslant 1$, H_n admet n racines réelles distinctes, séparées par celles de H_{n-1}.

Correction :

1. Notons $u(x)=e^{-x^2}$. On a :
   $$\begin{aligned} u(x) &= e^{-x^2} \\ u'(x) &= -2xe^{-x^2} \\ u^{(2)}(x) &= \left(-2+4x^2\right)e^{-x^2} \\ u^{(3)}(x) &= \left(8x+(-2+4x^2)2x\right)e^{-x^2} \end{aligned}$$
   On démontre alors par récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists H_n \in \mathbb{R}[X],\ u^{(n)}(x) = H_n(x)e^{-x^2}$$
   On a facilement la relation :
   $$H_{n+1} = H_n' - 2XH_n$$
   Avec $P_0 = 1$ On en déduit facilement $H_n = 2^n X^n + \dots$.
2. Si f change de signe, alors f s'annule en un point b et on peut alors appliquer le théorème de Rolle sur $[a,b]$.
   On considère ensuite un point b de $]a,+\infty[$ par exemple, $b=a+1$. Si $f(b)=0$, alors on applique Rolle sur $[a,b]$.
   On considère donc que $f(b)>0$.
   Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $u \in]a,b[$, tel que :
   $$f(u) = \frac{f(b)}{2} \text{ puisque } f(a)=0$$
   Mais le même théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $v \in]b,+\infty[$, tel que :
   $$f(v) = \frac{f(b)}{2} \text{ puisque } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
   donc on peut appliquer le théorème de Rolle sur $[u,v]$.
   On a donc bien l'existence d'un c tel que $f'(c)=0$.
3. H_n a au plus n racines distinctes (puisqu'il est de degré n). Il faut donc montrer qu'il a au moins n racines distinctes. Ce qui revient à montrer que $f : x \mapsto e^{-x^2}$ vérifie $f^{(n)}$ a au moins n racines.
   On procède par récurrence en notant :
   $$\mathscr{P}(n) :\ f^{(n)} \text{ admet au moins } n \text{ racines distinctes}$$
   Pour $n=0$ c'est évident.
   Considérons n fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vrai. On note alors $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les n racines de $f^{(n)}$. En appliquant le thm de Rolle, entre chaque racine, on obtient qu'il existe $b_1, \dots, b_{n-1}$ racines de $f^{(n+1)}$ vérifiant précisément :
   $$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n.$$
   Il reste à trouver une racine $b_0 \in]-\infty, a_1[$ et une racine $b_n \in]a_n,+\infty[$.
   Pour cela, il faut vérifier que $\lim_{x\to-\infty} f^{(n)}(x) = 0$. En effet,
   $$f^{(n)}(x) = H_n(x)e^{-x^2} \to 0 \text{ par croissance comparée.}$$
   Il faut alors appliquer le thm de Rolle généralisé sur $]-\infty, a_1[$.
   On procède de même sur $]a_n,+\infty[$. on obtient alors $n+1$ racines distinctes :
   $$b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n < b_n.$$
   D'où l'hérédité et la conclusion. De plus cette dernière relation indique que les racines de H_n sont séparées par celles de H_{n-1}. Il n'y a pas d'autres racines, puisque H_n est de degré n.

⋆ Équations fonctionnelles et dérivation

Exercice 14 Déterminer les applications dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) \times f(y).$$

15 — Développements limités

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et on considère des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ ou $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Le point a est un point de I ou une extrémité de I.

On rappelle que si x est petit on a

$$1 > |x| > |x|^2 > |x|^3 > |x|^4 > \cdots > |x|^n$$

Les expressions x^k sont des repères de décroissance vers 0 lorsque x est petit. On va donc comparer les fonctions à ces repères.

I Définitions, généralités

I.1 Définitions

Définition I.1 — Développements limités en 0. Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité en 0 d'ordre n noté $DL_n(0)$ si il existe une fonction polynôme

$$P_n : x \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i,$$

tel que :

$$\begin{aligned} f &\underset{x\to 0}{=} P_n(x) + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots \lambda_n x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Autrement dit si :

$$\exists \varepsilon : I \to \mathbb{R} : \text{ tel que } f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x), \qquad \varepsilon(x) \to 0.$$

Soit aussi :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f-\left(\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2+\ldots\lambda_n x^n\right)}{x^n}=0.$$

Attention avec cette notation : n n'est pas forcément le degré du polynôme, l'ordre du DL noté n est celui de $o(x^n)$, c'est le degré de précision de l'approximation de f par le polynôme P_n.

Ainsi, si f admet un développement limité, alors elle est *presque* égale à un polynôme, la différence étant contrôlé par le terme $o(x^n)$.

La polynôme est appelé **partie régulière** du DL.

■ **Exemple I.1** On a déjà vu des premiers développements limités à des ordres faibles :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x+o(x), \qquad e^x \underset{0}{=} 1+x+o(x), \qquad \ln(1+x) \underset{0}{=} x+o(x),$$

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1+\frac{x}{2}+o(x), \qquad \tan(x) \underset{0}{=} x+o(x), \qquad \cos(x) \underset{0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

On verra que l'on peut écrire :

$$e^x \underset{0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right).$$

■

L'avantage de cette écriture est (comme on l'a vu dans le chapitre sur les relations de comparaison) que l'on peut faire passer des termes de droite à gauche du signe $=$. De l'exemple ci-dessus, on peut déduire :

$$e^x-1-x \underset{0}{=} +\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right).$$

On généralise cette définition en un point $a\in I$, en remplaçant le polynôme P, par un « *polynôme en* $(x-a)$ ».

Définition I.2 — Développement limité en a. On dit alors que f admet un développement limité en a d'ordre n noté $DL_n(a)$ si :

$$\exists(\lambda_0,\lambda_1,\ldots\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1},$$
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \lambda_0+\lambda_1(x-a)+\lambda_2(x-a)^2+\ldots\lambda_n(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

Soit :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-\left(\lambda_0+\lambda_1(x-a)+\lambda_2(x-a)^2+\ldots\lambda_n(x-a)^n\right)}{(x-a)^n}=0.$$

c'est bien entendu une propriété locale, qui ne dépend donc uniquement du comportement de la fonction pour des x proche de 0 (resp. de a).

Par définition, la limite de f est égale à λ_0.

Un polynôme est son propre DL en 0. Plus clairement : si

$$P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n$$

alors :

$$P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots \lambda_n x^n + \varepsilon(x) x^p \text{ avec } \varepsilon \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

il suffit de choisir pour ε la fonction nulle. On peut choisir $p \geqslant n$ on a alors un « vrai » développement limité, ou $p < n$, dans ce cas, on a écrit des termes inutiles.

Si on se place en a, il faut écrire le polynôme en $(x-a)$.

✎ On écrit les termes du plus grand au plus petit (donc par degré croissant).

I.2 Forme normalisée

Proposition I.1 f admet un $DL_n(a)$ si et seulement si la fonction $g : h \mapsto f(a+h)$ admet un $DL_n(0)$.

Démonstration. Cela provient de la règle du changement de variable dans les limites : puisque $x \to a$, on a $h = (x-a) \to 0$, on peut donc dire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - \left(\lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + \ldots \lambda_n h^n\right)}{h^n} =$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \left(\lambda_0 + \lambda_1 (x-a) + \lambda_2 (x-a)^2 + \ldots \lambda_n (x-a)^n\right)}{(x-a)^n}$$

■

✎ **Méthode :** Pour faire un $DL_n(a)$, il faut systématiquement se ramener à 0. Pour cela, on fait un changement de variable, en remplaçant la variable x (qui tends vers a) par $a+h$ (avec h qui tends vers 0).
Après avoir obtenu le $DL(0)$ en h, on remplace de nouveau h par $(x-a)$ pour avoir un le $DL(a)$.

■ **Exemple I.2** Cherchons un DL de $x \mapsto \ln x$ au point 3. On a :

$$\ln(3+h) = \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right)$$

On se ramène donc au DL en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$. En supposant que l'on a le DL suivant (que l'on verra plus tard) :

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

et en substituant x et $\frac{h}{3}$ (on verra cette manipulation). Cela donne :

$$\ln\left(1 + \frac{h}{3}\right) \underset{h \to 0}{=} \frac{h}{3} - \frac{1}{18} h^2 + \frac{1}{81} h^3 + o\left(\frac{h^3}{3}\right)$$
$$\underset{h \to 0}{=} \frac{h}{3} - \frac{1}{18} h^2 + \frac{1}{81} h^3 + o\left(h^3\right).$$

Au final :

$$\ln(3+h) \underset{h\to 0}{=} \ln(3)+\frac{h}{3}-\frac{1}{18}h^2+\frac{1}{81}h^3+o\left(h^3\right).$$

Autrement dit :

$$\ln(x) \underset{x\to 3}{=} \ln(3)+\frac{(x-3)}{3}-\frac{1}{18}(x-3)^2+\frac{1}{81}(x-3)^3+o\left((x-3)^3\right).$$

■

Définition I.3 — Forme normalisée d'un développement limité. Si f admet un $DL_n(a)$, alors on peut écrire de :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0+a_1h+\cdots+a_uh^u+o\left(h^u\right)\right)$$

avec $a_0 \neq 0$ et $u=n-p$.

✎ Pour obtenir la forme normalisée, il suffit enlever les termes nuls puis de factoriser par la première puissance dont le coefficient est non nul. On factorise aussi la puissance dans le « petito ».

■ **Exemple I.3** Le DL :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$$

s'écrit sous forme normalisé :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x\left(1+-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)$$

■

I.3 Unicité

Proposition I.2 Si f admet un $DL_n(a)$, alors les $(\lambda_i)_{i=1\ldots n}$ sont uniques.
Autrement dit la *partie régulière d'un développement limité est unique.*

Démonstration. Pour simplifier, on utilise la forme régulière.
On écrit donc deux développement limité à l'ordre $n=p+u$:

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0+a_1h+\cdots+a_uh^u+o\left(h^u\right)\right) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(b_0+b_1h+\cdots+b_uh^u+o\left(h^u\right)\right)$$

On a alors :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{h^p}=a_0=b_0$$

D'où $a_0=b_0$ et l'unicité du premier coefficient. On écrit ensuite :

$$\begin{aligned}
f(a+h)-a_0h^p &\underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_1h+\cdots+a_uh^u+o\left(h^u\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} h^{p+1}\left(a_1+\cdots+a_uh^{u-1}+o\left(h^{u-1}\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} h^{p+1}\left(b_1+\cdots+b_uh^{u-1}+o\left(h^{u-1}\right)\right)
\end{aligned}$$

On recommence alors pour obtenir $a_1 = b_1$ et ainsi de suite (plus rigoureusement, il faut considérer le premier terme non nul). ■

✎ C'est un avantage des DL sur les équivalents : les équivalents ne sont pas uniques !

Proposition I.3 Si f est une fonction paire, la partie régulière de f est paire, *i.e.* constitué uniquement de termes x^{2k}, Au contraire, si f est impaire, la partie régulière est aussi impaire.

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots \lambda_n x^n + \varepsilon(x)x^n \\ \text{et donc } f(x) = f(-x) &= \lambda_0 + \lambda_1(-x) + \lambda_2(-x)^2 + \ldots \lambda_n(-x)^n + \varepsilon(-x)(-x)^n \\ &= \lambda_0 - \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots \lambda_n x^n + \underbrace{\varepsilon(-x)(-1)^n}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} x^n \end{aligned}$$

Par unicité :

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_3 = 0 \qquad \text{etc.}$$

■

✎ lorsque l'on fait un DL d'une fonction paire, on peut toujours « ajouter un ordre » en remplacant un $o(x^{2n})$ par $o(x^{2n+1})$, puisque l'on sait que le terme de degré $2n+1$ est nul. Idem, si la fonction est impaire.
Cette propriété sert aussi à vérifier les calculs : si la fonction est paire, le *DL* ne contient que des termes pairs.

■ **Exemple I.4** Si on a : $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, on sait comme cos est paire que : $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$. De même, de $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, on déduit sans calcul que : $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$. ■

I.4 Troncature

Proposition I.4 Si f admet un $DL_n(0)$ d'ordre n, alors pour tout $p < n$ elle admet un $DL_p(0)$.
De plus, on a

$$\begin{aligned} \text{si } f(x) &= \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p + \lambda_{p+1} x^{p+1} + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n) \\ \text{alors } f(x) &= \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p + o(x^p) \end{aligned}$$

Autrement dit, on ne garde que les termes inférieur ou égal à p. Notons en particulier qu'on peut ne pas enlever de coefficient si $p > d(P)$.
On parle de troncature du développement limité.

Ainsi d'un DL à l'ordre 2, on peut déduire un DL à l'ordre 1 : par exemple, si $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, alors $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, et même $f(x) = 1 + o(1)$.

Démonstration. On a :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + \varepsilon(x)x^n \\
&= \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots \lambda_p x^p + \lambda_{p+1}x^{p+1} + \cdots + \lambda_n x^n + \varepsilon(x)x^n \\
&= \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots \lambda_p x^p + x^p \underbrace{\left(\lambda_{p+1}x^{+} \cdots + \lambda_n x^{n-p} + \varepsilon(x)x^{n-p}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \\
&\underset{0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots \lambda_p x^p + o(x^p)
\end{aligned}
$$

■

✎ Ce résultat peut s'interpréter en disant que lorsqu'on travaille avec des $o(x^p)$, on néglige tout ce qui est petit devant x^p, et donc on néglige x^{p+1}, x^{p+2} etc. On travaille donc *à la précision p*, et on négligé tous les détails de précision inférieure.
En abrégé : si $p < n$, on a $\lambda_{p+1}x^{p+1} + \ldots \lambda_n x^n + o(x^p) = o(x^p)$.

✎ **Méthodes :** pour un *DL* de la forme $f(x) = P(x) + o(x^n)$, il ne faut jamais écrire de terme de degré strictement supérieur à n : ils sont négligés par le $o(x^n)$.

I.5 Application à la continuité et la dérivabilité

Proposition I.5 Soit f une fonction définie sur I, et $a \in I$.
La fonction f est continue en a si et seulement si f admet un $DL_0(a)$. Avec dans ce cas : $f \underset{a}{=} f(a) + o(1)$.
La fonction f est dérivable en a, si et seulement si elle admet un développement limité en a. De plus, dans ce cas :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o\big((x-a)\big)$$

Notons en particulier, que si f admet un $DL(a)$ à un ordre strictement plus grand que 1, alors λ_0 est sa limite en a, tandis que λ_1 est sa dérivée en a.

Démonstration. Si f est continue en a, alors $f(x) \to f(a)$, donc $f(x) - f(a) \to 0$ et donc $f(x) - f(a) = o(1)$ ce qui s'écrit : $f(x) = f(a) + o(1)$.
Réciproquement, si $f(x) = \lambda_0 + o(1)$, alors $f(x) - \lambda_0 \to 0$, *i.e.* $f(x) \to \lambda_0$, comme $a \in D$, f est définie en a, la proposition I.1 assure que l'on a alors nécessairement : $\lambda_0 = f(a)$, et f est continue en a.
De même si f est dérivable, on a :

$$
\begin{aligned}
&\lim_a \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a), \text{ Donc :} \\
&\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \xrightarrow[x\to a]{} 0, \text{ soit} \\
&\frac{f(a)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} 0, \ i.e. \\
&f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)
\end{aligned}
$$

D'un autre côté, supposons que l'on ait : $f(x) \underset{a}{=} \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + o\big((x-a)\big)$. Alors déjà $f(x) \underset{a}{=} \lambda_0 + o(1)$, donc $\lambda_0 = f(a)$. Puis, on a :

$$\frac{f(a) - f(a) - \lambda_1(x-a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0, \text{ soit}$$
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lambda_1 \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0, \textit{ i.e.}$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda_1$$

Et donc f est dérivable, avec $f'(a) = \lambda_1$. ■

! Cela ne se généralise pas aux ordres supérieures : une fonction peut avoir un $DL_2(0)$, sans être deux fois dérivable. Exemple : $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$.
On verra par contre, que si elle est $\mathscr{C}^n$ alors elle admet un $DL_n(0)$, et que ce $DL_n(0)$ se calcule à l'aide des dérivées (formule de Taylor-Young).

On trouve aussi grâce à cette proposition quelques DL_1 :

$$\tan x \underset{0}{=} x + o(x), \qquad e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x), \qquad \ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x), \qquad \cos(x) \underset{0}{=} 1 + o(x)$$

Exercice 1 Soit $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$. Montrer que f admet un $DL_2(0)$, sans être deux fois dérivable.

I.6 Application au calcul d'équivalents

Proposition I.6 — Calcul d'équivalent à partir du DL. Si f admet un $DL_n(a)$, que l'on écrit sous la forme normalisée :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p \left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_u h^u + o\left(h^u\right)\right)$$

avec $a_0 \neq 0$ et $u = n - p$.

Alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$.

Autrement dit : l'équivalent est le premier terme non nul du développement limité.

En O, en enlevant les premiers termes nuls, on écrit :

$$f(x) = \lambda_p x^p + \lambda_{p+1} x^{p+1} + \ldots \lambda_n x^n + o(x^n) \text{ avec } \lambda_p \neq 0.$$

On a alors : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \lambda_p x^p$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que :

$$\frac{f(a+h)}{h^p} \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_u h^u + o\left(h^u\right) \to a_0$$

■

✯ Exemple de la série géométrique

Proposition I.7 La fonction

$$f : \begin{cases}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$$

admet un $Dl_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Celui-ci est donné par :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

Démonstration. On sait que :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = f(x) - x^n \frac{x}{x-1}$$

Donc :

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k}{x^n} = \frac{x}{x-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

■

En refaisant cette démonstration, on trouve la formule symétrique, en remplaçant x par $-x$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \ldots (-1)^n x^n \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \end{aligned}$$

II Manipulation des développements limités

On va voir que les DL_n sont beaucoup plus souples à manier que les équivalents.

En fait, le point important avec les DL_n est de tronquer au même niveau n.

Ceci s'explique par exemple en disant que si on a assez mal approchée une fonction g, alors quelque soit la qualité de l'approximation faite sur une fonction f, la qualité de l'approximation faite sur $f+g$ sera faible. Ceci est aussi valable pour la multiplication, la composée etc.

La méthode pour faire un DL est de calculer le *premier terme négligé*, c'est-à-dire l'ordre du DL.

II.1 Linéarité

Proposition II.1 Si f et g admette des DL_n, On écrit :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$$
$$g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

avec P et Q des polynômes. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g$ et λf admet aussi un des DL_n. Plus précisément :

$$\lambda f(x) \underset{x\to 0}{=} \lambda P(x) + o(x^n)$$
$$\text{et } f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

Démonstration. On fait la preuve en utilisant les fonctions $\varepsilon(x)$: on sait que $f \underset{0}{=} P + \varepsilon_1(x)x^n$ et $g \underset{0}{=} Q + \varepsilon_2(x)x^n$, donc $f+g \underset{0}{=} P + Q + x^n(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))$. D'où le résultat en posant $\varepsilon(x) \underset{0}{=} \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\to 0}$. De même, $\lambda f \underset{0}{=} \lambda P + \underbrace{\lambda \varepsilon_1(x)}_{\to 0}$ ■

Méthode : Pour calculer le développement limité d'une somme, on remplace les fonctions par leur DL. Le premier terme négligé est alors le plus petit des deux ordres des deux DLs. On fait alors la somme des deux polynômes (en ne gardant que les termes de degré inférieur à l'ordre du DL).

■ **Exemple II.1** Si on a : $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. en faisant la somme, on a :

$$e^x + \cos(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

On voit que le premier terme négligé est le $o(x^3)$. On obtient alors :

$$e^x + \cos(x) \underset{0}{=} 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

■

II.2 Produit

Proposition II.2 Si f et g admettent des DL_n de partie régulière P et Q respectivement, alors fg aussi, avec :

$$fg \underset{0}{=} Tr_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

Autrement dit le DL_n de fg, s'obtient en calculant le produit PQ, mais en ne gardant que les termes inférieurs ou égal à n.

Démonstration. Avec les même notations que ci-dessus :

$$fg \underset{0}{=} PQ(x) + x^n \underbrace{(\varepsilon_1(x)Q(x) + \varepsilon_2(x)P(x)) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)x^n)}_{\varepsilon(x)}$$

On a bien $\varepsilon(x) \to 0$, puisque :

$$\varepsilon(x) \underset{0}{=} \underbrace{\varepsilon_1(x)}_{\to 0} \underbrace{Q(x)}_{\text{borné}} + \underbrace{\varepsilon_2(x)P(x)}_{\text{idem}} + \underbrace{\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)x^n}_{\to 0}$$

Donc : $fg \underset{0}{=} PQ + o(x^n)$,dans le produit PQ, il peut y avoir des termes de degrés $> n$, on utilise donc la troncature : $fg \underset{0}{=} Tr_n(PQ) + o(x^n)$.

Pour démontrer ce dernier point en détail, on peut utiliser le fait que PQ s'écrit : $PQ \underset{0}{=} Tr_n(PQ) + x^{n+1}B(x)$, avec $B \in \mathbb{R}[X]$, et donc $PQ \underset{0}{=} Tr_n(PQ) + o(x^n)$. ■

Méthode : Pour calculer le *DL* d'un produit, on remplace donc les fonctions par leur *DL*. On calcule le premier terme négligé, *i.e.* l'ordre n du *DL* final. Puis on calcule les coefficients du polynômes PQ de degrés inférieurs ou égal à n.

de manière abrégée : $x^k o(x^n) = o(x^{k+n})$, $o(x^k)o(x^n) = o(x^{k+n})$,

■ **Exemple II.2** On a : $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. en faisant le produit, on a :

$$e^x \times \sin(x) \underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$$

Les termes négligés s'obtiennent en faisant les produit : $1 \times o(x^4) = o(x^4)$ et $x \times o(x^4) = o(x^5)$.

En effet, il faut garder en tête que $o(x^n)$ désigne $\varepsilon(x)x^n$, où $\varepsilon(x)$ est une fonction inconnue Ainsi, multiplier le tout par x augmente d'un degré le $o(x^n)$, tandis que le diviser par x, le diminue d'un degré.

Dans l'exemple, le premier terme négligé est $o(x^4)$, on calcule donc que les coefficient de degré inférieur ou égal à 4.

$$e^x \times \sin(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

■

II.3 Composée

Tout d'abords un rappel :

Proposition II.3 Si $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$, avec λ non nul, alors $f = o(u(x)^l) \Rightarrow f = o(x^{kl})$, au sens où si une fonction est négligeable devant u^l (*i.e.* est un $o(u^l)$) alors elle est négligeable devant x^{kl} (*i.e.* est $o(x^{kl})$)

de manière abrégée : si $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$, avec λ non nul alors $o(u(x)^l) = o(x^{kl})$, On peut aussi remplacer u par une suite qui tends vers 0.

Proposition II.4 Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et $g : J \to \mathbb{R}$, tels que $f(I) \subset J$, *i.e.* $g \circ f$ est bien défini.

On suppose que $f(0) = a_0$, que f admet un *DL* en a_0 écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_p x^p + a_1 x^{p+1} + a_2 x^2 + \dots a_n x^n + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_0 + u(x) \text{ avec } u(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p \to 0 \end{aligned}$$

et que G admet un *DL* en a_0, que l'on écrit :

$$g(a_0 + u) \underset{u\to 0}{=} Q(u) + o(u^m)$$

Alors, $g(f(x))$ admet un *DL* à l'ordre mp.

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\underset{x\to 0}{=} g(a_0 + u(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} Q(u(x)) + o(x^{mp}) \end{aligned}$$

On simplifie ensuite $Q(u(x))$ comme un produit en cherchant le premier terme négligé et en négligeant les termes de degrés supérieurs.

Méthode : Pour faire un *DL* d'une expression composée $g(f(x))$ lorsque x tends vers 0 :

- on commence par faire un DL de l'expression *à l'intérieur* $f(x)$
- On isole alors la partie qui tends vers 0, notée $u(x)$, cette partie peut bien sûr contenir un o. On écrit alors $f(x) = a_0 + u(x)$.
- On calcule l'équivalent de $u(x)$ qui est nécessairement être de la forme : $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$ et on vérifie bien que la fonction u tends vers 0.
- on fait ensuite un *DL* de la fonction *à l'extérieur* $g(a_0 + u)$ en la variable u qui tends vers 0,
- on remplace dans ce *DL*, la variable u par l'expression $u(x)$, et le $o(u^l)$ par un $o(u^{kl})$. On obtient alors un *DL* lorsque x tends vers 0.
  Il est important de bien indiquer que l'on a changé de variable en indiquant la variable sous le o, et de ne pas mélanger des expressions avec des u et des x. D'autre part, pour bien indiquer la composition, il faut mettre l'expression $u(x)$ entre parenthèses.
- on calcule ensuite le premier terme négligé, comme dans le cas d'un produit.

■ **Exemple II.3** si on a : $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $\ln(1+u) \underset{0}{=} u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, on a alors :

$$\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^3)}_{u\to 0})$$

On pose donc $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, et on a $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \to 0$.

D'un autre côté, on a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on remplace le $o(u^2)$ par $o(x^4)$.
On obtient :

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) &\underset{0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2+o(x^4)\\
&\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2}+o(x^3).
\end{aligned}$$

Car le premier terme négligé est $o(x^3)$. ■

II.4 Quotient

Comme pour les dérivées, on déduit du résultat précédent le cas du quotient :

Proposition II.5 Si f admet un Dl_n en 0, avec $f(0) = a \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$. De plus ce Dl_n se calcule, en utilisant le Dl_n de $\frac{1}{1-x}$, et la propriété :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a+f(x)-a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\underbrace{\frac{a-f(x)}{a}}_{\to 0}}$$

Méthode : Pour faire un DL d'un quotient $\dfrac{f}{g}$, on est donc obligé de passer par celui d'un produit et faire le DL de $\dfrac{1}{g}$.
Pour ce dernier, on écrira g sous la forme $1+u$, avec u qui tends vers 0, et on composera avec le DL de $\dfrac{1}{1+u}$.

■ **Exemple II.4** On souhait faire le DL de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$. On a :

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4).$$

On écrit donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}\\
&= \frac{1}{1-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}
\end{aligned}$$

On pose donc :

$$u(x) = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

On utilise alors le DL :

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+o(u^2).$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-u(x)} &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + x^4\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right) + o(x^4)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

■

II.5 Primitivation d'un développement limité

On peut calculer le DL_n de f à partir de celui de sa dérivée :

Proposition II.6 Si f' admet un $DL_n(0)$ et si f' est continue sur un voisinage de 0, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ qui se déduit de celui de f' avec :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n)\\ f(x) &= f(0) + \lambda_0 x + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + \lambda_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})\end{aligned}$$

! Attention au $f(0)$, l'écrire systématiquement et le barrer si besoin.

Démonstration. La preuve se fait en intégrant l'égalité :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n + \phi(t)(t^n)$$

pour t entre 0 et x. L'hypothèse que f' est continue assurant que la fonction ϕ est continue.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t)dt\\ &= \int_0^x \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n + t^n\phi(t)dt\\ &= \lambda_0 x + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + \lambda_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x t^n \phi(t)dt\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $\int_0^x t^n\phi(t)dt = o(x^{n+1})$, soit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \phi(t)dt = 0.$$

Pour cela, il faut revenir à la notion de limite. Soit une précision $\varepsilon > 0$, on va utiliser la seule hypothèse que l'on ait : $\phi(x) \to 0$. On sait alors que :

$$\exists \alpha > 0, \forall |t| \leqslant \alpha, |\phi(t)| \leqslant \varepsilon$$

soit donc x , avec $|x| \leqslant \alpha$. On majore donc :

$$\left|\int_0^x t^n\phi(t)dt\right| \leqslant \int_0^{|x|} t^n|\phi(t)|dt \leqslant \varepsilon \int_0^{|x|} t^n dt = \varepsilon|x|^{n+1}.$$

D'où

$$\frac{|\int_0^x t^n\phi(t)dt|}{|x|^{n+1}} \leqslant \varepsilon.$$

On a donc bien trouvé un α qui convient ce qui permet de montrer que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n\phi(t)dt = 0,$$

et par suite

$$f = f(0) + \lambda_0 x + \lambda_1\frac{x^2}{2} + \cdots + \lambda_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

■

■ **Exemple II.5** On sait que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$. Donc

$$\arctan(x) \underset{0}{=} \arctan(0) + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

■

Méthodes : pour calculer le DL_n d'une fonction dont on connaît la dérivée (et le DL_n de la dérivée), on intègre la partie régulière du DL_n de f', en ajoutant le terme $f(0)$. Il faut toujours indiquer le terme $f(0)$ quitte à le barrer si il est nul. On obtient ainsi un DL_{n+1}.

III Formule de Taylor-Young, développements limités usuels

III.1 Formule de Taylor-Young

La formule de Taylor Young permet de montrer que les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ admette un DL_n celui-ci étant donné par le polynôme de Taylor.

Proposition III.1 — Formule de Taylor-Young. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a. Alors f admet un DL_n en a donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o\big[(x-a)^n\big]$$

Soit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + o\big[(x-a)^n\big]$$

En particulier dans le cas $a = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) =& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o[x^n] \\ =& \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^n). \end{aligned}$$

✎ Le premier résultat obtenu est théorique : si une fonction est $\mathscr{C}^n$ elle admet un DL_n. En particulier, si elle est $\mathscr{C}^\infty$ alors elle admet un DL_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎ Le deuxième résultat est pratique : les coefficients de la partie régulières sont données par les dérivées successives en 0. On peut donc calculer des DL_n en calculant les dérivées successives en 0. Mais cette méthode est longue et source d'erreurs. Autant que possible il est préférable d'utiliser les méthodes de manipulation des développements limités.

✎ Au contraire, on peut parfois calculer les dérivées successives en 0, en calculant d'abords le DL.

Exercice 2 Calculer les $DL_n(0)$ de $\cos x$, $\sin x$, e^x, et $(1+x)^\alpha$.

Exercice 3 En calculant un DL_n de arctan déterminer $\arctan^{(k)}(0)$, pour $k \in \mathbb{N}$.

ADMIS

III.2 Développements limités usuels

La formule de taylor-Young permet de calculer la plupart des $Dl_n(0)$ des fonctions usuelles, les autres sont obtenus par composition ou par intégration. Les tableaux 15.1 à 15.4 contiennent les développements limités. Ceux du tableau 15.5 sont à retrouver rapidement.

Notons qu'il faut autant être connaître les formules donnant les $DL_n(0)$ de ces fonctions ou de les retrouver rapidement, mais également être capable de les reconnaître pour des petites valeurs de n. Ainsi, on doit être capable rapidement d'écrire : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$.

R En général, on fait des développements limités en ne gardant que 2 ou 3 termes non nuls.

IV Applications des développements limités

IV.1 Calcul d'équivalents et de limites

Par exemple, si on veut déterminer la limite en 0 de : $\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$, on va passer par le calcul d'un équivalent du numérateur et du dénominateur, mais on ne peut pas les

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$\dfrac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$, soit $\sum_{k=1}^{n} x^k+o(x^n)$	Peut s'obtenir par Taylor-Young, ou par la formule $\sum_{k=1}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1-x+x^2+\dots(-1)^n x^n+o(x^n)$, soit $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)$	La même que ci-dessus avec $-x$ à la place de x.

TABLE 15.1 – Les différents développement de $\dfrac{1}{1+x}$.

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$-\ln(1-x)$	$x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dots\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$, soit $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x^k}{k}+o(x^n)$	En intégrant $\dfrac{1}{1-x}$ ou par la formule de Taylor-Young
$\ln(1-x)$	$-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\cdots-\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$, soit $-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x^k}{k}+o(x^n)$	ré-écriture de la ligne précédente
$\ln(1+x)$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$, soit $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{x^k}{k}+o(x^n)$	Idem

TABLE 15.2 – Les différents développement de $\ln(1+x)$.

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}+$ $\dots\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!}+o(x^n)$	Obtenue par la formule de Taylor Young, remarquez en particulier la similitude avec la formule de Newton lorsque α est entier.
$\sqrt{1+x}$	$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$	Exemple d'application, à savoir retrouver rapidement.
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$	Idem.

TABLE 15.3 – Les différents développement de $\ln(1+x)^\alpha$.

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
e^x	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$, soit $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$	Par Taylor Young, puisque e^x est se dérive en elle-même.
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{(-1)^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$, soit $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$	Impaire et obtenu par Taylor Young. Autre méthode, en remplaçant x par ix et $-ix$ dans e^x.
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+o(x^{2n+1})$, soit $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$	Par Taylor-Young, remarquez que l'on a un ordre de plus que la partie régulière, puisque l'on sait que le prochain terme est en x^{2n+2}

TABLE 15.4 – Développement limités de e^x et des fonctions trigonométriques.

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$\tan(x)$	$x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$	En calculant les dérivées successives et en utilisant Taylor-Young. On sait que c'est un ordre 4, puisque la fonction est impaire.
$\arctan(x)$	$x+-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+o(x^6)$	En utilisant un DL de $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, il existe une formule pour l'ordre n
$\arcsin(x)$	$x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3}{40}x^5+o(x^6)$	En utilisant un DL de $\arccos'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, il existe une formule pour l'ordre n
$\arccos(x)$	$\dfrac{\pi}{2}-x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{3}{40}x^5+o(x^6)$	$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

TABLE 15.5 – D'autres développements limités à savoir retrouver.

ajouter.

On fait alors :

$$\begin{aligned} x-\sin x =& x-\left(x-\frac{x^3}{6}+\underset{0}{o}(x^3)\right) \\ =& \frac{x^3}{6}+\underset{0}{o}(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

D'un autre côté, cherchons un développement limité de $\tan(x)$.On a :

$$\begin{aligned} \tan(x)' =& 1+\tan^2(x), \\ \tan(x)^{(2)} =& 2\tan(x)\left(1+\tan^2(x)\right)^2, \\ \tan^{(3)} =& 2\left(1+\tan^2(x)\right)^2+4\tan^2(x)(1+\tan^2(x)) \end{aligned}$$

D'où :

$$\tan(0)=0,\ \tan'(0)=1,\ \tan^{(2)}(0)=0,\ \tan^{(3)}(0)=2$$

et ainsi on obtient le $DL_3(0)$

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\underset{0}{o}(x^3).$$

En composant avec : $e^u \underset{0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)$, comme $\tan(x) \underset{0}{\sim} x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\tan(x)} =& 1+\left(x+\frac{x^3}{3}+\underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}+\underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}+\underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)^3+\underset{0}{o}\left(x^3\right), \\ =& 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\underset{0}{o}\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, on a :

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+\underset{0}{o}\left(x^3\right) \underset{0}{\sim} x \xrightarrow{x\to 0} 0$$

Ainsi, on peut de nouveau faire la substitution dans le développement de l'exponentiel :

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} =& 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+\underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+\underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+\underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)^3+\underset{0}{o}\left(x^3\right), \\ =& 1+x+\frac{1}{2}x^2+\underset{0}{o}\left(x^3\right). \end{aligned}$$

D'où :

$$e^{\sin(x)}-e^{\tan(x)} \underset{0}{=} -\frac{x^3}{2}+o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$$

Au final :

$$\frac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{x-\sin x} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{3}$$

On obtient ainsi la limite.

IV.2 Étude locale d'une fonction

On a vu que si f admet une tangente en a, $\Delta:\ y=a_0+a_1(x-a)$ alors elle admet un DL_1, du type :

$$f(x) \underset{a}{=} a_0+a_1(x-a)+o(x-a)$$

On a vu que la réciproque est vraie. On peut dont déterminer les tangentes en calculant un DL_1. De plus, le terme suivant dans le développement limité donne la position de la courbe par rapport à la tangente. Selon si il est positifs, négatifs, ou si il change de signe au voisinage de a, $\mathscr{C}_f$ sera au dessus, en dessous, ou traversera sa tangente. En effet, si

$$f(x) \underset{a}{=} a_0+a_1(x-a)+a_p(x-a)^p+o(x-a)^p,$$

alors

$$f(x)-(a_0+a_1(x-a)) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

⋆ **Exemple de l'étude en 0 de $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$.**

Cherchons un $DL_2(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$.
Remarquons déjà que cette fonction n'est pas définie en 0.
On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\ln(1+x)} &\underset{0}{=} \frac{x}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)\right)}_{\underset{0}{\sim} x \xrightarrow[x\to 0]{} 0}}
\end{aligned}$$

On pose donc $u(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$, et on utilise le DL usuel : $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\ln(1+x)} &\underset{0}{=} 1 + \left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + \left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) \\
&\underset{0}{=} 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{12} + o(x^2)
\end{aligned}$$

On obtient trois résultats :

- $f(x)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$,
- ce prolongement est dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, f admet pour tangente en 0 la droite : $\Delta :\ y = 1 + \frac{x}{2}$.
- De plus, f est en-dessous de cette tangente puisque le premier terme négligé est ici : $-\frac{x^2}{12} \underset{0}{\sim} f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right)$, qui est positif.

On aurait pu retrouver ces résultats sans développements limités avec beaucoup plus de calculs :

- en calculant la limite en 0, et donc en prolongeant la fonction,
- en calculant $f'(x)$ pour $x \neq 0$,
- puis la limite de la dérivée, *i.e.* $\lim_{x\to 0} f'(x)$,
- enfin, en appliquant le théorème sur la limite de la dérivée. On a alors l'existence de la tangente.
- Puis il faut étudier le signe de la différence pour déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente.

! **Attention piège :** comme on l'a vu, le DL_1 permet de montrer que f est dérivable et de calculer $f'(0)$. Ici, par exemple, on déduit du DL_1 la valeur du prolongement en 0, et la dérivée en 0 qui est $\frac{1}{2}$.

Mais le DL_2 ne permet pas de dire que f est deux fois dérivables en identifiant $f''(0)$ par la formule de Taylor-young. Ici, par exemple, on n'est pas assuré que f est deux fois dérivable en 0 et que $f''(0) = \frac{1}{2}$.

Par contre, si on sait par ailleurs que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$, alors Taylor-Young dit que la fonction f admet un DL et que le DL est donné en fonction des dérivées en 0. Dans le cas où on sait que la fonction est $\mathscr{C}^2$, on peut donc déduire du $DL(2)$ la valeur de $f''(0)$.

✯ Étude en 0 de $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

Autre exemple, calculons un $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.
Pour simplifier on met sur le même dénominateur pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} &\underset{0}{=} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \\
&\underset{0}{=} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)} \\
&\underset{0}{=} \frac{\frac{x}{6} - \frac{x^3}{120} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}
\end{aligned}$$

On fait ensuite le DL de $\dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$ de manière classique :

$$\frac{1}{1 - \underbrace{\frac{x^2}{6} + o(x^3)}_{\underset{0}{\sim} \frac{x^2}{6} \xrightarrow[x \to 0]{} 0}} = \left(1 + \left(\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^2 + o(x^4)\right).$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} &\underset{0}{=} \left(\frac{x}{6} - \frac{x^3}{120} + o(x^3)\right) \times \left(1 + \left(\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^2 + o(x^4)\right) \\
&\underset{0}{=} \left(\frac{x}{6} - \frac{x^3}{120} + o(x^3)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \\
&\underset{0}{=} \frac{x}{6} + \left(-\frac{1}{120} + \frac{1}{36}\right) x^3 + o(x^3) \\
&\underset{0}{=} \frac{x}{6} + \left(\frac{7}{360}\right) x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi :
- la limite $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$,
- et la dérivée du prolongement ainsi obtenu : $f'(0) = \frac{1}{6}$.
- Enfin, on obtient la position par rapport à la tangente en 0 : $\Delta : y = \frac{x}{6}$: la courbe traverse sa tangente en 0.

IV.3 Détermination d'asymptotes

On étudie maintenant une fonction f au voisinage de $+\infty$.

✯ Asymptote et allure des courbes

Définition IV.1 — Asymptote. On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f admet une :
Asymptote horizontale $\Delta :\ y = b$, si $\lim\limits_{+\infty} f = b$,

Asymptote verticale $\Delta: \ x = a$, si $\lim_{a} f = \pm\infty$,

Asymptote oblique $\Delta: \ y = \lambda x + \mu$, si $\lim_{+\infty} f(x) - (\lambda x + \mu) = 0$.

C'est le cas si $f(x) = \lambda x + \mu + \frac{\delta}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, le signe de δ donne alors la position par rapport à l'asymptote.

Il peut y avoir des cas intermédiaires où la fonction n'admet pas d'asymptote :

- Si $\lim \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.
  C'est le cas par exemple si $f(x) = x^2 + \underset{x \to +\infty}{o}(x^2)$. La croissance vers $+\infty$ est alors plus rapide qu'une droite.
- Si $\lim \frac{f(x)}{x} = 0$.
  C'est le cas par exemple, si $f(x) = \ln(x) + \underset{x \to +\infty}{o}(\ln(x))$. Dans ce cas, la croissance est moins rapide qu'une droite.
- Si $\lim \frac{f(x)}{x} = \lambda \neq 0$, mais que $\lim f(x) - \lambda x = +\infty$.
  C'est le cas par exemple, si $f(x) = x + \ln(x) + \underset{x \to +\infty}{o}(\ln(x))$. C'est la direction λx qui est asymptotique, mais la courbe n'admet pas asymptote.

Ces propriétés peuvent être utilisées pour montrer qu'une fonction n'admet pas d'asymptote.

✯ Développements limités d'ordre n en $+\infty$

Définition IV.2 Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, on dit que la fonction f admet un **développement limités** d'ordre n en $+\infty$, (notée $DL_n(+\infty)$) si on peut écrire :

$$f(x) \underset{+\infty}{=} \lambda_0 + \lambda_1 \frac{1}{x} + \lambda_2 \frac{1}{x^2} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

On définit de même les DL en $\pm\infty$.

Les développement limités en $+\infty$, appelés aussi **développement asymptotique** permettent donc d'étudier le comportement d'une fonction au voisinage de $+\infty$, en la comparant à des fonctions *standard*, les polynômes en $\frac{1}{x}$. Le but étant de lever facilement les formes indéterminées pour calculer des limites.

On peut aussi appeler développement asymptotique une écriture de la forme :

$$f(x) \underset{+\infty}{=} Q(x) + P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

avec P et Q des polynômes.

Enfin, pour une suite u_n, un développement asymptotique est une écriture de la forme :

$$u_n \underset{x\infty}{=} Q(n) + P\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

Proposition IV.1 Soit $g : t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$, alors la fonction f admet un $DL_n(+\infty)$ si et seulement si la fonction g admet un $DL_n(0^+)$.

De plus, l'écriture :

$$f(x) \underset{+\infty}{=} \lambda_0 + \lambda_1 \frac{1}{x} + \lambda_2 \frac{1}{x^2} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

est équivalente à :

$$g(t) \underset{0^+}{=} \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n + o(t^n)$$

Démonstration. Ce n'est qu'une réécriture de la définition, en utilisant

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - P\left(\frac{1}{x}\right)\right) x^n = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right) - P(t)}{t^n}$$

La fonction f admet un $DL_n(+\infty)$ si et seulement si la première limite est nulle, tandis que la fonction g admet un $DL_n(0^+)$, si et seulement si la deuxième est nulle. ■

✎ Cette proposition donne un moyen de calcul des développement asymptotiques : on pose $t = \frac{1}{x}$ et on se ramène en 0.

IV.4 Exemples

⋆ **Exemple de** $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

On pose donc $t = \frac{1}{x}$, ou $x = \frac{1}{t}$. et on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{t^2}+1} - \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} \\ &= \sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}} - \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} \\ &= \frac{1}{|t|}\left(\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}\right) \end{aligned}$$

On utilise alors :

$$\sqrt{1+u^2} \underset{0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2).$$

On obtient donc, en remplaçant u par t^2, puis par $-t^2$.

$$\begin{aligned}
f(x) =& \frac{1}{|t|}\left(\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}\right)\\
=& \frac{1}{|t|}\left(1+\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}-\left(1-\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}\right)+\underset{0}{o}\left(t^4\right)\right)\\
=& \frac{1}{|t|}\left(t^2+\underset{0}{o}\left(t^4\right)\right)\\
=& t+\underset{0}{o}\left(t^3\right)\\
=& \frac{1}{x}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

On obtient donc le développement asymptotique :

$$f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

qui signifie donc que la fonction f tends vers 0 en étant positive, à la même vitesse que $\frac{1}{x}$. La courbe $\mathscr{C}_f$ sera alors proche en $+\infty$ de l'hyperbole $\frac{1}{x}$.

$\star$ **Exemple de** $f(x)=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

On cherche : $DL_2(+\infty)$ de $f(x)=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

On commence par écrire f sous forme exponentielle, puis on pose $t=\frac{1}{x}$. On peut déjà remarquer que :

$$\frac{x}{1+x}=\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}=\frac{1}{1+t}$$

$$\begin{aligned}
f(x) =& \left(\frac{x}{1+x}\right)^x\\
=& \exp\left(x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)\\
=& \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{1+t}\right)}{t}\right)\\
=& \exp\left(\frac{-\ln(1+t)}{t}\right)
\end{aligned}$$

On utilise alors le DL de $\ln(1+t)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(\frac{-\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\underset{0}{o}(t^3)\right)}{t}\right)\\
&= \exp\left(-1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{3}+\underset{0}{o}(t^2)\right)\\
&= \exp(-1)\times\exp\left(\underbrace{\frac{t}{2}-\frac{t^2}{3}+\underset{0}{o}(t^2)}_{u(t)\to 0}\right)
\end{aligned}$$

On a alors $u(t)=\frac{t}{2}-\frac{t^2}{3}+\underset{0}{o}(t^2)\underset{0}{\sim}\frac{t}{2}$. Donc en utilisant le DL classique $e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+\underset{0}{o}(u^2)$, on déduit :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp(-1)\times\left[1+\left(\frac{t}{2}-\frac{t^2}{3}+\underset{0}{o}(t^2)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{t^2}{3}\,\underset{0}{o}(t^2)\right)^2+\underset{0}{o}(t^2)\right]\\
&= \exp(-1)\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{4}\right)\right)+\underset{0}{o}(t^2)\\
&= \exp(-1)\left(1+\frac{t}{2}-\frac{5}{24}t^2\right)+\underset{0}{o}(t^2)\\
&= \frac{1}{e}+\frac{t}{2e}-\frac{5t^2}{24e}+\underset{0}{o}(t^2).
\end{aligned}$$

Soit en revenant à la variable x en $+\infty$, le développement asymptotique :

$$f(x)=\frac{1}{e}+\frac{1}{2e}\frac{1}{x}-\frac{5}{24e}\frac{1}{x^2}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ est proche en $+\infty$ de l'hyperbole : $\Delta : y=\frac{1}{e}+\frac{1}{2e}\frac{1}{x}$ en $+\infty$. De plus, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de cette hyperbole.

Développements limités

Pelletier Sylvain — PC, Lycée Descartes

✯ Calcul de développements limités

Exercice 1 Déterminer le $DL_3(0)$ des fonctions :

$$x \mapsto \frac{\cos x}{1-x} \qquad x \mapsto e^x \frac{\sin x}{x} \qquad x \mapsto \frac{1}{e^x + \cos x} \qquad x \mapsto \tan x$$

Correction : cours.

Exercice 2 Déterminer le $DL_n(0)$ des fonctions :

$$\text{ch} : \quad x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{sh} : \quad x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Correction : cours.

Exercice 3 Calculer les développements limités suivants :

$$DL_2(0) : \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} \qquad DL_2(0) : \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \qquad DL_3(0) : \frac{\sin x - x\cos x}{1+x}$$

$$DL_3(0) : e^{\arcsin x} \qquad DL_2(1) : \ e^{\sqrt{x}} \qquad DL_2(1) : \ \frac{1}{x} \qquad DL_2(\frac{\pi}{4}) : \ \tan x \qquad DL_2(1) : \ \ln(1+\sqrt{x})$$

Correction : cours.

Exercice 4 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - \arctan x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\ln(\cos x)} \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

Correction : cours.

Exercice 5 Déterminer les réels a et b tels que les fonctions suivantes soient des infiniments petits d'ordre le plus élevé possible, *i.e.* des $o(x^n)$, avec n le plus grand possible.

$$x \mapsto x\frac{1-ax^2}{1+bx^2} - \sin x \qquad x \mapsto \frac{1}{1+ax+bx^2} - e^{-x}$$

Correction : Il faut faire le DL de $x \mapsto x\frac{1-ax^2}{1+bx^2} - \sin x$ en considérant a et b comme des paramètres. On souhaite alors annuler le maximum de termes. On obtient un système non linéaire que l'on peut résoudre.

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + \frac{n}{2}}\right)$.

1. Vérifier que $u_n = \sin\left(2\pi\left(\sqrt{n^2 + \frac{n}{2}} - n\right)\right)$.
2. À l'aide d'un développement limité, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Correction : cours.

Exercice 7 On pose :

$$G(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

1. Écrire un $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.
2. En déduire un $DL_5(0)$ de G.
3. On pose :

$$f : \quad x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = G(x^2) - G(x)$$

Calculer un $DL_5(0)$ de f, en déduire $f^{(5)}(0)$.

Correction :

1. On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = \left(1+t^4\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{8}t^8 + o(t^8)$$

2. Par intégration :

$$G(x) = G(0) + x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{72}x^9 + o(x^9)$$

3. On a par composée $G(x^2) = x^2 + o(x^9)$ et donc :

$$f(x) = -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{3}{72}x^9 + o(x^9)$$

4. Comme f est $\mathscr{C}^\infty$, son DL est donné par Taylor-Young. Par unicité du DL, on peut donc identifier les valeurs des dérivées successives en 0.

Exercice 8 Déterminer un équivalent simple de :

$$f(x) = 1 - \frac{(\sin x)^x}{x^x} \text{ en } 0 \qquad \text{et} \qquad u_n = 1 - \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} \text{ en } +\infty$$

⋆ Étude de fonctions et asymptotes

Exercice 9 Étudier la fonction :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x}$$

En précisant, à l'aide d'un développement limité, le comportement asymptotique de f en $\pm\infty$.

Correction : cours

Exercice 10 Préciser l'existence d'asymptotes et la position de la courbe par rapport à celles-ci pour les fonctions :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^4+x^6}}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 \arctan\left(\frac{3x-1}{3(x^2+x+1)}\right)$$

Correction : cours

✯ DL d'une fonction implicite

Exercice 11 **[Mines]** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \neq 0,\ f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$$

On suppose f et f^{-1} de classe $\mathscr{C}^5$.
Donner un développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 5 de f et f^{-1}.

Correction : Pour le DL de f c'est du cours. Pour celui de f^{-1}, Taylor-Young assure son existence. On écrit ensuite :

$$f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + o(x^5).$$

On a $f(0) = 0$, donc $f^{(-1)}(0) = 0$ donc $a = 0$. Ensuite, on peut utiliser la dérivée de l'application réciproque :

$$b = \left(f^{(-1)}\right)'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)}.$$

On calcule donc $f'(0)$ pour obtenir b.

Ensuite, il faut calculer le DL de $f\left(f^{-1}(x)\right)$ ou celui de $f^{-1}(f(x))$ comme une composée. On identifie alors par unicité du DL avec x et on obtient un système que doit vérifier c, d, e, f.

On peut aussi diminuer les calculs, puisque f est impaire f^{-1} est aussi impaire.

Exercice 12 **[Centrale]** Soient $n \in \mathbb{N}$ fixé et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{x^k}{k}$$

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Établir : $f(x) \underset{x\to 0}{=} -\ln(1-x) + o(x^{2n+1})$.
3. Former le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ et le $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de f^{-1} (réciproque de f).

Fonctions réelle à valeurs réelles ou complexes

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Savoir-faire :

- Déterminer l'ensemble de définition, continuité et dérivabilité d'une fonction en utilisant la composition. Exemple de $x \mapsto \frac{1}{\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}$.
- Tracer approximativement l'allure d'une courbe représentative d'une fonction. Exemples : $x \mapsto xe^x$, $x \mapsto x^n + \ln(x)$.
- À partir du tracé de la courbe représentative de la fonction f, tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto f(x)+a$, $\mapsto f(x+a)$, $\mapsto f(a-x)$, $x \mapsto f(ax)$, $\mapsto af(x)$.

⋆ Généralités

Définition IV.3 — Fonction réelle de la variable réelle. Une FONCTION RÉELLE f DE LA VARIABLE RÉELLE permet d'associer à tout élément x d'une partie non vide de $\mathbb{R}$ un unique réel noté alors $f(x)$.

De même, une fonction de la variable réelle à valeur complexe est un procédé qui permettent d'associer à tout élément x d'une partie non vide de $\mathbb{R}$ un unique complexe.

L'ensemble des x tels que $f(x)$ est défini s'appelle domaine de définition noté $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

Notation IV.1. *Si $\mathscr{D}$ désigne ce domaine, on a alors une application :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

*Si $y = f(x)$, alors on dit que y est **l'image de** x **par** f et que x est **un antécédent de** y **par** f*

(R) Dans de nombreux exercices, on dispose d'une expression $f(x)$ qui dépends donc de x et on commence par déterminer le plus grand ensemble sur lequel la fonction f est définie.

■ **Exemple IV.1** Les fonctions polynomiales sont les fonctions de la formes :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{avec } (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ fixés.}$$

■

(P) En python, une fonction s'écrit avec la syntaxe suivante :

```python
def f(x) :
    """
    entrée: x = type = interprétation
    sortie: y = type = interprétation
    """
    ...
    return(y)
```

Le domaine de définition est indiqué dans l'entête sous forme de commentaire.

⋆ Somme, produit et composée

Sur les fonctions réelles de la variables réelles, on a trois opérations : la somme, le produit et la composée

Proposition IV.2 Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, on définit alors la **somme** et le **produit** :

$$f+g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad fg : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array} \right.$$

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, vérifiant $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \in \mathscr{E}$. On peut alors définir la **composée** $g \circ f$ par :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

En particulier, si $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \neq 0$, on peut définir **l'inverse** de f par :

$$\frac{1}{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array} \right.$$

On admet provisoirement le résultat suivant :

Proposition IV.3 La somme, le produit de fonction continue (resp. dérivable) sur $\mathscr{D}$ est continue (resp. dérivable) sur $\mathscr{D}$.

La composée d'une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ et d'une fonction $g : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ est continue (resp. dérivable) sur $\mathscr{D}$ dès que f et g sont continues (resp. dérivable) sur $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$.

En particulier, l'inverse d'une fonction continue (resp. dérivable) qui ne s'annule pas est continue (resp. dérivable).

Pour dériver une composée de fonction dérivable, on utilise le résultat suivant :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

R Ce résultat est aussi valable avec $\mathscr{C}^\infty$

⋆ Exemple de recherche du domaine de définition

Déterminer le plus grand ensemble sur lequel la fonction f est définie n'est pas toujours facile. En cas de difficulté, il faut détailler le processus de construction de la fonction.

Cela servira à justifier la continuité et la dérivabilité ainsi qu'à calculer la dérivée. Il faut absolument éviter les rédactions imprécises comme : « *la fonction f est continue comme somme, produit et composée de fonctions usuelles continues* ».

■ Exemple IV.2 On va déterminer le domaine de définition de la fonction :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{\ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)}$$

Pour donner l'ensemble $\mathscr{D}_f$, il faut l'écrire comme une composée. Bien sûr cela servira à prouver que la fonction est continue, dérivable, etc.

On a pour la première partie :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1+x^2 & & \\ & & y & \longmapsto & \sqrt{y} \\ x & & \longmapsto & & \sqrt{1+x^2} \end{array}$$

ce qui montre que $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ est bien définie, dérivable, etc. sur $\mathbb{R}$.

R Pour une composition, on « décale » les fonctions pour montrer le processus de composition. On précise bien les ensembles de départs et d'arrivée. Pour une somme et un produit, il faut au contraire les « aligner » en utilisant le même ensemble de définition.

! Pour la dérivabilité il y a un piège ici : la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ n'est pas dérivable en 0.

Pour composer avec le ln, on va s'intéresser au signe de $\sqrt{1+x^2} - x$ en fonction de x.

Plus précisément, on cherche l'ensemble des x, tels que $\sqrt{1+x^2} - x > 0$. On peut utiliser l'expression conjuguée, ou simplement par majoration :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ & 1+x^2 > x^2 \\ & \sqrt{1+x^2} > |x| \\ & -\sqrt{1+x^2} < x < +\sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

en particulier $0 < \sqrt{1+x^2} - x$.

On dispose donc de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2}-x \end{array}$$

On peut alors faire la composition :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{*+} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2}-x & & \\ & & y & \longmapsto & \ln(y) \\ x & & \longmapsto & & \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \end{array}$$

La fonction : $x \longmapsto \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ est alors bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
Il faut préciser l'ensemble d'arrivée pour pouvoir composer par $t \longmapsto \frac{1}{t}$.
Cherchons $x \in \mathbb{R}$, tel que $\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = 0$ (pour un tel x, $f(x)$ ne serait pas défini). On a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = 0 &\iff \sqrt{1+x^2}-x = 1 \\ &\iff \sqrt{1+x^2} = 1+x \\ &\iff 1+x^2 = 1+2x+x^2 \text{ et } x > -1 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \neq 0$.
On peut donc restreindre la fonction précédente, pour écrire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longmapsto & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \end{array}$$

Ce qui permet finalement de composer :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) & & \\ & & t & \longmapsto & \frac{1}{t} \\ x & & \longmapsto & & \frac{1}{\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)} \end{array}$$

Ainsi, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

■

✯ Monotonie

Déjà un rappel sur la dérivation :

Proposition IV.4 Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable avec I un intervalle alors :

R Ne pas oublier de vérifier et préciser que I est un intervalle.

On a aussi d'autres moyens rapide pour montrer qu'une fonction est croissante et/ou décroissante.

✯ Tableau de variations

✯ Courbe représentative

Définition IV.4 Le graphe d'une fonction f réelle est l'ensemble :

$$\mathscr{C}_f = \left\{ (x, f(x)) \middle| x \in \mathscr{D} \right\}$$

L'ensemble des points du plan correspondant est la représentation graphique de f, on parle aussi de la courbe représentative de f ou de la courbe d'équation $y = f(x)$.

Étant donné une fonction $f : x \mapsto f(x)$, il faut savoir tracer rapidement **l'allure** de la courbe $\mathscr{C}_f$. Il ne faut **jamais** faire un tableau de valeurs à la calculatrice et relier les points. À la place, il faut résumer dans le graphique toutes les informations (limites, tangentes, etc.) obtenues sur la fonction.

⋆ Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Proposition IV.5 Soit f une fonction de $\mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Pour résoudre l'équation $f(x) = \lambda$, on regarde l'intersection de la droite horizontale $\Delta : y = \lambda$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$. Les solutions sont les abscisse des points d'intersection (si il y en a).
- Pour résoudre l'équation $f(x) \leqslant \lambda$, on regarde la partie du plan situé au

⋆ Tracé d'une courbe en Python

Pour tracer la courbe de la fonction f, on utilise la fonction `plot`. La syntaxe est :

```
plot(listeX, listeY) ou plot(listeX,listeY, [options] )
```

Les entrées sont deux listes (ou des `array` unidimensionnels) de même taille :
- la liste des ordonnées `listeX` : $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$,
- la liste des abscisses `listeY` : $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$

Les n points

$$A_0 = (x_0, y_0),\ A_1 = (x_1, y_1),\ \dots,\ A_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1})$$

sont alors reliés par des segments de droites. Plus précisément, un objet graphique est créé, qui peut être affiché avec la commande `show()`.

Il faut donc systématiquement passer par deux listes (ou `array` unidimensionnels) :
- l'un contiendra une liste des abscisses $[x_0, \dots, x_{n-1}]$,
- l'autre la liste des ordonnées $[f(x_1), \dots, f(x_n)]$.

Python dessinera alors les segments de droites qui relient les n points de coordonnées $\Big((x_i, f(x_i)\Big)$. Si il y a suffisamment de points, la courbe ressemblera à une courbe lisse et non à des segments de droites.

R Python fait ainsi ce que vous ne devez jamais faire : relier des points obtenus par un tableau de valeurs.

Exemple IV.3 On veut tracer les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sur$[0, 2\pi]$. On estime que 100 points vont être suffisant pour avoir des courbes lisses

```
#intialisation
listeX = zeros(100) # liste des abscisse
listeYc = zeros(100) # liste des ordonnées cos
listeYs = zeros(100) # liste des ordonnées cos
#remplissage:
for k in range(100):
    listeX[k] = k*2*pi/99
    listeYc[k] = cos(k*2*pi/99)
    listeYs[k] = sin(k*2*pi/99)
plot(listeX, listeYc)
plot(listeX, listeYs)
show()
```

■

Le problème qui arrive alors naturellement est de créer rapidement et facilement la liste des abscisses $[x_0, \dots, x_{n-1}]$, et des ordonnées. $[f(x_0), \dots, f(x_{n-1})]$. Ces listes peuvent être des listes de réels ou des `array` unidimensionnels (en fait n'importe quelle structure que Python peut convertir en `array` unidimensionnel).

La méthode la plus simple est d'utiliser :
- les fonctions qui créent des listes de points équirépartis pour la liste des abscisses,
- les opérations sur les `array` pour calculer la liste des ordonnées.

Pour les abscisses, on dispose de la fonction `linspace(xmin,xmax,nbrPoints)` (« *linéairement espacée* ») qui crée un `array` de taille `nbrPoints`, dont le premier élément est `xmin` et le dernier `xmax`.

On contrôle ainsi le nombre de points de la discrétisation de l'intervalle $[\mathtt{xmin}, \mathtt{xmax}]$, le pas est : $\dfrac{\mathtt{xmax} - \mathtt{xmin}}{\mathtt{nbrPoints} - 1}$.

Pour les opérations sur les `array`, on rappelle que si `x` et `y` sont des `array` et `alpha` est un scalaire, on a :

- `x+y` est obtenu en ajoutant terme à terme les éléments de `x` et `y`,
- `x+alpha` est obtenu en ajoutant `alpha` à tous les termes,
- `alpha*x` est obtenu en mutlipliant tous les termes par `alpha`,
- `x*y` est obtenu en mutlipliant terme à terme les éléments de `x` et `y`,
- `cos(x)` est obtenu en appliquant la fonction cosinus à tous les éléments de `x`. C'est le comportement pour toutes les fonctions mathématiques (fonctions universelles présentes dans la bibliothèque `numpy`). **Attention** : pour appliquer une fonction qui n'est pas dans la bibliothèque, il est meilleur de revenir à la boucle `for`.
- `x**n` est obtenu en mettant à la puissance n-ième tous les éléments de x.
- `1/x` est obtenu en prenant l'inverse de tous les éléments de x.

Ces fonctionnalités permettent de calculer la liste des images très facilement à partir de la liste des indices.
Par exemple : si on doit dessiner la courbe représentative de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{x^3+3x+2}{x^2+1} + x\sin(x) + e^x.$$

sur l'intervalle $[-10, 10]$, on écrit simplement :

```
x = linspace(-10, 10, 100)
y =  (x**3+3*x+2) / (x**2+1)  + x*sin(x) + exp(x)
plot(x,y)
show()
```

Enfin, il est toujours mieux de fixer les axes à l'avance avec les commandes :

```
axis([xmin,xmax,ymin,ymax]) # fixe la taille de la fenêtre
axis('equal') # oblige à utiliser un repère orthonormé
```

On peut aussi utiliser la commande `grid()` qui permet d'afficher une grille.

✯ **Parité, imparité, périodicité**
✯ **Domaine d'étude d'une fonction réelle de la variable réelle**
✯ **Tracé d'allure de courbe**

Pour cela :

- On considère quelques points particuliers dont on détermine l'image par f. Généralement ces points sont ceux inscrits dans le tableau de variations.
- Si la fonction est dérivable en ces points on trace la tangente (sous la forme de flèche). On rappelle que la tangente au point $(a, f(a))$ à $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$\Delta : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

- On utilise l'allure des courbes des fonctions usuelles (ln, exp, etc.)
- On utilise toutes les propriétés de symétries (parité / imparité, etc.)
- On trace les asymptotes verticales $x = x_0$ (c'est-à-dire les points x_0 tel que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$) et horizontales (c'est-à-dire les points x_0 tel que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$)

✯ **Exemple de tracé de courbe**
✯ **Opération et modification du graphe**
✯ **Bijectivité, réciproque**
✯ **Fonctions majorées, minorées, bornées**

16 — Polynômes

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

I.1 Les polynômes comme des suites à support fini

Définition I.1 — Suites à support fini. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est à support fini si elle est nulle à partir d'un certain rang.

On appelle polynôme à un indéterminée à coefficient dans $\mathbb{K}$ une suite de $\mathbb{K}$ à support finie.

Cela est équivalent à dire que $\left\{n \in \mathbb{N} \middle| a_n \neq 0\right\}$ est de cardinal fini. On dit aussi qu'une suite est à support fini est **presque nulle**.

Définition I.2 Soit P un polynôme. Les valeurs de la suite P sont les coefficients du polynôme P.

Pour $n \in \mathbb{N}$, a_n est le **coefficient d'ordre** n de P.

Notation I.1. *On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
On utilise souvent la lettre P ou $P(X)$ pour désigner un polynôme ie une suite à support finie et (a_n) pour désigner les coefficients, ie les valeurs de la suite.

En s'avançant un peu dans la suite, l'idée derrière cette définition est que ce qui caractérise un polynôme c'est la suite de ses coefficients (qui s'arrêtent à partir d'un certain temps). Ainsi, le polynôme $P = 1 + X^2 + 2X^3$ sera identifié avec la suite des coefficients $(1, 0, 1, 2, 0, \dots)$. On peut aussi l'identifier avec $P = 1 + X^2 + 2X^3 + 0X^4$.

L'un des avantages de cette représentation est que cela permet de parler du polynôme indépendamment de la fonction. On pourra ainsi appliquer le polynôme à un réel, à un complexe, ou à une matrice carrée.

Un autre avantage est de pouvoir parler de dérivation formelle d'un polynôme complexe :

$$\begin{aligned} \text{si } P &= (1+i)X^3 + 2e^{i\frac{\pi}{4}}X^2 + 3X + (2+i) \\ \text{alors } P' &= 3(1+i)X^2 + 4e^{i\frac{\pi}{4}}X + 3. \end{aligned}$$

On a ainsi dériver formellement une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sans pouvoir parler de limite du taux d'accroissement.

On parle de **polynôme formel**, par opposition à la fonction polynôme. On verra que l'on peut identifier $\mathbb{R}[X]$ et l'ensemble des fonctions de la forme : $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Proposition I.1 Deux polynôme sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Démonstration. C'est évident puisque c'est l'égalité de deux suites. ■

✎ La suite nulle (tous les termes sont nuls) est dans $\mathbb{K}[X]$, c'est **le polynôme nul**. Un scalaire (ie un élément de $\mathbb{K}$) peut être identifié à un élément de $\mathbb{K}[X]$, c'est un **polynôme constant**. On note X et on appelle **indéterminée** la suite support fini : $(0,1,0,0\dots)$. On appelle **monôme** un polynôme avec un seul coefficient non nul, ie de la forme $(0,0,\dots,a_k,0,\dots)$.

✎ Dans $\mathbb{K}[X]$, on a les opérations suivantes :

Multiplication externe Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = (a_n) \in \mathbb{K}[X]$ alors on pose :

$$\lambda P \text{ est la suite définie par } \forall n \in \mathbb{N}, \left(\lambda P\right)_n = \lambda a_n$$

La suite λP est à support fini, c'est donc un polynôme.

Addition interne Si $P = (a_n)$ et $Q = (b_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$, alors on pose :

$$P + Q \text{ est la suite définie par } \forall n \in \mathbb{N}, \left(P+Q\right)_n = a_n + b_n.$$

La suite $a+b$ est à support fini, c'est donc un polynôme.

Ainsi, $\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

⋆ Lien entre $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ (à coefficients réels) peut être vu comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ (à coefficients complexes donc). Dans ce sens, on peut écrire : $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Par contre, les propriétés d'un polynôme réel peuvent être très différentes si on le regarde comme un polynôme à coefficients complexes ou si on le regarde comme un polynôme à coefficients réels. Par exemple X^2+1 vu comme un polynôme réel, n'admet pas de racines, et est irréductible, par contre, vu comme un polynôme complexe, $X^2+1 = (X-i)(X+i)$, est réductible et a deux racines distinctes.

I.2 Produit de deux polynômes

Définition I.3 — Produit de polynômes. Soit $P = (a_n)$ et $Q = (b_n)$ deux polynômes.

On définit le produit des deux polynômes $P = (a_n)$ et $Q = (b_n)$ comme la suite $PQ = (c_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j$$

La suite PQ est un polynôme (ie la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à support fini).

Démonstration. Considérons n_0 tel que $\forall k \geqslant n_0$, $a_k = 0$ et $b_k = 0$ (il faut prendre le plus grand des rangs où les deux suites sont nulles).

Soit $n \geqslant 2n_0$, montrons que c_n est nul.

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n_0} a_k b_{n-k} + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Pour la première somme, on a :

$$\begin{aligned} \forall k \leqslant n_0, \qquad & n-k \geqslant n_0 & \text{car } n \geqslant 2n_0 \\ & \text{donc } b_{n-k} = 0 & \end{aligned}$$

Par suite, tous les termes de la première somme sont nuls, et donc cette somme est nulle.

Pour la deuxième somme, on a :

$$\forall k \geqslant (n_0+1),\ a_k = 0$$

Ainsi, tous les termes de la deuxième somme sont nuls.

Au final, on a :

$$\forall n \geqslant 2n_0,\ c_n = 0.$$

La suite (c_n) est donc à support fini, c'est un polynôme. ∎

Proposition I.2 Soit P, Q et R trois polynômes, on a alors :

$$\begin{aligned} PQ &= QP & &\text{le produit est commutatif} \\ (PQ)R &= P(QR) & &\text{le produit est associatif} \\ (P+Q)R &= PR + QR & &\text{le produit est distributif} \end{aligned}$$

Démonstration. Le polynôme PQ a pour coefficient d'ordre n :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \qquad \text{après changement de variable.}$$

On voit donc que PQ et QP ont les mêmes coefficients.

Le polynôme $(PQ)R$ a pour coefficient d'ordre n :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} t_k c_{n-k} && \text{avec } (t_k) \text{ les coefficients de } PQ\\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) c_{n-k} && \text{en remplaçant par la définition des coefficients de } PQ\\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} c_{n-k} &&\\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_j b_{k-j} c_{n-k} && \text{inversion somme triangle}\\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=j}^{n} b_{k-j} c_{n-k} \right) &&\\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k c_{n-j-k} \right) && \text{en posant } k \leftarrow k-j\\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j u_{n-j} && \text{avec } (u_k) \text{ les coefficients de } QR.
\end{aligned}$$

On voit donc que $(PQ)R$ et $P(QR)$ ont les mêmes coefficients.

Le dernier point est évident. ■

I.3 Écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$

L'indéterminée X est la suite $X = (0,1,0,0,0\dots,)$, on a alors :

$$\begin{aligned}
X^2 &= X \times X = (0,0,1,0,0\dots,)\\
X^3 &= (0,0,0,1,0,0,0,\dots,) \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

On ajoute la convention $X^0 = 1 = (1,0,0,0,\dots,)$, pour avoir pour $k \in \mathbb{N}$, X^k est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(X^k\right)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, si $P = (a_n)$ est un polynôme avec $\forall k > n$, $a_k = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
P &= (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots)\\
&= a_0(1,0,0,\dots) + a_1(0,1,0,0,\dots) + a_2(0,0,1,0,\dots)\\
&\qquad + \dots + a_n(0,0,\dots,1)\\
&= a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \dots a_nX^n\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ au sens de l'égalité de suites.}
\end{aligned}$$

Si on ne connaît pas la valeur de n_0, on écrit simplement :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k.$$

! La somme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ est en fait une somme sur un nombre **fini** de termes par définition d'un polynôme comme une suite à support fini.

La notation X désigne une suite particulière, on ne peut donc pas la quantifier. On n'écrira donc jamais $\forall X \in \mathbb{K}$, ni $\exists X \in \mathbb{K}$ ni encore « Soit $X \in \mathbb{K}$ ».

De même, ne pas confondre la relation $P(X) = 0$, qui signifie que le polynôme P est nul, et l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{K}$.

Ainsi, on peut écrire, un polynôme est une expression de la forme :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}, \text{ et } (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n.$$

ou encore :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \qquad \text{avec } (a_k) \text{ une suite à support fini.}$$

On a alors l'égalité des coefficients qui s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \iff \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = b_k$$

$$\text{en particulier} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = 0$$

Les monômes sont les polynômes de la forme : $a_k X^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Un polynôme est une combinaison linéaire de monômes.

Les propriétés de l'addition interne et du produit externe s'écrivent :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k$$

$$\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k \qquad \text{avec } c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}.$$

■ **Exemple I.1** Le binôme de Newton permets d'affirmer que $(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$ est un polynôme. ■

I.4 Évaluation, fonction polynomiale

Définition I.4 Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On pose alors

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \alpha^k \qquad \text{c'est un élément de } \mathbb{K}.$$

Cette expression a bien un sens puisqu'il s'agit d'une somme finie.

On dit que l'on évalue le polynôme P en α, ou que l'on substitue α à X.

La fonction polynomiale associée à P est :

$$\tilde{P} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ \alpha & \longmapsto & P(\alpha) \end{array} \right.$$

R On confond parfois le polynôme et la fonction polynomiale. On verra que la fonction polynomiale détermine le polynôme.

Comme on a : $0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$, on a $P(0) = a_0$ et $P(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ (somme des coefficients). Enfin,

$$P(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k \text{ somme alternée des coefficients.}$$

■ **Exemple I.2** Pour bien comprendre ce qu'est un polynôme, montrons qu'il existe des polynômes P_0, P_1 et P_2 tels que

$$\forall i \in [\![1,2]\!],\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ P_i(\cos\theta) = \cos(i\theta).$$

Pour P_0, cela s'écrit : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_0(\cos(\theta)) = 1$. Ainsi, le polynôme qui convient est $P_0 = 1$, *i.e.* le polynôme constant.

Pour P_1, cela s'écrit : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$. Ainsi, un polynôme qui convient est $P_1 = X$.

Pour P_1, cela s'écrit :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} P_1(\cos(\theta)) &= \cos(2\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, un polynôme qui convient est $P_1 = 2X^2 - 1$. ■

I.5 Degré d'un polynôme

Si P est un polynôme non nul, alors l'ensemble $\left\{ k \in \mathbb{N} \middle| a_k \neq 0 \right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un maximum.

Définition I.5 — degré d'un polynôme. On appelle degré d'un polynôme non nul P, l'indice maximal d'un coefficient non nul :

$$d(P) = \max \left\{ k \in \mathbb{N} \middle| a_k \neq 0 \right\}$$

Par convention, on pose que le degré du polynôme nul est $-\infty$

Autrement dit si n est le degré de P, alors $a_n \neq 0$ et $\forall k > n,\ a_k = 0$, *i.e.* P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ sans termes nuls à la fin.

Notation I.2. *On le note* $d(P)$ *ou parfois* $\deg(P)$.
On note $\mathbb{K}_n[X]$*, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à* n.

Définition I.6 Si $d(P) = n$,

- on appelle terme dominant de P, son monôme de plus haut degré, *i.e.* $a_n x^n$,
- on appelle coefficient dominant de P, le coefficient de son terme dominant, *i.e.* a_n,
- on appelle coefficient constant ou terme constant le coefficient a_0,
- on appelle polynôme unitaire ou normalisé un polynôme dont le coefficient dominant est égal à 1.

R Écrire $\deg(P) \in \mathbb{N}$ revient à écrire que P n'est pas le polynôme nul, écrire $\deg(P) \geqslant 1$ revient à dire que P n'est pas constant.

Si $d(P) = n$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors on accepte l'écriture :

$$P = a_n X^n + \underbrace{\cdots}_{\deg < n}$$

qui consiste à n'écrire que le terme dominant (on dit que l'on **étudie les termes dominants** ou que l'on **néglige les termes de degré inférieurs**).

On a de manière évidente :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \qquad d(\lambda P) = d(P)$$
$$\text{et } d(0 \times P) = -\infty.$$

Proposition I.3 Soit P et Q deux polynômes.

Le degré de la somme est au plus le maximum des degré :

$$\begin{aligned} &\text{dans le cas général,} && d(P+Q) \leqslant \max(d(P), d(Q)) \\ &\text{si } d(P) \neq d(Q) \text{ alors} && d(P+Q) = \max(d(P), d(Q)) \end{aligned}$$

Le degré du produit est la somme des degré :

$$d(PQ) = d(P) + d(Q).$$

En particulier, si $k \in \mathbb{N}$, on a $d\left(P^k\right) = k d(P)$.

Démonstration. Si P ou Q est nuls les propositions sont évidentes avec la convention : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\infty < n$ et $-\infty + n = -\infty$.

Notons $n = d(P)$ et $m = d(Q)$, et supposons $n > m$, on a alors :

$$\begin{aligned} P+Q = & a_n X^n + \underbrace{\dots}_{d<n} + b_m X^m + \underbrace{\dots}_{d<m} \\ = & a_n X^n + \underbrace{\dots}_{d<n} \end{aligned}$$

ainsi, $d(P+Q) = n$ dans ce cas.

Ainsi, si les degrés sont différents, le degré de la somme est le maximum des degré. Si les degré sont identiques, on peut avoir **une perte de degré** (si $a_n + b_n = 0$) : les termes de plus haut degrés s'annulent. L'exemple le plus parlant est que si on calcule $P - P$ on obtient le polynôme nul.

On reprend les mêmes notations, et on calcule PQ :

$$\begin{aligned} PQ = & \left(a_n X^n + \underbrace{\dots}_{d<n} \right) \left(b_m X^m + \underbrace{\dots}_{d<m} \right) \\ = & a_n b_m X^{n+m} + \underbrace{\dots}_{d<(n+m)} \end{aligned}$$

ainsi, $d(PQ) = n + m$.

■

En conséquence : si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors $\alpha P + \beta Q$ est un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$.
Ainsi, $K_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Corollaire I.4 Soit P et Q deux polynômes tels que le produit PQ soit égal au polynôme nul, alors P ou Q est le polynôme nul.

On dit que $\mathbb{K}[X]$ est **intègre.**

Démonstration. On a : $PQ = 0$, donc en utilisant le degré : $d(P) + d(Q) = -\infty$, donc forcément $d(P)$ ou $d(Q)$ doit être égal à $-\infty$, ie $P = 0$ ou $Q = 0$. ■

Corollaire I.5 En particulier, un polynôme non nul est **simplifiable pour le produit**, c'est-à-dire :

$$\text{si } A \neq 0, \qquad AB = AC \Rightarrow B = C.$$

Autre conséquence, les seuls polynômes $A \in \mathbb{K}[X]$ tel qu'il existe $B \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $AB = 1$ sont les polynômes constants non nuls.

I.6 Retour sur la formule du produit

Voici plusieurs moyens de comprendre la notation : $c_l = \sum_{i+j=l} a_i b_j$.

Déjà, il s'agit *a priori* d'une somme double : c'est la somme sur

$$\left\{(i,j)\in [\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]\,\middle|\, i+j=l\right\}$$

l'ensemble des couples vérifiant une propriété. En fait, si on représente les couples (i,j) dans un tableau, l'ensemble des couples (i,j) vérifiant la propriété correspond à une diagonale.

Voici un exemple pour $n=4$ et $m=3$: on représente les couple (i,j) et la somme $i+j$:

j \ i	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6
3	3	4	5	6	7

Ce tableau montre que pour $l\in[\![0,7]\!]$, le terme c_l est obtenu en faisant la somme sur tous les termes du tableau qui contiennent l, cela correspond donc à une des diagonales en couleur. Ainsi, on voit qu'il ne s'agit pas d'une somme double sur un tableau, mais d'une somme simple le long d'une diagonale.

On a donc en suivant le schéma ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+a_4X^4)(b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3)\\
=&a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)X\\
&+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)X^2\\
&+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_1)X^3\\
&+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0)X^4\\
&+(a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1)X^5\\
&+(a_3b_3+a_4b_2)X^6+a_3b_4X^7
\end{aligned}$$

Autre manière de voir : si $i\in[\![0,n]\!]$, et $l\in[\![0,n+m]\!]$ il y a un et un seul $j\in[\![0,m]\!]$ tel que $i+j=l$, c'est de manière évidente $j=l-i$. On peut donc écrire :

$$c_l=\sum_{i=\max(0,l-m)}^{\min(l,n)} a_ib_{l-i}=\sum_{i=0}^{l} a_ib_{l-i}$$

Les deux dernières somme se comprennent avec la convention qu'un coefficient qui n'existe pas est nul (ce qui est cohérent avec la définition des polynômes comme des suites à support fini).

Ainsi, si $i>n$, $a_i=0$, et si $i>l$, $b_{l-i}=0$.

Avec cette convention, on peut écrire indifféremment la somme de 0 à l ou de 0 à n (en fait dans tous les cas, cette somme s'arrête à $\min(l,n)$).

De même, on a la formule :

$$c_l=\sum_{j=\max(0,l-n)}^{\min(l,m)} a_{l-j}b_j=\sum_{j=0}^{l} a_{l-j}b_j.$$

Enfin, comme peut le vérifier sur l'exemple ci-dessus, certaines couleur ne correspondent qu'à une case :

- si $l=0$, le seul couple (i,j) qui correspond est $(i,j)=(0,0)$, ce qui signifie que le terme constant de PQ est le produit des termes constants de P et de Q. Autrement dit :

$$c_0 = a_0 b_0.$$

- si $l=n+m$, le seul couple (i,j) qui correspond est $(i,j)=(n,m)$, ce qui signifie que le coefficient dominant de PQ est le produit des coefficients dominants de P et de Q. Autrement dit :

$$c_{n+m} = a_n b_m.$$

Au final, la formule à retenir est :

$$c_l = \sum_{i+j=l} a_i b_j = \sum_{i=0}^{l} a_i b_{l-i} = \sum_{j=0}^{l} a_{l-j} b_j.$$

Pour la retrouver, il suffit de développer le produit :

$$PQ = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j X^j\right) = \left(\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant m}} a_i b_j X^{i+j}\right)$$

Cette écriture signifie simplement que le produit PQ se fait en choisissant un terme $a_k X^k$ de P et en le multipliant par un terme $b_j X^j$ de Q, on ajoute ainsi $n\times m$ termes du type $a_i b_j X^{i+j}$, pour obtenir la somme indiqué.

Pour calculer cette somme double, on regroupe les termes selon la valeur de $l=i+j$, qui peut aller de 0 à $n+m$. Cela revient dans le tableau précédent, à regrouper le tableau en parties de même couleur.

De manière théorique cela se montre avec la formule :

$$[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!] = \bigcup_{l=0}^{n+m} \left\{(i,j)\middle| i+j=l\right\} \text{ union disjointe,}$$

qui signifie que l'on peut créer une partition de l'ensemble des couples (i,j) en sous-ensemble tel que $i+j=l$.

On a donc :

$$\left(\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant m}} a_i b_j X^{i+j}\right) = \sum_{l=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=l} a_i b_j\right) X^l$$

Proposition I.6 En conséquence immédiate, on a que :

$$P^2 = \sum_{k=0}^{2n} c_l X^l, \qquad \text{avec } c_l = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{l-i}.$$

I.7 Composition dans $\mathbb{K}[X]$

Définition I.7 — Composition de polynôme. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et Q un autre polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On pose alors $P \circ Q$ comme le polynôme :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$$

Cette expression est bien définie car il s'agit d'une somme finie.

Notation I.3. *On peut noter $P \circ Q$ ou plus simplement $P(Q)$.*

R Il n'existe pas de formule simple pour les coefficients de la composée de deux polynômes. En règle générale, les coefficients d'une composée sont durs à calculer.

Le polynôme $P(X)$, i.e. P composé avec le polynôme X est égal au polynôme P. C'est pourquoi on peut écrire indifféremment P ou $P(X)$.

✎ Un polynôme est **pair** si $P(X) = P(-X)$, cela est équivalent à dire que $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = 0$ (tous les coefficients d'ordre impair sont nuls).
De même, un polynôme est **impair** si $P(X) = -P(-X)$, ce qui signifie que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k} = 0$ (tous les coefficients d'ordre pair sont nuls).

On a de manière évidente :

Proposition I.7 Pour trois polynômes P, Q et R et deux scalaires λ et μ, on a :

$$(\lambda P + \mu Q)(R) = \lambda P(R) + \mu Q(R)$$
$$(PQ)(R) = P(R)Q(R)$$

Proposition I.8 Si P et Q sont des polynômes, on a :

$$d(P \circ Q) = d(P) \times d(Q)$$

Démonstration. Si P ou Q est nul, c'est clair avec la convention $n \times -\infty = -\infty$.

Sinon, on a avec les notations habituelles :

$$\begin{aligned}
P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(b_m X^m + \underbrace{\ldots}_{d<m} \right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(a_k (b_m)^k X^{mk} + \underbrace{\ldots}_{d<mk} \right) \\
&= a_n (b_m)^n X^{mn} + \underbrace{\ldots}_{d<mn}
\end{aligned}$$

Avec $a_n(b_m)^n \neq 0$. ■

I.8 Représentation informatique des polynômes

Classiquement, un polynôme est représenté par la liste de ses coefficients :

```
P=[a0,a1, ..., an]
```

! Le degré du polynôme P est `len(P)+1`.

On peut alors écrire différentes fonctions :

Coefficient Renvoie le coefficient d'ordre k (0 si on dépasse la taille de la liste) :

```
def coef(P,k) :
  if k < len(P) :
    return P[k]
  return 0
```

Degré Renvoie le degré d'un polynôme (sans compter les 0 finaux) :

```
def degre(P) :
  n = len(P)
  for k in range(len(P)-1,-1,-1):
    if P[k] != 0 :
      return k
  return -1 # si P=0
```

Somme de deux polynôme P et Q

```
def som(P,Q) :
  n = len(P)
  m = len(Q)
  l = max(n,m)
  S = [0]*l #initialisation
  for k in range(n):
    S[k] = P[k]
  for k in range(m):
    S[k] += Q[k]
  return S
```

On peut aussi utiliser une liste en compréhension :

```
S = [coef(P,k) + coef(Q,k) for k in range(l)]
```

On peut aussi faire une fonction qui enlève les 0 à la fin d'une liste pour simplifier les sommes. On peut aussi remplacer n et m par $d(P)-1$ et $d(Q)-1$ en faisant attention à écrire : `for k in range( degre(P) +1):`

Produit externe Si $a \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme :

```
def mult_constante(a,P):
  return [a*coef(P,k) for k in range(len(P))]
```

Produit de deux polynômes P et Q :

```
def prod_poly(P, Q):
  n = len(P)
  m = len(Q)
  R = [0]*(n+m-1)
  for i in range(n) :
    for j in range(m) :
      R[i+j] += P[i]*Q[j]
  return R
```

Puissance Il suffit d'utiliser plusieurs fois la fonction produit.

Composition Il suffit d'utiliser plusieurs fois les fonctions puissance et somme.

Évaluation en un point Pour calculer la valeur de $P(\alpha)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{K}$, on utilise l'algorithme de Horner qui consiste à écrire :

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n \\ &= (\dots((((a_n\alpha + a_{n-1})\,\alpha + a_{n-2})\,\alpha + a_{n-3})\,\alpha + a_{n-4})\,\alpha + \cdots + a_1)\,\alpha + a_0 \end{aligned}$$

Par exemple pour un polynôme de degré 4 :

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 \\ &= \Bigg(\Big(((a_4\alpha + a_3)\alpha + a_2\big)\alpha + a_1\Big)\alpha + a_0\Bigg) \end{aligned}$$

L'algorithme s'écrit :

```
def horner(P, alpha):
  S = 0
  for k  in range(n-1,-1,):
    S = S*alpha + P[k]
  return S
```

P On peut utiliser `reversed(P)` pour parcourir `P` en sens inverse.

Cet algorithme est plus efficace que l'algorithme naïf qui consiste à calculer directement la somme : $\sum_{k=0}^{n} a_k\alpha^k$.

On peut aussi écrire une fonction qui calcule les dérivées successives.

Il existe une structure spéciale pour les polynômes : la classe `poly1d` du module `numpy` (utilisée et décrite plus loin).

Le programme de produit de deux polynômes permet de bien comprendre la formule du produit.

I.9 Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Définition I.8 — Polynôme dérivé. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme. Le polynôme dérivée noté P' est :

$$P' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k$$

On aurait aussi pu écrire : $P' = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k a_k X^{k-1}$ puisque le premier terme est nul.

R On peut ainsi dériver un polynôme complexe, alors que l'on a pas la limite du taux d'accroissement. C'est une **dérivée formelle**.

Bien sûr, pour un polynôme réel, cela coïncide avec la notion de dérivée vue en analyse.

Proposition I.9 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$\begin{array}{lll} \text{si } \deg(P) > 0 & \text{alors} & \deg(P') = \deg(P) - 1 \\ P \text{ est constant} & \text{si et seulement si} & P' = 0. \end{array}$$

On a les propriétés classiques :

Proposition I.10 Soient P et Q deux polynômes et λ un élément de $\mathbb{K}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} (\lambda P)' &= \lambda P' \\ (P+Q)' &= P' + Q' \\ (PQ)' &= P'Q + PQ' \end{aligned}$$
$$(P \circ Q)' = P' \circ Q \times Q'$$

Contrairement à ce que l'on peut penser ces formules ne sont pas déjà connues. En effet, celles qui sont couramment utilisé concernent la dérivation des fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et non la dérivation formelle.

R On verra plus loin une manière plus rapide de montrer ces relations : on sait qu'elles sont vraies pour les applications polynomiales, elles sont donc vraies pour les polynômes formels puisque l'application polynomiale caractérise le polynôme.

Démonstration. Non fait en cours.

On note $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ On a alors pour la première formule :

$$\begin{aligned}
(\lambda P)' &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k\right)' \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda k a_k X^{k-1} && \text{par définition de la dérivation} \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} = \lambda P'
\end{aligned}$$

Pour la deuxième, on a :

$$\begin{aligned}
(P+Q)' &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k\right)' \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k(a_k + b_k) X^{k-1} && \text{par définition de la dérivation} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k X^{k-1} = P' + Q'.
\end{aligned}$$

La troisième est plus ardue. On part de la formule du produit :

$$PQ = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k \text{ avec } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Par définition de la dérivation, cela donne :

$$(PQ)' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) c_{k+1} X^k$$

Ce que l'on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
(PQ)' &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \left(\sum_{i=0}^{k+1} a_i b_{k+1-i}\right) X^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k+1} (k+1) a_i b_{k+1-i} X^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i) a_i b_{k+1-i} X^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k+1} i a_i b_{k+1-i} X^k
\end{aligned}$$

On commence par étudier la première somme. On enlève les termes nuls :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i) a_i b_{k+1-i} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k} (k+1-i) a_i b_{k+1-i} X^k$$

On a :

$$PQ' = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)b_{k+1}X^k\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i(k+1-i)b_{k+1-i}\right)X^k$$

Le premier terme est donc bien PQ'.

Pour la deuxième somme. On enlève le permier terme nul :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k+1} ia_ib_{k+1-i}X^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k+1} ia_ib_{k+1-i}X^k$$

Puis on fait le changement de variable : $i \leftarrow (k+1-i)$ (le changement de variable peut se justifier car il s'agit de somme d'un nombre fini de termes).

Cela donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k+1} ia_ib_{k+1-i}X^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k}(k+1-i)a_{k+1-i}b_iX^k$$

On a d'un autre côté :

$$QP' = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}X^k\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}(k+1-i)b_ia_{k+1-i}\right)X^k$$

On constate bien que le deuxième terme est QP'.

On a donc bien obtenu la formule.

La dernière se démontre en remarquant que :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$$

et donc par application des règles précédentes :

$$(P \circ Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k k Q^{k-1} Q' = P' \circ Q \times Q'$$

■

I.10 Dérivées successives, formule de Taylor

Définition I.9 — Dérivée d'ordre r. Soit P un polynôme et $r \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence le polynôme dérivée d'ordre r de P par :

$$P^{(0)} = P \qquad \text{et} \qquad \forall r \geqslant 0,\quad P^{(r+1)} = \left(P^{(r)}\right)'.$$

✎ Un cas très important est la dérivation du monôme X^n :

$$\left(X^n\right)^{(p)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-p+1)X^{n-p} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

On peut donc écrire pour $p \leqslant n$:

$$\left(X^n\right)^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!}X^{n-p} = A_n^p X^{n-p}$$

Proposition I.11 Pour la somme et le produit externe on a la propriété de linéarité :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \qquad \begin{aligned} (\lambda P)^{(r)} &= \lambda P^{(r)} \\ (P+Q)^{(r)} &= P^{(r)} + Q^{(r)} \end{aligned}$$

En appliquant la dérivée de X^n et la linéarité, on peut calculer directement la dérivée r-ième d'un polynôme (alors que pour une fonction c'est impossible).

Précisément :

Proposition I.12 Soit P un polynôme que l'on écrit : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = d(P)$.

On a :
- pour $l > n$ le polynôme $P^{(l)}$ est nul,
- sinon, pour $l \leqslant n$, on a :

$$P^{(l)} = \sum_{k=l}^{n} a_k \frac{k!}{(k-l)!} X^{k-l}$$

On peut aussi écrire :

$$P^{(l)} = \sum_{k=l}^{+\infty} a_k \frac{k!}{(k-l)!} X^{k-l} = \sum_{k=l}^{+\infty} a_k A_k^l X^{k-l}$$

Ou encore :

$$P^{(l)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{l+k} \frac{(k+l)!}{k!} X^k \qquad \text{en posant } k \leftarrow k-l$$

✎ Pour une fonction quelconque, il est impossible de calculer les dérivées successives immédiatement. Pour un polynôme, c'est possible.

Pour le produit, on a la formule de Leibniz :

Théorème I.13 — Formule de Leibniz. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors on a, pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$\left(PQ\right)^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} \binom{k}{r} P^{(k)} Q^{(r-k)}$$

Attention $P^{(0)} = P$, alors que si $x \in \mathbb{K}$, $x^0 = 1$, on se méfiera donc de l'analogie avec la formule de Newton.

Démonstration. La formule de Leibniz se démontre par récurrence. Comme dans le cas de fonctions. ■

La formule de Leibniz est particulièrement utile pour les polynômes, puisque $P^{(k)} = 0$ si $k > d(P)$. On l'utilisera toujours dans le cas où l'un des polynômes se dérive facilement.

Théorème I.14 — Formule de Taylor. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \left(X - a\right)^k.$$

En particulier, pour $a = 0$, on obtient :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Enfin, on a :

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \left(X - a\right)^k.$$

Il s'agit bien sûr de somme finie.
La formule la plus importante est celle en 0 !

En fait la formule de Taylor en 0 est assez naturelle :

$$\begin{aligned}
\text{Si } P =& a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_k X^k + \cdots + a_n X^n \\
& \text{alors clairement } a_0 = P(0) \\
\text{puis : } P' =& a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 \cdots + k a_k X^{k-1} + \cdots + n a_n X^{n-1} \\
& \text{et donc } a_1 = P'(0) \\
\text{ensuite : } P'' =& 2a_2 + 3 \times 2a_3 X \cdots + k(k-1) a_k X^{k-2} + \cdots + n(n-1) a_n X^{n-2} \\
& \text{et encore } 2a_2 = P''(0)
\end{aligned}$$

Si on dérive encore une fois, on a : $3 \times 2a_3 = P^{(3)}(0)$, puis : $4 \times 3 \times 2a_4 = P^{(4)}(0)$, etc.

Démonstration. **Preuve de la formule de Taylor en 0**.

La preuve provient de la formule qui donne la dérivée d'ordre k d'un polynôme :

$$P^{(k)} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{k+j} \frac{(j+k)!}{j!} X^j$$

le terme constant de $P^{(k)}$ corresponds à $j = 0$ et est donc $k!a_k$, *i.e.* $k!a_k = P^{(k)}(0)$, ou encore $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$. ■

Ainsi, il est équivalent de connaître le polynôme formel P et de connaître toutes les valeurs de ses dérivées en 0. Autrement dit *un polynôme est entièrement déterminée par ses dérivée en* 0.

Ce n'est pas le cas pour les fonctions.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée en 0 par 0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifie la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$, alors que la fonction f n'est pas nulle, et ne coïncide avec la fonction nulle sur aucun intervalle.

Remarquons en particulier que les dérivées étant locales, si on connaît la fonction polynomiale sur $]-\alpha, \alpha[$, avec $\alpha > 0$, alors on connaît le polynôme formel et donc la fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ entier. Là encore, ce n'est pas le cas des fonctions : on peut trouver des fonctions $\mathscr{C}^\infty$, non identiquement nulle, mais nulle sur $[-1, 1]$.

Ce qui montre au passage que si P et Q sont deux polynômes dont les fonctions polynomiales coïncident sur un intervalle du type $]a-\alpha, a+\alpha[$, avec $a \in \mathbb{R}$ alors ils ont les mêmes coefficients.

On obtient donc un résultat important :

Corollaire I.15 Si deux polynômes ont la même fonction polynomiale, alors ils sont égaux.

✎ L'intérêt de la formule de Taylor en a est qu'elle permets d'exprimer les coefficients d'une composition $P \circ (X + a)$ en fonction du polynôme P ce qui est très pratique car les coefficients d'une composition ne sont pas simples à déterminer dans le cas général.

Démonstration. **Démonstration directe de la formule de Taylor en** a

On va utiliser $X = (X-a+a)$ et la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k (X-a+a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (X-a)^j a^{k-j} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j} (X-a)^j a^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} (X-a)^j a^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{(X-a)^j}{j!} \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} a^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{(X-a)^j}{j!} P^{(j)}(a)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule donnant la dérivée j-ième d'un polynôme. :

$$P^{(j)} = \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j}$$

■

On pourrait aussi démontrer ce théorème *via* l'analyse, c'est à dire en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, mais uniquement dans ce cas on considérant les fonctions polynomiales et non les polynômes formels.

■ **Exemple I.3** Comme application, on peut déterminer l'unique polynôme P de degré 3 tel que $P(0) = 0$, $P'(0) = 1$, $P''(0) = 0$ et $P^{(3)}(0) = -1$. Ce polynôme est :

$$P = X - \frac{1}{6} X^3.$$

Ce polynôme est unique, car si deux polynômes P et Q sont solutions, la différence R vérifie : $R(0) = R'(0) = R''(0) = R^{(3)}(0) = 0$, et donc en utilisant encore la formule de Taylor, on a $R = 0$. ■

II Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

II.1 Multiples et diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$

Définition II.1 Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A ou que A est multiple de B si :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \qquad A = BQ$$

On dit aussi que B est un diviseur de A ou que A est un multiple de B.

Notation II.1. *On note alors $B|A$ pour dire B divise A.*

Si $B|A$ avec B non nul, alors A est non nul et $\deg(A) \geqslant \deg(B)$. En effet, on a $\deg(A) = \deg(B) + \deg(Q)$.

Proposition II.1 Si A, B et C sont trois polynômes, on a :

- Si $B|A$ et $A|C$, alors $B|C$, c'est-à-dire la relation « divise » est transitive.
- $A|A$, c'est-à-dire la relation « divise » est réflexive.
- Cette relation n'est pas antisymétrique :

$$\left(A|B \text{ et } B|A\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad A = \lambda B\right)$$

  On dit dans ce cas que A et B sont associés.
- Elle est compatible avec l'addition :

$$\text{Si } B|A \text{ et } B|C \quad \text{alors} \quad B|(A+C)$$

  et avec la multiplication :

$$\text{Si } B|A \quad \text{alors} \quad B|AC$$

R La relation divise est une relation d'ordre dans l'ensemble des polynômes unitaires (ensemble dans lequel les polynômes associés sont égaux).

Propriété de la relation de division. Supposons $B|A$ et $A|C$, et montrons $B|C$. On sait :

$$\begin{aligned} & \exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], && A = BQ_1 \\ \text{et} \quad & \exists Q_2 \in \mathbb{K}[X], && C = AQ_2 \end{aligned}$$

On constate alors que $C = BQ_1Q_2$, d'où $B|C$.

La relation $A|A$ s'obtient en écrivant $A = 1 \times A$ (la constante 1 est un polynôme).

Supposons $A|B$ et $B|A$, on a alors :

$$\begin{aligned} & \exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], && A = BQ_1 \\ \text{et} \quad & \exists Q_2 \in \mathbb{K}[X], && B = AQ_2 \end{aligned}$$

Si on regarde les degrés, on a alors :

- Soit $A = 0$ et donc $B = 0$ et donc la propriété $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda B$ est vraie.
- Soit $A \neq 0$ et donc $B \neq 0$ et $\deg(A) \leqslant \deg(B) \leqslant \deg(A)$, et donc $\deg(A) = \deg(B)$, et donc $\deg(Q_1) = 0$, ie Q_1 est une constante non nulle, que l'on note donc λ, et on a : $A = \lambda B$.

D'où, dans les deux cas $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda B$. La réciproque est évidente.

Considérons maintenant A, B, C tels que $B|A$ et $B|C$, on a alors :

$$\begin{aligned} & \exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], && A = BQ_1 \\ \text{et} \quad & \exists Q_2 \in \mathbb{K}[X], && C = BQ_2 \end{aligned}$$

On voit alors $B(Q_1 + Q_2)|A + C$ et en conséquence $B|(A + C)$.

Pour la multiplication, on suppose $B|A$ et on a : $\exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], A = BQ_1$ et donc $BQ_1C = 1C$ et en conséquence $B|AC$.

■

Pour l'instant pour démontrer qu'un polynôme divise un autre, il n'y a pas d'autre choix que de procéder par *identification* : on résout le système obtenu en considérant les coefficients de Q.

■ **Exemple II.1** On veut montrer que $X-1$ divise X^4-1. Ce que l'on peut démontrer de manière évidente en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{x^4-1}{x-1} = 1+x+x^2+x^3.$$

De manière directe, on cherche Q tel que $X^4-1 = Q\times(X-1)$. On voit :

- Le degré de Q est forcément 3, donc Q s'écrit aX^3+bX^2+cX+d, on a donc l'équation
$$X^4-1 = (aX^3+bX^2+cX+d)(X-1).$$
Il ne faut surtout pas développer et résoudre le système (cela donne le résultat, mais c'est relativement long)
- le terme dominant est 1 et le terme constant est 1 (on obtient les deux termes extrémaux en regardant les termes dominants et constants), la relation s'écrit donc : $X^4-1 = (X^3+bX^2+cX+1)(X-1)$
- on regarde les termes de degré 3, qui donne $-1+b=0$, donc $b=1$, puis les termes de degré 1, qui donne $-c+1=0$, donc $c=1$.
- on peut éventuellement vérifier avec les termes des degrés restant.

Au final, on obtient $Q = X^3+X^2+X+1$ et la relation :

$$X^4-1 = (X-1)(X^3+X^2+X+1)$$

donc $(X-1)|(X^4-1)$.

■

II.2 Division euclidienne

Théorème II.2 — Division euclidienne. Soit A et B deux polynômes avec $B\neq 0$. Il existe alors un unique couple (Q,R) de polynôme de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$A = BQ+R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

On appelle Q le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Existence et unicité de la division euclidienne. **Unicité :** Supposons (Q_1,R_1) et (Q_2,R_2) solutions, on a alors :

$$A = BQ_1+R_1 = BQ_2+R_2 \qquad \text{et donc} \qquad B(Q_1-Q_2) = R_2-R_1.$$

En particulier avec les degrés :

$$\deg(B)+\deg(Q_1-Q_2) = \deg(R_2-R_1).$$

Or on sait $\deg(R_2 - R_1) \leqslant max(\deg(R_2), \deg(R_1)) < \deg(B)$. Donc $\deg(Q_1 - Q_2) < 0$, ce qui signifie donc : $\deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$ ou encore $Q_1 = Q_2$. En reportant, on obtient $R_2 = R_1$ d'où l'égalité.

Existence : On fixe le polynôme $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ et on procède par récurrence sur le degré de A. On note donc :

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \forall A \in \mathbb{K}_n[X], \exists (Q,R) \in \mathbb{K}[X], A = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B).$$

Pour l'initialisation, les rangs $n = 0$, $n = 1$, $n = m-1$ sont évidents : il suffit de poser $Q = 0$ et $R = B$.

Pour l'hérédité, soit n fixé, avec $n \geqslant m-1$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $A \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, on écrit alors :

$$A = a_{n+1}X^{n+1} + a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

On écrit alors :

$$a_{n+1}X^{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} \underbrace{\left(b_m X^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0\right)}_{B} + C$$

où C est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. On a ainsi écrit :

$$\begin{aligned} A =& \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} B + + C + a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \\ =& \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} B + A_1 \qquad \text{avec } A_1 \in \mathbb{K}_n[X]. \end{aligned}$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence sur A_1, cela donne l'existence de

$$Q_1 \text{ et } R_1 \in \mathbb{K}[X], \text{ tel que } A_1 = BQ_1 + R_1 \text{ avec } \deg(R_1) < \deg(B).$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} A =& \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} B + BQ_1 + R_1 \\ =& B \underbrace{\left(\frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} + Q_1\right)}_{Q} B + R_1 \end{aligned}$$

On a bien que Q est un polynôme, car $n+1 \geqslant m$ et on obtient ainsi :

$$A = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(Q).$$

■

Proposition II.3 — Lien avec la divisibilité. Soient A et B des éléments de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.

On a alors :

$$B | A \quad \Longleftrightarrow \quad \text{le reste de la division euclidienne de } A \text{ par } B \text{ est nul}$$

⋆ Divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

Un polynôme B divise A si il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BC$.

Si A et B sont des polynômes complexes, alors le polynôme C est complexe, il n'y a pas de difficultés. Par contre, si A et B sont réels, il est *a priori* possible que B divise A dans $\mathbb{C}[X]$ au sens où $\exists C \in \mathbb{C}[X]$, $A = BC$, mais pas dans $\mathbb{R}[X]$. De même, il est *a priori* possible que les quotients et les restes de la division euclidienne dépendent de si on considère A et B comme des polynômes réelles ou complexes.

En fait cette situation est impossible du fait de l'unicité de la division euclidienne. Soit A et B réel, on peut faire la division euclidienne de A par B :

$$\text{dans } \mathbb{C} : \quad \exists (Q_\mathbb{C}, R_\mathbb{C}) \in \Big(\mathbb{C}[X]\Big)^2, \quad A = BQ_\mathbb{C} + R_\mathbb{C} \quad \text{avec } \deg(R_\mathbb{C}) < \deg(B)$$

$$\text{dans } \mathbb{R} : \quad \exists (Q_\mathbb{R}, R_\mathbb{R}) \in \Big(\mathbb{R}[X]\Big)^2, \quad A = BQ_\mathbb{R} + R_\mathbb{R} \quad \text{avec } \deg(R_\mathbb{R}) < \deg(B).$$

L'unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{C}$ assure que $R_\mathbb{C} = R_\mathbb{R}$ et $Q_\mathbb{C} = Q_\mathbb{R}$. En particulier,

$$A|B \text{ dans } \mathbb{C} \iff R_\mathbb{C} = 0 \iff R_\mathbb{R} = 0 \iff A|B \text{ dans } \mathbb{R}.$$

> On retiendra :
> - si A et B sont réels, le quotient et le reste de la division euclidienne sont réels,
> - on ne distingue pas divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

⋆ Calculer la division euclidienne

Pour calculer effectivement la division euclidienne il suffit d'appliquer la même méthode que pour les entiers : à chaque étape, on enlève le terme dominant du reste en ajoutant un monôme au quotient.

■ **Exemple II.2** On veut faire la division euclidienne de $X^5 + 4X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1$ par $X^3 - 2X + 3$

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 4X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1 & X^3 - 2X + 3 \\ \cline{2-2} 4X^4 + 4X^3 - 2X^2 - X - 1 & X^2 + 4X + 4 \\ 4X^3 + 6X^2 - 13X - 1 & \\ 6X^2 - 5X - 13 & \end{array}$$

On obtient ainsi :

$$X^5 + 4X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1 = (X^3 - 2X + 3)(X^2 + 4X + 4) + (6X^2 - 5X - 13)$$

Le quotient est $X^2 + 4X + 4$ et le reste est $6X^2 - 5X - 13$. ■

⋆ Algorithme de division euclidienne

L'algorithme de division euclidienne de deux polynôme peut s'écrire après avoir écrit les fonctions d'addition et de division de deux polynômes. On utilise ici la structure `poly1d` du module `numpy`.

Voici un bref descriptif de la syntaxe de cette structure :

Convertion en polynôme une liste L de coefficients est convertie en polynôme avec la syntaxe `poly1d(L)`. Par exemple, `poly1d( [1,2,0,4])` corresponds au polynôme $X^3 + 2X^2 + 4$.

Le degré est obtenu par `R.order`

Les coefficients sont obtenus par `R.coef`. C'est une liste des coefficients (du plus grand au plus petit). Attention, `R.coef[0]` est le coefficient dominant.

Les opérations $+$, $-$ et $\times$ s'écrivent naturellement entre polynôme.

L'algorithme consiste alors à :

- Initialiser R à la valeur de A et Q à 0,
- à chaque étape : ajouter le monôme : $\frac{r_n}{b_n} X^{n-p}$ au quotient et donc enlever monôme : $\frac{r_n}{b_n} X^{n-p} B$ au reste (pour faire disparaître son terme dominant).
- Jusqu'à ce que le degré du reste soit inférieur au degré de B.

Voici un exemple d'algorithme obtenu :

```
def divEuclidienne(A,B) :
  R = poly1d(A) # R sera le reste
  Q = poly1d([0]) # Q sera le quotient

  m = B.order
  n = R.order
  while n >= m :

    # on crée le monôme r_n/b_m X^(n-m)
    # d'abords une liste terme dominant + 0
    monL = [R.coeffs[0] / B.coeffs[0]] +[0]*(n-m)
    #puis le polynôme:
    mon = poly1d( monL )

    Q = Q + mon
    R = R - mon*B
    n = R.order
  return Q,R
```

La correction de l'algorithme est assuré par le fait qu'à chaque itération, on a :

$$BQ + R = A$$

La terminaison de l'algorithme est vérifiée car le degré de R diminue à chaque itération.

R Bien sûr, on peut aussi utiliser l'opération / de la structure `poly1d`.

III Racines

III.1 Lien entre racine et divisibilité

Définition III.1 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Un élément α de $\mathbb{K}$ est racine (dans $\mathbb{K}$) du polynôme P si $P(\alpha) = 0$.

On a un lien entre racine et divisibilité par $(X - \alpha)$:

Proposition III.1 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff (X-\alpha)|P$$

On a donc remplacé le problème de la recherche de Q tel que $P = Q(X-\alpha)$, par le simple calcul de $P(\alpha)$!
Ainsi, pour montrer que $X-1$ divise $P = X^4 - 1$, il suffit de vérifier que $P(1) = 0$, ce qui est beaucoup plus rapide que de calculer le polynôme Q.

Démonstration. Dans le cas où $(X-\alpha)$ divise P, on a $P = (X-\alpha)Q$, Donc $P(\alpha)$ est nul.

Pour la réciproque, on suppose que $P(\alpha) = 0$ et on fait la division euclidienne de P par $X-\alpha$. Cela donne l'existence d'un polynôme Q et d'un scalaire λ tel que :

$$P = Q(X-\alpha) + \lambda$$

En évaluant en α, on obtient $\lambda = 0$. et donc $P = Q(X-\alpha)$. ■

D'une manière générale, si P est un polynôme, alors la division euclidienne de P par $X-\alpha$ donne l'existence d'un polynôme Q tel que :

$$P = Q(X-\alpha) + P(\alpha)$$

R On voit aussi dans la démonstration que si A divise B alors toutes racines de A sont aussi des racines de B.

III.2 Cas de plusieurs racines distinctes

Proposition III.2 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont p racines deux à deux distinctes d'un polynôme P, alors le polynôme $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p)$ est un diviseur de P.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de racines p.
Le cas $p = 1$ vient d'être fait.
Pour passer de p racines à $p+1$ racines, on applique l'hypothèse de récurrence au p premières racines qui implique que

$$\exists Q \in \mathbb{K}(X], \qquad P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p)Q$$

En évaluant cette dernière égalité de polynôme sur la dernière racine α_{p+1}, on a :

$$\underbrace{P(\alpha_{p+1})}_{=0} = \underbrace{(\alpha_{p+1}-\alpha_1)(\alpha_{p+1}-\alpha_2)\cdots(\alpha_{p+1}-\alpha_p)}_{\neq 0 \text{ car les racines sont distinctes}} Q(\alpha_{p+1}).$$

D'où $Q(\alpha_{p+1}) = 0$, et en appliquant la proposition précédente, on a : $(X-\alpha_{p+1})|Q$, et donc $\exists Q_1 \in \mathbb{K}[X],\ Q = (X-\alpha_{p+1})Q_1$, puis :

$$P(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p)(X-\alpha_{p+1})Q_1(X)$$

■

Ici encore, pour démontrer que $A|P$, on peut écrire le polynôme A sous la forme $A = \prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)$, et on a juste besoin de calculer les valeurs de $P(\alpha_i)$.

En conséquence de ce théorème, on a un résultat important :

Proposition III.3 Un polynôme de degré n ayant $n+1$ racines est nul.

Démonstration. Supposons que P ait $n+1$ racines, alors, il est divisible par $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_{n+1})$, donc si il est non nul alors son degré est supérieur ou égal à $n+1$, ce qui est impossible. En conclusion, le polynôme P est nul. ■

En conséquence :

- Si on sait que $P \in \mathbb{K}_n[X]$ (ie est de degré inférieur ou égal à n) et que l'on montre que P admet $n+1$ racines, il est alors nul,
- Si un polynôme admet une infinité de racines, alors il est nul (pas besoin dans ce cas de connaître son degré).
- Si deux polynômes ont la même valeur sur une infinité de valeurs, alors ces deux polynômes sont égaux (égalité des coefficients).
- En particulier, si deux polynômes ont la même fonction polynomiale $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, alors ils sont égaux (puisque $\mathbb{K}$ a une infinité de valeurs).

Un polynôme est donc entièrement déterminé par sa fonction polynomiale. C'est pourquoi on confond (souvent) les deux.

■ **Exemple III.1** On veut montrer que pour tout n, p et $q \in \mathbb{N}$, $P = X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ est divisible par $1+X+X^2$. Plutôt que de chercher Q tel que $X^{3n+2}+X^{3p+1}+X^{3q} = Q(1+X+X^2)$ et de résoudre un système (de taille n) vérifié par Q, on écrit : $1+X+X^2 = (X-j)(X-j^2)$, avec $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

Et on a :

$$\begin{aligned} 1+X+X^2|P &\iff (X-j)(X-j^2)|P \\ &\iff P(j) = 0 \text{ et } P(j^2) = 0. \end{aligned}$$

On calcule donc $P(j)$, en utilisant les relations $j^3 = 1$ et $1+j+j^2 = 1$. On obtient facilement $P(j) = j^2+j+1 = 0$, et de même $P(j^2) = 0$. Ainsi, $1+X+X^2|P$. ■

R Comme $1+X+X^2$ et P sont deux polynômes réels, cela signifie que :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], \qquad P = (1+X+X^2)Q.$$

■ **Exemple III.2** Montrons que la fonction cos n'est pas un polynôme. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe P tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \cos(x)$. En particulier,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, P\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 0.$$

L'ensemble $\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \big| k \in \mathbb{Z}\}$ étant infini, P a une infinité de racine et donc $P = 0$ ce qui signifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = 0$ et est évidement une contradiction. ■

■ **Exemple III.3** Montrons l'unicité du polynôme de degré 2 tel que $P(1) = 0$, $P(0) = 3$ et $P(2) = 3$ (on admet qu'il existe).

On considère donc P et Q solution du problème. On pose alors $R = P - Q$. Le polynôme R est alors de degré inférieur ou égal à 2 et a trois racines distinctes (0, 1 et 2). Il est donc nul et $P = Q$. ■

✎ L'utilisation de l'argument infinité de racine (ou $n+1$ racine) est surtout utilisé pour montrer l'unicité d'un polynôme vérifiant certaines propriétés. La technique consiste à supposer qu'il y a deux polynômes et de montrer que la différence est nulle par un argument de racines.

✎ Il faut qu'il soit clair qu'il y a une infinité de racine : par exemple si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(\cos(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)) = 0$, on n'a pas $P = 0$, mais seulement $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.
Autre exemple, si on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $P\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$, il faut d'abords en déduire (en dessinant le tableau de variation de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$) que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $P(x) = 0$, puis $P = 0$ car P a une infinité de racine. Le principe étant que quand x décrit $\mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x^2}$ décrit $\mathbb{R}_+^*$, ce qui se montre avec le tableau de variation.

Proposition III.4 — Décomposition des polynômes scindés à racines simples. Soit P un polynôme de degré n qui admet n racines distinctes notées $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, alors :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i).$$

où λ est le coefficient dominant de P.

Démonstration. On sait que P s'écrit :

$$P = Q \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i).$$

L'étude du degré assure que $\deg(Q) = 0$, puis l'étude du terme dominant permet d'obtenir la valeur de Q. ■

■ **Exemple III.4** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme unitaire $X^n - 1$ admet n racines distinctes dans $\mathbb{C}$ (les racines n-ièmes de l'unité). On a donc :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

■

III.3 Généralisation aux racines d'ordre multiple

Définition III.2 On dit que α est racine d'ordre au moins d si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \dots = P^{(d-1)}(\alpha) = 0$$

i.e. si α est racine de P ainsi que de toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $d-1$ s'annule en α.

On dit que α est racine d'ordre d (ou plus précisément d'ordre exactement d) si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(d-1)}(\alpha) = 0, \text{ et si } P(\alpha)^{(d)} \neq 0$$

i.e. si α est racine de P ainsi que de toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $d-1$ s'annule en α. tandis que la dérivée d'ordre d n'est pas nulle.

On dit que α est **racine simple**, si α est racine d'ordre 1, ie :

$$P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) \neq 0$$

On dit que α est **racine double**, si α est racine d'ordre 2, **triple** si d'ordre 3. Enfin, on dit que α est **racine multiple** de P si elle est racine d'ordre au moins 2.

Proposition III.5 Il est clair que si α est racine d'ordre d de P, alors α est racine d'ordre $d-1$ de P', et même racine simple de $P^{(d-1)}$.

Proposition III.6 Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a un lien entre divisibilité par $(X-\alpha)$ et ordre de la racine α :

$$\begin{aligned} & \alpha \text{ est racine d'ordre au moins } d \\ \iff \quad & (X-\alpha)^d | P \end{aligned}$$

Pour l'ordre exact :

$$\begin{aligned} & \alpha \text{ est racine d'ordre exactement } d \\ \iff \quad & (X-\alpha)^d | P \quad \text{et} \quad (X-\alpha)^{d+1} \text{ ne divise pas } P \\ \iff \quad & \exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad P = (X-\alpha)^d Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0 \end{aligned}$$

Démonstration. La partie $\Rightarrow$ provient de l'égalité de Taylor, et est juste une généralisation de la proposition sur les racines simples. Supposons que α soit racine d'ordre au moins d du polynôme P, alors on a :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k=d}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k,$$

puisque par définition d'une racine d'ordre au moins d, les $d-1$ premières dérivées sont nulles.

Puis, comme dans le cas d'une racine simple, on fait le changement de variable et la factorisation par $(X-\alpha)^l$:

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=d}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-d} \frac{P^{(k+d)}(\alpha)}{(k+d)!}(X-\alpha)^{k+d} \\
&= (X-\alpha)^d \underbrace{\sum_{k=0}^{n-d} \frac{P^{(k+d)}(\alpha)}{(k+d)!}(X-\alpha)^k}_{Q}
\end{aligned}$$

Avec un tel choix de Q, on a : $P=(X-\alpha)^d Q$ et donc $(X-\alpha)^d|P$.

Si on suppose de plus que α est racine d'ordre exactement d, alors on a :

$$Q(\alpha) = \frac{P^{(d)}(\alpha)}{d!} \neq 0$$

On est donc assuré d'avoir $Q(\alpha) \neq 0$.

Pour la réciproque, supposons donc que $P=(X-\alpha)^d Q$, pour un certain polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Déjà on peut voir que $P(\alpha)=0$. Puis si $d>1$, on a :

$$P' = d(X-\alpha)^{d-1}Q + (X-\alpha)^d Q = (X-\alpha)^{d-1}(dQ+(X-\alpha)Q).$$

ainsi, $P'(\alpha)=0$.

Le cas d'un d quelconque se démontre donc avec la formule de Leibnitz : Pour $l \leqslant d$, on a :

$$\begin{aligned}
P^{(l)} &= \left((X-\alpha)^d Q\right)^{(l)} \\
&= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \left((X-\alpha)^d\right)^{(k)} Q^{(l-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \frac{k!}{(k-d)!}(X-\alpha)^{d-k} Q^{(l-k)}.
\end{aligned}$$

Puisque si $k \leqslant d$:

$$\left((X-\alpha)^d\right)^{(k)} = \frac{k!}{(k-d)!}(X-\alpha)^{d-k}$$

En substituant X par α, le terme $(X-\alpha)^{d-k}$ est nul, si $k<d$ égal à 1 si $k=d$.

En conséquence, lorsque $l<d$, on $\forall k \in [\![0,l]\!]$, $(X-\alpha)^{d-k}$ est nul en α, donc $P^{(l)}(\alpha)$ est une somme de termes nuls.

On obtient ainsi :

$$\forall l < d, \quad P^{(l)}(\alpha) = 0.$$

Ainsi, si $(X-\alpha)^d$ divise P, alors α est racine d'ordre au moins d de P.

Supposons maintenant que $Q(\alpha) \neq 0$, et on veut alors montrer que $P^{(d)}(\alpha) \neq 0$.

On a :

$$P^{(d)} = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \frac{k!}{(k-d)!} (X-\alpha)^{d-k} Q^{(d-k)}.$$

Pour les k tels que $k < d$, on a vu que le terme $(X-\alpha)^{d-k}$ est nul en α, ainsi le seul terme qui ne s'annule pas en α est le terme pour $k = d$. On obtient donc :

$$P^{(d)}(\alpha) = d!Q(\alpha) \neq 0.$$

■

✎ Ici encore l'intérêt est de remplacer la recherche du polynôme Q tel que $P = (X-\alpha)^d Q$, par un simple calcul des valeurs de $P(\alpha)$, $P'(\alpha)$, etc.

■ **Exemple III.5** Montrons que pour tout $n \geqslant 1$, $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.

On utilise l'équivalence :

$$\begin{aligned}(X-1)^3 | P_n &\iff 1 \text{ est racine d'ordre au moins 3 de } P_n\\ &\iff P_n(1) = 0,\ P_n'(1) = 0,\ P_n''(1) = 0 \text{ et } P_n^{(3)}(1) = 0.\end{aligned}$$

Cette dernière propriété se démontre facilement. ■

Proposition III.7 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des racines de P, d'ordre respectivement au moins égal à : $r_1, \dots r_p$. Alors :

le polynôme P est divisible par $\prod_{i=1}^{p} (X-\alpha_i)^{r_i}$.

Pour compter les racines d'un polynôme, on a donc deux choix :

Compter les racines distinctes Chaque racine compte pour 1,

Compter les racines avec leur ordre de multiplicité Une racine d'ordre exactement d compte pour d racine.

En conséquence : si on sait que le polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ (ie est de degré inférieur ou égal à n) que et que l'on montre P admet $n+1$ racines comptés avec leur ordre de multiplicité, alors P est nul.

Autrement dit, tout polynôme (non nul) de degré n possède au plus n racines comptés avec leur ordre de multiplicité,

Proposition III.8 — Décomposition des polynômes scindés. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ qui admet autant de racines (comptés avec leur ordre de multiplicité) que son degré . C'est-à-dire tel qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ p racines de P distinctes deux à deux, d'ordre respectivement égal à $r_1, r_2, \dots, r_p$ vérifiant :

$\deg(P) = \sum_{k=1}^{p} r_k$.

Alors on a la décomposition :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{r_i}.$$

où λ est le coefficient dominant de P.

Un tel polynôme est scindé (sur $\mathbb{K}$).

On verra que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé.

Démonstration. On a déjà vu que $\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{r_i}$ divise P, ainsi, P s'écrit :

$$P = Q \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{r_i}. \text{ avec } Q \in \mathbb{K}[X]$$

L'étude des degrés assure que Q est que constante et que c'est le terme dominant de P. ∎

IV Décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Factoriser un polynôme c'est le transformer en un produit de polynôme. Pour beaucoup de problèmes, par exemple la recherche de racines, cela permet de se ramener à des petits problèmes plus simples.

IV.1 Polynômes irréductibles

On a vu qu'un polynôme est toujours divisible par lui-même et par les constantes. Lorsque ceux sont ces seuls diviseurs, alors il est irréductible.

Définition IV.1 — Polynômes irréductibles. Un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si les seuls diviseurs de P sont les polynômes constants et les polynômes λP (avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$).

Autrement dit, si on factorise un polynôme irréductible P sous la forme $P = QR$, alors c'est que Q ou R est une constante.

Ainsi un polynôme irréductible n'est pas factorisable de manière non triviale. On peut relier cette définition à celle de **nombres premiers**, qui sont les entiers p divisibles uniquement par 1 et par eux-mêmes.

Un polynôme qui n'est pas irréductible est réductible ou factorisable.

Proposition IV.1 On a clairement :

- Si P est de degré 1, alors il est irréductible (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- Si P est de degré supérieur strictement à 1 et qu'il a une racine alors il n'est pas irréductible
- Tout polynôme de degré 2 à discriminants négatifs est irréductibles dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour le premier point, si $d(P) = 1$, et si $P = QR$, et alors $d(P) = 1 = d(Q) + d(R)$, donc l'un des deux polynômes Q ou R est une constante. Donc la seule manière de factoriser P sous la forme QR est que l'un des polynômes soit une constante, l'autre s'écrivant donc λP (avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$). Ainsi, P est irréductible.

Pour le deuxième point : si P a une racine, alors il s'écrit sous la forme, $P = (X - \alpha)Q$. Avec $d(Q) + 1 = d(P)$, donc si P est de degré supérieur strictement à 1, Q n'est pas un polynôme constant.

Pour le dernier point, supposons que P soit de degré 2, sans racine, et que $P = QR$. Supposons par l'absurde qu'aucun des deux polynômes Q et R ne soient une constantes alors comme : $d(P) = 2 = d(Q) + d(R)$, c'est donc que $d(Q) = 1$ et $d(R) = 1$. Donc Q (et R) s'écrit sous la forme $Q = aX + b$, donc Q a une racine, donc P a une racine, contradiction. ■

✎ Un polynôme peut être irréductible dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{C}$: par exemple : $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est irréductible dans $\mathbb{R}$ (polynôme de degré 2 à discriminants négatifs), tandis qu'il peut se factoriser dans $\mathbb{C}$.
Par contre, si un polynôme P est réductible dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si il se factorise sous la forme $P = QR$, avec Q et R non constant, alors il ne sera pas irréductible sur $\mathbb{C}$, puisque la factorisation $P = QR$ est aussi valable dans $\mathbb{C}$.

✎ Bien entendu, la propriété sur les polynômes de degré 2 ne se généralise pas : un polynôme peut ne pas avoir de racines mais ne pas être irréductibles. Par exemple : $P = (X^2 + X + 1)^2(X^2 + 1)$.

IV.2 Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème IV.2 — de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Démonstration. ADMIS conformément au programme. ■

En conséquence on a :

Proposition IV.3 Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Démonstration. On a vu que les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Soit maintenant un polynôme P irréductible, alors P a au moins une racine α (d'après le théorème de d'Alembert), donc P s'écrit sous la forme $P = (X - \alpha)Q$. Comme P est irréductible, Q doit être une constante notée λ, on a donc $P = \lambda(X - \alpha)$ et P est de degré 1. ■

IV.3 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème IV.4 — Décomposition dans $\mathbb{C}$. Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ de $\mathbb{C}[X]$.

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines (distinctes) de P dans $\mathbb{C}$, et $k_1, \dots k_p$ l'ordre de multiplicité de ces racines, alors :

- $n = k_1 + k_2 + \dots k_p$ (ie P a autant de racines comptés avec leur ordre de multiplicité que son degré).
- On a la décomposition :

$$\begin{aligned} P =& \lambda (X-\alpha_1)^{k_1} \dots (X-\alpha_p)^{k_p} \\ =& \lambda \prod_{i=1}^{p} (X-\alpha_i)^{k_i} \end{aligned}$$

où λ est le coefficient dominant de P.
- Cette factorisation est unique à l'ordre près des racines.

On dit que tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}$.

✎ On peut aussi écrire : tout polynôme de degré n se décompose sous la forme :

$$P = (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n) \text{ avec } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ les racines,}$$

avec la convention que l'on écrit une fois les racines simples, deux fois les racines doubles, etc.

✎ Ce résultat correspond à factoriser un polynôme comme on décompose une entier en produit de nombre premier : de la même manière que $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, on a : $X^4 + X^3 - X^2 - X = (X+1)^2 X(X-1)$.

✎ Si le polynôme est unitaire et que l'on connaît ses racines, alors on connaît les coefficients (il suffit de développer). Pour un polynôme quelconque, il reste une dernière inconnue : le terme dominant.

Démonstration. Commençons par l'unicité. Il suffit de montrer que si P s'écrit

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X-\alpha_i)^{k_i},$$

alors :

- le facteur λ est forcément le coefficient de plus haut degré a_n, ce qui est évident en identifiant les termes de plus haut degré (et montre au passage, que l'on a forcément $n = k_1 + k_2 + \dots k_p$)
- les $(\alpha_i)_{i=1\dots n}$ sont les seules racines de P, ce qui est clair.
- pour tout i, k_i est l'ordre de multiplicité de α_i dans P. Puisque $(X-\alpha_i)^{k_i}$ divise P mais $(X-\alpha_i)^{k_i+1}$ ne divise pas P.

Cela démontre donc que cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs, puisqu'on peut toujours échanger α_1 et α_2.

La preuve se fait par récurrence sur le degré n. On note

$$\mathscr{P}(n) : \forall P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ on peut décomposer } P \text{ en facteurs irréductibles.}$$

Il s'agit quelque part d'une récurrence forte, puisqu'on rappelle que $\mathbb{C}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Initialisation : La proposition est clairement vraie pour les polynôme de degré 0 (*i.e.* les constantes), et les polynômes de degré 1(*i.e.* ceux qui s'écrivent sous la forme $a_0 + a_1 X = a_1 \left(X + \frac{a_0}{a_1}\right)$.

Hérédité : Supposons la proposition vrai au rang n, et soit $P \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$. Pour simplifier les notations, on a déjà que si P est de degré strictement inférieur à $n+1$, alors c'est que $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et donc le résultat a déjà été démontré. On peut donc supposer $d(P) = n+1$.

D'après le théorème de d'Alembert, P a une racine. Soit donc α_0 une racine de P, d'ordre de multiplicité k_0. On a vu que P s'écrit alors : $P = (X-\alpha_0)^{k_0} Q$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à Q qui est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Plus précisément on a $d(P) = k_0 + d(Q)$. Comme $d(P) = n+1$, $d(Q)$ est strictement inférieur à n si α est racine multiple, égal à n si α est racine simple. De plus, on constate en développant les coefficients dominants (ou en utilisant le résultat sur le terme dominant d'un produit) que le terme dominant de Q est le coefficient dominant de P.

Ainsi, si on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les racines de Q, et $k_1, \ldots k_p$ l'ordre de multiplicité de ces racines, alors on a :

$$P = a_{n+1}(X-\alpha_0)^{k_0}(X-\alpha_1)^{k_1} \ldots (X-\alpha_p)^{k_p},$$

et $d(Q) = k_1 + \ldots k_p$. On obtient bien la factorisation demandée. Puis, comme on l'a vu cette écriture impose que les racines de P sont les $(\alpha_i)_{i=0\ldots p}$, avec ordre de multiplicité $(k_i)_{i=0\ldots p}$.

On a aussi : $d(P) = k_0 + d(Q) = k_0 + k_1 + \ldots k_p$. Donc le degré de P est bien égal à son nombre de racines comptés avec ordre de multiplicité. ■

IV.4 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

⋆ Rappel sur la relation entre divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$

On a vu que pour deux polynômes réels A et B il est équivalent que :
- $A|B$ dans $\mathbb{C}[X]$, au sens où il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$, tel que $B = QA$,
- $A|B$ dans $\mathbb{R}[X]$, au sens où il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$, tel que $B = QA$.

En effet, si $A = QB$, alors l'unicité de la division euclidienne assure que $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Par contre, on a vu qu'un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ pouvait être réductible dans $\mathbb{C}[X]$.

⋆ Cas des polynômes de degré impair

Commençons par un résultat que l'on peut obtenir par l'analyse :

Proposition IV.5 Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Démonstration. Il suffit de voir que $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$, ainsi les limites en plus et moins l'infini sont infini et de signes contraires. Donc le polynôme étant continu, il s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. ■

En conséquence, **un polynôme de degré impair n'est pas irréductible sur $\mathbb{R}$.**

⋆ Racine complexe d'un polynôme réel

Proposition IV.6 Soit P un polynôme réel, et α une racine dans $\mathbb{C}$ de P. Alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P.

De plus l'ordre de multiplicité de α dans P est le même que celui de $\overline{\alpha}$.

Remarquons que si $\alpha \notin \mathbb{R}$, alors α et $\overline{\alpha}$ sont distinctes (on a donc en fait deux racines).

Démonstration. On note $P = a_0 + a_1X + \dots a_nX^n$. On a

$$\begin{aligned} P(\overline{\alpha}) &= a_0 + a_1\overline{\alpha} + \dots a_n\overline{\alpha}^n \\ &= \overline{a_0 + a_1\alpha + \dots a_n\alpha^n} \\ &= \overline{P(\alpha)}. \end{aligned}$$

Ainsi : $P(\alpha) = 0 \iff P(\overline{\alpha}) = 0$.

Pour l'ordre de multiplicité, il suffit d'appliquer ce résultat aux dérivées successives de P. ■

On peut donc rassembler les racines de $P \in \mathbb{R}[X]$ en trois parties :
- les racines réelles,
- les racines complexes : $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$,
- les conjugués des précédentes : $(\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_p})$,

☆ **Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ en polynôme irréductible**

On obtient alors le résultat final :

Théorème IV.7 — Décomposition dans $\mathbb{R}$. Les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ sont les polynôme de degré 1, et les polynômes de degré 2 à discriminants strictement négatifs.

De plus pour un polynôme réel P de degré $n \geqslant 1$, on peut le factoriser sur $\mathbb{R}$ sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{l=1}^{q} (X - \alpha_l)^{d_l} \prod_{i=1}^{p} (X^2 + \gamma_i X + \delta_i)^{e_i},$$

avec :
- λ est le coefficient dominant de P,
- $(\alpha_l)_{i=l\dots q}$ les racines de P dans $\mathbb{R}$, la racina α_l ayant pour ordre de multiplicité d_l,
- les polynômes $X^2 + \gamma_i X + \delta_i$ sont tous à discriminants négatifs.

Démonstration. Plus qu'une démonstration, nous allons écrire un algorithme qui permet de passer de la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$ la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$.

Montrons tout d'abords que les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ sont les polynôme de degré 1, et les polynômes de degré 2 à discriminants strictement négatifs.

On a déjà vu que ces polynômes sont irréductibles, il est aussi clair que si P est de degré 2 avec un discriminant positifs, il a une racine donc n'est pas irréductible.

Soit donc un polynôme de degré supérieur ou égal à 3.

Ce polynôme a une racine sur $\mathbb{C}$, notée α.

Si α est réel, alors P est réductible. Si α n'est pas réel, alors $\overline{\alpha}$ est une autre racine de P, distinctes car $\overline{\alpha} \neq \alpha$. Donc $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})|P$, ce qui s'écrit :

$$\exists Q \in \mathbb{C}[X], \qquad P = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})Q$$

Or

$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2 \text{ est un polynôme réel,}$$

donc en fait Q est aussi un polynôme réel, de degré supérieur ou égal à 1, car degré P est supérieur à 3. Donc P n'est par irréductible.

Ainsi les seuls polynômes irréductibles sont ceux de degré 1 et ceux de degré 2 sans racines.

La suite de la proposition n'est qu'une généralisation de ce qui précède. Soit P un polynôme réel. Commençons par se ramener à un polynôme sans racine réelle. Soit $(\alpha_l)_{i=l\ldots q}$ les racines réelles de P avec d_l les ordres de multiplicité correspondants. On sait déjà que $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P = \prod_{l=1}^{q} (X-\alpha_l)^{d_l} Q.$$

Le polynôme Q est sans racines réelles, en effet :

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un réels distincts des racines de P, *i.e.* des $(\alpha_l)_{i=l\ldots q}$, alors $Q(\alpha)$ ne peut être nul, puisque cela impliquerai que α soit une nouvelle racine réelle de P.
- Si $Q(\alpha_i) = 0$, alors α_i est racine d'ordre au moins $d_i + 1$. Ainsi, aucune racine de P n'est racine de Q.

Remarquons aussi que le terme dominant de Q est le terme dominant de P.

On décompose alors Q sur $\mathbb{C}$ sous la forme ;

$$Q = \lambda \prod_i (X-\alpha_i)^{k_i}.$$

Les α_i étant forcément complexes, on les groupe par deux α_i et $\overline{\alpha_i}$, ces deux racines étant distinctes et avec le même ordre de multiplicité. On obtient :

$$\begin{aligned} Q =& \lambda \prod_{i=1}^{p} ((X-\alpha_i)(X-\overline{\alpha_i}))^{k_i} \\ =& \lambda \prod_{i=1}^{p} \left(X^2 - 2\Re(\alpha_i)X + |\alpha_i|^2\right)^{k_i} \\ =& \lambda \prod_{i=1}^{p} (X^2 + \gamma_i X + \delta_i)^{e_i}. \end{aligned}$$

en posant $\gamma_i = 2\Re(\alpha_i)$, et $\delta_i = |\alpha_i|^2$.

Ces polynômes sont bien sans racines réelles, ie à discriminant négatif. ■

✎ **À retenir :** Pour factoriser un polynôme P sur $\mathbb{R}$, on peut le factoriser sur $\mathbb{C}$, puis regrouper les racines complexes non réelles par deux, puisqu'on est sûr qu'à chaque racine complexes non réelle α, $\overline{\alpha}$ est aussi racine. Cette méthode est appelée **Méthode indirecte de factorisation sur $\mathbb{R}$.**

■ **Exemple IV.1** Décomposons sur $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^5 - 1$.

On a 5 racines dans $\mathbb{C}$ (les racines n-ième de l'unité), ce qui donne la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^5 - 1 = (X-1)\left(X - e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X - e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X - e^{i\frac{6\pi}{5}}\right)\left(X - e^{i\frac{8\pi}{5}}\right)$$

Une seule racine est réelle (1), les autres sont complexes non réelles, il faut donc les regrouper deux par deux. En plaçant les racines sur un cercle, on a facilement :

$$\overline{e^{i\frac{2\pi}{5}}} = e^{i\frac{8\pi}{5}} \qquad \text{et} \qquad \overline{e^{i\frac{4\pi}{5}}} = e^{i\frac{6\pi}{5}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left(X - e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X - e^{i\frac{8\pi}{5}}\right) &= \left(X - e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right) \\ &= X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\left(X - e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X - e^{i\frac{6\pi}{5}}\right) &= \left(X - e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right) \\ &= X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\end{aligned}$$

Au final on a la décomposition :

$$X^5 - 1 = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right)$$

■

IV.5 Somme et produit des racines d'un polynôme

✯ Relation entre coefficients et racines

Proposition IV.8 Soit un polynôme de degré n, $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$.

On le décompose en facteurs irréductibles (éventuellement sur $\mathbb{C}$), en écrivant :

$$P = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) \qquad \text{les } (\alpha_i) \text{ étant les racines (non distinctes).}$$

a_n étant le coefficient dominant de P

Alors, la somme des racines est

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

et le produit des racines est

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

En développant on peut exprimer tous les coefficients (a_k) en fonction des racines (α_i).

! Ne pas oublier le terme dominant.

Démonstration. Il suffit de développer. ■

■ **Exemple IV.2** Pour un polynôme de degré 4, on a :

$$\begin{aligned}
P =& a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \\
=& a_4(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)(X-\varepsilon) \\
=& a_4\Bigg(X^4 - (\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon)X^3 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\varepsilon+\beta\gamma+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon)X^2 \\
&+ (\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\gamma\varepsilon+\beta\gamma\varepsilon)X + (\alpha\beta\gamma\varepsilon)\Bigg)
\end{aligned}$$

On obtient donc les relations :

$$\begin{aligned}
-a_4(\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon) =& a_3 \\
a_4(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\varepsilon+\beta\gamma+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon) =& a_2 \\
a_4(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\gamma\varepsilon+\beta\gamma\varepsilon) =& a_1 \\
a_4(\alpha\beta\gamma\varepsilon) =& a_0.
\end{aligned}$$

■

✎ On voit que dans le développement de $a_n\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ il y a 2^n termes puisque dans chaque parenthèse contient deux termes. Devant X^k il y a $\binom{n}{k}$ termes : puisque cela corresponds à choisir k parenthèses où l'on choisit le X.
Sur l'exemple ci-dessus, on voit : la ligne du triangle de Pascal $(1,4,6,4,1)$.

✯ Cas des polynômes du second degré

Proposition IV.9 Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$ un polynôme de degré 2. (α,β) les deux racines dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes).

Alors on a :

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$$

$$\text{et}\quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

Proposition IV.10 Soit x et y deux nombres tels que $x+y=P$ et $xy=Q$, avec P et Q donnés. Alors x et y sont les racines du polynômes X^2-PX+Q.

Ainsi, on peut calculer deux nombres connaissant leur somme et leur produit.

Démonstration. On considère le polynôme $(X-x)(X-y)$, on a :

$$\begin{aligned}
(X-x)(X-y) =& X^2-(x+y)X+xy \\
=& X^2-PX+Q.
\end{aligned}$$

■

✯ Exemple des racines n-ième de l'unité

On a vu :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{2i\frac{k\pi}{n}} \right)$$

En appliquant ce qui précède, on peut calculer :

la somme des racines n-ièmes de l'unité $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\frac{k\pi}{n}} = 0$

le produit des racines n-ièmes de l'unité $\quad \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} e^{2i\frac{k\pi}{n}} = (-1)^{n-1}$

En effet, la première relation s'obtient par le terme de degré $n-1$ du polynôme $X^n - 1$, la deuxième par le terme constant.

Polynômes

Pelletier Sylvain — PC, Lycée Descartes

Les exercices sur les polynômes font appel à plusieurs notions d'algèbre et d'analyse.
Il faut donc revoir :

- La formule de Newton et l'identité de factorisation de Bernouilli.
- La trigonométrie : en particulier les formules d'Euler et de Moivre.
- Les complexes : les racines n-ième de l'unité, le nombre complexe j.
- La dérivation : en particulier le théorème de Rolle et la formule de Leibniz.
- L'arithmétique : c'est le même vocabulaire pour la divisibilité.
- Les systèmes.

Il faudra ajouter à cette liste l'algèbre linéaire.

⋆ L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1 Soit $P = (X+1)^5 - X^5$.
Montrer que $P = A \circ B$ avec $A = 5X^2 + 5X + 1$ et $B = X^2 + X$.
En déduire la valeur de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 (k+1)^2$$

Correction. Simple calcul, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (P(k))^2$$

Or :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 5(P(k))^2 + 5P(k) + 1 = (k+1)^5 - X^5$$

En sommant pour $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient :

$$5S_n + 5\sum_{k=1}^{n} P(k) + n = (n+1)^5 - 1.$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} P(k) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2 Montrer que la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$ est un polynôme de degré n dont toutes les racines sont distinctes et comprises entre -1 et 1.

Correction : On considère $f : x \mapsto (x^2-1)^n$ et on montre par récurrence la propriété pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$f^{(k)} \text{ a au moins } k \text{ racines dans }]-1, 1[$$

C'est le théorème de Rolle en cascade avec $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0$.

⋆ Étude de suites polynomiales

Exercice 3 Dérivée n-ième de la fonction tangente

Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ qu'il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ et de degré $n+1$, tel que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)),$$

la notation $\tan^{(n)}$ désignant la dérivée n-ième.

Préciser des liens entre P_n et P_{n+1}, et donner le coefficient dominant de P_n.

Correction : On trouve la relation $P_{n+1} = P_n'(1+X^2)$. Le résultat se démontre par récurrence. On obtient ensuite : $P_n = n!X^{n+1}$.

Exercice 4 Polynômes de Tchebychev.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$
2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et les racines de T_n.
3. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 1, \ T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n$$
4. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant 2^{n-1} tel que
$$\forall x \in [-1,1], \ P_n(x) \in [-1,1]$$
5. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire, on a $\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ avec égalité si et seulement si $P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$.
6. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \ \mathrm{ch}\,(n\theta) = T_n\,(\mathrm{ch}\,\theta)$$
En déduire que
$$(|x| \leqslant 1) \iff (|T_n\,(x)| \leqslant 1)$$
7. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, T_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
$$\left(x^2-1\right)y'' + xy' - n^2y = 0$$

⋆ Divisibilité

Exercice 5 On considère le polynôme $P = X^2 + X + 1$.

1. Déterminer les couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que P divise $X^5 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 1$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2010X^{2011} + 3X^2 + 1$ par P.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver deux réels a, b tels que $aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

Correction : il faut vérifier $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$, cela donne :

$$\begin{cases} a+b+1 = 0 \\ (n+1)a + nb = 0 \end{cases}$$

Exercice 7 Divisibilité

1. Montrer que le polynôme X^2+X+1 divise le polynôme $(X+1)^{2n+1}+X^{n+2}$ pour tout entier positif n.
2. Montrer que le polynôme X^2+X divise le polynôme $(X+1)^{2n+1}-X^{2n+1}-1$.
3. Montrer que le polynôme $(X-1)^2$ divise $\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)^2 - n^2X^{n-1}$.

Correction :

1. Il faut vérifier $P(j)=0$ et $P(j^2)=0$. En utilisant $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$.
2. Il faut vérifier $P(0)=0$ et $P(-1)=0$.
3. Il faut vérifier $P(1)=0$ et $P'(1)=0$.

✯ Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

Exercice 8 Décomposer $P=1+X+X^2+X^3+X^4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$, et rechercher par ailleurs les solutions de l'équation $P(x)=0$ en posant $y=x+\frac{1}{x}$.

En déduire l'expression exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Correction : comme vu en cours :

$$\begin{aligned}(X-1)P =& X^5-1=\prod_{k=0}^{5}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right)\\ =&(X-1)\left(X^2-2\cos\frac{2\pi}{5}X+1\right)\left(X^2-2\cos\frac{4\pi}{5}X+1\right)\end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition dans $\mathbb{C}$:

$$P=\left(X^2-2\cos\frac{2\pi}{5}X+1\right)\left(X^2-2\cos\frac{4\pi}{5}X+1\right)$$

On résout $P(x)=0$ en posant $y=x+\frac{1}{x}$ (0 n'est pas solution).

$$\begin{aligned}1+x+x^2+x^3+x^4 =& x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2\right)\\ =& x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right)\end{aligned}$$

On est donc ramené à l'équation $y^2+y-1=0$, on trouver deux racines, puis on résout $x+\frac{1}{x}=y$. Ce qui nous donne les 4 racines complexes. En identifiant on trouve la valeur demandée.

Exercice 9

1. Résoudre l'équation $z^3=1+i$.
2. Factoriser sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P(X)=X^6-2X^3+2$.

Correction : il faut écrire $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc on cherche $z=\rho e^{i\theta}$, cela donne :

$$\rho=2^{\frac{1}{6}} \qquad\qquad \exists k\in[\![0,2]\!],\ \theta=\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}$$

On cherche les racines de P en posant $y=x^3$, cela donne : $y^2-2y+2=0$, et donc $y=1+i$, d'où les 6 solutions sur $\mathbb{C}$. En les regroupant 2 à 2, on obtient la factorisation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ les polynômes

$$P=6X^6-5X^5-44X^4+44X^2+5X-6 \qquad \text{et} \qquad Q=\left(X^2+X+1\right)^2+\left(X^2+X+1\right)+1-X$$

Indication : pour P chercher une racine sous la forme $x+\frac{1}{x}$.

$\star$ **Racines et relations coefficients/racines**

Exercice 11

1. Montrer que le polynôme $P = 2X^3 - 6X + 1$ a trois racines réelles distinctes. On les note α, β, γ par ordre croissant.
2. Calculer $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha+\beta+\gamma$. *On pourra factoriser P.*

Correction : cours.

Exercice 12 Polynôme périodique

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.
2. En déduire que P est constant.

Correction : récurrence immédiate. P a une infinité de racines.

Exercice 13 Interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier i de $\{1,2,\dots,n\}$, on suppose donné n réels $a_1,\dots a_n$ distincts.
On note L_i le polynôme : $L_i = \prod\limits_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\ k\neq i}} (X-a_k)$.
Par exemple, si $n=3$, $a_1=-1$, $a_2=0$, et $a_3=1$, alors :

$$L_1 = X(X-1) \qquad L_2 = (X-1)(X+1) \qquad L_3 = X(X+1)$$

1. Vérifier que, pour tous entiers i et j de $\{1,2,\dots,n\}$, le réel $L_i(a_j)$ est nul lorsque i est différent de j, et est non nul lorsque i est égal à j.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Montrer qu'il existe un **unique** polynôme, que l'on note P_f, de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel que pour tout entier j de $\{1,2,\dots,n\}$, on a l'égalité $P_f(a_j) = f(a_j)$, et que ce polynôme est donné par la formule :

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i.$$

Exercice 14 Un exemple d'utilisation des fonctions symétriques élémentaires

On considère le polynôme $A = X^3 + X^2 + 3X + 2$. Soit (α,β,γ) ses racines dans $\mathbb{C}$.
Calculer les sommes :

$$S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n \qquad \text{pour } n \in [\![0,4]\!]$$

Correction : Déjà, en dérivant, on a $A' = 3X^2 + 2X + 3$ est sans racine réelle, donc l'une des racines est réelles, les deux autres sont complexes non réelles et conjuguées.

On écrit :

$$\begin{aligned} A =&(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)\\ =&X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma =& -1\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma =& 3\\ \alpha\beta\gamma =& -2 \end{aligned}$$

Ainsi, déjà $S_0 = 3$ et $S_1 = -1$. Pour S_2 :

$$\begin{aligned} 1 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) \\ &= S_2+6. \end{aligned}$$

Ainsi, $S_2 = -5$.

Pour S_3, on utilise la relation : $\alpha^3 = -\alpha^2 - 3\alpha - 2$. Cela donne :

$$S_3 = -S_2 - 3S_1 - 2S_0 = 5+3-6 = 3$$

Ensuite, de même :

$$\begin{aligned} \alpha^4 &= \alpha\alpha^3 = -\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha \\ &= -2\alpha^2 + \alpha + 2 \end{aligned}$$

Donc :

$$S_4 = -2S_2 + S_1 + 2S_0 = 10 - 1 + 6 = 4.$$

Pour continuer, on démontre par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha^n = a_n\alpha^2 + b_n\alpha + c_n$$

L'hérédité s'écrit :

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} &= \alpha\alpha^n \\ &= a_n\alpha^3 + b_n\alpha^2 + c_n\alpha \\ &= a_n\left(-\alpha^2 - 3\alpha - 2\right) + b_n\alpha^2 + c_n\alpha \\ &= (b_n - a_n)\alpha^2 + (c_n - 3a_n)\alpha - 2a_n. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} a_{n+1} = & b_n - a_n \\ b_{n+1} = & c_n - 3a_n \\ c_{n+1} = & -2a_n \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Il faut ensuite calculer les suites (a_n), (b_n) et (c_n) par ces relations. on aura alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = a_nS_2 + b_nS_1 + S_0.$$

⋆ Équations polynomiales

Exercice 15 Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

Indication : déterminer le degré de P et déterminer ses coefficients.

P est de degré 2. On écrit ensuite $P = aX^2 + bX + c$, facilement $b = 0$ et $c = -a$.

D'où l'ensemble des solutions. Attention, P est de degré 2 ou nul (degré $-\infty$).

Exercice 16 Soit P un polynôme à coefficients réels, non constant tel que :

$$(E) :\ P(X^2) = P(X)P(X-1)$$

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des polynômes qui vérifient (E).

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $(X^2+X+1)^m$ vérifie (E).
   Dans la suite, $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme qui vérifie (E).
2. Quel résultat du cours permet d'affirmer que P a une racine sur $\mathbb{C}$?
3. Le but de cette question est de démontrer que 0 n'est pas racine de P. On raisonne par l'absurde et on suppose que $P(0) = 0$.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n+1)^2.$$

(a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P(u_n) = 0$,

(b) Démontrer que la suite u_n est **strictement** croissante,

(c) En déduire que le polynôme P est nul, et conclure.

4. On veut démontrer que toutes les racines (complexes) de P sont de module 1. On raisonne de nouveau par l'absurde en supposant $\exists \alpha \in \mathbb{C}^*$, racine de P, telle que $|\alpha| \neq 1$.
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\alpha^{2^n}) = 0$.
   (b) Justifier que tous les termes de la suites $\left(\alpha^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont distincts.
   (c) En déduire que P est nul, et conclure.
5. Soient α une racine de P, et A le point du plan complexe d'affixe α.
   (a) Quelle information géométrique peut-on déduire de la question 4 ?
   (b) Vérifier que $(\alpha+1)^2$ est racine et en déduire que $|\alpha+1| = 1$. En déduire une autre information géométrique sur A.
   (c) Démontrer que $\alpha = j$ ou $\alpha = j^2$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (d) Démontrer que j **et** j^2 sont racines de P. Que peut-on dire de leur ordre de multiplicité ?
   (e) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(X) = (X^2+X+1)^m$.
6. Conclure.

Correction : exercice classique de résolution d'équations polynomiales par les racines.

1. simple calcul. Bien vérifier que $m > 0$ dont P non constant.
2. D'alembert-Gauss.
3. (a) Récurrence. Évaluer la relation en $1+u_n$
   (b) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n + 1$ et X^2+X+1 est sans racine réelle, donc strictement positif sur $\mathbb{R}$.
   (c) les valeurs $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ sont distinctes, il y en a donc une infinité. Et toutes ces valeurs sont racines. Donc P a une infinité de racines, donc P est nuls. Bien vérifier l'infinité de racines.
4. (a) Récurrence. Évaluer la relation en α^{2^n}. Bien noter α puissance 2^n.
   (b) On peut considérer i et j tel que $\alpha^{2^i} = \alpha^{2^j}$. On aura alors :

   $$\left|\alpha^{2^i}\right| = \left|\alpha^{2^j}\right| \qquad \text{égalité des modules } 2^i \ln|\alpha| = 2^j \ln|\alpha|$$

   on peut prendre le logarithme car c'est des réels.

   $$2^i = 2^j \text{ puisque } \ln\alpha \neq 0$$

   et donc $i = j$.
   Bien noter que $a^n = a^m$ ne donne pas $n = m$ si a est complexe non nul et différent de 1, il suffit que $a^{n-m} = 1$, ie que a est racine $n-m$-ième de l'unité. Par contre pour des réels, $a^n = a^m$ donne $n = m$ sauf si $a = 1$ ou $a = 0$.
   (c) Même rédaction$\{\alpha^n | n \in \mathbb{N}\ \}$ sont distincts donc infinité de racines.
5. (a) A est sur le cercle de trigonométrique.
   (b) Évaluer la relation en $1+\alpha$. A est sur le cercle de centre -1 et de rayon 1. Géométriquement, A vaut j ou ^{2}.
   (c) petit calcul en écrivant $\alpha = a+ib$ ou $\alpha = e^{i\theta}$ puis factorisation par angle de moitié.
   (d) P est à coefficients réels, donc si j est racine, $\overline{j}$ aussi et il y a le même ordre.
   (e) m est l'ordre de la racine j. Comme j et j^2 sont les seules racines, P se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme :

   $$P = \lambda(X-j)^m(X-j^2)^m\lambda(X^2+X+1)$$

   Il reste à trouver λ, ce qui se fait en regardant les termes dominants dans la relation. De plus $m > 0$ car P non constant.
6. Écriture propre de l'ensemble des solutions.

Exercice 17 [Centrale 2006]

Soit P un polynôme unitaire, scindé sur $\mathbb{R}$, de degré n, dont tous les coefficients appartiennent à $\{-1,0,1\}$.
On note $x_1,\dots,x_n$ ses racines et on suppose $P(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant 3$.

2. Montrer que le degré de P est au plus 3.
3. Déterminer les polynômes P convenant.

⋆ Polynômes et systèmes

Exercice 18 Mines

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des complexes deux à deux distincts et $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ des complexes deux à deux distincts tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,3\}^2, \ \alpha_i + \beta_j \neq 0.$$

On considère le système d'équations :

$$(\mathscr{S}) : \qquad \forall i \in \{1,2,3\}, \sum_{j=1}^{3} \frac{x_j}{\alpha_i + \beta_j} = 1,$$

d'inconnue $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$.

1. On note F la fraction rationnelle $\sum_{j=1}^{3} \frac{x_j}{X + \beta_j}$.
   Montrer que le système proposé est équivalent à :
   $$\forall i \in \{1,2,3\}, \quad F(\alpha_i) = 1.$$
2. Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{C}_2[X]$ tel que
   $$F = \frac{P}{\prod_{j=1}^{3} (X + \beta_j)}$$
3. On note $Q = \prod_{j=1}^{3} (X + \beta_j) - P$.
   Montrer que
   $$\forall i \in \{1,2,3\}, \ F(\alpha_i) = 1 \iff Q = \prod_{i=1}^{3} (X - \alpha_i)$$
4. En déduire les solutions de $(\mathscr{S})$.

Études de suites implicites

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Le but de cette fiche est de dégager quelques méthodes pour l'étude des suites implicites.

Une suite implicite est une suite définie par une équation. Pour tout entier n, on a une équation qui dépend de n :

$$(E_n) \qquad \text{résoudre} \qquad f_n(x) = 0 \text{ sur l'intervalle } I_n,$$

Dans l'équation (E_n), la fonction f_n ou l'ensemble I_n (ou les deux) dépendent de n.

La suite (u_n) est alors définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est la solution de (E_n) sur I_n.

Bien entendu, il est clair qu'on ne peut pas déduire de la fonction f_n le comportement de la suite (u_n) : ce n'est pas parce que la fonction f_n est croissante que la suite (u_n) sera croissante, etc.

Dans le cas général, il n'existe pas d'expression de u_n en fonction de n. Il est donc inutile d'en chercher. D'où l'utilité du théorème sur les suites monotones et bornées

Il faut écrire en gros sur le brouillon la relation qui définit u_n, *i.e.* l'équation (E_n). Ne pas hésiter à l'écrire en remplaçant n par $n+1$, $n-1$, etc. Cette relation donne la réponse à beaucoup de questions.

Il n'y a évidemment aucun résultat à connaître pour l'étude de ce type de suites. Il s'agit simplement ici d'étudier « en parallèle » deux exemples pour extraire des méthodes.

⋆ Existence de la suite

La première question de ce type d'exercices consiste souvent à montrer que la suite est bien définie, *i.e.* que l'équation (E_n) admet une unique solution sur I_n.

Pour cela, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction **strictement** monotone. On calcule donc le tableau de variations de la fonction f_n et on montre qu'elle s'annule une et une seule fois dans l'intervalle I_n

■ **Exemple IV.3** On considère l'équation $(E_n) : x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. Montrer que (E_n) admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^+$.

On considère $n \geqslant 3$ et la fonction $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto x^n + x^2 + 2x - 1$. Cette fonction est continue et **strictement** croissante sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions continues strictement croissantes (on peut aussi dériver).

En calculant rapidement les limites, on obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0	x_n	$+\infty$
Variations de $f_n(x)$	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

Le tableau de variation montre que la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$, donc que l'équation (E_n) admet une unique solution pour tout $n \geqslant 3$. ■

■ **Exemple IV.4** Soit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, la fonction $f_n(x) = nx + \ln(x)$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On note x_n cette solution.

Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ et **strictement** croissante comme somme de fonctions strictement croissantes.

On a de plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = -\infty$.

D'où le tableau de variations :

x	0	x_n	$+\infty$
Variations de $f_n(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

Le tableau de variation montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$. ■

Ce tableau de variations est important : il donne la réponse aux questions suivantes. Il faut le compléter au fur et à mesure que l'on obtient des informations sur la suite.

✯ Estimation plus précise de la suite

La seconde étape est souvent de préciser l'intervalle dans lequel la suite (u_n) évolue. En effet, puisqu'on ne sait rien sur la suite, on va utiliser le théorème sur la convergence des suites monotones. On commence donc par regarder si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a,b]$.

On utilise le tableau de variations, il suffit de calculer $f_n(a)$ et $f_n(b)$ et de les placer dans le tableau.

■ **Exemple IV.5** Pour la suite définie par : $x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$ et $x_n \in \mathbb{R}^+$. Montrons que $\forall n \geqslant 3$, $x_n \in [0,1]$.

Soit $n \geqslant 3$. Il s'agit de montrer que $x_n \leqslant 1$, or cela équivaut à $f_n(1) > 0$, puisque la fonction f_n est strictement croissante. Il suffit donc de constater que $f_n(1) = 3$. On complète donc le tableau de variations :

x	0	x_n	1	$+\infty$
Variations de $f_n(x)$	-1 ↗	0 ↗	3 ↗	$+\infty$

On obtient $\forall n \geqslant 3$, $f_n(1) > 0 = f_n(x_n)$ donc puisque f_n est strictement croissante on a au final $\forall n \geqslant 3$, $x_n \leqslant 1$, et donc $x_n \in [0,1]$. ■

■ **Exemple IV.6** Pour la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $nx_n + \ln(x_n) = 0$ et $x_n > 0$, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]0,1]$.

Il suffit de vérifier que $f_n(1) = n \geqslant 0$, donc comme f_n est strictement croissante, cela implique que $x_n \in]0,1]$.

On complète donc le tableau de variations :

x	0	x_n	1	$+\infty$
Variations de $f_n(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Ce qui montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]0,1]$. ■

✯ Étude graphique et numériques

Pour l'étude graphique, il s'agit de tracer la fonction f_n et de déterminer u_n comme l'intersection (dans l'intervalle I_n) de la courbe représentative de f_n et de l'axe horizontal. On utilise pour cela les fonctions du module `pylab` qui permettent de tracer des courbes.

Par exemple pour la suite définie par : $x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$ et $x_n \in \mathbb{R}^+$, cela donne :

```python
from pylab import *
x = linspace(0,1,100) # 100 valeurs régulièrement espacées entre 0 et 1
for n in range(3,15) :
    y = x**n + x**2 +2*x -1
    plot(x,y)
show()
```

Pour l'étude numérique, il s'agit essentiellement de reprogrammer la dichotomie (dont le principe doit être bien compris) en l'appliquant directement à la fonction f. L'entrée est alors l'entier n et la sortie est la valeur approchée de u_n.

Toujours pour le même exemple :

```python
def resoudEn(n, eps):
   """
   entrée: n = entier
           eps = une précision
   sortie: un = valeur approchée de la solution de En à eps près.
   on calcule un par dichotomie
   """

   a = 0
   fa = a**n + a**2 + 2*a -1 # valeur de f(a)
   b = 1
   fb = b**n + b**2 + 2*b -1 # valeur de f(b)

   while (b-a>eps) :
      c = (a+b) / 2
      fc = c**n + c**2 + 2*c -1
      if fa*fc >0 :
         a = c
         fa = fc
      else :
         b = c
         fb = fc
   return(c)
```

On calcule alors les valeurs de u_n, et on en déduit le comportement de la suite u_n.

✯ Monotonie

Pour montrer que la suite est monotone, il s'agit essentiellement de comparer u_n et u_{n+1}.

> Comme la fonction f_n est strictement monotone, cela revient à déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$. On applique donc la même méthode que pour comparer la suite (u_n) et un réel.

■ **Exemple IV.7** Pour la suite définie par : $x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$ et $x_n \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la monotonie de la suite.

On calcule $f_n(x_{n+1})$ pour un entier $n \geqslant 3$ quelconque :

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1.$$

Puisqu'on ne connaît pas l'expression explicite de x_{n+1}, il est impossible de calculer directement cette valeur. Par contre, on sait que x_{n+1} est la solution de E_{n+1}, ce qui s'écrit :

$$x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1 = 0 \qquad \textit{i.e.} \qquad x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1 = -x_{n+1}^{n+1}$$

En injectant cette relation, on obtient :

$$\begin{aligned} f_n(x_{n+1}) &= x_{n+1}^n + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1 \\ &= x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} = x_{n+1}^n(1 - x_{n+1}). \end{aligned}$$

Or, on a vu $x_{n+1} \in [0,1]$, ce qui donne $f_n(x_{n+1}) \geqslant 0$. On complète alors le tableau de variation :

x	0	x_n	x_{n+1}	1	$+\infty$
Variations de $f_n(x)$	-1 ↗	0 ↗	$\oplus$ ↗	3 ↗	$+\infty$

On a donc : $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_n(x_n)$ et comme la fonction f_n est strictement croissante, cela donne $x_{n+1} \geqslant x_n$. Comme n est quelconque, on en déduit : $\forall n \geqslant 3$, $x_{n+1} \geqslant x_n$ et donc la suite (x_n) est croissante. ■

■ **Exemple IV.8** Pour la suite définie par $nx_n + \ln(x_n) = 0$ et $x_n > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme f_n est strictement croissante, on a :

$$x_n \geqslant x_{n+1} \iff f_n(x_n) = 0 \geqslant f_n(x_{n+1}).$$

On calcule donc $f_n(x_{n+1})$.

$$\begin{aligned} f_n(x_{n+1}) &= nx_{n+1} + \ln(x_{n+1}) \\ &= nx_{n+1} - (n+1)x_{n+1} \qquad \text{car} \qquad (n+1)x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) = 0 \\ &= -x_{n+1} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant x_{n+1}$ et la suite (x_n) est décroissante. ■

Comme on ne connaît pas l'expression de la suite (u_n), on ne peut pas calculer $f_n(u_{n+1})$, mais on peut avoir le signe en utilisant la relation (E_{n+1}).

✯ Convergence de la suite

Classiquement ici on utilise le théorème sur la convergence des suites monotones. On obtient l'existence d'une limite l et un encadrement (large) en passant à la limite.

R Il arrive parfois que l'on fasse un raisonnement par l'absurde : on suppose que la suite converge, si on aboutit à une contradiction c'est que la suite tend vers $\pm\infty$.

■ **Exemple IV.9** Pour la suite définie par $x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$ et $x_n \in [0,1]$.

La suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite $l \in [0,1]$. ■

■ **Exemple IV.10** Pour la suite définie par $nx_n + \ln(x_n) = 0$ et $x_n \in]0,1]$.

La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite $l \in [0,1]$. ■

✯ Passage à la limite dans la relation (E_n)

Une fois que l'on a démontré que la suite converge, on peut passer à la limite dans la relation (E_n). Cela donne une relation vérifiée par l et donc la limite.

Attention à ce passage à la limite : souvent la limite de certains termes n'est pas claire.

■ **Exemple IV.11** Pour la suite définie par $x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$, qui converge vers $l \in [0,1]$.

Les termes $x_n^2 + 2x_n - 1$ tend clairement vers $l^2 + 2l - 1$. Par contre, x_n^n est une forme indéterminée : si x_n tend vers 1, la limite de x_n^n n'est pas claire. Pour contre-exemple, on peut regarder les limites de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \qquad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Il faut donc une estimation plus précise.

Dans cet exemple, on peut par exemple faire :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} > 0 \qquad \text{donc} \qquad \forall n \geqslant 3\ x_n \leqslant \frac{1}{2},$$

ce qui donne

$$\forall n \geqslant 3,\ x_n^n \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{et en particulier} \qquad x_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On peut donc passer à la limite dans la relation (E_n), ce qui donne la relation vérifiée par l : $l^2 + 2l - 1 = 0$.

On finit classiquement par déterminer les deux solutions de cette équation : $l = -1 + \sqrt{2}$ et $l = -1 - \sqrt{2}$. Enfin, comme on a $l \geqslant 0$ on en déduit que $l = -1 + \sqrt{2}$.

Au final, on a obtenu le résultat suivant $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1 + \sqrt{2}$. ■

■ **Exemple IV.12** Pour la suite définie par $nx_n + \ln(x_n) = 0$ et qui converge vers $l \in [0, 1]$.

Les limites des termes $\ln(x_n)$ et nx_n ne sont pas évidentes si $l = 0$. On procède donc par l'absurde. Supposons par l'absurde que la limite l soit strictement positive.

On a dans ce cas, $\lim_{n \to +\infty} \ln(x_n) = \ln(l)$, puisque la fonction ln est continue en $l > 0$. Donc en passant à la limite dans l'égalité : $nx_n + \ln(x_n) = 0$, on obtient que $\lim_{n \to +\infty} nx_n = -\ln(l)$. Or si $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l > 0$, on a par les opérations élémentaires sur les limites $\lim_{n \to +\infty} nx_n = +\infty$. D'où la contradiction.

Ainsi, $l = 0$. Au final, on obtient : $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.

■

⋆ **Calcul d'équivalent, ou de développement asymptotique de la suite** (u_n)

Pour avoir une idée de la vitesse de convergence de la suite, il n'y a qu'une méthode :

Écrire la relation (E_n) et l'utiliser.

17 — Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps qui sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces et sous-espaces vectoriels

I.1 Structure d'espace vectoriel

Définition I.1 Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :

l'addition interne on peut ajouter les éléments de E : si u et v sont éléments de E, et la somme $u+v$ est un élément de E,

la multiplication externe on peut multiplier les éléments de E par les éléments de $\mathbb{K}$: si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λu est un élément de E.

Les éléments de E sont appelés vecteurs par opposition aux éléments de $\mathbb{K}$ qui sont appelés scalaires.

Les propriétés que doit vérifier l'addition interne sont :

Associativité $\forall (u,v,w) \in E^3,\ (u+v)+w = u+(v+w)$,

Commutativité $\forall (u,v) \in E^2,\ u+v = v+u$,

Existence d'un élément neutre $\exists 0 \in E,\ \forall u \in E,\ u+0 = u$,

Existence d'un inverse $\forall u \in E,\ \exists! v \in E,\ u+v = 0$ l'élément v est le symétrique ou l'opposé de u noté $-u$.

Les propriétés que doit vérifier la multiplication externe sont :

Associativité $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$,

Distributivité $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$, et $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$,

Propriété de 1 $1u = u$

Notation I.1. *On abrégera souvent espace vectoriel en EV. Bien entendu cette abréviation ne doit pas apparaître sur vos copies.*

R Ces propriétés sont assez naturelles. Il n'y a souvent rien à vérifier.

On peut utiliser le symbole $\sum$ dans un espace vectoriel, faire des changements de variables, etc.

Attention à bien écrire scalaire $\times$ vecteurs dans cet ordre, il faut éviter d'écrire vecteur $\times$ scalaires.

✎ Ainsi, un espace vectoriel E est un ensemble dans lequel on peut ajouter naturellement des éléments et les multiplier par un scalaire. Il peut y avoir d'autres opérations (par exemple le produit), mais elles ne sont pas prise en compte dans cette structure.
Toujours bien repérer le vecteur nul dans un espace vectoriel pour être bien sûr de maîtriser le type des objets que l'on manipule.
Dans certain cas, on écrit 0_E et $0_{\mathbb{K}}$ pour les séparer. Mais la plupart du temps, c'est le contexte qui donne le type des objets qui doit être parfaitement maîtrisé.
De même, on ne met pas de flèches sur les vecteurs. On utilise souvent des lettres grecques pour les scalaires, mais ce n'est pas une obligation.

Proposition I.1 On vérifie facilement les propriétés pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u \in E$

$$0u = 0, \qquad \alpha 0 = 0, \qquad \alpha u = 0 \iff u = 0 \text{ ou } \alpha = 0.$$

R La propriété d'intégrité mixte est à retenir.

■ **Exemple I.1** Avant de voir les espaces vectoriels de référence, on peut noter que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev. ■

☆ Espaces vectoriels de référence

Proposition I.2 L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
Si Ω est un ensemble, l'ensemble K^Ω (noté aussi $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel.
Pour deux entiers (n, p), l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel.

Démonstration. Dans tous ces ensembles, on peut faire de manière naturelle des sommes d'éléments et des multiplications par des scalaires.
On a aussi un élément nul :

- Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$.
- Le polynôme nul de $\mathbb{K}[X]$
- La fonction nulle de $\mathbb{K}^\Omega$, la suite nulle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- La matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

■

✎ En pratique, on n'étudiera quasiment que ces espaces vectoriels et leur sous-espaces vectoriels.
Plus précisément, on introduira en premier les concepts sur $\mathbb{K}^n$ avant de les élargir aux autres espaces vectoriels.

Ces ensembles sont munis d'autre opérations :
- Le produit et la composée dans $\mathbb{K}[X]$
- La multiplication dans $\mathbb{K}^{\Omega}$.
- Le produit dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

La structure vectorielle ne considère pas ces opérations.

Proposition I.3 Si E et F sont des espaces vectoriels, alors $E \times F$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Le vecteur nul est $(0_E, 0_F)$, et les opérations sont naturellement :

$$\begin{aligned}(a,b)+(a',b') &= (a+a', b+b')\\ \lambda(a,b) &= (\lambda a, \lambda b).\end{aligned}$$

■

✯ Combinaison linéaire

Définition I.2 — Combinaison linéaire. Soit E un espace vectoriel.

Soit $u_1, \dots u_p$ une famille finie de vecteurs de E, on appelle combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_p$, tout vecteur de la forme :

$$\alpha_1 u_1 + \dots \alpha_p u_p = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k,$$

avec $(\alpha_k)_{k=1\dots p}$ p scalaires.

La structure d'espace vectoriel a été définie pour pouvoir y faire des combinaison linéaire de vecteurs !

✯ Exemples

■ **Exemple I.2** Le vecteur $(1,4,0,4)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,1)$ puisque :

$$(1,4,0,4) = (1,0,0,0) + 4(0,1,0,1)$$

■

■ **Exemple I.3** Le polynôme $P = X^2 + 3X + 3$ est combinaison linéaire des polynômes

$$\Big((X-1)X,\, X(X+1),\, (X-1)(X+1)\Big)$$

puisque :

$$\begin{aligned}&X^2+3X+3\\ =&-3(X-1)(X+1)+\frac{1}{2}(X-1)X+\frac{7}{2}X(X+1)\\ =&\frac{P(0)}{(-1)\times 1}(X-1)(X+1)+\frac{P(-1)}{(-2)\times -1}(X-1)X+\frac{P(1)}{1\times 2}X(X+1)\end{aligned}$$

On reconnaît les polynômes de Lagrange. ■

■ **Exemple I.4** Une suite (u_n) qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

est combinaison linéaire des suites $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(n2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

En effet, d'après le résultat sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on a :

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\alpha+\beta n\right)2^n$$

Donc au sens des suites :

$$\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \beta\left(n2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

■

R Il faut bien comprendre cette écriture : c'est une combinaison linéaire de suites.

■ **Exemple I.5** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto \cos(x+\theta)$ est combinaison linéaire des fonctions $\cos : x \mapsto \cos(x)$ et $\sin : x \mapsto \sin(x)$ car on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+\theta) = \cos(\theta)\cos(x) - \sin(\theta)\sin(x).$$

Ainsi :

$$f = \cos(\theta)\cos + \sin(\theta)\sin$$

au sens de l'égalité de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. ■

Contre-exemple : La fonction $x \mapsto \sin(2x)$ n'est pas une combinaison linéaire $x \mapsto \sin(x)$ et de $x \mapsto \cos(x)$.

En effet, supposons que l'on ait deux réels (α,β) tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$$

alors :

$$\begin{array}{rll} \text{pour } x = 0 \text{ on obtient} & 0 = \sin(0) = \alpha & \text{d'où } \alpha = 0 \\ \text{en remplaçant et posant } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ on obtient} & \sin(\pi) = \beta & \text{d'où } \beta = 0 \end{array}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 0$ d'où la contradiction.

On a l'écriture :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

mais cela n'est pas une combinaison linéaire (c'est un produit de fonctions).

■ **Exemple I.6** Soit $\omega > 0$, pour $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$c_k :\ x \longmapsto \cos\left(\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right)x\right) \qquad \text{et} \qquad s_k :\ x \longmapsto \sin\left(\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right)x\right)$$

Considérons la famille des fonctions :

$$\mathscr{F} = (s_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \bigcup (c_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$$

Dire qu'une fonction f est combinaison linéaire des fonctions de cette famille c'est dire que f s'écrit sous la forme :

$$f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k c_k + \beta_k s_k$$

avec (α_k) et (β_k) $2(n+1)$ réels.

Autrement dit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos\left(\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right)x\right) + \beta_k \sin\left(\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right)x\right)$$

Ceci n'est possible que si f est ω périodique et de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Une telle écriture est la décomposition de la fonction f en série de Fourrier, très utilisée en physique. ■

I.2 Sous-espaces vectoriels, généralités

Définition I.3 Soit E un espace vectoriel.

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel si :

$$0 \in F \qquad \text{et} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (u,v) \in F^2,\ \alpha u + v \in F.$$

Notation I.2. *On écrira souvent SEV à la place de sous-espace vectoriel, abréviation à ne pas utiliser dans une copie.*

On peut aussi dire d'une partie F de E est un sous-espace vectoriel si elle est :

- **stable par addition** :

$$\forall (u,v) \in F,\ u + v \in F$$

- **stable par multiplication externe** :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in F,\ \alpha u \in F.$$

- **non vide**. En fait, pour un sous-espace vectoriel, il est équivalent d'être non vide et de contenir 0.

On peut aussi dire que F est un sous-espace vectoriel de E si $F \subset E$ et si F est lui-même un espace vectoriel.

! Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, il faut vérifier que $F \subset E$ et $F \neq \emptyset$.

Proposition I.4 Si F est un sous-espace vectoriel et si $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de F alors toute combinaison linéaire de vecteur de la famille $\mathscr{F}$ est un vecteur de F.

Démonstration. F est lui-même un espace vectoriel ! ■

✎ $\{0\}$ et E sont les espaces vectoriels de E les plus simples (on dit parfois les triviaux).

■ **Exemple I.7** Dans l'ensemble des fonctions $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues, dérivables, $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^\infty$ sont des sous-espace vectoriel.

Dans l'ensemble des polynômes, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel.

Dans l'ensemble des matrices, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un SEV, ainsi que l'ensemble des matrices symétriques. ■

Exercice 1 Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont des espaces vectoriels :

- $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x\}$,
- $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1\}$,
- $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$,
- $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| = |y|\}$,
- $E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + z = 0\}$,
- $E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + z = 3\}$,
- $E_7 = \{(2a+b, 3a-b, a) | (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
- $E_8 = \{(a, e^a - 1) | a \in \mathbb{R}\}$
- $E_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + yx + y^2 = 0\}$

✎ On retiendra : pour qu'une partie de $\mathbb{K}^n$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, il faut qu'il soit défini par des équations linéaires.

⋆ Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition I.5 Soit F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriels de l'espace vectoriel E. On a alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

On peut généraliser : Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espace vectoriel de E, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

✎ Sauf cas triviaux (si l'un des espaces est inclus dans l'autre), l'union de deux sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel.

Démonstration. Clairement $0 \in F_1 \cap F_2$. Si $(x,y) \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a :

$$x + \lambda y \in F_1 \text{ et } x + \lambda y \in F_2 \text{ donc } x + \lambda y \in F_1 \cap F_2$$

Dans le cas de plusieurs SEV, la démonstration est la même. ■

⋆ Exemple de sous-espaces vectoriels

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un SEV de $\mathbb{K}^n$.

En effet, soit un tel système (à n inconnue) que l'on écrit sous la forme $AX = 0$, pour une certaine matrice A. On veut montrer que :

$$E = \left\{ X \in \mathbb{K}^n \middle| AX = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

On a :

- ⋆ $0 \in E$, puisque le vecteur nul est solution du système homogène, E est donc non vide
- ⋆ Si X et Y sont éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a alors :

$$\begin{aligned} A(X+\lambda Y) &= \underbrace{AX}_{0} + \lambda \underbrace{AY}_{0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

  et donc $X + \lambda Y \in E$. Ainsi, E est stable par combinaison linéaire.

Ces deux propriétés montrent que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Un tel sous-espace vectoriel est donc défini par des équations linéaires homogènes. On dit qu'il est représenté par des **équations cartésiennes**.

■ Exemple I.8

$$E = \left\{ (x,y,z) \middle| x + 2y = 0 \text{ et } x + y - z = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel. En effet, si on considère le système linéaire

$$\mathscr{S} \qquad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} ,$$

E est l'ensemble des solutions du système $\mathscr{S}$. ■

Pour une matrice A donnée, on note l'ensemble E des second membre Y, tel que le système linéaire $AX = Y$ (à n équations) admet au moins une solution, *i.e.*

$$E = \left\{ Y \in \mathbb{K}^n \middle| \exists X \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } AX = Y \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

En effet :

- ⋆ $0 \in E$, puisque le système homogène $AX = 0$ admet au moins une solution ($X = 0$), E est donc non vide.
- ⋆ si Y et Y' sont éléments de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on sait alors qu'il existe X et X' tel que $AX = Y$ et $AX' = Y'$ (puisque par définition de E ces systèmes admettent des solutions). Le vecteur $X + \lambda X'$ est alors solution du système $A(X + \lambda X') = Y + \lambda Y'$. Cela signifie donc que la système linéaire $AX = Y + \lambda Y'$ admet au moins une solution, donc $Y + \lambda Y' \in E$. L'ensemble E est donc stable par addition.

Ces deux propriétés montrent que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Un tel sous-espace vectoriel est donc défini par des paramètres : on peut écrire :

$$E = \left\{ AX \middle| X \in \mathbb{K}^p \right\}$$

(p est le nombre d'inconnue du système $\mathscr{S}$). On dit que l'on a une **représentation paramétrique** du sous-espace vectoriel E.

■ **Exemple I.9**

$$E = \left\{ (a+b+c, a-b, a+2c, b+c) \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En effet, si on considère le système linéaire $\mathscr{S}$

$$\begin{cases} a+b+c = x \\ a-b = y \\ a+2c = z \\ b+c = t \end{cases},$$

d'inconnue $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et de second membre $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, E est l'ensemble des seconds membres tels que le système linéaire $\mathscr{S}$ ait une solution. ■

Soit a une fonction $I \to \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène :

$$(H) \qquad y' + a(x)y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}$.

En effet, la fonction nulle est solution. Si y_1 et y_2 sont des solutions et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \ (y_1(x) + \lambda y_2(x))' &= y_1'(x) + \lambda y_2(x) \\ &= -a(x)y_1(x) + \lambda a(x)y_2(x) = \quad -a(x)\left(y_1(x) + \lambda y_2(x)\right) \end{aligned}$$

D'où $(y_1 + \lambda y_2)$ est solution.

R De la même manière, les solutions de :

$$(H) \qquad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

forment un sous-espace vectoriel.

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes divisible par A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

De la même manière : le polynôme nul est divisible par A et si P et Q sont divisibles par A et $\lambda \in \mathbb{K}$, $P + \lambda Q$ est divisible par A.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, L'ensemble des polynômes P vérifiant :

$$P(\alpha_1) = 0 \quad P(\alpha_2) = 0 \quad \dots \quad P(\alpha_n) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

De la même manière : le polynôme nul vérifie les conditions et si P et Q vérifient les conditions et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (P + \lambda Q)(\alpha_i) = P(\alpha_i) + \lambda Q(\alpha_i) = 0.$$

Dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, l'ensemble E des fonctions f vérifiant :

$$\int_0^1 f(t)dt = 0$$

est un SEV.

C'est aussi une conséquence de la linéarité de l'intégration.

I.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Définition I.4 — SEV engendré par une famille finie. Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$, une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E. Le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{F}$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$.

C'est-à-dire :

$$\left\{ x \in E \,\middle|\, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i \right\}$$

ou encore :

$$\left\{ \sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i \,\middle|\, (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$$

Notation I.3. *On note* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *ou encore* $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$*, le SEV engendré par la famille* $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$

Proposition I.6 $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Clairement, $0 \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ (il suffit de prendre tous les poids nuls).

Si x et y sont éléments de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, on écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \qquad \text{avec } (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$$

$$y = \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i \qquad \text{avec } (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{K}^p$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} x+\lambda y &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \lambda \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \lambda \beta_i)\, u_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F}). \end{aligned}$$

■

Pour savoir si un vecteur est dans un espace vectoriel engendré par une famille de p vecteurs, il faut **résoudre un système à n équations et p inconnues** (autant d'équations que de composante), les inconnues sont les poids $(\alpha_k)_{k=1\dots p}$.

Plus on ajoute des vecteurs à la famille, plus le sous-espace vectoriel engendré est grand (au sens de l'inclusion). Par convention : $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\} = \mathrm{Vect}(0)$.

$\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathscr{F}$. En effet, si A est un sous-espace vectoriel de E qui contient tous les vecteurs de la famille $\mathscr{F}$, alors A contient toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ et donc contient $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
En conséquence, pour montrer une propriété du type : $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p) \subset E$, où E est un sous-espace vectoriel, il suffit de vérifier que la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est incluse dans E, ce qui signifie que tous les vecteurs $(u_i)_i$ sont éléments de E.

■ **Exemple I.10** Si $u = (1,1,1)$ et $v = (0,1,2)$, pour savoir si $(1,2,4) \in Vect(u,v)$, on résout le système :

$$au + bv = (1,2,4) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ a+b & = & 2 \\ a+2b & = & 4 \end{array} \right.$$

qui ici n'a pas de solution, donc $(1,2,4) \notin Vect(u,v)$. ■

■ **Exemple I.11** L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de

$$(H) y' + a(x)y = 0 \text{ avec } a \text{ continue sur l'intervalle } I$$

est engendré par la famille constituée d'une seule fonction $\left(x \mapsto e^{-A(x)}\right)$, avec A une primitive de a sur I. On peut donc écrire :

$$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}\left(\left(x \mapsto e^{-A(x)}\right)\right)$$

■

■ **Exemple I.12** L'espace vectoriel engendré par $\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$ est $\mathbb{K}_n[X]$. ■

Voici quelques cas particuliers intéressants :

- Si la famille ne contient qu'un seul vecteur u, alors $\mathrm{Vect}(u) = \{\lambda u | \lambda \in \mathbb{R}\}$. C'est la **droite engendrée** par le vecteur u, *i.e.* de vecteur directeur u.
  Seul cas particulier, si $u = 0$ alors $\mathrm{Vect}(u) = \{0\}$.

- Si la famille contient 2 vecteurs u et v, non colinéaire, alors $\text{Vect}(u,v)$ est le **plan vectoriel** engendré par les vecteur u et v. (voir un peu plus loin dans le cas où ils sont colinéaires).

■ **Exemple I.13** On peut donc dire que l'ensemble E des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$(H) \qquad y' + a(x)y = 0$$

est une droite dans l'ensemble des fonctions. Puisque on peut écrire :

$$E = \left\{ y : x \mapsto \alpha e^{-A(x)} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \qquad \text{Vect}\left(x \mapsto e^{-A(x)}\right))$$

avec A une primitive de a.

De même, on voit que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est un plan dans l'ensemble des fonctions. ■

■ **Exemple I.14** Si on considère l'ensemble E des suites vérifiant la relation :

$$(R) \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2, b \neq 0.$$

alors c'est un sous-espace vectoriel des suites, plus précisément, c'est un plan, puisque le résultat sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 indique que

$$E = \text{Vect}\Big((u_n), (v_n)\Big)$$

où (u_n) et (v_n) sont les deux suites :

- dans le cas où l'équation caractéristique a deux racines réelles :

$$u_n = r_1^n \text{ et } v_n = r_2^n$$

- dans le cas où l'équation caractéristique a une unique racine réelle

$$u_n = r^n \text{ et } v_n = nr^n$$

- dans le cas où l'équation caractéristique n'a pas de racine réelle

$$u_n = \rho^n \cos(n\theta) \text{ et } v_n = \rho^n \sin(n\theta)$$

(voir le résultat sur les suites récurrentes linéaires pour les détails). ■

R Dans les deux exemples précédents, il faudrait considérer le cas où il s'agit de droites et non de plans. En effet, rien n'indique que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Enfin, lorsqu'on a un sous-espace vectoriel E dont on a une représentation paramétrique, il est souvent plus simple de trouver les vecteurs générateurs $(u_1, \dots, u_p)$ pour écrire $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ que de montrer que E est un sous-espace vectoriel en utilisant la définition. Ainsi, par exemple on a :

$$E = \{(a,b,b) | (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\left((1,0,0),\ (0,1,1)\right)$$

Proposition I.7 Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$, une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E.

On a :

$$\text{Vect}(0, u_1, u_2, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$$

Ainsi, **le vecteur nul ne change pas le SEV engendré**.

$$\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_2, u_1, \dots, u_p)$$

Ainsi, **on ne change pas l'espace vectoriel engendré en échangeant la place de deux vecteurs**.

Pour $\beta \neq 0$

$$\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \text{Vect}(\beta u_1, u_2, \dots, u_p)$$

Ainsi, **on ne change pas l'espace vectoriel engendré en multipliant un vecteur par un scalaire non nul**.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1 + \lambda u_2, u_2, \dots, u_p)$$

Ainsi, **on ne change pas l'espace vectoriel engendré en ajoutant à un vecteur, un autre vecteur multiplié par un scalaire**.

On retrouve bien sûr les opérations de transposition, dilatation et transvection.

On peut donc dire que l'on ne change pas l'espace vectoriel engendré par opérations élémentaires inversibles sur les vecteurs de la famille.

Démonstration. À chaque fois, il faut montrer des égalités d'ensemble. Les deux premières sont évidentes.

Pour la troisième, on a : $u_1 = \frac{1}{\beta}(\beta u_1)$, ainsi, $u_1 \in \text{Vect}(\beta u_1, u_2, \dots, u_p)$, et de manière évidente :

$$u_2 \in \text{Vect}(\beta u_1, u_2, \dots, u_p), \dots, u_p \in \text{Vect}(\beta u_1, u_2, \dots, u_p)$$

Donc : $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) \subset \text{Vect}(\beta u_1, u_2, \dots, u_p)$. On obtient l'autre inclusion de la même manière.

Pour la quatrième, on procède de même :

$$u_1 = (u_1 + \lambda u_2) - \lambda u_2 \in \text{Vect}(u_1 + \lambda u_2, u_2, \dots, u_p)$$

Donc de même, on a une inclusion : $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) \subset \text{Vect}(u_1 + \lambda u_2, u_2, \dots, u_p)$. Pour l'inclusion réciproque, on a évidement :

$$u_1 + \lambda u_2 \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$$

et donc l'inclusion réciproque. ■

R Si $x = \sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i$, alors

$$x = \alpha_1 (u_1 + \lambda u_2) + (\alpha_2 - \alpha_1 \lambda) u_2 + \sum_{k=3}^{p} \alpha_i u_i$$

Ce qui permet d'exprimer les « coordonnées » de x selon si on l'écrit comme une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ ou de $(u_1 + \lambda u_2, u_2, \dots, u_p)$.

I.4 Somme et somme directe de SEV

⋆ Somme de sous-espace vectoriel

Définition I.5 Soit E un EV et F et G deux SEV de E.
On définit $F+G$ comme :

$$F+G = \left\{ u+v \middle| u \in F, v \in G \right\}.$$

Ainsi, $F+G$ est l'ensemble des sommes que l'on peut faire avec un élément de F et un élément de G.

Lorsque l'on sait que $x \in F+G$, alors on sait que x s'écrit sous la forme $u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Pour montrer que $x \in F+G$, il faut construire $u \in F$ et $v \in G$, tels que $x = u+v$.

On a ici un symbole $+$ entre ensemble (plus précisément entre SEV). Ce symbole a toute les propriétés naturelles que l'on peut imaginer :

$$F+G = G+F, \quad (F+G)+H = F+(G+H) \quad F+\{0\} = F, \text{ etc.}$$

Proposition I.8 $F+G$ est un SEV de E. Plus précisément, $F+G$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) SEV de E qui contient F et G.

Démonstration. $F+G$ contient $0 = 0+0$, puisque E et F contiennent 0.
Si x et y sont éléments de $F+G$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on peut écrire :

$$x = u_1 + v_1 \text{ et } y = u_2 + v_2$$

$$\text{donc : } x + \lambda y = \left(\underbrace{u_1 + \lambda u_2}_{F} \right) + \left(\underbrace{v_1 + \lambda v_2}_{G} \right)$$

D'où $x + \lambda y \in F+G$.
Ceci prouve que $F+G$ est un SEV de E.
Soit maintenant A un SEV de E contenant F et G, alors nécessairement, A contient tout vecteur de la forme $u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$, donc A contient $F+G$. ■

■ **Exemple I.15** Si u_1 et u_2 sont des vecteurs de E, alors : $\mathrm{Vect}(u_1) + \mathrm{Vect}(u_2) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
D'une manière générale, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux familles de vecteurs de E, si on note $\mathscr{B}$ la famille obtenue en réunissant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$, alors :

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) + \mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}).$$

■

✯ Somme directe

Définition I.6 Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

On dit que F et G sont en somme directe si, pour tout $x \in F+G$ la décomposition sous la forme $x = u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ est unique.

Notation I.4. *Lorsque F et G sont en somme directe, on dit que la somme $F+G$ est directe et on note $F \oplus G$.*

Il faut bien comprendre cette notation :

- le symbole $+$ est un opérateur : à partir de deux SEV, on en crée un troisième,
- le rond autour du $+$ est un décorateur : cela indique que l'objet créé (le SEV somme) a une propriété intéressante : la décomposition est unique (la somme est directe).

Proposition I.9 Les sous-espace vectoriels F et G sont en somme directe si et seulement si :

$$F \cap G = \{0\}$$

Ainsi, l'unicité dans l'écriture $x = u+v$ est une conséquence de $F \cap G = \{0\}$

R On écrit : $F \cap G = \{0\}$ mais cela signifie : $F \cap G \subset \{0\}$, en effet l'autre inclusion est évidente car F et G sont des SEV donc contiennent le vecteur nul.

Ainsi, on dit : *l'intersection est réduite au vecteur nul* au sens où seul le vecteur nul est dans l'intersection.

Il ne faut jamais montrer l'inclusion réciproque. Pour montrer que $F \cap G = \{0\}$, on considère un vecteur $x \in F \cap G$ et on vérifie qu'il est nul.

Démonstration. Supposons F et G en somme directe. Considérons $x \in F \cap G$. On a alors

$$x = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$$

ie deux écriture dans $F+G$, que l'on peut donc identifier ce qui donne $x = 0$. Ainsi, le seul vecteur dans l'intersection est le vecteur nul et donc $F \cap G = \{0\}$.

Réciproquement, supposons $F \cap G = \{0\}$ Considérons un vecteur $x \in F+G$ et deux écritures de x :

$$x = u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \text{ avec } (u_1, u_2) \in E^2 \text{ et } (v_1, v_2) \in F^2.$$

Cela donne :

$$\underbrace{u_1 - u_2}_{\in F} = \underbrace{v_1 - v_2}_{\in G}$$

Ainsi, $u_1 - u_2 \in F \cap G$, et donc $u_1 - u_2 = 0$, par suite $v_1 - v_2 = 0$. On obtient bien l'unicité, la somme est donc directe. ■

✯ Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition I.7 Soit E un EV et F et G deux SEV de E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E, lorsque l'on a $E = F \oplus G$.

Notation I.5. *On dit que F est* ***un supplémentaire*** *de G. On verra que le supplémentaire n'est pas unique.*

! Ne pas confondre supplémentaires en complémentaires cela n'a rien à voir.

Si $E = F \oplus G$, alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme $u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Autrement dit :

$$\forall x \in E,\ \exists!(u,v) \in F \times G,\ x = u+v$$

On peut aussi dire que l'application :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} F \times G & \to & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array} \right. \quad \text{est bijective.}$$

Pour cette application, on a :

$$\begin{aligned} \phi \text{ est injective si et seulement si la somme } F+G \text{ est directe} \\ \text{cad si et seulement si } F \cap G = \{0\} \\ \phi \text{ est surjective si et seulement si } E = F+G \end{aligned}$$

■ **Exemple I.16** Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathscr{I} \oplus \mathscr{P} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

En effet, toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (exercice classique fait en début d'année). ■

■ **Exemple I.17** Dans l'ensemble des matrices carrées, les matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires. Ce qui s'écrit :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}).$$

■

En utilisant la caractérisation des SEV en somme directe, on peut éviter de faire unicité/analyse/synthèse et faire intersection/analyse/synthèse en utilisant la proposition :

Proposition I.10 F et G sont supplémentaires si et seulement si :

$$E = F+G \text{ et } F \cap G = \{0\}$$

Démonstration. C'est une redite de $F+G$ est en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. ■

■ **Exemple I.18** Vect$((1,0))$ et Vect$((0,1))$ sont deux SEV supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Vect$((1,0))$ et Vect$((1,1))$ sont deux SEV supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Cela montre en particulier qu'il n'y a pas d'unicité du supplémentaire.
Intuitivement, dans l'espace $\mathbb{R}^3$, si E est un plan vectoriel et D une droite vectorielle qui n'est pas incluse dans le plan alors $E \oplus D = \mathbb{R}^3$. ■

Pour montrer $E = F + G$, on ne montre que la partie $E \subset F + G$, l'autre partie étant évidente, puisque F et G sont des SEV de E.
En résumé, pour vérifier que $E = F \oplus G$, on vérifie :
- que F et G sont des SEV de E.
- que $F \cap G = \{0\}$,
- que tout vecteur de E s'écrit sous la forme $u + v$ avec $u \in E$ et $v \in F$

■ **Exemple I.19** Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Les ensembles :

$$F = \left\{ Q \in \mathbb{K}[X] \middle| \deg(Q) < \deg(P) \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{ PQ \middle| Q \in \mathbb{K}[X] \right\}$$

sont deux sous-espace vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.
En effet, déjà c'est des SEV de $\mathbb{K}[X]$. De plus pour un polynôme $Q \in F \cap G$, on aurait alors :

$$Q \text{ s'écrit } Q = PA \text{ avec } A \in \mathbb{K}[X]$$
$$\deg(Q) < \deg(P)$$

de la relation $\deg(Q) = \deg(P) + \deg(A)$, cela donne : $\deg(A) = -\infty$, et donc $A = 0$. Par suite $Q = 0$. L'intersection $F \cap G$ est donc réduite au vecteur nul.
Considérons ensuite un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ quelconque. On a alors par application de la division euclidienne :

$$Q = PA + R \text{ avec } (A, R) \in (\mathbb{K}[X])^2 \text{ et } \deg(R) < deg(P).$$

or $PA \in G$ et $R \in F$. D'où $Q \in G + F$.
Au final, on a bien :

$$G \oplus F = \mathbb{K}[X].$$

■

II Familles finies de vecteurs

Dans cette section, on s'intéresse aux propriétés d'une famille finie $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de E.

II.1 Famille finie libre et liée

Définition II.1 La famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est libre si la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle triviale où tous les poids sont nuls.
C'est-à-dire :

$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_p = 0 \right)$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

Attention aux parenthèses dans cette proposition.

Écris avec la contraposé, cela devient :

$$\forall(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in\mathbb{K}^n,\ \left((\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\neq(0,\ldots,0)\Longrightarrow\sum_{k=1}^{p}\alpha_k u_k\neq 0\right)$$

i.e. dès qu'un poids est non nul, la combinaison linéaire est non nulle.
La définition d'une famille liée est donc :

$$\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in\mathbb{K}^n,\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\neq(0,\ldots,0)\text{et}\sum_{k=1}^{p}\alpha_k u_k\neq 0$$

La définition d'une famille liée est qu'il existe une combinaison linéaire qui donne le vecteur nul :

$$\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_p u_p=0,$$

dont l'un des poids α_k est non nul.

Pour comprendre cette définition, supposons pour simplifier les notations que ce soit α_1 qui est non nul. On a alors

$$u_1=-\frac{1}{\alpha_1}\left(\alpha_2 u_2+\cdots+\alpha_p u_p\right).$$

Autrement dit, u_1 *s'exprime en fonction des autres*.

Dans le cas général, cela signifie que l'un des vecteurs s'exprime en fonction des autres (un de ceux dont le poids est non nul dans la définition).

Réciproquement, supposons qu'un des vecteurs soit combinaison linéaire des autres. Pour simplifier, supposons que l'on ait une équation du type :

$$u_1=\alpha_2 u_2+\cdots+\alpha_p u_p$$

En écrivant cette relation sous la forme

$$1\times u_1-\alpha_2 u_2-\cdots-\alpha_p u_p=0,$$

on a trouvé une combinaison linéaire qui donne le vecteur nul, et dont un des poids au moins (le premier qui vaut 1) est non nul. La famille est donc liée.

On vient donc de démontrer :

Proposition II.1 Une famille est liée si et seulement si au moins l'un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres.

Ce qui précède peut s'écrire ainsi : si $u_1\in\mathrm{Vect}(u_2,\ldots,u_p)$, alors la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est liée.
Si la famille est libre, on ne peut pas trouver d'équation linéaire reliant un des vecteurs aux autres.

Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille liée, alors l'un des vecteurs s'exprime en fonction des autres. On peut avoir plusieurs vecteurs qui vérifient cette propriété mais pas nécessairement tous les vecteurs. Supposons que cela soit le vecteur u_i. On a alors une écriture de la forme :

$$u_i = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{i-1}u_{i-1} + \alpha_{i+1}u_{i+1} + \cdots + \alpha_p u_p$$

pour $(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_p)$ $p-1$ scalaires.
En faisant l'opération sur la famille de vecteur :

$$u_i \leftarrow u_i - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \cdots - \alpha_{i-1}u_{i-1} - \alpha_{i-1}u_{i-1} - \cdots - \alpha_p u_p$$

qui corresponds bien sûr une suite d'opérations élémentaires :

$$\begin{aligned} u_i &\leftarrow u_i - \alpha_1 u_1 \\ u_i &\leftarrow u_i - \alpha_2 u_2, \text{etc.} \end{aligned}$$

le vecteur u_i devient alors le vecteur nul. Comme ces opérations élémentaires conservent l'espace vectoriel engendré, cela donne :

$$\operatorname{Vect}(u_1,\dots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\dots,u_p) = \operatorname{Vect}(u_1,\dots,u_{i-1},0,u_{i+1},\dots,u_p)$$

Or clairement, le vecteur nul ne sert à rien pour l'espace vectoriel engendré. On obtient alors :

$$\operatorname{Vect}(u_1,\dots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\dots,u_p) = \operatorname{Vect}(u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_p)$$

Ainsi, si l'un des vecteurs s'exprime en fonction des autres, alors par des opérations élémentaires, on peut l'enlever de la famille sans changer l'espace vectoriel engendré.

Remarquons que si on considère une famille libre, si on en extrait une partie, alors la famille reste libre, mais pas si on en ajoute.
Au contraire, si la famille est liée, alors elle reste liée si on en ajoute, tandis qu'elle peut devenir libre si on en enlève.
Autre manière de voir : $\mathscr{F}$ est une famille de E et a un vecteur de E. Si $a \in \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$, alors en ajoutant le vecteur a à $\mathscr{F}$, on obtient une famille liée. Au contraire, si $a \notin \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$, alors en ajoutant le vecteur a à $\mathscr{F}$, on gardera une famille libre.

> Pour montrer qu'une famille est liée/libre, on résout un **système linéaire homogène**, d'inconnue les poids $(\lambda_i)_{i=1\dots p}$. Plus précisément, on montre que $(0,\dots,0)$ est la seule solution.

■ **Exemple II.1** Soit $x=(1,1,1)$, $y=(1,2,1)$, $z=(3,2,1)$, et $t=(1,2,3)$. Pour regarder si la famille (x,y,z,t) est libre, on faire le système :

$$ax+by+cz+dt=0$$

$$\text{qui donne } \begin{cases} a+b+3c+d &= 0 \\ a+2b+2c+2d &= 0 \\ a+b+c+3d &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a+b+3c+d &= 0 \\ b-c+d &= 0 \\ -2c+2d &= 0 \end{cases}$$

On voit facilement que $a=b=c=d=0$ n'est pas la seule solution. De plus, une solution non nulle, par exemple $(-4,0,1,1)$ donne une relation linéaire des vecteurs (x,y,z,t) : $-4x+z+t=0$. Ainsi, le vecteur t s'exprime comme une combinaison linéaire des autres vecteurs. C'est le cas de x et z, mais pas de y.

On a par opérations élémentaires sur les vecteurs de la famille :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(x,y,z,t) &= \mathrm{Vect}(x,y,z,t-4x) = \mathrm{Vect}(x,y,z,t-4x+z) = \mathrm{Vect}(x,y,z,0)\\ &= \mathrm{Vect}(x,y,z)\end{aligned}$$

Ainsi, on peut enlever le vecteur t de la famille sans changer l'espace vectoriel engendré.

Par contre, si on regarde juste la famille (x,y,z), on a le système

$$ax+by+cz=0$$

$$\text{qui donne} \begin{cases} a+b+3c &= 0\\ a+2b+2c &= 0\\ a+b+c &= 0\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2c &= 0\\ b+c &= 0\\ a+b+c &= 0\end{cases}$$

au final $a=b=c=0$.

Donc cette famille est libre. ■

Dire qu'une famille constitué d'un seul vecteur u est libre, c'est dire que u est un vecteur non nul,
Toute famille qui contient le vecteur nul est liée,
Tout famille contenant deux fois le même vecteur est liée.
La base canonique est clairement une famille libre.

La notion de famille génératrice est relative à **l'unicité** des n coefficient (λ_i) (des « *cordonnées* »), qui permettent d'écrire le vecteur x sous la forme d'une combinaison linéaire :

$$x = \lambda_1 u_1 + \dots \lambda_p x_p.$$

En effet, si un vecteur s'écrit à la fois avec les cordonnées (λ_i) et les coordonnées (λ_i'), alors c'est que

$$\begin{aligned}0 =& x-x\\ =&(\lambda_1-\lambda_1')u_1+(\lambda_2-\lambda_2')u_2+\cdots+(\lambda_n+\lambda_n')u_n\\ =&\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda_i')u_i.\end{aligned}$$

et donc comme la famille est libre que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i - \lambda_i' = 0$, soit $\lambda_i = \lambda_i'$.

> On voit donc que **l'unicité de l'écriture comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ est équivalente à la liberté de la famille $\mathscr{F}$.**

■ **Exemple II.2** Soit les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$u : x \mapsto \cos(x), \qquad v : x \mapsto \cos(2x), \qquad w : x \mapsto \cos(3x)$$

Montrons que la famille constituée de (u, v, w) est libre.
Pour cela, on considère l'équation :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \text{ d'inconnue } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Cette équation signifie que $\alpha u + \beta v + \gamma w$ est la fonction nulle.
On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \cos(x) + \beta \cos(2x) + \gamma \cos(3x) = 0.$$

On peut évaluer cette expression en plusieurs valeurs, cela donne :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma = 0 &\text{ avec } x = 0 \\ -\beta = 0 &\text{ avec } x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 0 &\text{ avec } x = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

On voit que la seule solution est la solution triviale : $(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Ainsi, la famille (u, v, w) est libre.
Ainsi, si une fonction f s'écrit sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \cos(2x) + \gamma \cos(3x)$$

alors cette écriture est unique.
Cela se généralise et montre l'unicité du développement en série de Fourrier. ■

✯ Cas des famille de polynôme de degrés échelonnés

Définition II.2 Soit $\mathscr{F} = (P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$. La famille $\mathscr{F}$ est de degrés échelonnés si :

$$P_0 \neq 0 \text{ et } \deg(P_0) < \deg(P_1) < \cdots < \deg(P_n).$$

Proposition II.2 Une famille de polynômes de degrés échelonnés est libre.

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. En utilisant :

$$\mathscr{P}(n) : \text{"Toute famille de degrés échelonnés de } n \text{ polynômes est libre."}$$

Pour $n = 0$, il n'y a qu'un polynôme P_0 et on a fait l'hypothèse $P_0 \neq 0$.
Soit n fixé, tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Considérons une famille de $n+2$ polynômes de degrés échelonnés.
On considère une combinaison linéaire qui donne le polynôme nul :

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k P_k = 0$$

Supposons par l'absurde $\alpha_{n+1} \neq 0$. On regarde alors le degré :

$$\deg\left(\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k P_k\right) = \deg(\alpha_{n+1} P_{n+1}) = \deg(P_{n+1}) = -\infty.$$

D'après la proposition sur le degré d'une somme : ici tous les degrés sont différents, donc le degré de la somme est le maximum des degrés, donc celui de $\alpha_{n+1}P_{n+1}$. Cela donne $P_{n+1} = 0$, et donc une contradiction. On en déduit que $\alpha_{n+1} = 0$. On peut donc ré-écrire la combinaison linéaire $(*)$ avec cette fois-ci n polynômes :

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = 0$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, cela donne que tous les α sont nuls, et donc que la famille est libre. D'où l'hérédité et la conclusion. ■

✎ On peut aussi obtenir ce résultat en dérivant la relation : $(*)$.

II.2 Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel

Définition II.3 — Famille génératrice. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E, on dit qu'une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ d'éléments de F est génératrice du SEV F si $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Autrement dit si tout vecteur de F est combinaison linéaire de des vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$.

R Si une famille $\mathscr{F}$ est génératrice du SEV F c'est qu'elle est constituée de vecteurs qui sont tous dans F.

Donc avant de démontrer que $\mathscr{F}$ est génératrice du SEV F, on vérifie rapidement que $\mathscr{F}$ est constituée de vecteur de F.

La famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ la plus simple est la **base canonique**, c'est la famille constituée de n vecteur :

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,\dots,0) \\ e_2 & = & (0,1,\dots,0) \\ \vdots & & \\ e_n & = & (0,0,\dots,1) \end{array}$$

elle est clairement génératrice, le vecteur $(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

■ **Exemple II.3** Soit $E = \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} F =& \left\{(x,y,z,t) \middle| x+y+z+t=0\right\} \text{ un SEV de } E \\ t =& (1,1,-1,-1) \\ u =& (1,-1,1,-1) \\ v =& (1,-1,0,0) \\ w =& (0,0,1,-1) \\ \mathscr{F} =& (t,u,v,w) \end{aligned}$$

clairement $\mathscr{F}$ est une famille de F.

Pour montrer que $\mathscr{F}$ est génératrice de F, on considère un vecteur $a \in F$, et on regarde le système :

$$a = \alpha t + \beta u + \gamma v + \delta w \text{ d'inconnue } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.$$

En notant $a = (x, y, z, t)$, cela donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

On résout ce système, en utilisant l'information $x + y + z + t = 0$ (car $a \in F$). Plus précisément, on vérifie que ce système admet des solutions. ■

✎ Si une famille est génératrice, si on ajoute des vecteurs, la famille est toujours génératrices, au contraire, si on en enlève, elle peut perdre son caractère génératrice (ou pas).

✎ La notion de famille génératrice est relative à **l'existence** de n coefficient (λ_i) (des « *cordonnées* »), qui permettent d'écrire le vecteur x sous la forme d'une combinaison linéaire :

$$x = \lambda_1 u_1 + \dots \lambda_p u_p$$

La famille est génératrice de F si pour tout vecteur $x \in F$, une telle écriture existe.

✎ Pour montrer qu'une famille est génératrice, on résout l'équation $\lambda_1 u_1 + \dots \lambda_p u_p = x$, d'inconnue $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ pour $x \in F$ quelconque.
Cela revient à résoudre un système à p inconnue, avec un second membre quelconque.

✎ La notion de famille génératrice dépend du SEV dans lequel on considère les vecteurs : Si E est un EV, qui contient deux SEV F et G avec $G \subset F$, alors une famille $\mathscr{F}$ peut être génératrice de G sans être génératrice de F ou de l'espace entier E.
De toute manière une famille est toujours génératrice d'un espace : elle est génératrice par définition de l'espace engendré $Vect(\mathscr{F})$.
Par contre, le fait qu'elle soit libre ne dépend du fait qu'on considère les vecteurs comme appartenant à l'espace entier E, le SEV F ou à $\text{Vect}(\mathscr{F})$.

R Si on dit la famille $\mathscr{F}$ est génératrice, sans préciser le SEV, c'est sous-entendu de l'espace entier.

■ **Exemple II.4** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2), F le SEV des polynômes P vérifiant $P(0) = 0$, et les polynômes :

$$L_1 = X(X+1) \text{ et } L_2 = X(X-1)$$

la famille $\mathscr{F} = \left(L_1, L_2\right)$ est alors une famille de vecteurs de F.

Pour vérifier que $\mathscr{F}$ est génératrice de F, on considère un polynôme P vérifiant $P(0) = 0$, et on cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$P = \alpha L_1 + \beta L_2$$

L'analyse est facile : en évaluant en 1 et en -1, on trouve la valeur de α et β Il reste à vérifier (pour la synthèse) que cette relation est bien vérifiée (au sens de l'égalité de polynômes). Pour cela, il suffit de voir que $P - \alpha L_1 - \beta L_2$ est un polynôme de degré au plus 2 qui a trois racines (0, 1 et -1). ■

II.3 Bases

Définition II.4 Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.

✎ Une base peut être finie ou infinie. Par exemple, il est clair que $\big((0,1),(1,0)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, c'est la base canonique. Certains espaces vectoriels n'admettent pas de base finie (constituée d'un nombre fini de vecteur). C'est le cas de $\mathbb{K}[X]$ ou de $K^{\mathbb{N}}$.
Principalement, on travaillera dans des espaces de dimension fini, c'est-à-dire qui admette une base finie.

✎ Pour une famille $\mathscr{F}$, on a vu que :
- si on ajoute des vecteurs, l'espace vectoriel engendré peut grossir. On peut donc intuitivement ajouter des vecteurs, jusqu'à avoir une famille génératrice.
- si la famille $\mathscr{F}$ est liée, alors l'un des vecteurs s'exprime en fonction des autres et que l'on peut enlever ce vecteur sans changer l'espace vectoriel engendré.

Pour une base ce n'est pas possible : on a une famille de E telle que :
- l'espace vectoriel engendré est E entier, il est donc inutile d'en ajouter,
- si on enlève un vecteur, on change l'espace vectoriel engendré et donc on perds l'aspect génératrice.

✎ La notion de base dépend donc de l'espace considéré E.
Par exemple, Une famille est libre si et seulement si elle est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. En effet, une famille $\mathscr{F}$ est génératrice (par définition même) de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
C'est donc une base de ce sous-espace vectoriel si et seulement si elle est libre.

■ **Exemple II.5**
- $\{(1,0),(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$,
- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, d'une manière générale, **la base canonique est une base de** $\mathbb{K}^n$ (puisqu'elle est libre et génératrice). On en déduit en particulier que $\mathbb{K}^n$ **est de dimension** n.
- $\{(1,1),(1,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$,
- $\{(0,0,1),(1,1,0)\}$ est une base du sous-espace vectoriel : $\big\{(a,a,b) | (a,b) \in \mathbb{R}^2\big\}$. Il s'agit donc d'un plan vectoriel.
- $\{(1,1)\}$ est une base du sous espace vectoriel $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\big\}$, qui est dont une droite vectorielle. $\{(-1,-1)\}$ est une autre base.

- La base canonique contient n vecteurs, donc la dimension de $\mathbb{K}^n$ est n. Les autres bases contiendront donc encore n vecteurs. Par exemple, si on note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canoniques, alors $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, \ldots, \sum_{i=1}^n e_i)$ est une autre base de $\mathbb{K}^n$.

■

■ **Exemple II.6** Considérons $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de taille 3. Une base est alors constituée des 6 matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

✯ Coordonnées dans une base

Proposition II.3 Soit E un EV, on suppose que $\mathscr{B}$ admet une base finie et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. On a alors :

$$\forall x \in E, \exists!(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$$

Les $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$.

Notation II.1. *Une fois la base $\mathscr{B}$ choisie, on note : $x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_{\mathscr{B}}$ pour dire* $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$

Ainsi si E admet une base $\mathscr{B}$ finie, une fois fait le choix de la base sur E, on peut identifier E et $\mathbb{K}^p$.

Démonstration. Le fait que la base soit génératrice assure l'existence de ces coordonnées, comme on l'a vu, le fait que la famille soit libre assure l'unicité. ■

R C'est une équivalence : si une famille$(e_1, \ldots e_p)$ permet d'écrire tout vecteur x comme une combinaison linéaire des vecteurs $(e_1, \ldots e_p)$, alors c'est clairement une base.

✎ Pour un vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les coordonnées dans la base canonique $\{(1,0), (0,1)\}$, sont simplement (x, y), tandis que dans la base $\{(1,1,)(1,0)\}$, les coordonnées sont $(y, x-y)$.
Ainsi, les coordonnées dépendent de la base choisie, on verra comment exprimer lors d'un changement de base, les coordonnées selon la base. Un des principes de l'algèbre linéaire est de choisir la base la mieux adaptée au problème posé.
Si besoin, on note en indice dans quel base on considère les coordonnées, sinon c'est que c'est la base canonique.

On peut aussi remarquer que les coordonnées dépendent de l'ordre des vecteurs dans la famille $\mathscr{B}$, alors que le fait d'être libre ou génératrice de E ne dépend pas de l'ordre.

✎ Dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_p)$, le vecteur e_i a pour coordonnées

$$(0,\dots \quad ,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1}, \quad 0,\dots)_{\mathscr{B}}$$

■ **Exemple II.7** On a vu que dans $\mathscr{S}_3$, une base est constituée des 6 matrices :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, avec cette base notée $\mathscr{B}$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = \Big(a, d, f, b, e, c\Big)_{\mathscr{B}}$$

■

■ **Exemple II.8** Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on a vu que (L_1, L_2) est génératrice de F, avec F le SEV des polynômes nuls en 0 et $L_1 = X(X+1)$ et $L_2 = X(X-1)$. Plus précisément, on a vu :

$$\forall P \in F,\ P = \frac{1}{2}P(1)L_1 + \frac{1}{2}P(-1)L_2$$

On peut vérifier que (L_1, L_2) est libre, en effet, si :

$$\alpha L_1 + \beta L_2 = 0$$

alors en évaluant en 1, on obtient $2\alpha = 0$, puis en évaluant en -1, $\beta = 0$.

Ainsi, $\mathscr{B} = (L_1, L_2)$ est une base de F.

On peut alors écrire :

$$P = \left(\frac{1}{2}P(1), \frac{1}{2}P(-1)\right)_{\mathscr{B}}.$$

■

⋆ Matrice colonne des coordonnées dans une base

Soit E un espace vectoriel qui admet une base finie $\mathscr{B}(e_1, \dots, e_p)$.

✎ Tout vecteur $x \in E$, admet des coordonnées $(x_1, \dots x_p)$ dans la base $\mathscr{B}$, on peut donc représenter x par un vecteur de taille p , appelé matrice colonne des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$. Ce vecteur est :

$$Mat_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Toute famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ constituée de n vecteurs, peut être représenté par $n \times p$ coefficients : les p coordonnées de chacun des n vecteurs. Avec la convention que pour j compris entre 1 et n, le vecteur u_j s'écrit selon $u_j = \sum_{i=1}^{p} (u_j)_i e_i$, *i.e.* a pour coordonnées les $\left((u_j)_i\right)_{i=1\ldots n}$. Alors, on peut représenter la famille $\mathscr{F}$ par une matrice à p lignes et n colonnes , appelé **matrice des coordonnées de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$**, avec :

$$Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \left((u_j)_i\right)_{i=1\ldots n,\ j=1\ldots p} = \begin{bmatrix} (u_1)_1 & (u_2)_1 & \ldots & (u_n)_1 \\ (u_1)_2 & (u_2)_2 & \ldots & (u_n)_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (u_1)_p & (u_2)_p & \ldots & (u_n)_p \end{bmatrix}_{p \times n}$$

R Dans une matrice de coordonnées d'une famille, on retiendra que les coordonnées de chacun des vecteurs se lisent en colonne. La matrice des coordonnées de la famille est ainsi obtenu en concaténant les matrices colonnes de chacun des vecteurs.

La matrice des coordonnées de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice identité I_n.

On a des propriétés de compatibilité entre les matrices colonnes d'un vecteur et l'addition de matrices :

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ Mat_B(u+v) = Mat_B(u) + Mat_B(v)$$
$$\text{et } Mat_B(\lambda u) = \lambda Mat_B(u)$$

La matrice d'une famille est celle qui sert dans les systèmes étudiés savoir si la famille est libre ou génératrice.

⋆ Bases canoniques des espaces vectoriels de référence

Les bases canoniques sont les bases les plus simples

La base canonique de $\mathbb{K}^p$ est la base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_p &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $\left(X^i\right)_{i \in [\![0,n]\!]}$.

La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $\left(E_{i,j}\right)$ avec :

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ E_{i,j}[k,l] = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \neq (k,l) \\ 1 & \text{si } (i,j) = (k,l) \end{cases}$$

Autrement dit, il n'y a qu'un coefficient non nul dans la matrice $E_{i,j}$: ligne i colonne j.

II.4 Base et somme directe

⋆ Base adaptée à une somme directe

Proposition II.4 Soit E un espace vectoriel, F et G deux SEV supplémentaires dans E, ie on a $E = F \oplus G$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{C}$ une base de G, alors la famille obtenue en réunissant $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est une base de E.

Autrement dit : en concaténant une base de F et une base de G, on obtient une base de E

On parle de base adaptée à une somme directe : une partie des vecteurs sont choisis comme base de F, l'autre partie comme une base de G.

■ **Exemple II.9** Dans l'ensemble des matrices carrées de taille 2, on peut choisir la base :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est une base adapté à la somme directe : $\mathscr{M}_2 = \mathscr{S}_2 \oplus \mathscr{A}_2$. ■

Démonstration. On note :

$$\begin{aligned} \mathscr{B} &= (e_1, \dots, e_k) \\ \mathscr{C} &= (e_{k+1}, \dots, e_p) \\ \text{et } \mathscr{D} &= (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_p) \text{ on peut écrire : } \mathscr{D} = \mathscr{B} \cup \mathscr{C} \text{ par abus de langage} \end{aligned}$$

Montrons que la famille est libre en considérant le système :

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} + \cdots + \alpha_p e_p = 0$$

Cela donne :

$$\underbrace{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k}_{\in F} = \underbrace{-\alpha_{k+1} e_{k+1} - \cdots - \alpha_p e_p}_{\in G}$$

Ainsi,

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = -\alpha_{k+1} e_{k+1} - \cdots - \alpha_p e_p \in F \cap G = \{0\}$$

ce qui donne :

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = -\alpha_{k+1} e_{k+1} - \cdots - \alpha_p e_p = 0$$

Comme $\mathscr{B}$ est libre, on obtient $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ et de même $\mathscr{C}$ $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_p = 0$. D'où $\mathscr{D}$ est libre.

Soit $x \in E$, alors x s'écrit sous la forme $x = u + v$. En écrivant

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k \\ \text{et } v &= \alpha_{k+1} e_{k+1} + \cdots + \alpha_p e_p \end{aligned}$$

on obtient

$$x = u + v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} + \cdots + \alpha_p e_p$$

Ainsi, $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

Au final $\mathscr{B}$ est une base de E

■

✯ Somme directe obtenue à partir d'une base

Proposition II.5 Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_p)$ une base de l'EV E.

On considère les SEV suivants :

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \text{ et } G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

Alors $E = F \oplus G$.

Autrement dit en découpant la base en deux parties, alors l'espace engendré par les premiers vecteurs et l'espace engendré par les derniers vecteurs sont en somme directe.

Démonstration. Considérons $x \in F \cap G$, on a alors :

$$x \text{ s'écrit } x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k \text{ et aussi } x = \alpha_{k+1} e_{k+1} + \cdots + \alpha_p e_p$$

pour $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k$ et pour $(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p-k}$. Cela donne :

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k - \alpha_{k+1} e_{k+1} - \cdots - \alpha_p e_p = 0$$

et donc comme la famille $\mathscr{B}$ est libre :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_p = 0$$

et au final $x = 0$ donc la somme est directe.

Considérons maintenant $x \in E$, on peut alors écrire x sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$$

On a alors :

$$x = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k}_{\in F} + \underbrace{\alpha_{k+1} e_{k+1} + \cdots + \alpha_p e_p}_{\in G}$$

D'où $E = F + G$. ■

III Dimension finie

III.1 Espace vectoriel de dimension finie

Définition III.1 Un espace vectoriel est de dimension finie si il admet une famille génératrice finie.

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont donc des espace vectoriel de dimension finie.
Au contraire, $\mathbb{K}^\Omega$ (en particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$) et $\mathbb{K}[X]$ sont des espaces de dimension infinie.
Si $\mathscr{F}$ est une famille finie, alors $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

III.2 Théorème de la base extraite

Théorème III.1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$.

Soit $\mathscr{G}$ une famille finie génératrice de E, alors on peut extraire de $\mathscr{G}$ une base de E.

Cette base est obtenue en enlevant des vecteurs à la famille $\mathscr{G}$ jusqu'à obtenir une famille base.

R Lorsqu'on dit on peut extraire, cela signifie que $\mathscr{G}$ peut être une base (on a enlevé aucun vecteur).

Démonstration. On note $\mathscr{G} = (u_1, \dots, u_p)$. On a deux possibilités :

- Soit $\mathscr{G}$ est libre et c'est donc une base. On a alors fini la démonstration.
- Soit elle est liée.

Si elle est liée, alors l'un des vecteurs s'exprime en fonction des autres. Pour simplifier, supposons que ce soit le dernier u_p

On rappelle que l'on peut avoir plusieurs possibilités pour choisir ce vecteur, mais pas nécessairement tous les choix. On choisit l'un des vecteurs qui s'exprime en fonction des autres.

On a alors :

$$\begin{aligned}
&u_p \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}) \\
&\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = E \text{ car } \mathscr{G} \text{ est génératrice.}
\end{aligned}$$

(comme on l'a vu, on peut enlever ce vecteur sans changer l'espace vectoriel engendré).

On enlève alors u_p de $\mathscr{G}$, on est donc ramené à la famille $(u_1, \dots, u_{p-1})$.

En procédant ainsi (ou plus rigoureusement en raisonnant par récurrence), on obtient une famille libre.

En effet, comme E est non vide, nécessairement il ne peut pas être engendré par une famille vide. Donc ce procédé s'arrête. ■

Remarquons que la démonstration permet de déterminer une base à partir d'une famille génératrice : il faut enlever de la base les vecteurs qui s'exprime comme combinaison linéaires des autres, jusqu'à obtenir une famille libre.

⋆ Existence de base

En conséquence immédiate, on a :

Corollaire III.2 Tout espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs.

Démonstration. Il suffit de partir d'une famille génératrice et d'enlever des vecteurs pour obtenir la base. ■

III.3 Théorème de la base incomplète

Théorème III.3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{L} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de vecteurs E et $\mathscr{G} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille génératrice de E.

Alors on peut compléter $\mathscr{L}$ en ajoutant à $\mathscr{L}$ des vecteurs de $\mathscr{G}$ pour obtenir une base de E.

R Ici aussi, il s'agit d'ajouter des vecteurs, mais on peut n'en ajouter aucun si $\mathscr{L}$ est déjà génératrice.

Démonstration. De la même manière, la démonstration est un procédé permettant de construire la base de E.

On considère donc la famille $\mathscr{L}$. On a deux choix

- Si elle est génératrice de E, il n'y a rien à démontrer. Le processus s'arrête.
- Sinon, elle n'est pas génératrice.

Dans le cas où elle n'est pas génératrice, c'est qu'il existe l'un des (u_i) tel que $u_i \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$. En effet, si on suppose par l'absurde que :

$$u_1 \in \mathrm{Vect}(\mathscr{L}) \quad u_2 \in \mathrm{Vect}(\mathscr{L}) \quad \dots \quad u_p \in \mathrm{Vect}(\mathscr{L}),$$

alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{L}) \text{ ie } & \mathrm{Vect}(\mathscr{G}) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{L}) \\ \text{ie } & E \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{L}) \end{aligned}$$

puisque $\mathscr{G}$ est génératrice. On en déduit que $\mathscr{L}$ est génératrice ce qui n'est pas le cas.

Ainsi, l'un des vecteurs de $\mathscr{G}$ n'est pas dans l'espace engendré par $\mathscr{L}$. Supposons que ce soit le premier (ici encore, on ne choisit pas). On a alors : $u_1 \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$.

On considère alors la famille $(u_1, v_1, \dots, v_n)$ notée $\mathscr{L}'$ obtenue en ajoutant u_1 à $\mathscr{L}$.

Montrons que $\mathscr{L}'$ est libre. Pour cela, on considère le système linéaire :

$$(*) \qquad \beta u_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

Montrons déjà que $\beta = 0$, en effet, dans le cas contraire, on a :

$$u_1 = -\frac{1}{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$$

et donc $u_1 \in \text{Vect}(\mathscr{L})$ ce qui n'est pas le cas. D'où $\beta = 0$ et on peut remplacer dans $(*)$ qui devient :

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

Du fait que $\mathscr{L}$ est libre, on a donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. D'où $\mathscr{L}'$ est libre.

On a donc ajouté un vecteur à $\mathscr{L}$ tout en gardant le caractère libre.

On peut ensuite recommencer ce processus. à l'étape suivante, on ne pourra pas alors ajouter le vecteur u_1.

Au bout d'un certain temps (au plus p), tous les vecteurs de $\mathscr{G}$ ont été ajouté à $\mathscr{L}$, et donc :

$$E = \text{Vect}(\mathscr{G}) \subset \mathscr{L}$$

En conséquence $\mathscr{L}$ est génératrice de E et le processus s'arrête. ■

R On peut par exemple, choisir pour famille génératrice la base canonique.

Dans cette démonstration, on a retrouvé un résultat vu précédemment : si $\mathscr{L}$ est libre et a est un vecteur de E, on a :

$$\begin{aligned} a \in \text{Vect}(\mathscr{L}) &\iff \text{en ajoutant le vecteur } a \text{ à la famille } \mathscr{L} \text{ elle devient liée} \\ a \notin \text{Vect}(\mathscr{L}) &\iff \text{en ajoutant le vecteur } a \text{ à la famille } \mathscr{L} \text{ elle reste libre} \end{aligned}$$

⋆ Nombre de vecteurs d'une famille libre et d'une famille génératrice

Proposition III.4 Soit E un EV de dimension finie, $\mathscr{G} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille génératrice de E alors toute famille de $p+1$ éléments est liée.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur p. On considère donc la propriété :

$\mathscr{P}(p)$: si E est un EV, et $\mathscr{G} = (u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de E alors toute famille de $p+1$ éléments est liée.

Initialisation : Si $p = 1$, tous les vecteurs de E sont colinéaires. On note $\mathscr{G} = (u_1)$, et $\mathscr{F} = (v_1, v_2)$, on a alors : $v_1 = \alpha v_1$ et $u_2 = \beta v_2$, donc $-\beta u_1 + \alpha u_2 = 0$. Donc deux vecteurs sont nécessairement liés.

Hérédité : Considérons p fixé, tel que la propriété est vraie. Considérons un espace vectoriel E, $\mathscr{G} = (u_1, \ldots, u_p, u_{p+1})$ une famille génératrice de E constituée de $p+1$ vecteurs et une famille de $p+2$ vecteurs notée $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_{p+2})$.

On écrit la décomposition des vecteur dans la famille $\mathscr{G}$:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha_1 u_{p+1} + \underbrace{\dots}_{\in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)} \\
v_2 &= \alpha_2 u_{p+1} + \underbrace{\dots}_{\in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)} \\
\vdots &\quad \vdots \\
v_{p+1} &= \alpha_{p+1} u_{p+1} + \underbrace{\dots}_{\in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)} \\
v_{p+2} &= \alpha_{p+2} u_{p+1} + \underbrace{\dots}_{\in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)}
\end{aligned}$$

On écrit : dans les $\underbrace{\dots}_{\in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)}$ on mets les autres coordonnées qui ne nous intéressent pas ici. Si $\mathscr{G}$ est un base, on pourrait construire ainsi la matrice des coordonnées de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{G}$ (un vecteur par colonne) :

$$\begin{pmatrix}
* & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & \dots & * & * \\
\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p+1} & \alpha_{p+2}
\end{pmatrix}$$

Ici on n'a pas unicité, mais le concept est le même (matrices à $p+2$ colonnes $p+1$ lignes, seule la dernière ligne nous intéresse).

Si tous les (α_i) sot nuls, c'est que $(v_1,\dots,v_{p+2})$ est en fait une combinaison linéaire de $(u_1,\dots,u_p)$. On a donc une famille de $p+2$ vecteurs $(v_1,\dots,v_{p+2})$ qui appartiennent à un espace $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ dont une famille génératrice est de p vecteurs. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $(v_1,\dots,v_{p+1})$ est liée, et donc $\mathscr{F}$ est aussi liée.

Sinon, on peut considérer que $\alpha_{p+2} \neq 0$, quitte à changer l'ordre des vecteurs. (cela revient à échanger les colonnes de la matrices pour avoir un terme non nul en bas à droite).

On va alors construire une famille $\mathscr{F}' = (v'_1,\dots,v'_{p+1})$ qui est combinaison linéaire de $(u_1,\dots,u_p)$.

Pour cela, on fait :

$$\forall i \in [\![1, p+1]\!], v'_i = v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{p+2}} v_{p+2}$$

Remarquez le lien avec la réduction de Gauss (sur les colonnes). On obtient alors :

$$\begin{aligned}
v'_1 &= \underbrace{\cdots}_{\in \mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_p)}\\
v'_2 &= \underbrace{\cdots}_{\in \mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_p)}\\
\vdots\ & \quad \vdots\\
v'_{p+1} &= \underbrace{\cdots}_{\in \mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_p)}
\end{aligned}$$

Si on construit la décomposition de la famille $\mathscr{F}' = (v'_1, \ldots, v'_p)$ dans la famille génératrice $\mathscr{G}$ sous forme de matrice (comme si c'était une base), cela donne :

$$\begin{pmatrix} * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ matrice à } p+1 \text{ lignes et } p+1 \text{ colonnes.}$$

On voit donc que la famille $\mathscr{F}'$ est combinaison linéaire de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$. Or $\mathscr{F}'$ est constituée de $p+1$ vecteurs. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence sur la famille $\mathscr{F}'$ qui est ainsi liée.

Il reste à en déduire que $\mathscr{F}$ est liée.

On peut donc écrire :

$$\lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \cdots + \lambda_{p+1} v'_{p+1} = 0$$

avec les (λ_i) non tous nuls.

On remplace les v'_i par leur expression en fonction des v_i, cela donne :

$$\lambda_1 \left(v_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{p+2}} v_{p+2} \right) + \lambda_2 \left(v_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{p+2}} v_{p+2} \right) + \cdots + \lambda_{p+1} \left(v_{p+1} - \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_{p+2}} v_{p+2} \right) = 0$$

ce que l'on peut écrire :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{p+1} v_{p+1} + * v_{p+2} = 0$$

avec $*$ un terme dont l'expression exacte n'est pas intéressante. On a ainsi obtenue une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_{p+2})$, cette combinaison linéaire est non triviale puisque l'un au moins des λ_i est non nul (on se moque donc de la valeur de $*$). Ainsi $\mathscr{F}$ est liée.

D'où l'hérédité et la conclusion. ■

Corollaire III.5 Soit E un EV de dimension finie, $\mathscr{G} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre de vecteurs de E.

On a alors $n \leqslant p$.

Autrement dit : une famille libre contient toujours moins ou autant de vecteurs qu'une famille génératrice.

Démonstration. Si un famille de $p+1$ vecteurs est liée, alors une famille de plus de $p+1$ vecteurs contient une famille liée donc est liée. ■

Corollaire III.6 Soit E un EV de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
Alors toute famille libre a moins de p vecteurs et toute famille génératrice de E a plus de p vecteurs.

R On a vu les théorèmes qui permettent d'extraire une base d'une famille génératrice, ou de compléter une famille libre pour en faire une base.
On retrouve l'idée qu'une base contient le bon nombre de vecteurs.

On peut voir aussi qu'il n'y a pas de suites de vecteurs libres dans un EV de dimension finie.

Corollaire III.7 Soit E un EV. Si il existe une suite infinie de vecteurs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \left(u_i\right)_{i\in[\![0,n]\!]} \text{ est libre,}$$

alors E est de dimension infinie.

■ **Exemple III.1** On voit que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie, puisque $\left(x^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite constituée de vecteurs libres. ■

III.4 Dimension

Proposition III.8 Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie. Alors toutes les bases ont le même cardinal.

Démonstration. Considérons deux bases de E :

$$\begin{aligned} \mathscr{B} &= (u_1, \dots, u_n) \text{ de cardinal } n \\ \text{et } \mathscr{C} &= (u_1, \dots, u_p) \text{ de cardinal } p \end{aligned}$$

Par l'absurde, on suppose $n < p$.
On a alors $\mathscr{C}$ qui est une famille libre qui contient plus de vecteurs que $\mathscr{B}$ qui est génératrice. ■

⋆ Droite et plans vectoriels

Définition III.2 Soit E un EV.
Une droite vectorielle de E est un SEV de E de dimension 1.
Un plan vectoriel de E est un SEV de E de dimension 2.

■ **Exemple III.2** Dans l'ensemble des fonctions, les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre forment une droite vectorielle. Si c'est du deuxième ordre, alors, c'est un plan vectoriel. ■

⋆ Dimension des espaces vectoriels de référence

Proposition III.9 La dimension de $\mathbb{K}^p$ est p. La dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ est $n+1$. La dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $n \times p$.

R La notion de dimension corresponds ainsi à la notion intuitive de « degré de liberté ».

⋆ Caractérisation des bases

Proposition III.10 Si E un espace de dimension p et $\mathscr{F}$ est une famille de p vecteurs de E, alors :

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \iff \mathscr{F} \text{ est génératrice de } E \iff \mathscr{F} \text{ est libre.}$$

R Remarquez en particulier que la dernière proposition ne dépend pas de E.

Démonstration. Si $\mathscr{F}$ est une base de E, elle est libre et génératrice de E par définition.

Si $\mathscr{F}$ est génératrice de E, alors on peut en extraire une base. Cette base contiendra p vecteurs (puisque toutes les bases ont p vecteurs), c'est-à-dire autant que dans $\mathscr{F}$. C'est donc que le procédé d'extraction de base n'a enlevé aucun vecteur, c'est donc que $\mathscr{F}$ était déjà une base.

Si $\mathscr{F}$ est libre, on peut alors la compléter en une base de E, qui contiendra encore et toujours p vecteurs. C'est donc que $\mathscr{F}$ est déjà une base.

■

Si une famille contient le bon nombre de vecteurs, il est donc inutile de prouver qu'elle est libre et génératrice, il suffit d'en faire un des deux.
C'est une erreur de faire les deux.
Très souvent, on fait plutôt la partie libre (résolution d'un système homogène).
Remarquez le lien entre l'existence de solutions d'un système linéaire pour tout second membre et l'unicité de la solution triviale du système linéaire homogène pour le système carré.

III.5 Rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille finie de vecteurs, alors le sous-espace vectoriel $\mathscr{F} = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est de dimension finie (puisque une famille génératrice est $\mathscr{F}$). On peut donc considérer sa dimension.

Définition III.3 Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs.
Le rang de la famille $\mathscr{F}$ est par la dimension de l'espace vectoriel engendré.

Notation III.1. *On note donc :*

$$Rg(\mathscr{F}) = Rg(u_1, \dots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)).$$

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteur, il faut donc extraire une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Comme $(u_1,\ldots,u_n)$ est par définition une famille génératrice de cette espace, il suffit donc d'en extraire une famille libre. Pour cela, comme on l'a vu, on regarde si la famille est libre. Si ce n'est pas le cas, on enlève de la famille un des vecteurs qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres. On recommence ensuite, jusqu'à obtenir une famille libre.

■ **Exemple III.3** Si on veut calculer le rang de $\mathscr{F} = \{(1,2,3),(1,1,1),(2,3,4)\}$. On voit que : $(2,3,4) = (1,2,3)+(1,1,1)$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathrm{Vect}(\{(1,2,3),(1,1,1)\})$. Cette dernière famille est libre, puisque le système

$$\mathscr{S} : \quad \begin{cases} \lambda+\mu = 0 \\ 2\lambda+\mu = 0 \\ 3\lambda+\mu = 0 \end{cases},$$

admet pour unique solution $S = \{(0,0)\}$ (le vérifier). ■

■ **Exemple III.4** Faire un autre exemple avec des polynômes. ■

R On voit en particulier que lorsqu'on étudie le système linéaire $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0$, on fait des opérations sur les lignes de la matrice des coordonnées de $\mathscr{F}$ dans une base. Les inconnues secondaires correspondent aux vecteurs que l'on peut supprimer.

⋆ Caractérisation des familles finies libres par le rang

Proposition III.11 Soit $\mathscr{F} = (u_1,\ldots,u_n)$ une famille de n vecteur d'un espace vectoriel E.

Alors, on a :

$$Rg(u_1,\ldots,u_n) \leqslant n$$

i.e. le rang d'une famille de vecteur est inférieur au nombre de vecteurs qu'elle contient.

De plus,

$$Rg(u_1,\ldots,u_n) = n \iff \text{la famille } (u_1,\ldots,u_n) \text{ est libre.}$$

Démonstration. Considérons l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$. Par définition, c'est d'une part un sev de dimension $rg(\mathscr{F})$, d'autre part la famille $\mathscr{F}$ est génératrice de ce sev.

Ainsi, la famille $\mathscr{F}$, contient plus de vecteur que la dimension de ce sev qui est $rg(\mathscr{F})$, et donc $rg(\mathscr{F}) \leqslant n$.

Si $rg(\mathscr{F}) = n$, alors la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est une base de $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$, et donc c'est une famille libre.

Réciproquement, si c'est une famille libre, alors c'est une base de l'espace engendré $Vect(u_1,\ldots,u_n)$, et donc $rg(\mathscr{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n) = n$. ■

⋆ Calcul du rang par le pivot de Gauss

Voici maintenant une proposition qui donne une méthode pratique pour calculer le rang : on fait des opérations élémentaires sur les vecteurs, jusqu'à aboutir à une famille clairement libre.

Proposition III.12 Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E.

Alors, on a :

- Le vecteur nul ne change pas le rang :

$$Rg(0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) = Rg(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$$

- On ne change pas le rang en échangeant deux vecteurs,

$$Rg(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) = Rg(u_2, u_1, u_3, \ldots, u_n)$$

- On ne change pas le rang en multipliant un vecteur par un scalaire non nul,

$$\forall \beta \in \mathbb{K}^*,\ Rg(u_1, u_2 \ldots, u_n) = Rg(\beta u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

- on ne change pas le rang en ajoutant à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres :

$$\forall (\alpha_i)_{i=2\ldots n} \in \mathbb{K}^{n-1},\ Rg(u_1, \ldots, u_n) = Rg(u_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i u_i, u_2 \ldots, u_n),$$

En conséquence, pour calculer le rang, on procède par opérations élémentaires pour se ramener à une famille clairement libre.

Démonstration. On a vu que ces opérations conservent l'espace vectoriel engendré, donc elles conservent la dimension de l'espace vectoriel engendré ! ∎

R Ces opérations correspondent à des opérations sur les colonnes de la matrice des coordonnées de la famille $\mathscr{F}$.

IV Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

IV.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition IV.1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

On a alors : F est un espace vectoriel de dimension finie. De plus, $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Démonstration. Si F est réduit au vecteur nul, cela est évident avec la convention $dim(\{0\}) = 0$.

La première partie un peu technique consiste à construire une base de F. Elle ressemble à la technique pour compléter une famille libre en une base.

Considérons un vecteur x non nul dans F et la famille $\mathscr{F} = \{x\}$ Si cette famille est génératrice, on a une base de F. Sinon, on prends un vecteur y de F qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. On l'ajoute à la famille $\mathscr{F}$ pour avoir $\mathscr{F} = \{x, y\}$. Cette famille est toujours libre.

On continue ainsi, le processus s'arrête au bout de au plus $\dim(E)$ étape, puisque la famille $\mathscr{F}$ étant toujours libre, elle a moins de vecteurs que $\dim(E)$.

On a ainsi construit une base de F que l'on a noté $\mathscr{F}$ qui est de dimension finie.

On a donc $\dim(F)$ vecteurs dans $\mathscr{F}$.

Cette base $\mathscr{F}$ étant une famille libre de E, elle contient moins de vecteur que $\dim(E)$. Ce qui s'écrit $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. ■

Le principe important de cette démonstration est que $\mathscr{F}$ étant une base de F, elle est constituée de vecteurs de F et libre et génératrice de F. Mais vue comme une famille de E, $\mathscr{F}$ reste libre, mais n'est plus génératrice de E. Sauf si elle contient le bon nombre de vecteurs, ce qui amène la proposition suivante :

Proposition IV.2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Si on a $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Démonstration. Toujours avec les même notations. Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $\mathscr{F}$ est une famille libre de vecteurs de E qui contient le bon nombre de vecteurs, c'est donc une base ! ■

Corollaire IV.3 Soit E un EV, F et G deux SEV de E.

On a :

$$F = G \iff F \subset G \text{ et } \dim(F) = \dim(G)$$

Ainsi, pour montrer une égalité d'espace vectoriel, on peut se contenter de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.

Souvent l'une des inclusions est évidente (l'un des espaces est SEV de l'autre) .

Proposition IV.4 Soit $\mathscr{F}$ une base de F. On a $\mathscr{F}$ est une famille libre de vecteurs de E et elle a le bon nombre de vecteurs.

En conséquence, c'est une base de E, et

$$\text{Vect}(\mathscr{F}) = E = F.$$

⋆ Application au rang d'une famille de vecteurs

On a déjà vu que le rang d'une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs est inférieur ou égal à n, ie au nombre de vecteurs qu'elle contient et qu'il y a égalité si et seulement si la famille est libre. On compare maintenant le rang de la famille $\mathscr{F}$ et la dimension de l'espace qui contient les vecteurs de la famille.

Proposition IV.5 Soit E un espace vectoriel de dimension finie p et soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

Alors on a :

$$Rg(\mathscr{F}) \leqslant p$$

ie le rang d'une famile de vecteurs est inférieur ou égal à la dimension de l'espace vectoriel qui les contient.

On a de plus :

$$Rg(\mathscr{F}) = p \iff \mathscr{F} \text{ est génératrice.}$$

Démonstration. C'est une application de la proposition précédente : $\text{Vect}(\mathscr{F})$ est un SEV de E, et donc sa dimension, c'est-à-dire $Rg(\mathscr{F})$ est inférieure à la dimension de E. On obtient bien : $Rg(\mathscr{F}) \leqslant p$.

Si $Rg(\mathscr{F}) = p$. c'est que $\text{Vect}(\mathscr{F}) = E$ et donc que $\mathscr{F}$ est génératrice. ∎

IV.2 Supplémentaire d'un espace vectoriel

Rappelons les résultats vus dans la partie base et SEV supplémentaire :

- Si $\mathscr{B}$ est une base de E, en la « coupant en deux » et en prenant F le SEV engendré par les premiers vecteurs et G par les derniers vecteurs, alors $E = F \oplus G$.
- Si $E = F \oplus G$ et que l'on réunit une base de F et une base de G, alors la famille obtenue est base de E.

On applique maintenant les dimension pour obtenir :

Proposition IV.6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie p et F un sous-espace vectoriel de dimension n.

Alors, il existe un sous-espace vectoriel G, tel que :

$$E = F \oplus G \text{ ie } F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E$$

De plus, si G est un supplémentaire de F dans E, alors :

$$\dim(G) = p - n$$

R On a donc démontré l'existence de supplémentaire. Le supplémentaire n'est pas unique comme on l'a vu, mais ils ont tous la même dimension.

Démonstration. Soit $\mathscr{L}$ une base de F. La famille $\mathscr{L}$ est alors une famille libre de vecteurs de E. On complète alors cette famille en une base $\mathscr{B}$ de E.

On note alors :

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n) \qquad \mathscr{L} = (e_1, \dots, e_p) \qquad G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$$

Par définition de $\mathscr{L}$, on a $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, les vecteurs $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ ont été ajouté à $\mathscr{L}$ pour en faire une base de E.

On a alors : $G \oplus L = E$, comme on l'a vu dans la partie base adapté à une somme directe.

Soit maintenant G un supplémentaire de F dans E. On prends une base de F toujours notée : $\mathscr{L} = (e_1, \dots, e_p)$ et une base de G notée : $\mathscr{M}$. On note alors $\mathscr{B}$ la famille obtenue en réunissant $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$: « $\mathscr{B} = \mathscr{L} \cup \mathscr{M}$ ». On sait alors que $\mathscr{B}$ est une base de E, qui contient donc p vecteurs. Ainsi, $\mathscr{M}$ contient $n - p$ vecteurs, c'est-à-dire $\dim(G) = n - p$. ∎

La démonstration de la proposition donne une méthode pour calculer le supplémentaire d'un SEV F dans E :
- Trouver une base de F, notée $(e_1,\dots,e_k)$
- compléter cette base (qui est une famille libre) en une base de E, notée $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$,
- on pose alors $G=\mathrm{Vect}(e_{k+1},\dots,e_n)$ et on a bien $F\oplus G=E$.

■ **Exemple IV.1** Soit

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x+y+z=0\right\}$$

On obtient facilement :

$$E=\mathrm{Vect}\Big((1,-1,0),(1,0,-1)\Big)=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$$

La famille (e_1,e_2) est libre, c'est donc une base de E (qui est donc de dimension 2).

On cherche ensuite à compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on cherche le vecteur de la base canonique que l'on peut ajouter à cette famille en gardant le caractère libre.

On regarde donc si $(e_1,e_2,(1,0,0))$ est libre, avec calcul, on trouve que oui.

On pose donc $e_3=(1,0,0)$ et $F=\mathrm{Vect}((1,0,0))$. On a alors F est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.

De plus, si on considère un vecteur $x\in\mathbb{R}^3$, on écrit alors $x=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3$ (en résolvant le système on trouve la valeur de (α,β,γ)).

La décomposition de $x=u+v$ avec $u\in E$ et $v\in F$ et alors $u=\alpha e_1+\beta e_2$ et $v=\gamma e_3$.

■

Proposition IV.7 Soit E un espace vectoriel de dimension finie p, F et G deux SEV de E.

Alors :

$$\begin{aligned}E=F\oplus G &\iff F\cap G=\{0\} \text{ et } \dim(F)+\dim(G)=\dim(E)\\ &\iff E=F+G \text{ et } \dim(F)+\dim(G)=\dim(E)\end{aligned}$$

On a ainsi une manière très rapide de montrer que deux SEV sont en somme directe : on regarde l'intersection et on compare la dimension. Bien sûr ce n'est valable qu'en dimension finie et que si l'on connaît les dimensions.

La caractérisation : $F\cap G=\{0\}$ et $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$ est la plus utile car elle évite l'analyse/synthèse.

Démonstration. Supposons :

$$F\cap G=\{0\} \text{ et } \dim(F)+\dim(G)=\dim(E).$$

et considérons comme précédemment une base de F et une base de G notée respectivement $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

On note alors « $\mathscr{B}=\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ », ie $\mathscr{B}$ est la base obtenue en réunissant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

On montre alors que $\mathscr{B}$ est une base. On sait déjà que $\mathscr{B}$ a le bon nombre d'éléments.

On va montrer qu'elle est libre. On note comme précédemment :

$$\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_p) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{G} = (e_{p+1}, \dots, e_n).$$

On considère alors le système :

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

qui donne :

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p = -\alpha_{p+1} - \cdots - \alpha_n e_n \in F \cap G = \{0\}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p &= 0 \\ \text{et } \alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_n e_n &= 0 \end{aligned}$$

et donc comme les famille $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont libres :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = 0 \text{ et } (\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n) = 0$$

Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est libre, puis c'est une base.

Par application du résultat sur la base adaptée à une somme directe, on en déduit que $E = F \oplus G$

Pour la réciproque, on a déjà vu que si $E = F \oplus G$, alors

$$F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E).$$

Pour l'autre équivalence, on suppose :

$$E = G + F \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

Avec les mêmes notations, on va montrer que $\mathscr{B}$ est base en montrant qu'elle est génératrice.

On considère donc $x \in E$ et puisque $E = +F$ on écrit :

$$x \text{ s'écrit } x = u + v \qquad \text{avec } u \in F \text{ et } v \in G$$

On décompose u et v sur les base $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$, ce qui donne :

$$x \text{ s'écrit } x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i e_i \qquad \text{avec } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

On a donc bien $\mathscr{B}$ génératrice et donc comme elle a le bon nombre d'élément, c'est une base.

■

IV.3 Dimension d'une somme d'espace vectoriel

On a vu que, dans le cas d'une somme directe, la dimension du sous-espace vectoriel somme est la somme des dimension. La relation de Grassman donne la dimension de la somme dans le cas général.

Proposition IV.8 — Relation de Grassmann. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriel de E. On a alors :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration. On part d'une base de $F \cap G$. On la note :

$$(e_1, \dots, e_p) \qquad \text{avec ces notations } \dim(F \cap G) = p$$

On la complète en une base de F en ajoutant r vecteur :

$$(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_r) \qquad \text{avec ces notations } \dim(F) = p + r$$

On la complète en une base de G en ajoutant s vecteur :

$$(e_1, \dots, e_p, v_1, \dots, v_s) \qquad \text{avec ces notations } \dim(G) = p + s$$

On va alors vérifier que :

$$(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s) \text{ est une base de } F + G$$

Ce qui donnera : $\dim(F+G) = p + r + s = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Il faut vérifier qu'elle est libre et génératrice puisqu'on veut prouver qu'elle contient le bon nombre de vecteurs.

Pour la liberté, on forme le système :

$$(*) \qquad \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_s v_s = 0$$

Ce qui s'écrit :

$$\underbrace{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r}_{\in F} = -\gamma_1 v_1 - \cdots - \gamma_s v_{s \in G}$$

On a donc :

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r \in F \cap G$$

puis ce vecteur se décompose donc dans la base $(e_1, \dots, e_p)$. On sait donc qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r = \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_p e_p$$

Mais on peut aussi regarder cette égalité de vecteurs de $F \cap G$ comme une égalité de vecteurs de F. Par unicité des coordonnées dans la base de F $(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_r)$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \varepsilon_1, \ \dots, \ \alpha_p = \varepsilon_p \\ \beta_1 = 0, \ \dots, \ \beta_r = 0 \end{aligned}$$

On a donc montré que les (β) sont nuls.

On écrit alors la relation $(*)$:

$$(*) \qquad \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_s v_s = 0$$

Par liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_p, v_1, \ldots, v_s)$ on en déduit que les (α) et les (γ) sont nuls.

Pour l'aspect génératrice, on considère $x \in F+G$. On écrit $x = u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. On décompose ensuite u et v dans les bases de F et de G respectivement :

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r \\ v &= \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_p e_p + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_s v_s \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} x =& \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r \\ &+ \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_p e_p + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_s v_s \\ =& (\alpha_1 + \varepsilon_1) e_1 + \cdots + (\alpha_p + \varepsilon_p) e_p \\ &+ \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_s v_s \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice de $F+G$, donc c'est une base de $F+G$, donc la valeur de la dimension de $F+G$. ■

Espaces vectoriels

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 **Reconnaître un sous-espace vectoriel** Justifier au moyen de la définition, si les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont des sev :

$$\left\{(x,y)|x^2-y^2=0\right\} \qquad \left\{(x,y)|xy=0\right\} \qquad \left\{(x,y)|x-y=0\right\}$$
$$\left\{(a+b,a-b)|(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\} \qquad \left\{(1+x,x)|x\in\mathbb{R}\right\} \qquad \left\{(x,y)|x \text{ et } y\in\mathbb{Z}\right\}$$

Correction :

$\left\{(x,y)|x^2-y^2=0\right\}$NON $\quad \left\{(x,y)|xy=0\right\}$NON $\quad \left\{(x,y)|x-y=0\right\}=\mathrm{Vect}((1,1))$

$\left\{(a+b,a-b)|(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}((1,1),(1,-1)) \quad \left\{(1+x,x)|x\in\mathbb{R}\right\}$NON $\quad \left\{(x,y)|x \text{ et } y\in\mathbb{Z}\right\}$NON

Exercice 2 Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $x=(1,1,0)$ et $y=(1,0,1)$ engendrent le même SEV que les deux vecteurs $u=(1,3,-2)$ et $v=(1,4,-3)$.

Correction :
Il faut montrer $\mathrm{Vect}((x,y))=\mathrm{Vect}((u,v))$ par double inclusion. Pour vérifier $\mathrm{Vect}((x,y))\subset\mathrm{Vect}((u,v))$ on peut considérer $a=\alpha x+\beta y\in\mathrm{Vect}((x,y))$ et résoudre le système :

$$\gamma u+\delta v=a=\alpha x+\beta y \text{ d'inconnue } (\gamma,\delta)$$

ou mieux, simplement vérifier $x\in\mathrm{Vect}((u,v))$ et $y\in\mathrm{Vect}((u,v))$.

Exercice 3 Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $x=(2,1,7)$ est dans le SEV engendré par les deux vecteurs $y=(1,1,2)$ et $z=(1,2,-1)$.

Correction : Cela revient à résoudre : $x=ay+bz$ d'inconnue (a,b).

Exercice 4 On considère les applications $f,g,h:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, définies pour $x>0$ par :

$$f(x)=\ln(x) \qquad g(x)=\ln(2x) \qquad h(x)=\ln(3x)$$

1. Est-ce que la famille (f,g) est libre ?
2. Est-ce que la famille (f,g,h) est libre ?

Correction :

1. Il faut résoudre le système $\alpha f+\beta g=0$, ce qui s'écrit :
$$\forall x>0,\ \alpha\ln(x)+\beta(\ln(x)+\ln(2))=0$$
En prenant $x=1$ puis $x=e$, on a facilement $(\alpha,\beta)=(0,0)$.
2. Il faut résoudre le système $\alpha f+\beta g+\gamma h=0$, ce qui s'écrit :
$$\forall x>0,\ (\alpha+\beta+\gamma)\ln(x)+\beta\ln(2)+\gamma\ln(3)=0$$
On obtient un système équivalent :
$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \beta\ln(2)+\gamma\ln(3)=0\end{cases}$$

qui admet des solutions non triviales.

Exercice 5 Soient E un $\mathbb{K}$-ev, F, G et H des SEV de E. Montrer :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H).$$

Correction : C'est une inclusion d'ensembles, il faut donc considérer $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$, on sait alors que x s'écrit sous la forme :

$x = u + v$ avec $u \in F \cap G$ et $v \in G \cap H$.

On a donc $x = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in F}$ donc $x \in F$ et aussi : $x = \underbrace{u}_{\in G} + \underbrace{v}_{\in H}$ donc $x \in G + H$.

Au final, $x \in F \cap (G + H)$ et l'inclusion.

Exercice 6 SEV supplémentaires en analyse

On note $E = \mathscr{C}^1\Big([0,1],\ R\Big)$ le $\mathbb{R}$-en des applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note aussi :

$$F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$$

pour $k \in \{0,1,2\}$, on note :

$$e_k : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k \end{array} \right.$$

et $G = \text{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.

Montrer que F et G sont deux sev de E supplémentaires dans E.

Correction : On vérifie rapidement que F est un SEV de E pour commencer.

Ensuite, il s'agit de prouver $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$.

Pour le premier point, on considère $u \in F \cap G$. On a alors :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in [0,1],\ u(x) = ax^2 + bx + c$$
$$u(0) = 0$$
$$u'(1) = 0$$

Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 0 \\ c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

On trouve alors $(a,b,c) = (0,0,0)$ et donc $u = 0$.

Pour le deuxième point, il faut considérer $f \in E$. Pour l'analyse, on cherche $u \in F$ et $v \in G$, tel que : $f = u + v$. On sait alors :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in [0,1],\ v(x) = ax^2 + bx + c$$
$$u(0) = 0$$
$$u'(1) = 0$$

On est donc ramené à chercher (a,b,c), on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = \int_0^1 f \\ c = f(0) \\ 2a + b = f'(1) \end{cases} \iff \begin{cases} c = f(0) \\ a = \dots \\ b = \dots \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution (si on a le temps, donner les solutions) d'où l'analyse.

Pour la synthèse, on pose (a,b,c) les trois solutions précédentes $v = ae_2 + be_1 + ce_0$. et $u = f - v$.

On a alors :

- Ces valeurs sont bien définies puisque f est $\mathscr{C}^1$,
- $v \in G$ (évident),
- Il faut vérifier que $u \in F$
- $f = u + v$ (évident)

Il faut donc vérifier que $u \in F$. On a :

$$\int_0^1 u du = \int_0^1 f - \int_0^1 v = \int_0^1 f - \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 0$$

$$u(0) = f(0) - v(0) = f(0) - c = 0$$
$$u'(1) = f'(1) - v'(1) = f'(1) - (2a+b) = 0.$$

★ **Familles finies de vecteurs**

Exercice 7 On note :

$$\begin{aligned} A &= 1 + X + X^2 \\ B &= 1 + 2X + 3X^2 \\ C &= 1 + 3X + 5X^2 \end{aligned}$$

Montrer que la famille (A,B,C) est liée dans $\mathbb{R}[X]$

Correction : On regarde le système :

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

qui donne le système :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Il reste à vérifier que ce système admet des solutions non triviales (rang 2) On peut par exemple vérifier que : $2B = A + C$

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, avec :

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n,$$

étudier la liberté de la famille d'application $\left(f_{a_i}\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ dans les exemples suivants :

$$f_{a_i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x - a_i| \end{array} \right. \qquad f_{a_i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{a_i x} \end{array} \right. \qquad f_{a_i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x - a_i} \end{array} \right.$$

Correction : Pour le premier, on considère $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$$

$$\text{ie} \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 |x - a_1| + \lambda_2 |x - a_2| + \cdots + \lambda_n |x - a_n| = 0$$

Pour obtenir une contradiction, on va se servir du fait que la fonction $x \mapsto |x - a_i|$ n'est pas dérivable en a_i.

Supposons par l'absurde que λ_1 soit non nul, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x - a_1| = \frac{1}{\lambda_1} (\lambda_2 |x - a_2| - \cdots - \lambda_n |x - a_n|)$$

Or le membre de droite est dérivable en a_1. Contradiction.

Ainsi, λ_1 est nul et on peut appliquer le même principe à tous les λ_i.

Pour le deuxième, on considère $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$$

$$\text{ie}\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{a_n x} = 0(*)$$

Puisque a_n est le plus grand, c'est celui qui donne la vitesse en l'infini.

On peut donc raisonner par l'absurde et supposer $\lambda_n \neq 0$, on a alors :

$$\lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{a_n x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_n e^{a_n x}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \lambda_n e^{a_n x} = \pm\infty$ ce qui est une contradiction avec $(*)$. Ainsi, $\lambda_n = 0$, on l'enlève de $(*)$ et on recommence. (REFAIRE si ils sont négatif, factoriser par $e^{a_1 x}$).

Ou plus précisément, on démontre par récurrence pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\mathscr{P}(k):\ \lambda_{n-k} = 0$$

Pour le troisième, on considère $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$$

$$\text{ie}\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \frac{1}{x-a_1} + \lambda_2 \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{x-a_n} = 0(*)$$

Supposons λ_1 non nul, on a alors :

$$\lambda_1 \frac{1}{x-a_1} + \lambda_2 \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{x-a_n} \underset{x\to a_1}{\sim} \lambda_1 \frac{1}{x-a_1}$$

$$\text{et donc } \lim_{x\to a_1} \lambda_1 \frac{1}{x-a_1} + \lambda_2 \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{x-a_n} = \infty$$

ce qui est une contradiction. On procède de même pour λ_2, etc.

✭ Théorie de la dimension

Exercice 9 Les familles suivantes sont-elles une base de $\mathbb{R}^3$? Sont-elles libres ? Génératrices ?

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{(2,4,3),\ (1,5,7)\}\\
F_2 &= \{(1,2,3),\ (2,3,4),\ (3,4,5),\ (4,5,6)\}\\
F_3 &= \{(9,-3,7),\ (1,8,8),\ (5,-5,1)\}\\
F_4 &= \{(0,1,2),\ (1,2,0),\ (2,0,1)\}
\end{aligned}$$

Exercice 10 Soit F le sev de $\mathbb{R}^4$ (identifié à $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$) engendré par les vecteurs a_1, a_2, a_3 et a_4 suivants :

$$a_1 = \begin{pmatrix}3\\0\\4\\1\end{pmatrix},\quad a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix},\quad a_3 = \begin{pmatrix}-5\\0\\-2\\3\end{pmatrix},\quad a_4 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de la famille (a_1, a_2, a_3, a_4).
2. (a_1, a_2, a_3, a_4) est-elle libre ? Déterminer une relation linéaire entre ces vecteurs.
3. Quelle est la dimension de F ?
4. Extraire de (a_1, a_2, a_3, a_4) une base de F.
5. Compléter la base ainsi trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11 Trouver une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Soient les sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x+3y=0\} \qquad G = \{(a,3a) \in \mathbb{R}^2 | a \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^2$, et donner une base de chacun d'eux.

Exercice 12 On note $E = \mathbb{R}^4$ et

$$x = (1,-1,1,-1) \quad y = (1,2,3,4) \quad F = \text{Vect}(x,y)$$

1. Former un système d'équations cartésiennes de F.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E, par une base et par un système d'équation cartésienne.

Correction :

1. Il suffit d'étudier le système $\alpha x + \beta y = (a,b,c,d)$ et de trouver une équation de compatibilité. Le système admet une solution si et seulement si l'équation de compatibilité est vérifiée.
2. Comme (x,y) est libre, il faut compléter cette famille en un base (on peut par exemple ajouter des vecteurs de la base canoniques). On peut par exemple vérifier que (x,y,e_1,e_2) est libre. On aura alors $G = \text{Vect}(e_1,e_2)$.
   Pour obtenir les équation cartésiennes de G, il faut résoudre le système.

Exercice 13 On note dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_0 = 1,\ P_1 = X,\ P_2 = (X-1)X(X+1),\ P_3 = X^2(X+1),\ P_4 = (X-1)X(X+1)^2$$

Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, \dots, , P_4)$ est un base de $\mathbb{R}_4[X]$

Correction : Il y a 5 vecteurs, il suffit donc de vérifier que cette famille est libre.
On considère donc l'équation :

$$aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3 + eP_4 = 0$$

On peut développer ou prendre la valeur en 0 (on obtient $a = 0$). On écrit :

$$bP_1 + cP_2 + dP_3 + eP_4 = 0$$

On dérive et on prends la valeur en 1 (ie : on factorise par X), ce qui donne $b = 0$. On prends ensuite la valeur en -1 ($d = 0$), etc.

Exercice 14 On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$F = \left\{ f \in E \middle| f(0) = 0 \right\} \qquad A = \text{Vect}(x \mapsto \cos(x))$$

1. Vérifier que F est un SEV de E.
2. Montrer que $F \oplus A = E$.

Correction :

1. Cours
2. on vérifie $F \cap G = \{0\}$ puis si $f \in F$, on écrit :

$$f = (f - f(0)\cos) + f(0)\cos$$

La fonction $f - f(0)\cos \in F$ et d'où $E = F + G$.

Exercice 15 On note :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x+1\end{array}\right. \qquad g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}\right.$$

Déterminer le rang de la famille :

$$\mathscr{A}=(f,g,f\circ f,f\circ g,g\circ f,g\circ g)$$

Correction : On peut regarder si la famille est libre et considérer le système :

$$a_1f+a_1g+a_3f\circ f+a_4f\circ g+a_5g\circ f+a_6g\circ g=0$$

ce qui s'écrit :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ a_1(x+1)+a_2x^2+a_3(x+2)+a_4x^2+1+a_5(x^2+2x+1)+a_6x^4=0$$

On obtient alors facilement un système linéaire en $(a_1,\dots,a_6)$, puis deux relation linéaire entre les vecteurs. Le rang est 4.

Ou on peut faire des opérations élémentaires sur le vecteurs (en identifiant avec les fonctions polynomiales) :

$$rg(\mathscr{F})=rg(X+1,X^2,X+2,X^2+1,X^2+2X+1,X^4)=\dots$$

Exercice 16 Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\neq b$

On note pour tout $i\in[\![0,n]\!]$: $P_i=(X-a)^i(X-b)^{n-i}$.

Montrer que la famille $(P_i)_{i\in ii0n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Correction :

On forme le système linéaire :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_iP_i=0$$

En évaluant en a et en b, on a $\alpha_0=\alpha_n=0$. On factorise alors par $(X-a)(X-b)$ pour obtenir :

$$\alpha_1(X-b)^{n-2}+\alpha_2(X-a)(X-b)^{n-3}+\dots+\alpha_{n-2}(X-b)(X-a)^{n-3}+\alpha_{n-1}(X-a)^{n-2}.$$

On conclue par récurrence double.

✯ Application de la théorie des espaces vectoriels

Exercice 17

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $P_n\in\mathbb{R}[X]$ unique tel que :

$$P_n(X)+P_n(X+1)=2X^n.$$

2. Former une relation entre P_n' et P_{n-1} pour $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Exprimer $P_n(X+1)$ en fonction de $P_0,\dots,P_n$, et en déduire une relation de récurrence donnant P_n en fonction de $P_0,\dots,P_{n-1}$.

Correction :

1. **NB :** ni Taylor, ni Newton ne permettent de trouver la valeur de P_n, pas de récurrence non plus.
   Soit $n\in\mathbb{N}$, il faut prouver l'existence de $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^{n+2}$, tels que :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i\left(X^i+(X+1)^i\right)=2X^n$$

   Pour cela, on a :

   la famille $\left(X^i+(X+1)^i\right)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une famille de polynôme de degré échelonnée

donc elle est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car elle contient le bon nombre de vecteur.
Donc tout vecteur s'écrit comme une combinaison linéaire de cette famille. En particulier $2X^n$ s'écrit comme une combinaison linéaire de cette famille, et donc :

$$\exists(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^{n+1},\ \sum_{i=0}^{n}\lambda_i\left(X^i+(X+1)^i\right)=2X^n$$

Il n'y a plus qu'à poser $P=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i X^i$.
On peut aussi faire l'unicité directement (la différence entre deux solutions R_n vérifie $R_n(X)=R_n(X+1)$), donc est deux périodique, puis constante puis nulle.

2. On a facilement :

$$P_n'(X)+P_n'(X+1)=n\left(P_{n-1}(X)+P_{n-1}(X+1)\right).$$

Il faut ensuite en déduire que :

$$P_n'(X)=nP_{n-1}(X)$$

Pour cela, on peut revenir aux coefficient de P_n et de P_{n-1} (cela revient à l'unicité de la décomposition dans la base), ou on peut poser $R_n=P_n'-nP_{n-1}$ et vérifier que $R_n(X+1)=R_n(X)$.

3.

Passage d'un mode de représentation d'un sev à l'autre

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

On commence par présenter ces notions dans $\mathbb{K}^n$ puis on les étends à $\mathbb{K}[X]$.

⋆ Les deux modes de représentation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Il existe deux modes de représentation d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$:

Par des équations cartésiennes c'est-à-dire que l'ensemble E est donné comme la partie de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie un certain nombre d'équations. Par exemple :

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+2y-z=0, \text{ et } x+3z=0\right\}.$$

L'avantage de cette représentation est qu'il est très facile de calculer l'intersection de deux sev : il suffit de prendre la partie qui vérifie toutes les équations. Par exemple, l'ensemble précédent E est :

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+2y-z=0\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+3z=0\right\}.$$

Ce mode de représentation correspond à identifier E et le noyau d'une application linéaire : le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{K}^n$ s'écrit :

$$E = \left\{x \in \mathbb{K}^n \middle| f(x) = 0\right\},$$

où f est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$, avec p le nombre d'équations.
Dans l'exemple, E s'identifie avec le noyau de l'application linéaire :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, x+3z) \end{cases}.$$

On peut écrire cela en disant que E est l'ensemble de solutions d'un système homogène (S_h).
On sait que les solutions d'un système homogène forment un espace vectoriel.
Dans l'exemple, le système (S_h) correspondant est :

$$(S_h) : \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 0 \\ x+3z & = & 0 \end{array} \right.$$

Par des paramètres c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui s'écrivent en fonction de certains paramètres :

$$F = \left\{(a+c, a+b+2c, b+c, b+c) | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

L'avantage de cette représentation est qu'il est très facile de trouver une famille génératrice, et ainsi une base, en enlevant des vecteurs. Par exemple ici :

$$F = \text{Vect}((1,1,0,0),(0,1,1,1),(1,2,1,1)).$$

que l'on peut simplifier, en remarquant que : $(1,1,0,0)+(0,1,1,1) = (1,2,1,1)$, en :

$$F = \text{Vect}((1,1,0,0),(0,1,1,1)).$$

qui est une famille libre, donc F est de dimension 2.
Cette représentation peut-être vue comme l'image d'une application linéaire : le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ peut s'écrire sous la forme :

$$F = \left\{f(x) \middle| x \in \mathbb{K}^p\right\}$$

où f est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ avec p le nombre de paramètres dans $\mathbb{K}^n$.

Dans l'exemple F s'identifie avec l'espace image de l'application :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4\\ (a,b,c) & \longmapsto & (a+c,a+b+2c,b+c,b+c)\end{array}\right. .$$

On peut dire que c'est l'ensemble des seconds membres, tel qu'un système (S) ait des solutions : dans l'exemple, le sous-espace vectoriel F s'identifie avec l'ensemble des 4-uplets (x,y,z,t), tel que le système :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl}a+c & = & x\\ a+b+2c & = & y\\ b+c & = & z\\ b+c & = & t\end{array}\right.$$

d'inconnue (a,b,c) ait une solution.

Ainsi, on retiendra :

- lorsqu'on veut faire une intersection de sev, on passe par la forme équations.
- lorsqu'on veut déterminer une base ou calculer la dimension, on passe par la forme paramètre. Avoir une base permet aussi de déterminer un supplémentaire.

Il faut donc être capable de passer d'un mode de représentation à l'autre.

⋆ Passage des équations aux paramètres

Pour passer de la forme équation cartésienne à la forme paramètre, on résout le système (S_h), en considérant les coordonnées (x,y,z) comme des inconnues. L'ensemble des solutions s'exprime alors en fonction de paramètres, ce qui donne la représentation paramétrique.

On rappelle que la technique est de se ramener à un système échelonné et d'utiliser la méthode de remontée.

Par exemple, pour le sev E, on fait :

$$\begin{array}{lc}(S_h) & \left\{\begin{array}{lcl}x+2y-z & = & 0\\ x+3z & = & 0\end{array}\right.\\ \iff & \left\{\begin{array}{lcr}x+2y-z & = & 0\\ x & = & -3z\end{array}\right.\\ \iff & \left\{\begin{array}{lcr}y & = & \frac{1}{2}(x+z)\\ x & = & -3z\end{array}\right.\\ \iff & \left\{\begin{array}{lcr}y & = & -z\\ x & = & -3z\end{array}\right.\end{array}$$

Ainsi, $E=\{(-3z,-z,z)|z\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}(-3,1,1)$.

⋆ Passage des paramètres aux équations

Pour passer d'une représentation sous forme paramétrique à une représentation sous forme d'équations, on résout le système (S) avec pour inconnues les paramètres, et pour second membre, des coordoonées génériques. On peut dire que l'on cherche à *exprimer les paramètres en fonction des coordonnées.* On met le système sous forme échelonnée et apparaissent alors des *équations de compatibilité*. Ainsi, le système (S) n'a de solutions que si et seulement si le second membre, *i.e.* les coordonnées, vérifient certaines conditions. On obtient ainsi les équations cartésiennes.

Par exemple pour F, on a :

$$\begin{array}{lc}(S) & \left\{\begin{array}{lcl}a+c & = & x\\ a+b+2c & = & y\\ b+c & = & z\\ b+c & = & t\end{array}\right.\\ \iff & \left\{\begin{array}{lcr}a+c & = & x\\ b+c & = & y-x\\ b+c & = & z\\ b+c & = & t\end{array}\right.\\ \iff & \left\{\begin{array}{lcr}a+c & = & x\\ b+c & = & y-x\\ 0 & = & z-y+x\\ 0 & = & t-y+x\end{array}\right.\end{array}$$

Ainsi, le système a une solution si et seulement si $z-y+x=0$, et $t-y+x=0$. Si ces équations sont vérifiées, alors le système a une solution, par exemple : $a=x$, $b=y$ et $c=0$. Cette solution n'est pas unique (on retrouve ici le fait que la famille génératrice n'est pas une base de F). On a donc :

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4|z-y+x=0,\ \text{et}\ t-y+x=0\right\}.$$

Attention, il est inutile de résoudre le système : on cherche les conditions pour lesquels ce système admet une solution, c'est-à-dire les équations de compatibilité.

⋆ **Dans l'ensemble des polynômes** $\mathbb{K}[X]$

On va voir comment on peut étendre ces techniques en le adaptant aux SEV des polynômes.

On peut définir un SEV par des équations :

$$\begin{aligned}E_1=&\left\{P\in\mathbb{R}_3[X]\middle|(X-2)^2|P\right\}\\E_2=&\left\{P\in\mathbb{R}_3[X]\middle|P(1)=0,\ P(0)=0\right\}\\E_3=&\left\{P\in\mathbb{R}_3[X]\middle|P'(2)=0,\ P^{(3)}(2)=0\right\}\end{aligned}$$

ou par des paramètres :

$$\begin{aligned}E_4=&\left\{aX^3+bX^2+cX+b\middle|(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}\\=&\left\{aX^3+b\left(X^2+1\right)+cX\middle|(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}=\mathrm{Vect}(X^3,X^2+1,X)\end{aligned}$$

Pour passer de la forme équations à la forme paramètres, on applique la même idée : on considère un polynôme qui vérifie les équations et on cherche ses coefficients (ou ses racines).

Par exemple pour E_1, on considère $P\in E_1$ on a donc $P\in\mathbb{R}_3[X]$ et $(X-2)^2|P$.

Comme P est de degré 3, le quotient est de degré 1, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\exists(a,b)\in\mathbb{R}^3,\ P=&(aX+b)(X-2)^2\\=&aX(X-2)^2+b(X-2)^2\end{aligned}$$

On en déduit une famille génératrice de E_1 :

$$E_1=\mathrm{Vect}(X(X-2)^2,(X-2)^2)$$

Cette famille est clairement libre (car de degré échelonnée mais on peut aussi le vérifier rapidement), c'est donc une base de E_1, ce qui donne $\dim(E_1)=2$.

Pour E_2, on considère un polynôme P de E_2. On a : 0 et 1 sont racines, donc $X(X-1)$ divise P et P est de degré 3, ainsi :

$$P=(aX+b)X(X-1)=aX^2(X-1)+bX(X-1)$$

On en déduit une famille génératrice de E_2 :

$$E_2=\mathrm{Vect}(X^2(X-1),X(X-1))$$

Idem, cette famille est libre et donc c'est une base de E_2 qui est de dimension 2.

Pour E_3, on peut considère $P\in E_3$. On applique la relation de Taylor :

$$P=P(2)+(X-2)P'(2)+\frac{(X-2)^2}{2}P''(2)+\frac{(X-2)^3}{3!}P^{(3)}(2)$$

ce qui s'écrit avec les hypothèses sur P :

$$P=P(2)+\frac{(X-2)^2}{2}P''(2)$$

On en déduit une famille génératrice de E_3 :

$$E_2=\mathrm{Vect}\left(1,(X-2)^2\right)$$

Encore une fois, cette famille est libre et donc c'est une base de E_3 qui est de dimension 2.

Pour la passage des paramètres aux équations, c'est un peu plus complexe, il faut trouver la technique permettant d'exprimer les paramètres en fonction du polynôme.

Pour E_4, on voit qu'il faut utiliser la formule de Taylor en 0 : Pour un polynôme P, on a :

$$P = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{6}X^3$$

Ainsi, on a :

$$P \in E_4 \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} b = P(0) \\ c = P'(0) \\ b = \frac{P''(0)}{2} \\ a = \frac{P^{(3)}(0)}{6} \end{cases}$$

La condition pour qu'il existe un tel système est : $P(0) = \frac{P''(0)}{2}$.

On obtient alors une écriture de E_4 sous forme d'équations :

$$E_4 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \middle| P(0) = \frac{P''(0)}{2} \right\}$$

R On retiendra que c'est la même démarche, mais que les techniques sont plus variées.

18 — Espaces probabilisés

I Expérience aléatoire et univers

I.1 Généralités

Définition I.1 On dit qu'une expérience est aléatoire si on peut la répéter dans les mêmes conditions, mais sans pouvoir prévoir le résultat.
On note Ω et on appelle univers l'ensemble des résultats possibles. Dans une expérience aléatoire, cet ensemble est toujours connu.
Les éléments de Ω sont les éventualités, et les sous-ensembles de Ω sont appelés événements.

Les événements modélisent les éléments de Ω qui satisfont certaines conditions.
Le but de la théorie des probabilités est de **mesurer le poids des événements**.
qui modélisent les issues possibles de l'expérience aléatoire. Pour ces problèmes il est important de bien modéliser l'univers, qui est l'ensemble des événements possibles.
Un exercice de probabilité commencent ainsi toujours par une *réflexion sur l'ensemble* Ω.
Il s'agit d'une réflexion sur le type de données que l'on manipule : comment on représente un tirage ?

■ **Exemple I.1**
- Lancer de dès, Ω est alors $\{1,2,3,4,5,6\}$, un exemple d'évenement est alors « sortir un nombre pair »
- Lance trois fois une pièce , $\Omega = \{P,F\}^3$, en exemple d'évenement est par exemple « obtenir au moins une fois pile »,
- Tirage dans une urne, tirage de carte, etc.
- Durée de vie d'une ampoule, $\Omega = \mathbb{R}^+$ et un exemple d'évenement est par exemple : « la durée de vie est supérieure à 100h »

■

Dans le programme de PCSI, on se restreint au cas où **l'univers Ω est fini**.

Notation I.1. *Dans la suite du chapitre Ω est donc un ensemble fini non vide.*

Les cas principaux d'univers que l'on rencontrera sont :
- un ensemble fini décrits par la liste de ses éléments,
- un ensemble de p-uplets,
- un ensemble de combinaisons à p éléments parmi n,
- un ensemble d'arrangements,
- un ensemble de permutations.

■ **Exemple I.2** Voici un exemple qui synthétise tous ces cas : On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.
- Si on tire une seule boule alors l'univers est $[\![1,8]\!]$, son cardinal est 8.
- Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au 4-uplets de $[\![1,8]\!]$, *i.e.* $[\![1,8]\!]^4$ et son cardinal est 8^4.
- Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers correspond au 4-arrangements de $[\![1,8]\!]$, et est donc de cardinal A_8^4.
- Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers correspond au 4-combinaisons de $[\![1,8]\!]$, et est donc de cardinal $\binom{8}{4}$.
- Si on tire les 8 boules une à une, alors l'univers correspond aux permutations de $[\![1,8]\!]$ et est donc de cardinal $8!$.

■

Attention à ne pas confondre l'univers Ω et son cardinal.

La rédaction doit faire apparaître une description de Ω puis son cardinal.

■ **Exemple I.3** On identifie les rangements avec les fonctions de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$, il y a donc p^n rangements possible. ■

On peut faire le lien entre opérations sur les ensembles et opérations sur les événements :

Définition I.2 Quelques autres définitions sur les événements :
- $\emptyset$ est l'événement impossible, tandis que Ω est l'événement certain,
- Deux évènements sont disjoints ou incompatibles si $A \cap B = \emptyset$
- Un singleton $\{a\}$ est appelé événement élémentaire, les événements élémentaires sont incompatibles,
- On peut définir l'événement contraire $\bar{A}$,
- De même, la réunion et l'intersection d'événement, via les opérations sur les ensembles. Cela correspond au « et » et au « ou ».
- Si A et B sont deux événements, on dit que A implique B, si $A \subset B$.
- Si X est une variable aléatoire (*i.e* une fonction $\Omega \to \mathbb{R}$), alors on note $(X = a)$ la partie de Ω correspondant aux éventualités w tels que $X(\omega) = a$. Ainsi :

$$(X = a) = \left\{\omega \in \Omega \middle| X(w) = a\right\} = X^{-1}(\{a\})$$

C'est la notion intuitive de l'événement « X vaut a ».

✎ Bien entendu, la réunion d'événement représente le « *ou* », tandis que l'intersection d'événement le « *et* ». Enfin, l'implication corresponds à l'inclusion des ensembles.

Il arrive que l'on ne puisse pas donner précisément Ω, mais simplement un ensemble E plus grand tel que $\Omega \subset E$.

■ **Exemple I.4** Une urne contient 12 boules 4 noires 8 blanches, on tire 10 fois, on regarde uniquement le nombre de blanches. On a : $\Omega = [\![6,8]\!]$, souvent on se contente d'écrire $\Omega \subset [\![0,10]\!]$

On choisit aussi parfois d'écrire $\Omega = [\![0,10]\!]$, en mettant la probabilité de certains événements (ex : *avoir 1 ou 2 blanches* à 0). ■

I.2 Système complet d'événements

Définition I.3 Soit Ω un univers, on appelle systèmes complets d'événements (SCE) de Ω toute famille d'événements $(A_1,\dots,A_m)$, avec $m \in \mathbb{N}$, vérifiant :

- Ces ensembles sont deux à deux disjoints, *i.e.*

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!], \qquad i \neq j \iff A_i \cap A_j = \emptyset$$

- Leur réunion fait l'univers entier :

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega$$

Notation I.2. *On utilise souvent l'abréviation SCE, qui ne doit pas apparaître dans les copies.*

✎ On peut aussi définir un système complet d'événements dans le cas où la famille est infinie (indexée sur tous les entiers, ou sur des réels par exemple).

✎ un systèmes complets d'événements est une partition, un découpage de Ω.
La différence avec une partition est que certains événements peuvent être vide, ce qui n'est pas le cas dans une partition.
Les systèmes complets d'événements permettent de découper l'univers Ω en différents parties qui correspondront à différents cas. Souvent on découpe la première expérience selon ces résultats.

Les système complets d'événements les plus simple sont :

- si A est un événement, A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événement, cela signifie que deux cas sont possibles : A a lieu ou pas. Il n'y a que deux événements dans le système dans ce cas.
- si $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, alors les événements élémentaires $\{e_i\}_{i\in[1,n]}$ forment un système complet d'événements. Il y a donc n possibles.

■ **Exemple I.5** On considère un dé et 6 urnes : l'urne i contient i blanches et $6-i$ noires.

L'univers est :

$$\Omega = \left\{ (i,x) \middle| i \in [\![1,6]\!], x = N \text{ ou } B \right\}.$$

(ici encore, on choisit d'agrandir l'univers, car le tirage $(6, \text{noire})$) est impossible.

Un système complet d'événements intéressant est : $\left(D = i\right)_{i=1\dots 6}$, il découpe l'univers selon la valeur du dé. ■

II Espaces probabilisés finis

II.1 Probabilités

Définition II.1 Soit Ω un ensemble de résultats possibles *i.e.* un univers.

On appelle probabilité sur Ω une application $p : P(\Omega) \to [0,1]$, telle que :

- $p(\emptyset) = 0$, $p(\Omega) = 1$,
- si A et B sont disjoints, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Le couple (Ω, p) avec Ω un univers et p une probabilité sur Ω est appelé espace probabilisé.

Une probabilité permet ainsi de « mesurer » les événements, en leur donnant un poids donné par $p(A)$. C'est donc une fonction de l'ensemble des parties de Ω dans $[0,1]$. Notons que pour tout événement A, $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Les probabilités mesurent les ensembles, on partira donc souvent d'*une égalité d'ensemble pour montrer une égalité de probabilité*.

Dans le cas où Ω est infini, la probabilité n'est pas définie sur toutes les parties de Ω, mais sur une **tribu**. Dans le programme de PCSI, on se limite au cas où Ω est fini.

II.2 Propriétés d'une probabilité

Proposition II.1 Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé, Aet B deux événements, on a :

Probabilité de l'événement contraire : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Croissance de la probabilité : si $A \subset B$ alors $p(A) \leqslant p(B)$

Probabilité d'une union : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Pour une famille d'événements deux à deux incompatibles, on a :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = p(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} p(A_k)$$

On peut facilement déterminer la probabilité de l'intersection de 3 événements :

$$\begin{aligned} p(A \cup B \cup C) = & p(A) + p(B) + p(C) \\ & - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) \\ & + p(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Démonstration.

Probabilité de l'événement contraire : On a : $\Omega = A \cup \overline{A}$ d'où : $p(\Omega) = 1 = p(A) + p(\overline{A})$.

Croissance de la probabilité : On a : $B = (B \cap A) \bigcup (B \cap \overline{A})$, d'où :

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) \geqslant p(B \cap A) = p(A)$$

Probabilité d'une union : On a :

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \qquad \text{union disjointe}$$

D'où : $p(A \cup B) = p(A) + p(B \setminus A)$.
Puis

$$B = (B \cap A) \cup (B \setminus A) \qquad \text{union disjointe}$$

D'où :

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \setminus A)$$

Soit en remettant dans l'égalité ci-dessus :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

La dernière propriété s'obtient alors facilement par récurrence.

■

Définition II.2 Un évènement A non vide est dit négligeable ou quasi-impossible, si $p(A) = 0$.
Au contraire, on dit que A est presque certain si $p(A) = 1$.

On rencontrera rarement des événements négligeables. En effet, si la probabilité d'un événement est nul c'est qu'il n 'est pas dans l'univers Ω. Le seul cas est celui où l'on a ajouté artificiellement des éléments à Ω pour le rendre plus simple.

II.3 Détermination d'une probabilité par les images des singletons

Une probabilité sur un ensemble fini Ω de cardinal n dépends *a priori* des images des 2^n éléments de $P(\Omega)$. En fait, le théorème suivant montre qu'un probabilité est entièrement déterminée par la probabilité des n événements élémentaires (les singletons).

De plus, si on se donne la probabilité des événements élémentaires sous la forme de n réels positifs de somme 1, alors il existe une unique probabilité correspondante (on dit que l'on choisit un **modèle probabiliste**).

Théorème II.2 Soit $\Omega = \{w_1, \dots w_n\}$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n nombres réels $p_1,\ p_2, \dots p_n$, tels que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Alors il existe une unique probabilité p définie sur $P(\Omega)$, telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ p(\{w_i\}) = p_i.$$

Elle est définie pour tout événement A par :

$$p(A) = \sum_{\{i|w_i \in A\}} p_i$$

La réciproque est vraie : si p est une probabilité et si on définit p_i par

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ p(\{w_i\}) = p_i.$$

alors les p_i sont positifs et de somme égale à 1.

Démonstration. Démontrons tout d'abords l'unicité : Soit p et q deux probabilités sur Ω telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ p(\{w_i\}) = q(\{w_i\}) = p_i$.

Soit $A \in P(E)$, alors A est l'union disjointe de ces éléments, c'est évident et cela s'écrit :

$$A = \bigcup_{\{i|w_i \in A\}} \{w_i\}$$

D'où :

$$p(A) = \sum_{\{i|w_i \in A\}} p_i = q(A).$$

Ainsi, p est unique.

Au passage, si p vérifie $\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ p(\{w_i\}) = p_i$, alors forcément la valeur de $p(A)$ est donné dans le théorème.

Montrons maintenant que p est une probabilité :

- On a clairement, $p(\emptyset) = 0$, et $p(\Omega) = \sum_i p_i = 1$.
- Si $A \in P(E)$, on a :

$$0 \leqslant \sum_{\{i|w_i \in A\}} p_i \leqslant \sum_{\{i|w_i \in A\}} p_i + \sum_{\{i|w_i \notin A\}} p_i = 1,$$

  ainsi p est à valeurs dans $[0,1]$.
- Si A et B sont deux parties de Ω, disjointes, on a :

$$p(A \cup B) = \sum_{\{i|w_i \in A \cup B\}} p_i = \sum_{\{i|w_i \in A\}} p_i + \sum_{\{i|w_i \in B\}} p_i = p(A) + p(B)$$

Ainsi p est une probabilité.

Réciproquement si p est une probabilité alors les p_i sont clairement positifs, et leur somme fait $p(\Omega)$, c'est-à-dire 1. ■

Application pratique : lorsque la probabilité dépends d'un paramètre on utilise $\sum_i p_i = 1$.

■ **Exemple II.1** On lance un dé pipé telle que la probabilité d'obtenir la face i est égale à λi, pour un certains $\lambda \in \mathbb{R}$, *i.e.* la probabilité d'une face est proportionnelle au chiffre de cette face.

- Quel est la valeur de λ ?
- Déterminer la probabilité d'obtenir un chiffre pair.

■

II.4 Probabilité uniforme

Définition II.3 Soit Ω un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle probabilité uniforme sur Ω la probabilité définie sur $P(\Omega)$, telle que

$$\forall w \in \Omega,\ p(\{w\}) = \frac{1}{n}$$

Pour tout événement A, on a alors :

$$p(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{n} = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\text{nbr de cas favorables}}{\text{nbr de cas possibles}}$$

Cette probabilité est dite uniforme car tous les évenements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables. C'est la seule à vérifier cette hypothèse.

Dans le cas de la probabilité uniforme, les calculs de probabilité se ramènent donc aux dénombrements. Or les dénombrements ne suivent pas nécessairement l'ordre chronologique de l'expérience.

✎ L'équiprobabilité ne se démontre généralement pas, il s'agit d'une hypothèses du problème, souvent cette hypothèse n'est pas mentionné explicitement et c'est au candidat d'interpréter l'énoncé.
D'une manière générale dès qu'il y a écrit « au hasard » ou que rien ne permet d'affirmer que certains événements élémentaires sont plus probables que d'autre, c'est la probabilité uniforme qui doit être utilisée.

■ **Exemple II.2** On lance un dé, la probabilité d'*obtenir un nombre pair* est de $\frac{1}{2}$. ■

■ **Exemple II.3** On lance deux dés la probabilité de l'événement *la somme fait* 4 est $\frac{3}{36}$, puisqu'il y a 36 tirages possibles et seulement 3 tirages qui donnent 4 :

$$\{(1,3),\ (2,2),\ (3,1)\}$$

■

✎ On voit dans l'exemple précédent :

- La probabilité uniforme est sur les valeurs du dé, pas sur les valeurs de la somme. Les différentes valeurs de la somme ne sont pas équiprobables, puisqu'on a plus de tirages dont la somme fait 7 que de tirages dont la somme fait 4.
- On a choisi un univers particulier en ajoutant une hypothèse qui n'est pas présente dans l'expérience : les dés sont considérés discernables. Cela permet d'avoir un univers avec plus de valeurs $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, mais sur lequel on peut choisir la probabilité uniforme. L'ordre sur les dés est arbitraire : le premier dé est celui qui est regardé en premier.
  Si on refuse de considérer les dés discernables, alors Ω est l'ensemble des parties de $[\![1,6]\!]$ à 1 ou 2 éléments. On n'a plus alors la probabilité uniforme sur cet ensemble.

■ **Exemple II.4** On tire dans une urne n fois sans remise. L'urne contient N boules, avec Np blanche et $N(1-p)$ noires. On considère $i \in [\![1,n]\!]$, on cherche la probabilité d'avoir une blanche au tirage i événement noté B_i.

On voit facilement que $p(B_1) = p$.

On peut avec un peu de calcul, faire un arbre pour vérifier que $p(B_2) = p$.

Pour faire le cas du tirage numéro i, il faut passer par les dénombrements.

On change la modélisation et on considère que l'on tire toutes les boules. L'univers est alors une liste de longueur N contenant Np blanche et $N(1-p)$ noires. Un tirage est alors déterminé par la place des blanches, et donc :

$$\operatorname{Card}(\Omega) = \binom{N}{Np}$$

Un tirage de B_i contient une blanche en position i et est déterminé par les place des $Np-1$ blanches qui sont situés aux autres places. Ainsi :

$$\operatorname{Card}(B_i) = \binom{N-1}{Np-1}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} p(B_i) &= \frac{\binom{N-1}{Np-1}}{\binom{N}{Np}} \\ &= \frac{(N-1)!}{N!}\frac{Np!}{(Np-1)!}\frac{(Np-N)!}{((Np-1)-(N-1))!} \\ &= \frac{Np}{N} = p. \end{aligned}$$

■

R On voit bien à l'exemple précédent l'avantage des dénombrements : ils ne dépendent pas de l'ordre chronologique.

Le fait d'ajouter l'hypothèse que l'on tire les boules jusqu'à la dernière ne change pas le calcul des probabilités.

On peut aussi faire cet exercice en considérant les boules numérotées : les blanches de 1 à Np, les noires ensuite.

■ **Exemple II.5** On dispose de trois boîtes numérotées de 1 à 3, et de 5 jetons numérotés de 1 à 5. On range *au hasard* les cinq jetons dans les 3 boîtes. Quel est la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide ?

Déjà l'univers Ω est constitué des 5-uplets (b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) de $[\![1,3]\!]$, à chaque jeton étant associé une boîte, c'est donc un ensemble de cardinal 3^5.

Sur cet espace on prend la probabilité uniforme, il reste donc à calculer le nombre de 5-uplets qui appartiennent à l'ensemble A, *i.e.* qui vérifient la propriété. Pour cela, on procède par complémentaire, en calculant la probabilité qu'une boîte au moins soit vide.

On note alors E l'événement aucune boîte vide Le complémentaire de E est alors : au moins une boîte vide. On peut alors écrire :

$$\overline{E} = A \cup B \text{ union disjointe}$$

avec A l'événement une boîte vide et une seule et B l'événement deux boîtes vides exactement.

On a alors :

$$\mathrm{Card}(A) = 32^5$$

en effet par choix successifs : le choix de la boîte vide, la répartition des jetons dans les deux autres boîtes. et

$$\mathrm{Card}(B) = 3$$

Ainsi,

$$\mathrm{Card}\left(\overline{E}\right) = 3 + 32^5 = 3(1+2^5)$$

ce qui donne :

$$p\left(\overline{E}\right) = \frac{1}{3^4}(1+2^5)$$

$$\text{et } p(E) = 1 - \frac{1}{3^4}(1+2^5)$$

■

III Étude du conditionnement

III.1 Probabilités conditionnelles

Définition III.1 Soit A un évènement de l'espace de probabilisé $(\Omega, P(\Omega))$, tel que $p(A) \neq 0$.

On définit la **probabilité conditionnelle** relative à A comme la probabilité :

$$p_A : \left\{ \begin{array}{rcl} P(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ B & \mapsto & \frac{p(B\cap A)}{p(A)} \end{array} \right.$$

Notation III.1. *Pour un événement B on appelle* ***probabilité de*** B ***sachant*** A *la valeur de $\frac{p(B\cap A)}{p(A)}$, notée $p_A(B)$, ou $p(B|A)$.*

Pour que la définition ait un sens, on doit vérifier que $p(.|A)$ est bien une probabilité.

Proposition III.1 Soit A un évènement de l'espace de probabilisé $(\Omega, P(\Omega))$, tel que $p(A) \neq 0$. Alors p_A est une probabilité sur Ω.

Démonstration. Montrons que p_A est à valeur dans $[0,1]$. On a clairement $(A \cap B) \subset A$. D'où :

$$0 \leqslant p(A\cap B) \leqslant p(A)$$

et en divisant par $p(A)$ (qui est non nul), on a :

$$0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1.$$

Puis il est clair que $p_A(\emptyset) = p(\emptyset) = 0$, et $p_A(\Omega) = \frac{p(\Omega\cap A)}{p(A)} = 1$.

Reste la dernière propriété : Soit B_1 et B_2 disjoints, alors :

$$\begin{aligned} p_A(B_1 \cup B_2) &= \frac{p\Big(A \cap (B_1 \cup B_2)\Big)}{p(A)} \\ &= \frac{p\Big((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)\Big)}{p(A)} \\ &= \frac{p\Big((A \cap B_1)\Big) + p\Big((A \cap B_2)\Big)}{p(A)} \\ &= \frac{p\Big((A \cap B_1)\Big)}{p(A)} + \frac{p\Big((A \cap B_2)\Big)}{p(A)} \\ &= p_A(B_1) + p_A(B_2). \end{aligned}$$

Ces égalités sont vérifiées car $(A \cap B_1)$ et $(A \cap B_2)$ sont disjoints. ■

✎ La probabilité conditionnelle corresponds à l'intuition suivante : on sait que A a été réalisé, cela modifie le calcul des probabilités des autres événements (on restreint l'univers à A).

✎ Notons que $p(.|A)$ possède les propriétés d'une probabilité, comme : $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$.

La formule de la probabilité conditionnelle peut s'utiliser de plusieurs manières :

- soit on connaît la probabilité de l'intersection $p(B \cap A)$ et $p(A)$, dans ce cas, on peut calculer directement $p(B|A)$.
- Il arrive aussi parfois qu'on connaisse plutôt $p(B|A)$ et qu'on s'en serve pour calculer $p(B \cap A)$. On a en effet : $p(A \cap B) = p(A)p(B|A) = p(B)p(A|B)$.

■ **Exemple III.1** On tire un dé, sachant qu'on a obtenu un nombre pair qu'elle est la probabilité que ce soit un 6 ? En effet, si A est « obtenir une face pair », alors $p(A) = \frac{1}{2}$, et en notant B, l'événements « obtenir un 6 », alors $B \cap A = B$, et donc $p(B \cap A) = \frac{1}{6}$, d'où $p(B|A) = \frac{1}{3}$. ■

■ **Exemple III.2** On dispose de deux urnes U et V contenant chacune 4 boules blanches et huit boules noires (boules indiscernables bien évidement). On considère l'expérience suivante :

- On tire un boule dans l'urne U, on note sa couleur et on la met dans l'urne V,
- on tire au hasard une boule dans l'urne V et on note sa couleur.

L'univers Ω associé à cette épreuve est l'ensemble des 2-uplets de l'ensemble $\{B,N\}$, ensemble à 4 éléments donc.

Déterminons qu'elle probabilité on doit mettre sur chacun de ces 4 événements.

Posons :

- $B_1 =$ « obtenir une boule blanche au premier tirage »
- $B_2 =$ « obtenir une boule blanche au deuxième tirage »
- $N_1 =$ « obtenir une boule noire au premier tirage »
- $N_2 =$ « obtenir une boule noire au deuxième tirage »

il est clair que $p(B_1) = \frac{1}{3}$, tandis que $p(N_1) = \frac{2}{3}$. Puisque les boules sont tirés au hasard, on met une probabilité uniforme sur chacune des boules.

Par contre, le calcul de $p(B_2)$ et de $p(N_2)$ est moins clair : intuitivement, le deuxième tirage dépend du premier.

Ainsi, $p_{B_1}(B_2)$ est la probabilité que l'on tire une boule blanche au deuxième tirage sachant qu'on a tiré une boule blanche au premier. Cette probabilité est donc : $p(B_2|B_1) = \frac{5}{13}$. De même, on a :

$$p(N_2|B_1) = \frac{7}{13}, \qquad p(B_2|N_1) = \frac{4}{13}, \qquad p(N_2|N_1) = \frac{9}{13}.$$

Ce qui permet de déterminer la probabilité p entièrement. En effet, on a : $p\Big((B,B)\Big) = p(B_1 \cap B_2) = p(B_2|B_1)p(B_1) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{13} = \frac{5}{39}$. On montre aussi ainsi :

$$p\Big((B,N)\Big) = \frac{8}{39}, \qquad p\Big((N,B)\Big) = \frac{8}{39}, \qquad p\Big((N,N)\Big) = \frac{18}{39}.$$

■

On peut faire l'exemple précédent avec un arbre (ici 4 branches). Néanmoins, il faut le rédiger avec la probabilité conditionnelle.

III.2 Probabilités composées

Proposition III.2 Soit $(\Omega, P(\Omega), P)$, un espace probabilisé fini. Si $n \geqslant 2$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements qui vérifient :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0,$$

alors on a :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1)p_{A_1}(A_2)p_{A_1 \cap A_2}(A_3)\dots p_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Cette formule signifie que la probabilité que tous les A_i se réalisent est égale à la probabilité que

- le premier se réalise,
- le deuxième se réalise sachant que le premier s'est réalisé,
- le troisième sachant que le premier et le deuxième se sont réalisés,
- etc.
- jusqu'au dernier sachant tous les précédents.

Il s'agit donc de donner une sorte d'*ordre d'apparition* des événements, comme si A_1 se réalisait avant A_2 etc. C'est souvent dans ce contexte qu'elle est utilisé, par exemple dans le cas de tirage successif.

On peut dire que l'on suit un chemin dans l'arbre des tirages.

Dans le cas $n = 2$, on retrouve la formule $p(A \cap B) = p(A) \times p(B|A)$, il s'agit donc d'une généralisation de cette formule.

Enfin notons que l'hypothèse : $p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, assure que tous les ensemble par lequel on conditionne, c'est-à-dire les $A_1 \cap \cdots \cap A_k$ sont de probabilité non nulle. **Rédaction :** En général, l'hypothèse : $p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap$

$A_{n-1}) \neq 0$ n'est pas à vérifier par le calcul. Elle est une conséquence de la modélisation de l'énoncé.

Démonstration. La démonstration se fait par récurence sur n. Pour $n = 2$, on a bien : $p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \times p(A_2|A_1)$. Cette formule est vraie si $p(A_1) \neq 0$.

Supposons la propriété vraie au rang n.

Soit $A_1, \dots, A_{n+1}$, $n+1$ événements tel que l'intersection $A_1 \cap \dots A_n$ soit de probabilité non nulle. Alors, il en est de même de $A_1 \cap \dots A_{n-1}$. Ainsi, on peut utiliser l'hypothèse de récurence et dire que :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1) p_{A_1}(A_2) p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots p_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Pour simplifier les notations on pose : $B = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. L'hérédité revient à démontrer que :

$$p(B \cap A_{n+1}) = p(B) p_B(A_n),$$

Ce qui est bien vrai puisque $p(B) > 0$. ■

■ **Exemple III.3** Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires. On tire successivement et sans remise quatre boules dans cette urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches puis deux boules noires dans cette ordre ?

Déjà remarquons que c'est la probabilité uniforme qui doit être utilisée, puisque rien n'indique le contraire, cela signifie que *étant donné une configuration de l'urne, chaque boule est équiprobable*.

Pour $i \in [\![1, 4]\!]$, on peut définir les événements suivants :

- $B_i =$ « *Obtenir une boule blanche au tirage i* »,
- $N_i =$ « *Obtenir une boule noire au tirage i* ».

On recherche la valeur de $p(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4)$. On va utiliser la formule des probabilités totales, en suivant l'ordre des événements, en effet si on sait quelle boule ont été tiré avant on connaît alors la composition de l'urne.

De plus, il est clair que l'événement $p(B_1 \cap B_2 \cap N_3)$ n'est pas impossible, c'est une conséquence des hypothèses.

On a facilement :

$$p(B_1) = \frac{4}{7}, \qquad p_{B_1}(B_2) = \frac{3}{6}, \qquad p_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{3}{5}, \quad p_{B_1 \cap B_2 \cap N_3}(N_4) = \frac{2}{4}.$$

Au final, on trouve :

$$p(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4) = \frac{3}{35}.$$

■

R Ici encore, on peut faire un arbre, mais cela devient rapidement compliqué.

III.3 Probabilités totales

Proposition III.3 Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \dots, A_m)$, avec $m \geqslant 1$, un système complet d'événements. Alors, pour tout événement B, on a :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{m} p(A_i \cap B).$$

Si de plus pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $p(A_i) \neq 0$, alors :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B) p(A_i).$$

La formule des probabiltés totales permet de « découper » un ensemble selon un système complet (différents cas) pour obtenir sa probabilité.

Comme cas particulier à retenir, on a, si A et B sont des événement :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B).$$

On a ici utilisé le SCE $(A, \overline{A})$.
Dans le cas (classique) où A n'est ni l'ensemble vide, ni l'univers entier, cela s'écrit :

$$p(B) = p_A(B) p(A) + p_{\overline{A}}(B) p(\overline{A}).$$

Démonstration. Si les $(A_1, \dots, A_m)$, avec $m \geqslant 1$, forment un système complet d'événements, alors

$$B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup_{i=1}^{m} (A_i) = \bigcup_{i=1}^{m} (B \cap A_i).$$

Cette dernière réunion étant disjointes. On obtient donc :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{m} p(B \cap A_i).$$

Puis si $p(A_i) \neq 0$, on a : $p(B \cap A_i) = p_{A_i}(B) p(A_i)$. ■

■ **Exemple III.4** On dispose d'un dé et six urnes numérotées de 1 à 6 qui contiennent des boules blanches et des boules noires. L'urne i contient i boules et $6 - i$ boules noires, pour $i \in [\![1, 6]\!]$. On considère l'expérience suivante :

- on tire le dé, on obtient un nombre $i \in [\![1, 6]\!]$,
- on tire une boule dans l'urne i.

Quel est la probabilité d'obtenir une boule blanche ? Il faut *découper* l'événement A : « obtenir une boule blanche » en 6 événements disjoints, selon la valeur du dé. En effet en notant D_i l'événement « la valeur du dé est i », les événements $(D_i)_{i=1\dots6}$ forment un système complet d'événements, de probabilité non nulle.

Ainsi :

$$p(A) = \sum_{i=1}^{6} p(A \cap D_i) = \sum_{i=1}^{6} p_{D_i}(A) p(D_i).$$

Comme $p(D_i)$ vaut $\frac{1}{6}$, et $p_{D_i}(A)$ vaut $\frac{i}{6}$, on obtient :

$$p(A) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\frac{i}{6} = \frac{1}{36}\frac{6\times 7}{2} = \frac{7}{12}.$$

■

R On peut encore voir cela avec un arbre à 12 branche ici. La formule des probabilités totales corresponds à traiter un noeud avec n branches

III.4 Formule de Bayes

La formule des probabilités totales permet de découper un événement selon un ensemble complet d'événements. Et ainsi de se ramener à différents cas. La formule de Bayes permet de dire : « étant donné qu'on a eu tel résultat, quel est a probabilité du cas i ? ». Où de manière différentes, étant donné le résultat final quel est la chaîne d'événement qui a amené ce résultat.

Proposition III.4 Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \ldots, A_m)$, avec $m \geqslant 1$, un système complet d'événements tel que pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, $p(A_i) \neq 0$. Soit B un autre événement tel que $p(B) \neq 0$, alors :

$$\forall j \in [\![1,m]\!],\ p_B(A_j) = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{p(B)} = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{\sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i)}$$

En particulier soit A un événement avec $0 < p(A) < 1$, alors

$$p_B(A) = \frac{p_A(B)p(A)}{p(B)} = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\overline{A}}(B)p(\overline{A})}$$

R Évitez de retenir cette formule par cœur, il vaut mieux la retrouver.

Démonstration. La preuve de la première égalité est simple :

$$p_B(A_j) = \frac{p(A_j \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B \cap A_j)}{p(A_j)}\frac{p(A_j)}{p(B)} = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{p(B)}.$$

La deuxième égalité se démontre à partir de la formule des probabilités totales, on a en effet vu que :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i).$$

■

✎ La formule de Bayes est parfois appelé *formule des causes*, dans le sens qu'elle permet de « remonter le temps » et de trouver la probabilité des événements passés à partir des événements récents.

Pour comprendre cette idée, il faut voir regarder la formule : $P_B(A) = \frac{P_A(B)p(A)}{p(B)}$, en imaginant que B est la conséquence et A la cause, autrement dit que A arrive avant chronologiquement que B. on a alors : $p_B(A)$ est la probabilité de la cause A sachant que la conséquence B a eu lieu. Cette probabilité s'exprime comme « l'influence » de A sur B, c'est-à-dire la probabilité de B sachant la cause A. multiplié par le rapport entre la probabilité de la cause A, sur la probabilité de la conséquence (sans cause) $p(B)$.

Dans la formule : $p_B(A_j) = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{\sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i)}$. le terme $p_{A_j}(B)p(A_j)$ est à la fois en haut et en bas de la fraction, en fait la formule de Bayes dit que $p_B(A_j)$ est l'importance relative de ce terme dans la somme située en dessous.

■ **Exemple III.5** On considère deux urnes U_1 et U_2 identiques. L'urne U_1 contient trois boules blanches et sept noires, tandis que l'urne U_2 contient cinq boules blanches et trois boules noires. L'expérience aléatoire est :

- on choisit une urne au hasard,
- on tire une boule dans cette urne.

La boule obtenue (*la conséquence*) est blanche. On veut calculer la probabilité qu'on ait choisit l'urne U_1 (que *la cause* soit l'urne U_1).

On note B l'événement « *tirer une boule blanche* » et N l'événement contraire : « *tirer une boule noire* ». U_1 l'événement : « *l'urne choisit est l'urne 1* », et U_2 l'événement contraire.

On veut donc calculer : $p_B(U_1)$, d'après la formule des causes cela s'écrit :

$$P_B(U_1) = \frac{P_{U_1}(B)p(U_1)}{p(B)} = \frac{P_{U_1}(B)p(U_1)}{p_{U_1}(B)p(U_1) + p_{U_2}(B)p(U_2)}.$$

Maintenant calculons chacun des termes :

- $P_{U_1}(B)$ est égale à $\frac{3}{10}$, puisque *dans l'urne 1*, les boules sont choisis avec la probabilité uniforme.
- $p_{U_2}(B)$ est égale à $\frac{5}{8}$, pour la même raison,
- $p(U_1) = p(U_2) = \frac{1}{2}$, puisque les urnes sont choisies avec la probabilité uniforme.

Ce qui donne :

$$P_B(U_1) = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{20} + \frac{5}{16}} = \frac{12}{37}$$

■

■ **Exemple III.6** TEST DE FIABILITÉ

Un laboratoire met au point un test pour détecter une maladie :

- Cette maladie touche 1 personne sur 5000,
- Si la personne est malade, le test est positif avec une probabilité de $\frac{998}{1000}$,
- si la personne est saine, le test est négatif avec une probabilité de $\frac{2999}{3000}$.

On se demande si le test est fiable pour détecter les personnes malades, et pour détecter les personnes saines. On écrit donc :

- M l'événement « *l'individu est malade* » et S l'événement contraire,
- P l'événement « *le test est positif* » et N l'événement contraire.

Les hypothèse sont :

$$p(M) = \frac{1}{5000}, \qquad p(S) = \frac{4999}{5000}, \qquad p_M(P) = \frac{998}{5000}, \qquad p_S(N) = \frac{2999}{3000}.$$

Pour savoir si le test est fiable pour détecter les individus malade, on calcule $p_P(M)$. On a :

$$p_P(M) = \frac{p(P \cap M)}{p(P)} = \frac{p_M(P)p(M)}{p_M(P)p(M) + p_S(P)p(S)} \approx 37\%.$$

Le test n'est donc pas fiable.

Pour savoir si le test est fiable pour détecter les individus sains, on calcul $p_N(S)$. On a :

$$p_N(S) = \frac{p(N \cap S)}{p(N)} = \frac{p_S(N)p(S)}{p_S(N)p(S) + p_M(N)p(M)} \approx 99\%.$$

Le test est donc fiable. ■

■ **Exemple III.7** Si on reprends l'exemple précédent, on peut calculer la probabilité que la valeur du dé soit 4 sachant qu'on a eu une blanche. Cela donne :

$$\begin{aligned} p_B(D=4) &= \frac{p(D=4)p_{D=4}(B)}{p(B)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}\frac{4}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{9}\frac{12}{7} = \frac{4}{21} \approx 0.19 \end{aligned}$$

En particulier, $p_B(D=4) > 1/6$. ■

IV Événements indépendants

Le conditionnement permet de prendre en compte le fait qu'un événement a eu lieu pour calculer de nouvelles probabilités.

Intuitivement, les probabilités ne sont pas toutes modifiés par un événement.

Par exemple, si on tire plusieurs fois une pièce, le premier lancer n'influe pas sur le deuxième. Ainsi, *la connaissance du résultat du premier lancer n'apprends rien sur le résultat du deuxième*. Ces deux événements le premier et le deuxième lancer sont indépendants.

⋆ Cas de deux événements

Définition IV.1 Deux événements A et B sont dits indépendants, si on a :

$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

Autrement dit si la probabilité de l'intersection est égale aux produite des probabilités.

Dans le cas où $p(A) \neq 0$, on a : $p(B|A) = p(B)$. Cette condition est alors équivalente à la définition.

Ainsi, *la réalisation de A n'influe pas sur la probabilité d'apparition de B*. On peut voir aussi cela en disant que la proportion de B dans A (*i.e.* $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$) est égal à la proportion de B dans l'espace total (*i.e.* $p(B)$).

✎ Cette relation ne dépend pas de l'ordre, c'est pareil de dire A est indépendant de B et que B est indépendant de A,

- un événement de probabilité nulle est toujours indépendants des autres, de même qu'un événement de probabilité 1 : le fait que ces événements se réalisent ne donne aucune information.
- Ne pas confondre indépendants et incompatibles ($A \cap B = \emptyset$). En fait on a : si A et B sont incompatibles non négligeables, alors ils ne sont pas indépendants, en effet savoir que A a lieu signifie alors que B n'a pas lieu à coups sûr. Pour faire simple, l'incompatibilité est une notion *ensembliste*, elle ne dépend que des ensembles, alors que l'indépendance est une notion *probabiliste* car elle dépend de p.
- Enfin, il arrive fréquemment que l'indépendance soit une conséquence des conditions de l'expérience. Il faut alors savoir le modéliser. Par exemple, dans le cas de tirage successif (avec remise), de lancer de pièces successif etc.

Intuitivement, si A et B sont indépendants, la réalisation de A ne change pas la probabilité de B, donc la, non réalisation de A ne change pas la probabilité de B. c'est ce que dit la proposition suivante

Proposition IV.1 : Soit A et B deux événements indépendants, alors les événements :
- A et $\overline{B}$,
- $\overline{A}$ et B,
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

sont indépendants.

Démonstration. Il suffit de démontrer le premier point : le deuxième se démontre en remplaçant A par B, et le dernier en appliquant le premier point en remplaçant A pas $\overline{A}$. On a : $p(A) = p(A \cap \overline{B}) + p(A \cap \overline{B}) = p(A \cap \overline{B}) + p(A)p(B)$, d'où : $p(A \cap \overline{B} = p(A)\,(1 - p(B)) = p(A)p(\overline{(B)})$. ■

■ **Exemple IV.1** On lance un dé, on considère les événements :
- A : « *Obtenir un nombre pair* »
- B : « *Obtenir un nombre supérieur ou égal à 3* ».

Intuitivement, ces deux événements sont indépendants, parce qu'il y a autant (en proportion) de nombres pairs plus grand que 3 que de nombres pairs dans $[\![1,6]\!]$.

Vérifions le. on a $A = \{2,4,6\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, et $A \cap B = \{4,6\}$. Comme on considère la probabilité uniforme, on a : $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{2}{3}$, tandis que $p(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Ainsi, la formule $p(A)p(B) = p(A \cap B)$ est bien vérifiée.

Par contre, si l'on regarde les événements :
- A' : « *Obtenir un nombre impair* »
- B' : « *Obtenir un nombre strictement supérieur à 3* ».

Alors, les mêmes calculs donnent : $p(A') = \frac{1}{2}$, $p(B') = \frac{1}{2}$, et $p(A' \cap B') = \frac{1}{3}$, ainsi les événements ne sont pas indépendants. ■

■ **Exemple IV.2** On lance deux dés non pipés. Et on considère deux événements :
- A : « *Obtenir deux chiffres impairs* »,
- B : « *La somme des dés fait 6* »

Est-ce qu'ils sont indépendants.

Commençons par une description de Ω : c'est l'ensemble des 2 uplets de $[\![1,6]\!]$, ainsi $\operatorname{Card}\Omega = 36$.

Remarquons que cela suppose que les deux dés sont discernables, en associant le premier lancé à la première composante et le deuxième lancer à la deuxième composante. Dans ce contexte, l'événement A peut s'écrire :

$$A = \{1,3,5\}^2 = \left\{(i,j) \middle| i \in \{1,3,5\}\right\},$$

tandis que

$$B = \left\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\right\}$$

Ainsi, $A \cap B = \{(3,3)\}$, et $p(A \cap B) = \frac{1}{3}$, et $p(A) = \frac{9}{36}$, $(B) = \frac{5}{36}$. Les événements A et B ne sont donc pas indépendants. ∎

∎ **Exemple IV.3** On reprends l'exemple des 6 urnes et du dé. On tire le dé, on choisit alors l'urne correspondante. On fait deux tirages dans l'urne avec remise.

On souhaite savoir si B_1 et B_2 sont indépendants (B_i = blanche au tirage i).

On a :

$$\begin{aligned}
p(B_1 \cap B_2) &= \sum_{i=1}^{6} p(D = i) p_{D=i}(B_1 \cap B_2) \text{ probabilité totale} \\
&= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \frac{i^2}{36} \\
&= \frac{1}{6^3} \sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{1}{6^3} \left(\frac{6 \times 7 \times 13}{6} \right) \\
&= \frac{7 \times 13}{6^3} \approx 0.42.
\end{aligned}$$

tandis que :

$$p(B_1) = \frac{7}{12} \qquad p(B_2) = \frac{7}{12} \qquad p(B_1)p(B_2) = \frac{7^2}{12^2} \approx 0.34.$$

Les événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants. ∎

(!) L'indépendance de deux événements est parfois contre intuitive. Comme le prouve l'exemple précédent !

Ici, le fait d'avoir une blanche au premier tirage indique que l'urne contient plutôt des blanches (valeur du dé plutôt élevé), et donc au prochain tirage, on aura plutôt une blanche.

Les événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants, on a pour une valeur de i fixée, :

$$p_{D=i}(B_1 \cap B_2) = p_{D=i}(B_1) p_{D=i}(B_2)$$

⋆ Indépendance mutuelle

Définition IV.2 Soit $A_1, \dots A_n$, n évenements d'un espace probabilisé. On dit que ces évenements sont **deux à deux indépendants**, si pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$p(A_i \cap A_j) = p(A_i)p(A_j).$$

Ces événements sont **mutuellement indépendants** si pour tout sous-ensemble non vide I de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$p\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} p(A_i)$$

R La propriété : $p\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} p(A_i)$, n'a d'intérêt que si I est constitué d'au moins deux éléments.

Notons que si les événements sont mutuellement indépendant, ils sont deux à deux indépendants.

Ainsi, lorsqu'on passe à plus de deux événements, il faut faire attention à ce que l'on fait : avec un triplet (A,B,C) d'événements indépendants, on peut avoir A, B, C indépendant deux à deux, mais pas A et $B \cap C$ indépendants par exemple, Les événements sont alors indépendants deux à deux mais pas mutuellement.

■ **Exemple IV.4** Si on considère deux dés équilibrés, et ainsi la probabilité uniforme sur $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, supposons que l'on considère les événements
- A : « *le premier dés est pair* »,
- B : « *le second dés est pair* »,
- C : « *les deux dés ont même parité* ».

Alors, on a clairement : $p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$. Puis l'événement C correspond aussi à un tirage sur 2. On peut les expliciter pour s'en convaincre, ou utiliser la formule des probabilité totales en utilisant comme système complet le résultat du premier tirage. Ainsi $p(C) = \frac{1}{2}$. Puis on a : $p(A\cap B) = \frac{1}{4}$. Simplement parce que les deux tirages sont clairement indépendants.

De même, on a : $p(A\cap C) = \frac{1}{4}$.

Pourtant ces trois événements ne sont pas indépendants entre eux, puisque si on sait que A et C se produisent, on est sûr que B se produit.

De plus : $p(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4} \neq p(A)p(B)p(C)$. ■

Pour comprendre cette définition, on peut l'expliciter dans le cas $n = 3$, les conditions sont alors :
- $p(A\cap B\cap C) = p(A)p(B)p(C)$,
- $p(A\cap B) = p(A)p(B)$,
- $p(A\cap C) = p(A)p(C)$,
- $p(B\cap C) = p(B)p(C)$,

R La notion d'indépendance deux à deux est peu utilisée, ainsi lorsqu'on parle d'indépendance, c'est la notion d'indépendance mutuelle qui est généralement sous entendu.

Enfin, on a la généralisation (admise) de la propriété IV.1 :

Proposition IV.2 Soit $A_1, A_2, \dots A_n$, une famille d'événements (mutuellement) indépendants. Soit $(B_i)_{i=1\dots n}$ une famille d'événements, telle que : $\forall i \in [\![1,n]\!], B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$. Alors les événements $(B_i)_{i=1\dots n}$ sont indépendants.

Espaces probabilisés

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Probabilité uniforme et dénombrements

Exercice 1 Quel est l'événement le plus probable :

1. Obtenir au moins une fois un as en lançant 4 fois un dé ?
2. Obtenir au moins une fois un double as en lançant 24 fois deux dé ?

Correction : $p(A_1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$. et $p(A_2) = 1 - \left(\frac{35}{E6}\right)^{24}$.

Exercice 2 On considère que les anniversaires ont lieu dans les 365 jours de l'année de manière équiprobables (et on enlève le 29 février).

On considère un ensemble de N personnes à qui on demande leur jour d'anniversaire.

1. Déterminer la probabilité que deux au moins de ces personnes aient le même anniversaire en fonction de N.
2. Écrire un algorithme permettant de déterminer le nombre minimal N_A, tel que si $N \geqslant N_A$ cette probabilité est supérieure à $\frac{1}{2}$.
3. Déterminer la probabilité que une au moins de ces personnes ait le même anniversaire que vous.
4. Écrire un algorithme permettant de déterminer le nombre minimal N_A, tel que si $N \geqslant N_A$ cette probabilité est supérieure à $\frac{1}{2}$.

Correction :

$\Omega = [\![1, 365]\!]^N$, muni de la proba uniforme.

1. par dénombrements
$$1 - \frac{A_{365}^N}{365^N}$$
. On trouve $N = 23$.
2. idem :
$$1 - \frac{364^N}{365^N}$$
. On trouve $N = 253$.

⋆ Deux modélisations différentes donnent deux probabilités différentes

Exercice 3 On dispose de P boîtes, avec $P \geqslant 2$, dans lesquelles on veut disposer N boules. On considère l'expérience suivante :

- On répète N fois, prendre une boule, choisir une boîte au hasard et y mettre la boule,
- À la fin on dispose ainsi du nombre de boules contenues dans chacune de ces boîtes $(B_1, \dots, B_P)$, avec B_p un nombre entier.

1. Déterminer l'univers Ω associé,
2. Déterminer la probabilité que la boîte p contienne k boules : $p(B_p = k)$,
3. On se donne P entiers $(k_1, \dots, k_P)$ tels que $k_1 + k_2 + \cdots + k_P = N$. Déterminer la probabilité pour que $\forall p = 1 \dots P$, $B_p = k_p$.
4. Montrer que toutes les compositions $(B_1, \dots, B_P)$ ne sont pas équiprobables.

Correction :

1. $\Omega \subset [\![1, P]\!]^N$ (chaque boule à P choix).
2. On munit cet espace de la probabilité uniforme : on compte le cardinal de l'événement $B_p = k$, par choix successif :
   - $\binom{N}{k}$ pour le choix des k à mettre dans l'urne p,
   - Une fois celle-ci choisie, on a $P - 1$ choix pour les $N - k$ autres, donc $(P-1)^{N-k}$.

Au final, $p(B_p=k)=\binom{N}{k}\times\frac{(P-1)^{N-k}}{P^N}$.

3. On raisonne encore par choix successifs :
   - $\binom{N}{k_1}$ pour la première boîte,
   - $\binom{N-k_1}{k_2}$ pour la deuxième boîte,
   - $\binom{N-k_1-k_2}{k_3}$ pour la troisième boîte, etc.
   - $\binom{N-k_1-k_2\dots k_{p-1}}{k_p}=1$ pour la dernière boîte.

   Au final :

$$p(B_1=k_1\cap\dots B_p=k_P)=\frac{1}{P^N}\binom{N}{k_1}\binom{N-k_1}{k_2}\cdots\binom{N-k_1-k_2\dots k_{p-1}}{k_p}$$

   Cela se simplifie en :

$$p(B_1=k_1\cap\dots B_p=k_P)=\frac{N!}{k_1!k_2!\cdots k_P!}\frac{1}{P^N}.$$

4. Par exemple, toutes les boules dans la boîte 1 correspond à $k_1=N$ les autres à 0. Ce qui donne : $p(B_1=N\cap B_2=0\cdots\cap B_P=0)=\frac{1}{P^N}$. Tandis que

$$p(B_1=N-1\cap B_2=1\cap B_3=0\cdots\cap B_P=0)=\frac{1}{P^N}\times N.$$

   D'une manière générale, les distributions « *les mieux réparties* » sont les plus probables.

Exercice 4 On reprend les conditions de l'exercice précédent : on dipose toujours de P boîtes, dans lesquelles on veut ranger N boules. Mais on procède différemment :

- On commence par déterminer $P-1$ entiers sous la forme d'une suite strictement croissante $a_1<a_2<\cdots<a_{P-1}$, avec $1\leqslant a_1$ et $a_{P-1}\leqslant N+P-1$.
- À partir de ces nombres on répartit les boules selon : dans la première on met $i_1=a_1-1$ boules, puis $i_2=a_2-a_1-1$ boules dans la deuxième, etc. $i_{k+1}=a_{k+1}-a_k-1$ dans la boîte B_{k+1}. Dans la dernière, on met $i_P=N+P-1-a_{P-1}$.

1. Montrer que la composition des boîtes $(B_1,\dots,B_P)$ est équiprobable.
2. Déterminer la probabilité que la boîte 1 contienne k boules.

Correction :

Ω est alors l'ensemble des $p-1$ combinaisons de $[\![1,N+P-1]\!]$ (choix des $P-1$ nombres a_i).

1. Soient $i_1\cdots i_P$ P entiers dont la somme fait N.

$$p(B_1=i_1\cap B_2=i_2\cap\cdots\cap B_P=i_P)=p\Big((a_1=i_1+1)\cap(a_2=i_1+i_2+2)\cap\cdots\cap(a_P=i_1+i_2+\cdots+i_{P-1}+(P-1))\Big)$$

   Ainsi une distribution correspond à 1 ensemble de $P-1$ nombres a_i. Ainsi : $p(B_1=i_1\cap B_2=i_2\cap\cdots\cap B_P=i_P)=\frac{1}{\binom{N+P-1}{p-1}}$.

2. On a :

$$p(B_1=k)=\sum_{i_2\dots i_p\,\big|\,i_1+i_2+\cdots+i_p=N}p(B_1=i_1\cap B_2=i_2\cap\cdots\cap B_P=i_P)=\frac{\binom{N+P-2-i_1}{p-2}}{\binom{N+P-1}{p-1}}.$$

   En effet, chacune de ces probabilités est égale à $\frac{1}{\binom{N+P-1}{p-1}}$, et il y en a autant que de choix de tirages, c'est-à-dire de choix de $a_2<\cdots<a_{P-1}$, avec $k+1\leqslant a_1$ et $a_{P-1}\leqslant N+P-1$, donc d'ensemble à $P-2$ éléments dans $N+P-1-(k+1)$.

⋆ Probabilités composées, probabilités totales, formule de Bayes

Exercice 5 Soit $n\geqslant 1$. Une urne contient trois boules blanches et sept boules noires. On tire successivement et au hasard n boules dans l'urne de sorte qu'après chaque tirage, la boule tirée soit remise dans l'urne si elle est noire, et non remise sinon.

Calculer la probabilité d'obtenir sur les n tirages une seule boule blanche.

Correction : (formule des proba composées) $\Omega \subset \{B,N\}^7$ (tous les tirages ne sont pas possibles).
On note B_i et N_i obtenir N ou B au tirage i. Les événements que l'on cherche s'écrivent :

$$\left(B_1 \cap N_2 \cap N_3 \cdots \cap N_n\right) \bigcup \left(N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cdots \cap N_n\right) \bigcup \ldots \bigcup \left(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cdots \cap B_n\right)$$

Autrement dit : obtenir une blanche au tirage k, et des noires aux autres tirages, pour $k \in [\![1,n]\!]$.
Cette union est disjointe.
Puis :

$$\begin{aligned} p(N_1 \cap N_2 \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k \cap N_{k+1} \cap \cdots \cap N_n) &= \underbrace{\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \cdots \times \frac{7}{10}}_{k-1\ \times} \times \frac{3}{10} \times \underbrace{\frac{7}{9} \times \cdots \times \frac{7}{9}}_{n-k\ \times} \\ &= \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} \times \frac{3}{10} \times \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k} \\ &= \frac{7^{n-1} \times 3}{10^k 9^{n-k}} \end{aligned}$$

La probabilité de l'événement que l'on cherche est la somme de ces événements, *i.e.* :

$$p = \sum_{k=1}^{n} \frac{7^{n-1} \times 3}{10^k 9^{n-k}} = \frac{7^{n-1} \times 3}{9^n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{9}{10}\right)^k = \frac{7^{n-1} \times 3}{9^n} \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

(vérifier le calcul)

Exercice 6 Une usine crée un produit avec trois machines A, B, ou C.

- la machine A effectue 20% de la production, et est défectueuse dans 1% des cas,
- la machine B effectue 30% de la production, et est défectueuse dans 0.1% des cas,
- la machine C effectue 50% de la production, et est défectueuse dans 0.01% des cas,

1. Déterminer la probabilité pour qu'un produit présente un défaut.
2. Lorsqu'un produit est défectueux, quelle est la probabilité pour qu'il provienne de la machine A ?

Exercice 7 On suppose l'équiprobabilité des naissances fille/garçon, et leur indépendance. Soit une famille avec deux enfants :

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient du même sexe ?
2. On suppose que l'aîné est un garçon, que devient cette probabilité ?
3. On suppose que l'un au moins est un garçon, que devient cette probabilité ?

Exercice 8 On considère une urne A qui contient deux boules rouges et une noire, et une urne B qui contient une rouge et deux noires. On effectue le premier tirage dans l'urne A. C'est le « tirage 1 ». Si le tirage 1 est rouge, on la remet dans A, puis on fait deux tirages successifs dans A avec remise. Ceux sont les tirages 2 et 3. Si le tirage 1 est noir, les tirages 2 et 3 se font dans B avec remise.

1. Déterminer la probabilité que le tirage 2 soit noir,
2. Déterminer la probabilité que le tirage 3 soit noir,
3. Déterminer la probabilité que les tirages 2 et 3 soient tous les deux noirs.
4. On suppose que le tirage 2 est noir, quelle est la probabilité que le tirage 3 soit noir ?
5. On suppose que les tirages 2 et 3 sont tous les deux noirs, quelle est la probabilité que le tirage 1 soit noir ?

Correction :

1. $p(N_2) = p(R_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap N_2)$ par proba totale, puis : $p(N_2) = p(R_1)p_{R_1}(N_2) + p(N_1)p_{N_1}(N_2)$. Ce qui donne : $p(N_2) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3}$.
2. même calcul où en remarquant que N_2 et N_3 ont lieu dans des conditions identiques.

3. $p(N_2 \cap N_3) = p(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$. Soit en conditionnant : $\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{6}{27}$. Il est intéressant de remarquer que N_2 et N_3 ne sont pas indépendants : savoir qu'on a eu une noire au tirage 2 indique qu'on a plus de chances d'être dans l'urne B et donc que le tirage suivent soit noir.
4. $p_{N_2}(N_3) = \frac{p(N_2 \cap N_3)}{p(N_2)}$, ce qui se calcule.
5. $p_{n_2 \cap N_3}(N_1) = \frac{p(N_1 \cap N_2 \cap N_3)}{p(N_2 \cap N_3)}$, idem.

Exercice 9 On lance plusieurs fois un dé et on s'arrête lorsqu'on a obtenu un 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :

- A_n="le n-ième lancer a lieu et est un 6"
- B_n="le n-ième lancer a lieu et n'est pas un 6"

1. Montrer que A_1 et A_2 ne sont pas indépendants et que $\bar{A_2} \neq B_2$,
2. On suppose que $n \geqslant 2$. Justifier que $A_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap A_n$. En déduire $p(A_n)$.

✯ Chaîne de Markov

Exercice 10 On considère un fumeur qui cherche à arrêter de fumer tous les jours :

- On note p_n la probabilité qu'il fume au n-ième jour.
- Si il a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fume pas le lendemain avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si il fume un jour, il ne fume pas le lendemain avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

1. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. Calculer p_n en fonction de p_1 et n.
3. Donner $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 11 On considère un jeu de pile ou face avec une pièce équilibrée. Le jeu s'arrête lorsque on a sorti deux piles de suite.

On considère les événements :

- P_n : « *le n-ième lancer a lieu et sort pile* »
- F_n : « *le n-ième lancer a lieu et sort face* »,
- G_n : « *gagner au n-ième lancer* ».

On note $x_n = p(G_n)$.

1. Calculer x_1, x_2 et x_3.
2. Justifier que pour $n \geqslant 3$, on a $G_n \subset F_1 \cup (P_1 \cap F_2)$.
3. Justifier que pour $n \geqslant 3$, on a $p(G_n | F_1) = p(G_{n-1})$. En déduire $p(G_n \cap F_1)$ en fonction de x_{n-1}.
4. De même déterminer une relation avec $p(G_n \cap (P_1 \cap F_2))$.
5. Montrer en utilisant les questions précédentes que la suite x_n vérifie :

$$\forall n \geqslant 3,\ x_n - \frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{1}{4}x_{n-2} = 0.$$

6. Déterminer x_n en fonction de n.
7. Calculer $y_n = \sum_{k=2}^{n} x_k$. Que représente ce nombre ? Quelle est sa limite lorsque n tend vers l'infini ? Interpréter.

Correction :

1. $x_1 = 0$, $x_2 = p(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{4}$, $x_3 = p(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = \frac{1}{8}$
2. Si $n \geqslant 3$, alors $G_n \subset \overline{G_2} = F_1 \cup (P_1 \cap F_2)$.
3. Si On a une face au premier lancer alors tout se passe comme si l'expérience débutait au deuxième lancer : pour avoir l'événement G_n, sachant qu'on a eu F_1, il faut que les tirages 2 à n constitue une suite de $n-1$ tirages qui s'arrête uniquement lorsqu'on a deux piles consécutives, c'est à dire un tirage de G_{n-1}. Ainsi $p_{F_1}(G_n) = G_{n-1}$. Ainsi, $p(G_n \cap F_1) = p_{F_1} p_{F_1}(G_n) = \frac{1}{2}x_{n-1}$.
4. De même, pour avoir l'événement G_n sachant l'événement $P_1 \cap F_2$, il faut que les tirages 3 à n constitue une séquence de G_{n-2}. Ainsi, $p_{P_1 \cap F_2}(G_n) = x_{n-2}$. Puis : $p(G_n \cap (P_1 \cap F_2)) = \frac{1}{4}x_{n-2}$.
5. On a $G_n = (G_n \cap F_1) \cup (G_n \cap P_1 \cap F_2)$, union disjointe. Donc $x_n - \frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{1}{4}x_{n-2} = 0$.
6. C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 , dont les racines sont : $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On obtient : $\alpha = \frac{1}{4r_1(r_1-r_2)}$ et $\beta = \frac{1}{4r_2(r_1-r_2)}$. Puis : $x_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}(r_1^{n-1} - r_2^{n-1})$

7. Par suite géométrique, on obtient : $y_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-r_1^n}{1-r_1}+\frac{1-r_2^n}{1-r_2}\right)$. Puis $\lim_{n\to+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{r_1-r_2}{1-(r_1+r_2)+r_1r_2} = 1$. On a donc toutes les chances de gagner asymptotiquement.

Les pièges dans les dénombrements

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

Dans cette fiche, on résume quelques points techniques sur les dénombrements et la théorie des probabilités.

⋆ Le piège du *au moins* : compter deux fois le même élément

Considérons un jeu de 32 cartes. On demande combien de paires de cartes on peut réaliser contenant au moins un roi.

Le piège consiste à raisonner en disant :

- il y a 4 choix pour le roi,
- puis 31 choix pour la deuxième carte (tout sauf la première),
- donc 4×31 paires possibles.

L'erreur est ici que certaines paires sont comptées en double : celles constituées de deux rois. Par exemple, la paire $\{RP, RC\}$, est comptée une fois en choisissant d'abord le RP, puis le RC, une autre fois dans le sens inverse.

Lorsqu'on dénombre et que l'on raisonne par choix successifs, il est donc important de ne pas compter un élément deux fois.

Il y a deux bonnes manières de procéder pour éviter ce piège :

- **Découper l'ensemble considéré en deux ensembles disjoints** : Ici, il s'agit des ensembles A :*paires constituées exactement d'un roi* de cardinal 4×28, et B : *paires constituées exactement de deux rois* de cardinal $\binom{4}{2}$. Le résultat est alors $4 \times 28 + \binom{4}{2}$.
- **Procéder par complémentaire** : En considérant le complémentaire de l'ensemble cherché : $\overline{A}$:*paires constituées d'aucun roi*. Cet ensemble est de cardinal $\binom{28}{2}$. Le résultat est donc $\binom{32}{2} - \binom{28}{2}$.

■ **Exemple IV.5** Dans un jeu de 52 cartes, on tire des mains de 5 cartes. Combien y a-t-il de tirages constitués exactement de 1 roi et 1 cœur ? En comptant que le roi de cœur compte à la fois pour un cœur et pour un roi, c'est-à-dire qu'un tirage du type $\{RC, DP, 7T, 8P, 9T\}$ est considéré dans l'ensemble.

La bonne manière de procéder est de compter :

- tout d'abord les mains ne contenant pas le roi de cœur, soit $3 \times 12 \times \binom{37}{3}$,
- puis celle contenant le roi de cœur, soit $\binom{37}{4}$.
- Le résultat est la somme des deux.

■

⋆ Lemme des bergers et applications aux dénombrements

Le lemme des bergers vient du fait que pour compter un troupeau de moutons on peut compter les têtes, ou bien compter les pattes et diviser par quatre.

La plupart du temps c'est cette version qui est utilisée :

Proposition IV.3 Soient E et F deux ensembles finis. On supose qu'il existe $f : E \to F$, surjective, telle que

$$\exists \lambda \in \mathbb{N},\ \forall y \in F,\ \text{Card}\left(\left\{x \in E \middle| f(x) = y\right\}\right) = \lambda,$$

i.e. tous les éléments $y \in F$ ont exactement λ antécédents dans E.

Alors on a :

$$\text{Card}(E) = \lambda\,\text{Card}(F).$$

Dans l'exemple du troupeau de moutons, la fonction f est celle qui aux pattes (ensemble E) associe la tête (ensemble F). On a bien quatre pattes pour la même tête, donc la préimage d'une tête est de cardinal 4, et l'application est bien surjective, car à chaque tête correspond forcément 4 pattes. Ainsi, $\text{Card}(E)$ le nombre de pattes est égal à $4\,\text{Card}(F)$, c'est-à-dire 4 fois le nombre de têtes.

Démonstration. Pour $y \in F$, on rappelle que $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des antécédents de y :

$$f^{-1}(\{y\}) = \left\{x \in E \middle| f(x) = y\right\}$$

On voit que les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ forment un système complet de E :

$$E = \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\}) \text{ ie } E = \bigcup_{y\in F} \left\{x \in E \middle| f(x) = y\right\}, \text{ union disjointe.}$$

En effet,
- une inclusion est évidente : $\forall y \in F$, $f^{-1}(\{y\}) \subset E$.
- pour l'autre inclusion : si $x \in E$, alors $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$.
- pour montrer que la réunion est disjointe, on considère $y \neq y'$, et on suppose par l'absurde que $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) \neq \emptyset$. On a alors un élément $x \mathrm{inf}^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\})$, qui vérifie $f(x) = y$ et $f(x) = y'$ en contradiction avec $y \neq y'$.

De l'égalité d'ensemble :

$$E = \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\}), \text{ union disjointe.}$$

on en déduit l'égalité des cardinaux :

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{y\in F} \mathrm{Card}\left(A_y\right).$$

Puis comme par hypothèse $\mathrm{Card}\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \lambda$, on obtient : $\mathrm{Card}(E) = \lambda\,\mathrm{Card}(F)$. ■

La première application de ce lemme consiste à regarder l'application qui, à un arrangement de p éléments parmi n, associe une combinaison de p éléments parmi n, c'est-à-dire aux p éléments sans ordre :

$$\phi : \begin{cases} \{\text{arrangements}\} & \to & \{\text{permutations}\} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \{x_1, \dots, x_p\} \end{cases}$$

Il est clair qu'à une permutation correspond $p!$ arrangements. On retrouve donc le résultat : $A_n^p = p! C_n^p$.

Le lemme des bergers permet ainsi de compter avec ordre puis d'enlever l'ordre pour obtenir le résultat. Dans ce contexte, on divise les cardinaux, par le nombre d'antécédents.

■ **Exemple IV.6** Par exemple, supposons que l'on veuille compter le nombre de mains de 4 cartes d'un jeu de 32 cartes contenant une carte de chaque couleur (cœur, pique, trèfle, carreau). Une méthode pour faire ce calcul consiste à supposer (temporairement) qu'on garde l'ordre des cartes, on obtient alors :
- Pour la première carte, 32 choix,
- puis 24 choix pour la deuxième carte,
- puis 16 choix pour la troisième,
- et 8 pour la dernière.

On a ici compté le nombre d'arrangements de 4 éléments vérifiant la propriété, le nombre de mains (donc sans ordre) est obtenu en divisant ce nombre par 4!, puisque l'application qui à un arrangements associe une combinaison est surjective, et vérifie que chaque combinaison est l'image de 4 arrangements. ■

On peut aussi faire ce calcul en considérant l'application :

$$\phi : \begin{cases} \{7, 8, 9, \dots, Roi, As\}^4 & \to & \{\text{mains solutions}\} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & \{x_1 C, x_2 T, x_3 C, x_4 P\} \end{cases}$$

qui est clairement une bijection d'un ensemble de cardinal 8^4 dans l'ensemble cherché.

■ **Exemple IV.7** Autre exemple, on se demande comment ranger n boules dans 3 boîtes, de tel sorte que la boîte i contient k_i boules. Avec $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Une manière de procéder consiste à regarder l'application :

$$\phi : \begin{cases} \{\text{permutations}\} & \to & \{\text{solutions du problème}\} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \left\{\{x_1, \dots, x_{k_1}\}, \{x_{k_1+1}, x_{k_1+2}, \dots, x_{k_1+k_2}\}, \{x_{k_2+1}, x_{k_1+2}, \dots, x_n\}\right\} \end{cases}$$

Autrement dit, à une permutation, on associe la solution obtenue en mettant dans la première boîte les k_1 premières, puis dans la deuxième les k_2 boules suivantes, et les dernières dans la boîte 3. Cette application est surjective, et une solution donnée est l'image de $k_1!k_2!k_3!$ permutations, qui correspondent aux différentes manières de ranger les k_1 premières boules, les k_2 suivantes et les dernières. Ainsi, l'ensemble cherché a pour cardinal

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$$

■

On peut retrouver ce résultat en disant :

- on a $\binom{k_1}{n}$ choix pour la première boîte,
- puis $\binom{k_2}{n-k_1}$ choix pour la deuxième boîte,
- enfin aucun choix pour la dernière.

La nombre obtenu est alors :

$$\binom{k_1}{n}\binom{k_2}{n-k_1} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2!)} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$$

⋆ Ordre arbitraire

Considérons un lancer de deux dés indiscernables. L'univers est alors $[\![1,6]\!]^2$.

Ce résultat peut sembler étonnant puisqu'on a précisé que les dés sont indiscernables. On impose alors un *ordre* dans les dés en disant : celui-ci est le premier et celui-là est le second, comme si les dés étaient de couleurs différentes, alors qu'il est impossible de modéliser un événement comme *le premier dé vaut 1, et le deuxième 3*.

Que se passerait-il si l'on ne considérait pas cet ordre ? L'univers serait alors les parties à 1 ou 2 éléments de $[\![1,6]\!]$. Une partie à 1 élément comme $\{1\}$ correspondrait à l'événement *les deux dés valent 1*, soit la seule valeur lisible est 1, tandis qu'une partie à deux éléments comme $\{1,3\}$ correspondrait à l'événement *l'un des dés vaut 1, l'autre 3*, et donc deux valeurs seraient visibles : 1 et 3. Cette modélisation enlève tout ordre dans les dés.

En fait ces deux modélisations sont possibles. La seule différence, est que la probabilité sur l'ensemble $[\![1,6]\!]^2$ est clairement la probabilité uniforme, tandis que la probabilité sur l'ensemble des parties à 1 ou 2 éléments sera telle qu'un singleton aura pour probabilité $\frac{1}{36}$, tandis que les 15 parties à deux éléments auront pour probabilité $\frac{2}{36}$. Ainsi, il est plus simple d'imposer un ordre artificiel, en disant que le premier dé est simplement celui que l'on lit en premier. Cet ordre est différent à chaque lancer, mais il permet d'obtenir une probabilité uniforme.

⋆ Imposer un ordre dans un arrangement revient alors à une combinaison

Si l'on dénombre les n-liste $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ d'éléments de E telles que $a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_n$, alors cela revient à choisir les éléments $\left\{a_1,a_2,\dots,a_n\right\}$ en « tas » (*i.e.* sans ordre), puis de les ordonner par ordre croissant.

Il y a ainsi autant de n-listes strictement croissante que de n-combinaison.

19 — Intégration

Le premier objectif de ce chapitre est très théorique : il s'agit de donner un sens à $\int_a^b f$ sans passer par les primitives. On va donc approcher la fonction f par des fonctions en escalier. Cela amènera aux sommes de Riemann.

Ensuite, on verra la formule de Taylor avec reste intégral qui exprime la différence entre une fonction et son approximation par un polynôme.

I Fonctions en escalier

I.1 Subdivision d'un segment

Définition I.1 Soit $a < b$ deux réels.

Un subdivision du segment $[a,b]$ en $n+1$ points est la donnée de $n+1$ réels :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

La subdivision est dite régulière si

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$$

c'est-à-dire que les $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ sont espacés régulièrement. On a alors :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

On appelle alors pas de la subdivision l'écart entre deux points $\frac{b-a}{n}$.

Notation I.1. *On note $\sigma = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ la subdivision.*

P Les subdivision ont beaucoup d'importance pour faire du calcul numérique. On rappelle que l'on peut créer des 1d-array contenant la subdivision du segment

$[a,b]$ avec la bibliothèque numpy. On a deux possibilités :

```
linspace(a, b, nbrPoints) # à préférer
arange(a, b, pas) # jusqu'à b strict
```

R Si la subdivision n'est pas régulière, on appelle pas de la subdivision la valeur $\max_{i \in [\![0,n-1]\!]} (x_{i+1} - x_i)$.

I.2 Fonctions en escalier définies sur un segment

Définition I.2 Soit $a < b$ deux réels.

Une fonction f définie sur le segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite en escalier si il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ telle que :

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!], \ f_{|]x_i,x_{i+1}[} \text{ est constante}$$

(la restriction de la fonction à chacun des intervalles ouverts est constante).

Ce que l'on peut écrire :

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!], \ \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, \ \forall x \in]x_i,x_{i+1}[, \ f(x) = \lambda_i.$$

■ **Exemple I.1** C'est une définition théorique que l'on comprends facilement sur un dessin. Une fonction constante est en escalier.

La restriction de la partie entière à un segment est en escalier. ■

Il n'y a aucune contrainte sur les valeurs aux points $x_0, \dots, x_n$. Étant donné une fonction en escalier, une subdivision qui vérifie les hypothèses est dite **adaptée** à la fonction en escalier f. Si on ajoute des points à la subdivision (sans changer les points existants), alors elle sera toujours adaptée.
En particulier, on voit que si f et g sont en escalier, alors $f + \alpha g$ est en escalier, en choisissant pour subdivision celle obtenu en mettant tous les points de discontinuités. L'ensemble des fonctions en escaliers est ainsi un SEV de l'ensemble des fonctions.

une fonction en escalier sur un segment est bornée puisqu'elle ne prends qu'un nombre fini de valeurs (n valeurs).

R Définir les fonctions en escalier sur autre chose que des segments n'est pas facile et est hors programme. On peut facilement imaginer que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est en escalier sur $\mathbb{R}$, on accepte alors un nombre infini de points de discontinuité, mais il ne faut pas que ces points soient trop proches.

Contre-exemple : Si on considère la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

alors cette fonction n'est pas en escalier sur $[0,1]$ puisqu'elle a une infinité de points de discontinuités (tous les $\frac{1}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$).

II Intégrale d'une fonction continue sur un segment

II.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition II.1 Soit f une fonction en escalier sur le segment $[a,b]$.
Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à la fonction f.
On note λ_i la valeur de la fonction f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.
On appelle alors intégrale de la fonction f sur le segment $[a,b]$, la valeur de :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\lambda_i$$

Notation II.1. *On note* $\int_{[a,b]} f$.

Cette définition ne dépends pas du choix de la subdivision adaptée : même si on ajoute des points, la valeur sera la même.

Elle ne dépends pas non plus des valeurs choisies aux points de discontinuités.

✎ C'est bien sûr la somme des aires algébriques des rectangles situés sous la courbe de la fonction !

II.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Théorème II.1 Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.
Alors, il existe une suite de fonctions en escaliers (φ_n) telle que :

$$\sup_{x\in[a,b]} (|f(x) - \varphi_n(x)|) = 0$$

De plus, la suite $\left(\int_a^b \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et la valeur de la limite est alors indépendante de la suite de fonctions (φ_n) choisie.

Définition II.2 À la suite du théorème précédent, on appelle alors intégrale d'un fonction continue f sur le segment $[a,b]$ la valeur de la limite de $\left(\int_a^b \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où (φ_n) est une suite de fonctions en escalier approchant f et vérifiant :

$$\sup_{x\in[a,b]} (|f(x) - \varphi_n(x)|) = 0$$

Notation II.2. *On note évidement comme pour les fonctions en escalier :* $\int_a^b f$. *On peut aussi noter :*

$$\int_a^b f(t)dt \qquad \int_{[a,b]} f$$

Démonstration. La démonstration est admise, car elle fait appel à la notion de continuité uniforme qui est hors programme.

■

✎ C'est évidement un résultat théorique : on définit $\int_a^b f$ pour des fonctions en escalier et on étends cette définition à toutes les fonctions f, comme la limite des intégrales des fonctions en escaliers qui approchent f.
Cela souligne l'importance de comparer une intégrale avec une somme d'aire de rectangle, ce que l'on fera souvent en exercice.
Il faut aussi retenir que l'on ne peut définir l'intégrale que d'une fonction continue (pour l'instant).

✎ Comme première propriété, il est clair que $\int_a^a f = 0$

Définition II.3 Soit f une fonctions continue sur le segment $[a,b]$. La valeur moyenne de la fonction f est :

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$$

☆ Interprétation en terme d'aire

Puisque l'on a défini l'intégrale à partir des fonctions en escalier, et que pour une fonction en escalier, l'intégrale est l'aire algébrique situé des rectangles, on a directement :

Théorème II.2 Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

Alors $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire algébrique comprise entre l'axe horizontal et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur le domaine $[a,b]$.

On compte positivement les aires au-dessus de l'axe horizontal, négativement sinon.

III Propriétés de l'intégrale

III.1 Relation de Chasles

Proposition III.1 — Relation de Chasles. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$. On a alors :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Démonstration. Pour une approximation de f sous la forme d'une fonction en escalier φ_i, il faut prendre une subdivision adaptée à φ et ajouter le point c. On a alors une approximation de f sur les segments $[a,c]$ et $[c,b]$. ■

✎ En conséquence, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1} f(t)dt = \int_0^{n+1} f(t)dt$$

Définition III.1 Soit a et b deux réels, avec $b < a$, on définit alors :

$$\int_b^a f \text{ par } \int_b^a f = -\int_a^b f$$

On peut ainsi définir la notion d'intégrale dans le sens non naturel.

R Toujours repérer lorsqu'on intègre dans le sens non naturel.

! Les majorations d'intégrales ne sont valables que dans le sens naturel !

III.2 Linéarité

Proposition III.2 Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\int_{[a,b]} (f+\alpha g) = \int_{[a,b]} f + \alpha \int_{[a,b]} g$$

Démonstration. Ici encore, cela est vrai pour les fonctions en escalier et on peut démontrer que cela reste vrai au passage à la limite. ■

Ainsi :

$$I : \begin{cases} \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a,b]} f \end{cases}$$

est une application linéaire (une forme linéaire) de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ à valeur dans $\mathbb{R}$

III.3 Comparaison d'intégrale

Proposition III.3 Soit $a < b$ et f une fonction positive et continue sur le segment $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$$

Démonstration. Ici encore, cela signifie que l'on peut approcher f par des fonctions en escaliers positives. ■

! Attention à l'ordre des bornes : cela n'est valable que si on intègre dans le sens naturel !

On peut écrire :

$$f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \geqslant 0$$

$f \geqslant 0$ signifiant $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0$.

Pour la rédaction, bien faire apparaître le $\forall$ avant d'intégrer.
On retiendra que l'on peut obtenir une majoration / minoration d'une intégrale en majorant / minorant globalement la fonction que l'on intègre.
Cela est très utile pour étudier des suites d'intégrales.

On en déduit alors :

Proposition III.4 Soit $a < b$ un segment de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose : $\forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t)$.
On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt.$$

La proposition suivante joue un rôle central dans l'approximation des intégrales. Elle est l'équivalent de l'inégalité triangulaire.

Proposition III.5 Soit $a < b$ et f une fonction positive et continue sur le segment $[a,b]$, alors :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

Démonstration.

$$\forall x \in [a,b],\ -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|.$$

On obtient alors :

$$-\int_a^b |f(t)|dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Ainsi : $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$. ■

III.4 Intégrale nulle

Proposition III.6 Soit $a < b$ et f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.
On suppose que : $\forall x \in [a,b], f(x) > 0$. On a alors : $\int_a^b f > 0$

Démonstration. Ici encore, il faut approcher la fonction par une fonction en escalier strictement positive. ■

! Il faut $a < b$ (strictement !)

Le corollaire suivant est important :

Proposition III.7 Soit f continue positive ou nulle sur $[a,b]$, telle que $\int_a^b f = 0$. Alors, f et nulle sur $[a,b]$.

Autrement dit : l'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

Démonstration. Supposons que $\exists c > 0,\ f(c) > 0$. En utilisant la définition de la continuité avec $\varepsilon = \frac{c}{2}$, on obtient qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [c-\alpha, c+\alpha],\ f(x) > 0$. D'où

$$\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{c-\alpha} f}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f}_{>0} + \underbrace{\int_{c+\alpha}^{b} f}_{\geqslant 0}$$

■

✎ Cette propriété est utile pour montrer que

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

est un produit scalaire.

IV Sommes de Riemann

IV.1 Convergence des sommes de Riemann

Théorème IV.1 — Convergence des sommes de Riemann. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, alors :

$$\lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$$

On a le même résultat sur un segment $[a,b]$: soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$, alors :

$$\lim_{n\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. Ce théorème est admis dans le cas général (cela fait appel à la notion de continuité uniforme).

On le démontre dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Pour cela, pour $n \in \mathbb{N}$, on note φ_n la fonction en escalier définie par la méthodes des « *rectangles à gauche* ». C'est-à-dire que l'on remplace la valeur de la fonction sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ par la valeur en x_i.

Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on considère la subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$ en $n+1$ points. C'est-à-dire que l'on pose :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

Et on pose :

$$\varphi_n : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x \in [x_0, x_1[\\ f(x_1) & \text{si } x \in [x_1, x_2[\\ f(x_2) & \text{si } x \in [x_2, x_3[\\ \vdots & \vdots \\ f(x_i) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[\\ \vdots & \vdots \\ f(x_{n-1}) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \end{cases}$$

φ_n est donc une fonction en escalier, elle prends la valeur $f(x_i)$ sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$

Soit $\varepsilon > 0$, on va montrer qu'il existe un rang à partir duquel

$$\sup_{x\in[a,b]} (|f(x) - \varphi_n(x)|) \leqslant \varepsilon$$

Pour cela, on considère un $x \in [a,b]$, et on note i l'entier, tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$. On a :

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - f(x_i)|$$

Il faut donc majorer une différence entre deux images proches. Pour cela, on utilise l'inégalité des accroissements finis (le fait que f est M-lipschitzienne) :

$$\exists c \in]x, x_i[,\ f(x) - f(x_i) = f'(c)(x - x_i)$$

et donc :

$$|f(x) - f(x_i)| \leqslant M|x - x_i| \text{ avec } M = \max_{x\in[a,b]} f'(x)$$

Ce maximum existe et est fini car f' est continue sur le segment $[a,b]$.

On a alors :

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant M|x - x_i| \leqslant \frac{M}{n}$$

Puisqu'on a clairement : $|x - x_i| \leqslant \frac{1}{n}$.

Ainsi, on a bien obtenu une majoration indépendante de x, ce qui donne :

$$\forall x \in [a,b], |f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \frac{M}{n}$$

et donc :

$$\sup_{x\in[a,b]} (|f(x) - \varphi_n(x)|) \leqslant \frac{M}{n}$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on aura à partir d'un certain rang :

$$\sup_{x\in[a,b]} (|f(x) - \varphi_n(x)|) \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $\left(\varphi_n\right)$ est une suite de fonctions en escalier qui approchent la fonction f.

D'après la définition des intégrales, on a donc :

$$\lim_{n\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \int_{[a,b]} f.$$

Ce qui s'écrit :

$$\lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right) = \int_{[a,b]} f.$$

■

✎ L'interprétation géométrique est claire : on a défini l'intégrale par l'approximation par des fonctions en escalier, ici on a choisi une fonction en escalier simple : l'approximation par les rectangles à gauche.

✎ On peut aussi considérer les rectangles à droite. Le résultat est alors :

$$\lim_{n\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$$

Ce résultat n'est pas au programme. Néanmoins, on peut le déduire facilement de celui sur les rectangles à gauche.

✎ On peut écrire :

$$\lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

Ainsi, on a convergence de la moyenne des n valeurs $\left(f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$ vers la valeur moyenne $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

IV.2 Exemple d'utilisation des sommes de Riemann

Soit la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}.$$

C'est en fait une somme de Riemann, en effet :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+x_k}
\end{aligned}$$

ou $x_k = \frac{k}{n}$ sont régulièrement répartis sur $[0,1]$. On retrouve donc la méthode des rectangles à gauche pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0,1]$, qui est continue. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2).$$

IV.3 Algorithmes d'intégration approchée

On peut écrire l'algorithme lié au somme de Riemann. C'est le simple calcul d'une somme.

```
def integrale(f, n) :
    """
    entrée: f = fonction
            n = entier = nbr de subdivision
    sortie: valeur approchée de int_0^1 f(t)dt.
    """
    inte = 0
    x = linspace(0,1,n+1)
    for i in range(n) :
        inte += f(x[i])
    inte = inte /n
    return inte
```

R Cet algorithme est explicitement au programme (en informatique et en mathématiques).

Il existe d'autres méthodes : on peut approcher la fonction par les rectangles à droite, par le point milieu.

On peut noter le lien entre intégration approchée et méthode de résolution numérique des équations différentielles. En effet, le principe est de remplacer la recherche de la fonction y vérifiant :

$$\forall t \in [0,1],\ y'(t) = f(y(t),t) \qquad \text{avec } y(0) = y_0$$

par la recherche de $n+1$ valeurs (Y_i), avec $Y_i \approx y(t_i)$ et les (t_i) subdivision régulière de $[0,1]$ de pas h. On utilise alors :

$$\begin{aligned} Y_{i+1} \approx & y(t_{i+1}) \\ = & y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)dt \\ = & y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t),t)dt \end{aligned}$$

On approche ensuite cette intégrale sur un segment infinitésimal par la méthode des rectangles à gauche :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t),t)dt \approx hf(y(t_i),t_i)$$

Ce qui donne :

$$Y_{i+1} \approx Y_i + hf(Y_i, t_i).$$

On voit que la méthode des rectangles à gauche corresponds à la méthode d'Euler explicite.
On peut faire de même avec la méthode des rectangles à droite, ce qui corresponds à la méthode d'Euler implicite.

La méthode des trapèzes consiste à approcher intégrale infinitésimale : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f$ par la moyenne des valeurs à chaque bords de l'intervalle, c'est-à-dire :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}.$$

Ici encore, il est clair sur le dessin que les erreurs diminuent plus vite, on obtient alors (c'est admis) une convergence en $\frac{1}{n^2}$.

La méthode des trapèzes s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f \approx & \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \\
= & \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\right) \\
= & \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} f(x_{k+1})\right) \\
= & \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(0) + f(1)}{2}\right)
\end{aligned}$$

On obtient alors l'algorithme.

```
def integraleTrapeze(f, n) :
    """
    entrée: f = fonction
            n = entier = nbr de subdivision
    sortie: valeur approchée de int_0^1 f(t)dt.
    """
    inte = (f(0) + f(1) )/2
    x = linspace(0,1,n+1)
    for i in range(1,n):
        inte += f(x[i])
    inte = inte /n
    return inte
```

V Calcul intégral

V.1 Lien entre intégration et primitives

On rappelle le lien entre intégration et primitives.

Théorème V.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet des primitives sur I.

De plus, si x_0 est un point de I, alors :

$$f : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.

Théorème V.2 — Théorème fondamental. Soit F une primitive (quelconque) de f sur l'intervalle I. On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

En conséquence, si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, on a :

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

V.2 Méthodes de calcul d'intégrales

Rappelons les résultat vus dans le chapitre de calcul des primitives. Les techniques à revoir sont :

- les primitives usuelles,
- les primitives obtenus par composition
- l'intégration par parties,
- le changement de variables.
- l'intégration de $x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$.
- les méthodes de calcul de primitives d'une forme donnée.

I	$f(x)$	$F(x)$	avec :
	x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	

TABLE 19.1 – Tableau des primitives des fonctions usuelles

I	$f(x)$	$F(x)$	avec :
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$	$x\ln x - x$	
$\mathbb{R}$	e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}$	$a \in \mathbb{C}^*$
$\mathbb{R}$	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$a > 0$ et $a \neq 1$

TABLE 19.2 – Tableau des primitives des fonctions usuelles

I	$f(x)$	$F(x)$	avec :
$\mathbb{R}$	$\sin(ax)$	$-\dfrac{\cos ax}{a}$	$a \in \mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}$	$\cos(ax)$	$\dfrac{\sin ax}{a}$	$a \in \mathbb{R}^*$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$	$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	
$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	

TABLE 19.3 – Tableau des primitives des fonctions usuelles

I	$f(x)$	$F(x)$	avec :
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	
$]-1,1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ ou $-\arccos x$	

TABLE 19.4 – Tableau des primitives des fonctions usuelles

Théorème V.3 — Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$.

Fonction	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u^\alpha u', \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{u'}{1+u^2}$
Primitive	$\ln\lvert u\rvert$	e^u	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$2\sqrt{u}$	$\arcsin u$	$\arctan u$

.

TABLE 19.5 – Primitive dobtenues par composition

Alors on a :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

Proposition V.4 — Changement de variables pour calculer une intégrale. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, et f une fonction continue telle que $f \circ \varphi$ est définie sur $[\alpha, \beta]$.

On a alors :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$$

On dit que l'on a effectué le changement de variables : $t = \varphi(x)$.

Pour calculer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$. On regarde les racines du polynômes aX^2+bX+c.

- Si il y a deux racines x_1 et x_2, on cherche α et β tels que :

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2}$$

- Si il n'y a qu'une racine x_0, on écrit :

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(x-x_0)^2}\right)$$

- Si il n'y a pas de racine, on écrit :

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)$$

et on se ramène alors à une arctangente.

On trouve alors facilement une primitive par ses expressions. Attention aux intervalles !

VI Formule de Taylor avec reste intégral

VI.1 Polynôme de Taylor

Étant donnée une fonction n fois dérivables, on peut calculer le polynôme de Taylor comme on l'a fait pour les DLs.

Définition VI.1 — Polynômes de Taylor. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. On peut alors définir la fonction polynomiale associée à f (ou plus simplement, en identifiant les polynômes et les fonctions polynomiales, polynôme de Taylor) par :

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

En particulier pour $a = 0$, le polynôme de Taylor est :

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

VI.2 Taylor avec reste intégral

La formule de Taylor avec reste intégrale exprime la différence entre la fonction et l'approximation de cette fonction par le polynôme de Taylor.

Proposition VI.1 — Formule de Taylor avec reste intégral. Soit I un intervalle réel et $a \in I$, et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I.

On a alors :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Autrement dit, l'écart entre la fonction et son polynôme de Taylor peut s'écrire comme une fonction définie par une intégrale.

En particulier en 0, cela s'écrit :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

✎ Il faut bien faire la différence entre la formule de Taylor-Young, qui indique un comportement asymptotique et la formule de Taylor avec reste intégrale qui permet de mesure l'écart entre la fonction et son approximation de Taylor.
Cet écart, dépends de n et de x. Beaucoup d'exercices consistent à majorer cette écart.

C'est une généralisation de :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)dt \\ &= f(a) + f'(a)x + \int_a^x \frac{f''(t)}{2}(x-t)dt, \text{etc.} \end{aligned}$$

La deuxième s'obtient par une IPP.
Il est très important de savoir refaire rapidement ce calcul pour retrouver la formule !

Démonstration. On peut démonter la formule par récurrence. On note donc pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition :

$$\mathscr{P}(n): \qquad \forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

(valable pour f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$)
Pour $n = 0$, cela s'écrit :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

formule que l'on a déjà écrite.

Soit n fixé, tel que la formule est vraie au rang n et f de classe $\mathscr{C}^{n+2}$, on utilise alors une intégration par parties sur l'intégrale :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

On fixe donc la valeur de x.
pour obtenir le rang $n+1$, on utilise :

$$u'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} \qquad u(t) = \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$v(t) = f^{(n+1)}(t) \qquad v'(t) = f^{(n+2)}(t)$$

(bien repérer que la variable d'intégration est t, c'est la seule à varier, x est fixé).
Cela donne :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^b \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

On voit que :

$$\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$$

c'est le terme $n+1$ de la somme.

On peut donc écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt.$$

Comme x est quelconque, on a bien la propriété au rang $n+1$. ■

■ **Exemple VI.1** Comparons par exemple

$$\cos(x) \text{ et son polynôme de Taylor } 1-\frac{x^2}{2} \text{ à l'ordre 3.}$$

à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\cos(t)dt$$

(c'est la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 avec $\cos^{(4)} = \cos$).

Considérons $x \geqslant 0$ (pour intégrer dans le bon sens) et on écrit alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\cos(t)dt\right| &\leqslant \frac{1}{6}\int_0^x \left|(x-t)^3\right| |\cos(t)|\, dt \\ &= \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 dt\end{aligned}$$

En majorant le cosinus par 1 et en utilisant $t \in [0,x]$ donc $(x-t)^3$.

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\cos(t)dt\right| &\leqslant \frac{1}{6}\left[-\frac{(x-t)^4}{4}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{6}\frac{x^4}{4}\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\forall x \geqslant 0,\ \left|\cos(x) - \left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{24}x^4$$

Ce qui permet de comparer $\cos(x)$ et son DL à l'ordre 3.

Pour $x \leqslant 0$, on écrit :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\cos(t)dt\right| = \left|\int_x^0 \frac{(x-t)^3}{3!}\cos(t)dt\right| \leqslant & \quad \frac{1}{6}\int_x^0 \left|(x-t)^3\right| |\cos(t)|\, dt \\ &= \frac{1}{6} - \int_x^0 (x-t)^3 dt == \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 dt \\ &= \frac{1}{6}\frac{x^4}{4}\end{aligned}$$

On obtient le même résultat ■

■ **Exemple VI.2** Pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$ fixé, on veut montrer que e^x est au dessus de son polynôme de Taylor à l'ordre n. On fixe donc $x \geqslant 0$ et on écrit :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

On a alors :

$$\forall t \in [0,x],\ (x-t)^n \geqslant 0 \text{ et } e^t \geqslant 0$$

donc :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \geqslant 0$$

et donc :

$$\forall x \geqslant 0,\ e^x \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

■

VI.3 Démonstration de la formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young peut se déduire de la formule avec reste intégral, pour cela, il suffit de faire tendre la valeur de x vers a. Pour simplifier les notations, on se place en 0.

On va montrer le résultat suivant :

Proposition VI.2 — Formule de Taylor-Young. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de 0.

Alors f admet un DL_n en 0 donné par :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \end{aligned}$$

Démonstration. On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral (avec $n-1$ à la place de n).

Ce qui donne :

$$\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

On force à ajouter le terme d'ordre n :

$$\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

Il reste à comparer le reste avec $f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$ lorsque x tends vers 0. Précisément, on veut démonter que

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

On écrit alors :

$$\frac{x^n}{n!} = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_0^x = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)\right)dt$$

On majore alors (pour $x \geqslant 0$) :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)\right)\right|dt \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)\right|dt$$

Considérons ensuite $\varepsilon > 0$, puisque $f^{(n)}$ est continue, on a :

$$\exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha], \ \left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)\right| \leqslant \varepsilon$$

On a alors pour $x \leqslant \alpha$:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)\right|dt &\leqslant \varepsilon \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leqslant \varepsilon \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

(Pour $x \leqslant 0$, on obtient la même inégalité)

Ainsi, la différence est majorée par une x^n multiplié par une valeur que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut (lorsque $x \to 0$). C'est-à-dire :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

et on a bien la formule. ■

Corollaire VI.3 Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ au voisinage de 0. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}f(x) =& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right) \\ =& \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)\end{aligned}$$

Démonstration. C'est simplement la traduction que le terme suivant dans le développement de Taylor est $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)$, c'est-à-dire un $\underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)$. ■

Le résultat avec des grand O, bien que moins utilisé est en fait plus précis : un grand O de x^{n+1} est toujours un petito de x^n. Cela indique qu'il n'y a pas de termes entre x^n et x^{n+1} (ie que le terme suivant est en x^{n+1}).
Par exemple $x^2\ln(x)$ est $\underset{x\to 0}{o}$ x mais pas $\underset{x\to 0}{O}$ x^2.
Lorsqu'on étudie des schéma numérique d'approximation (par exemple pour la résolution numérique des équations différentielles), on utilise souvent le résultat avec des grand O. On écrit par exemple :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \underset{h\to 0}{O}(h^2).$$

Une démonstration alternative consiste à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Proche de 0, la fonction $f^{(n+1)}$ étant continue, elle est bornée par une valeur M. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\right| &\leqslant M \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \\ &\leqslant M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

VI.4 Applications

Pour illustrer l'importance de la formule de Taylor avec reste intégrale, on va l'utiliser pour montrer le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

Pour cela, on considère la fonction exponentielle $f : x \mapsto e^x$. On sait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} : x \mapsto e^x \qquad \text{en particulier, } f^{(k)}(0) = 1.$$

On peut alors appliquer la formule de Taylor entre 0 et 1 à l'ordre n, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt.$$

R Cette fois-ci, on fixe x et on fait varier n !

Il reste donc à majorer cette intégrale (ce reste), plus précisément à prouver qu'il tends vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$.

On a :

$$\forall t \in [0,1], 0 \leqslant e^t \leqslant e \text{ et } (1-t)^n \geqslant 0$$
$$\text{donc } \forall t \in [0,1], 0 \leqslant \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \leqslant \frac{(1-t)^n}{n!} e$$

Cela donne donc :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \leqslant \frac{e}{n!} \int_0^1 (1-t)^n dt$$
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \leqslant \frac{e}{n!} \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \leqslant \frac{e}{n!} \frac{1}{n+1}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\infty} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt = 0$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\lim_{n\infty} e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 0$$

VII Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Il n'y a pas de réelles difficultés : on traite à part les parties réelles et imaginaires, comme on l'a fait pour la continuité et la dérivabilité.

Définition VII.1 Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. La fonction f est en escalier si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en escalier.

Ce qui donne la définition :

Définition VII.2 Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue. On définit alors : $\int_{[a,b]} f$ comme la limite des intégrales d'une suite de fonctions en escalier qui approchent f.

Proposition VII.1 Pour f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{C}$

On a les propriétés :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f) \qquad \text{lien partie réelle imagnaire}$$

$$\int_{[a,b]} (f + \alpha g) = \int_{[a,b]} f + \alpha \int_{[a,b]} g \qquad \text{linéarité}$$

$$\overline{\int_{[a,b]} f} = \int_{[a,b]} \overline{f} \qquad \text{conjugué}$$

La majoration du module de l'intégrale

$$\text{si } a < b, \ \left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

L'intégration par parties : si u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$:

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

La formule de Taylor avec reste intégral si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I :

$$\forall x \in I, \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Intégration

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Formule de la moyenne

Exercice 1 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. En utilisant la continuité, démontrer que la valeur moyenne est atteinte, *i.e.*

$$\exists c \in [a,b],\ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

Correction : Il faut écrire :

$$\forall t \in [a,b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$

avec m et M le min/ max. Intégrer et théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 2 Première formule de la moyenne

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ ($a<b$), la fonction g étant positive.

1. Montrer que si $m = \min_{x\in[a,b]} f$ et $M = \max_{x\in[a,b]} f$, alors on a :
$$m\int_a^b g(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant M\int_a^b g(t)dt.$$
2. En déduire que si f est continue, il existe $c \in [a,b]$ tel que :
$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$
3. En appliquant ce qui précède à la formule de Taylor avec reste intégral montrer la formule de Taylor-Lagrange : si $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ et $a<b$:
$$\exists c \in [0,x],\ f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}$$

Correction :

1. On a (car $g \geqslant 0$) :
$$\forall t \in [a,b],\ mg(t) \leqslant f(t) \leqslant Mg(t).$$
Donc en intégrant, on trouve le résultat
2. On a :
$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \in [m,M] = f([a,b]).$$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [a,b], f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$.
Il reste le cas à part où $\int_a^b g(t)dt = 0$, dans ce cas $g = 0$ (car g positive), et donc n'importe quel c convient.
3. La fonction f est $f^{(n)}$, la fonction g est $\dfrac{(x-t)^n}{n!}$

R La formule de Taylor avec reste intégral est aussi vraie avec des hypothèses moins forte.

⋆ Sommes de Riemann

Exercice 3 Calculer les limites de :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-\frac{k^2}{4}}} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{n} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2} \qquad \frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n}$$

Correction : Pour la première :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-\frac{k^2}{4}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{2n}\right)^2}} \to \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

(rectangle à gauche pour une fonction continue).

Pour la deuxième :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\sin\frac{k\pi}{n} \to \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

Ici c'est les rectangles à droite. La fonction est prolongée par continuité en 0.

✯ Étude d'une suite d'intégrale

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1],\ \dfrac{t^n}{2} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$.
2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Correction :

1. simple majoration,
2. On a :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Exercice 5 Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Exprimer $I(p+1,q)$ en fonction de $I(p,q+1)$.
2. Calculer $I(0,q)$. En déduire $I(p,q)$ pour tout p et q dans $\mathbb{N}$.

Correction :

1. Faire une intégration par parties :

$$\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q dx = \frac{p+1}{q+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}dx$$

2. $I(0,q) = q+1$, puis :

$$I(p-k,q+k) = \ldots.$$

Exercice 6 **Intégrales de Wallis**

On pose : $\forall x \in \mathbb{N},\ J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

1. Grâce à un changement de variable, montrer que $I_n = J_n$.
2. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.
4. En déduire que pour tout entier p, on a : $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.
6. En déduire que :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Correction :

1. faire $t = \frac{\pi}{2} - x$.
2. On a : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leqslant \cos^{n+1}(x) \leqslant \cos^n(x)$, il reste à intégrer. Décroissante et minorée par 0.
3. Il faut écrire :

$$I_{n+2} = In + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x \sin x dx$$

Puis faire une ipp en prenant la primitive de $x \mapsto \cos^n x \sin x$. Cela donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x \sin x dx = \frac{1}{n+1} I_{n+2}.$$

✯ Comparaison série intégrale

Exercice 7 La série harmonique

1. En considérant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ où $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'on a :

$$\frac{1}{1+k} \leqslant \ln(1+k) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n.$$

3. En déduire que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Correction :

1. On a :

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Donc en intégrant sur $[k, k+1]$ on obtient l'inégalité.

2. En sommant les inégalités on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

D'où :

$$S_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n.$$

et donc :

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

Et donc :

$$1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \leqslant \frac{S_n}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} + 1$$

✯ Étude de fonctions définies par des intégrales

Exercice 8 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$

Étudier la parité, les variations et montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Correction : Déjà : $g:\ t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on considère donc G une primitive de g sur $\mathbb{R}$, et on écrit :

$$f(x) = G(2x) - G(x)$$

ce qui montre que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^{-2x} g(t)dt + \int_0^{-x} g(t)dt \\ &= -\int_0^{2x} g(-u)du + \int_0^{x} g(-u)du \text{ avec } u=-x \\ &= -\int_0^{2x} g(u)du + \int_0^{x} g(u)du \text{ car } g \text{ est paire.} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

donc f est impaire (donc on étudie sur $\mathbb{R}^+$).

De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

En regardant le signe, on voit que f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur le reste. Elle s'annule en 0.

On a si $x>0$:

$$\forall t \in [x,2x],\ 0 \leqslant g(t) \leqslant \frac{1}{t^2},$$

et donc :

$$\forall x > 0, 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{2x}.$$

D'où la limite.

Exercice 9

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $t + \arctan t = 0$.
2. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t+\arctan t}$.
   (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Étudier la parité de f.
   (c) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $f'(x)$ pour $x>0$.
   (d) Dresser le tableau de variations de f.
3. On étudie le comportement de f en $+\infty$.
   (a) Établir que pour tout $x>0$:
   $$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leqslant \frac{\pi}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$$
   (b) En déduire l'existence et le calcul de la limite de f en $+\infty$.

Correction :

1. La seule solution est $t=0$ car $t+\arctan t$ est croissant strict.

2. (a) si $x>0$ $[x,2x]\subset\mathbb{R}_*^+$, si $x>0$ idem.
   (b) f est paire, après un changement de variable
   (c) $f=\varphi(2x)-\varphi(x)$, avec φ primitive d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$. On trouve facilement :

$$f'(x)=\frac{2}{2x+\arctan(2x)}-\frac{1}{x+\arctan x}.$$

   (d) Le signe de f' dépend de $2\arctan(x)-arctan(2x)$. En dérivant on vérifie que c'est positif. Donc f est croissante.
3. (a) Simple majoration :

$$\left|\frac{\arctan t}{t(t+\arctan t)}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{1}{t^2}.$$

   (b) f tends vers $\ln(2)$.

Exercice 10

Soit

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\displaystyle\int_x^{2x}e^{-t^2}\,dt\end{array}\right.$$

1. Étudier et représenter la fonction : $g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&e^{-t^2}\end{array}\right.$
2. Faire le tableau de signe de f
3. Étudier la parité de f (on pourra faire un changement de variable)
4. Étudier les variations de f.
5. À l'aide d'un encadrement simple, montrer que f admet une limite en $+\infty$.
6. Donner le DL à l'ordre 3 de f en 0.

Exercice 11

1. Calculer $\arcsin(x)+\arccos(x)$ pour $x\in[0,1]$.
2. Soit la fonction définie par $f\ :\ x\mapsto\displaystyle\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt$.
   (a) Vérifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
   (b) Montrer que f est π-périodique et paire.
   (c) Montrer que f est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, en déduire qu'elle est constante.
   (d) Que vaut cette constante ?

Correction :

1. Plusieurs méthodes (dérivée, relation sin/cos)permettent de montrer que $\arccos+\arcsin=\frac{\pi}{2}$.
2. (a) On a $t\in[0,1]\longmapsto\arcsin\sqrt{t}$ est définie et continue sur $[0,1]$, Donc : $\varphi:\ y\in[0,1]\longmapsto\int_0^y\arcsin\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$.
   On voit que $\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,dt=\varphi\circ(\sin^2 x)$, or $x\in\mathbb{R}\longmapsto\sin^2 x\in[0,1]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Idem pour la deuxième partie
   (b)

$$\begin{aligned}f(x+\pi)&=\int_0^{\sin^2(x+\pi)}\arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2(x+\pi)}\arccos\sqrt{t}\,dt\\&=\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt=f(x)\end{aligned}$$

$$f(-x)=\ \int_0^{\sin^2(-x)}\arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2(-x)}\arccos\sqrt{t}\,dt=f(x)$$

   NB : il suffit donc de l'étudier sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(c) f est dérivable donc on peut dériver. On pose $\varphi:\ y\in[0,1]\longmapsto \int_0^y \arcsin\sqrt{t}\,dt$, alors $\varphi'(y)=\arcsin(\sqrt{y})$. Donc la dérivée de $\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,dt=\varphi\circ(\sin^2 x)$ est :

$$2\sin(x)\cos(x)\arcsin(\sqrt{\underbrace{\sin}_{\geqslant 0}{}^2 x})=2\sin(x)\cos(x)\underbrace{\arcsin(\sin x)}_{x}=2x\sin(x)\cos(x).$$

En faisant de même, on a :

$$f'(x)=2x\sin x\cos x-2x\sin x\cos x=0.$$

Donc $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)=0$, donc la fonction f est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (qui est un intervalle), par périodicité/parité, elle est constante sur $\mathbb{R}$.

(d) On calcule une valeur particulière, par exemple :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}(\arcsin\sqrt{t}+\arccos\sqrt{t})dt=\frac{\pi}{4}.$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{\pi}{4}$.

✫ Technique de calcul de primitives

On reprend ici pour rappel les exercices sur le calcul de primitives.

Exercice 12 Changement de variables

1. Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ (poser $u=\pi-t$).
2. Pour tout $x>1$, on pose : $F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\cos\left[\frac{2\pi\ln(\ln t)}{\ln 2}\right]\frac{dt}{t\ln t}$.
   (a) Justifier l'existence de $F(x)$,
   (b) Calculer $F(x)$ en posant $u=\ln(\ln t)$.
3. Calculer pour tout x réel : $G(x)=\displaystyle\int_0^x \sin^2 t\cos t\,dt$.
4. Calculer : $J=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$ (poser $u=\cos x$).

Correction :

1. On obtient :

$$2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{1+\cos^2 u}du \qquad I=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+v^2}dv=\frac{\pi}{2}[\arctan v]_{-1}^{1}e=\frac{\pi^2}{4}.$$

2. (a) continuité,
   (b)

$$F(x)=\int_{\ln\ln x}^{\ln(\ln x^2)}\cos\frac{2\pi u}{\ln 2}du=\left[\frac{\ln 2}{2\pi}\sin\frac{2\pi u}{\ln 2}\right]_{\ln(\ln x)}^{\ln 2+\ln(\ln x)}=0.$$

3. $u=\sin t$ puis :

$$G(x)=\int_0^{\sin x}t^2dt=\frac{1}{3}\sin^3 x.$$

4.

$$J=\int_{\cos\frac{\pi}{4}}^{\cos\frac{\pi}{2}}\frac{du}{1-u^2}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{-du}{(u-1)(u+1)}=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

Exercice 13 **Intégration par parties**

Calculer :

$$\int_0^1 t\arctan t\,dt, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3\sin 2t\,dt \qquad \int_0^{\pi} \cos x e^x\,dx.$$

Exercice 14 Calculer les intégrales à l'aide du changement de variables :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^3 t\,dt \quad (u=\sin t) \qquad \int_0^a \sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}dt \quad (t=a\sin u), a\in\mathbb{R}_+^*$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 x}dx \quad (u=\tan x) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx \quad (u=\tan\tfrac{x}{2})$$
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2+x}}{1+x}dx \quad (x=u^2-2)$$

⋆ Formule de Taylor avec reste intégral

Exercice 15 À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à $f : x\mapsto \ln(1+x)$ montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln(2)$$

⋆ Exercices de synthèse

Exercice 16 Pour tout $n\geqslant 2$, on pose :

$$\forall x\in[0,1],\ P_n(x)=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\int_0^x t^n(1-t)^n dt.$$

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, la valeur de $P_n(1)$, pour tout $n\geqslant 2$.
2. Soit $n\geqslant 2$.
   (a) Soit $x\in[0,1]$. Que vaut $P_n(x)+P_n(1-x)$?
   (b) En déduire la valeur de $P_n(\frac{1}{2})$.
   (c) Montrer que le graphe de la fonction P_n admet le point $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ comme point de symétrie.
3. Étudier la fonction $x\mapsto P_n(x)$ et représenter le graphe de P_n.

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned}
P_n(1) =& \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\int_0^1 t^n(1-t)^n dt\\
=& \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(1-t)^n\right]_0^1+\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n-1}dt\right)\\
=& \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n-1}dt
\end{aligned}$$

On applique le même processus :

$$\begin{aligned}
P_n(1) =& \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+2}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^{n-2}dt\\
=& 1.
\end{aligned}$$

2. (a) On fait un changement de variable : $t = 1-u$.

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\int_0^x t^n(1-t)^n dt \\ &= -\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\int_1^{1-x}(1-u)^n u^n du \end{aligned}$$

Donc :

$$P_n(x)+P_n(1-x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\int_1^{1-x} + \int_0^{1-x} = 1.$$

3. On a donc : $2P_n(\frac{1}{2}) = 1$. Donc $\frac{1}{2}$.
4. Il s'agit de montrer que $P_n(x+\frac{1}{2})$

Exercice 17 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0$.
3. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = e-(n+1)I_n$.
4. En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?
5. À l'aide de la question 3, montrer que $I_n \sim \frac{e}{n}$.

Correction :

1. On trouve :

$$I_0 = (e-1) \qquad\qquad I_1 = \int_1^e \ln(x)dx = [x\ln(x)-x+1]_1^e = (e-e+1) = 1.$$

2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [1,e], \ln(x) \geqslant 0$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geqslant 0$

3. On fait apparaître $u'u^n$ avec $u = \ln(x)$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e (\ln x)^n dx = \int_1^e x\frac{1}{x}(\ln x)^n dx \\ &= \left[x\frac{1}{n+1}\ln(x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{1}{n+1}\int_1^e 1\times\ln(x)^{n+1}dx \qquad \text{IPP} \\ &= e - \frac{1}{n+1}I_{n+1} \end{aligned}$$

4. Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n}I_{n+1} \\ &\leqslant \frac{e}{n+1} \qquad \text{car } I_{n+1} \geqslant 0. \end{aligned}$$

5. On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n}I_{n+1} \\ I_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{en}{n+1} - I_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\infty} \frac{en}{n+1} - I_{n+1} = e$, on obtient le résultat.

Exercice 18 Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2-x}dx.$$

1. Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.
2. (a) Calculer I_0.
   (b) Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = 2I_n - \frac{1}{n+1}.$$
3. Étudier la monotonie de la suite (I_n) et retrouver, à l'aide de cet argument, la convergence de (I_n) vers 0.
4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite telle que $u_0 = a$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{n+1}.$$
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de I_n et a.
   (b) En déduire le comportement asymptotique de la suite (u_n) en fonction de la valeur de a.

Exercice 19 On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$$

1. Montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge et donner sa limite.
2. En déduire un équivalent de la suite $(J_n)_{n\in N}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)dt.$$

Exercice 20 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ telle que $f(1) \neq 0$. On pose $K_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$.

1. Montrer que la suite $(K_n)_n$ tend vers 0.
2. Vérifier que $(n+1)\displaystyle\int_0^1 t^n f(1)dt = f(1)$.
3. Montrer que :
   $$\forall \alpha > 0,\ (n+1)K_n - f(1) = (n+1)\int_0^{1-\alpha} (f(t)-f(1))t^n dt + (n+1)\int_{1-\alpha}^1 (f(t)-f(1))t^n dt$$
4. En utilisant la caractérisation de la continuité en 1 et de la limite d'une suite avec des ε, montrer que $\lim_{n\to\infty}(n+1)K_n - f(1) = 0$. En déduire que $K_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}$.

20 — Applications linéaires

Avant d'aborder ce chapitre, il est essentiel de revoir la partie qui concerne les définitions théoriques pour une application $f: E \to F$.

En particulier :

- la notion **d'image directe d'un ensemble** $A \subset E$:

$$f(A) = \left\{ y \in F \middle| \exists x \in A, y = f(x) \right\} = \left\{ f(x) \middle| x \in A \right\}$$

la notion **d'image réciproque d'un ensemble** $B \subset F$:

$$f^{-1}(B) = \left\{ x \in E \middle| f(x) \in B \right\}$$

- la notion **d'application injective** :

$$\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall (x,y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

la notion **d'application surjective** :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$

R Il faut bien être au clair sur les raisonnements du type : si $y \in f(E)$, alors on sait.... pour montrer que $x \in f(E)$, on montre ...

I Généralités sur les applications linéaires

I.1 Applications linéaires, endomorphismes

Définition I.1 Soit E et F des espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une application linéaire si elle vérifie les deux propriétés :
- $\forall (x,y) \in E^2, \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$,
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Ainsi f est linéaire si l'image d'une somme de vecteur est la somme des images et si l'image de αu est α fois l'image de u. On peut dire qu'une application est linéaire si et seulement si l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.
Ainsi, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille de p vecteurs de E et que $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est p scalaires, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} a_i f(u_i).$$

Notation I.1. *On note $\mathscr{L}(E,F)$, l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

Notons que cette définition ne marche que parce que E et F sont des espaces vectoriels : on peut donc ajouter et multiplier par un scalaire dans E ET dans F.

On a $f(0_E) = f(00_E) = 0f(0_E) = 0_F$.
On appelle **application nulle**, l'application de E dans F telle que $\forall x \in E, f(x) = 0_F$, c'est clairement une application linéaire.
De même, **l'application identité** de E dans E est une application linéaire (c'est un endomorphisme).

On a d'autre définition que l'on précisera au fur et à mesure :

Définition I.2 Dans le cas où $E = F$, on note $\mathscr{L}(E)$ et on appelle endomorphisme de E, les applications linéaires de E dans E.
Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est linéaire et bijective, on parle d'isomorphisme de E dans F.
Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est linéaire et bijective de E dans E, on parle d'automorphisme.

Comme pour les espaces vectoriels, on dispose d'une caractérisation *en une ligne :*

Proposition I.1 L'application f est linéaire si et seulement si :

$$\forall x \text{ et } y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

R Cette caractérisation est plus compact, c'est ainsi souvent celle-ci qui est utilisée.

⋆ Exemples d'applications linéaires

On peut commencer par des applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$:

■ **Exemple I.1** Soit l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, x-y, x-2y) \end{array} \right.$$

Alors $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ (on peut le vérifier rapidement).

On peut d'ailleurs écrire :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-y \\ x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$

■

Bien sûr toute application qui contient des expressions avec des cosinus, des exponentielles, des termes en x^2 ou en xy n'est pas linéaire. On verra que toute application linéaire, peut s'écrire comme ci-dessus sous la forme d'une matrice multiplié par le vecteur colonne des coordonnées.

Pour les polynômes :

■ **Exemple I.2** La dérivation est une application linéaire :

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$$

La multiplication par un polynôme fixé est linéaire :

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & QP \end{cases} \quad \text{en particulier} \quad f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{cases}$$

La composée à droite est linéaire :

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(Q) \end{cases} \quad \text{par exemple :} \quad f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{cases}$$

! La composée à gauche n'est pas linéaire !

Bien sûr, on peut mélanger :

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X^2+1)+2XP'+P(4) \end{cases} \quad \text{est linéaire}$$

■

Démonstration. Montrons que la dernière application est linéaire. Pour cela, on considère P et Q deux polynômes et $\alpha \in \mathbb{K}$, cela donne :

$$\begin{aligned} f(P+\alpha Q) &= (P+\alpha Q)(X^2+1) + 2X(P+\alpha Q)' + (P+\alpha Q)(4) \\ &= P(X^2+1)+2XP'+P(4)+\alpha\left(Q(X^2+1)+2XQ'+Q(4)\right) \\ &= f(P)+\alpha f(Q). \end{aligned}$$

■

On peut aussi faire des applications des polynômes dans $\mathbb{K}^n$:

■ **Exemple I.3** L'évaluation en un point est linéaire :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1)) \end{array} \right.$$

■

Pour les suites, on a aussi des applications linéaires classiques :

■ **Exemple I.4** On peut associer la valeur de certains termes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^2 \\ \left(u_n\right) & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right. \quad \text{est linéaire}$$

On peut décaler :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ \left(u_n\right) & \longmapsto & \left(u_{n+1}\right) \end{array} \right. \quad \text{est linéaire}$$

en compliquant un peu :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ \left(u_n\right) & \longmapsto & \left(u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n\right) \end{array} \right. \quad \text{est linéaire} \qquad (a,b) \in \mathbb{K}^2 \text{ fixé}$$

Enfin, la limite est un opérateur linéaire :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ \left(u_n\right) & \longmapsto & \lim_{n\infty} u_n \end{array} \right. \quad \text{est linéaire} \qquad \text{avec } E \text{ l'ensemble des suites convergentes.}$$

■

contre-exemple :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ \left(u_n\right) & \longmapsto & \left(u_{n+1} - au_n - b\right) \end{array} \right. \quad \text{n'est pas linéaire} \qquad (a,b) \in \mathbb{K}^2 \text{ fixé}$$

Pour les fonctions, on peut reprendre les même exemples que pour les polynômes (évaluation en un point, dérivation). On peut aussi ajouter l'intégration.

Parmi les exemples utiles :

■ **Exemple I.5**

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & y' + ay \end{array} \right. \qquad \text{cad la fonction } x \in \mathbb{R} \mapsto y'(x) + a(x)y(x)$$

est linéaire avec $a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ fixée

■

I.2 Opérations dans $\mathscr{L}(E,F)$

⋆ Combinaisons linéaires

Proposition I.2 Soit E et F des espaces vectoriels, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi un espace vectoriel.

Ainsi, on peut ajouter des applications linéaires, et les multiplier par un scalaire. ces opérations vérifient les propriétés *classiques* des opérations $+$ et $.$: associativité, commutativité, etc.

Démonstration. Soit f et $g \in \mathscr{L}(E,F)$ deux applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $f+g$ classiquement par :

$$\forall x \in E,\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

et λf par :

$$\forall x \in E,\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

On peut alors montrer que $f+g \in \mathscr{L}(E,F)$, et $\lambda f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On vérifie ensuite :

- $f+g = g+f$,
- $(f+g)+h = f+(g+h)$,
- $\lambda(\mu f) = (\lambda)\mu f$,
- $\lambda(f+g) = \lambda f+\lambda g$.
- $(\lambda+\mu)f = \lambda f+\mu f$.

Le rôle du 0 est jouée par la fonction nulle, qui vérifie $f+0 = f$, pour toute $f \in \mathscr{L}(E,F)$. ■

⭑ Composition

Comme pour les fonctions, il existe des opérations non linéaires, comme la composition.

Proposition I.3 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, et $g \in L(F,G)$, alors $g \circ f \in L(E,G)$. Autrement dit : **la composé d'applications linéaires est linéaire**.

Notation I.2. *En particulier, si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme, on peut définir f^p, comme f composée p fois avec elle même.*

Démonstration. Il suffit de le vérifier : soit x et $y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$g\circ f(x+\lambda y) = g(f(x+\lambda y) = g(f(x)+\lambda f(y)) = g(f(x))+\lambda g(f(y)) = g\circ f(x)+\lambda g\circ f(y).$$

■

(!) Pour une application linéaire f^p désigne toujours « f composée p fois » et jamais « f puissance p »

Les rapports entre l'addition et la composition sont données par :

Proposition I.4 Soit f, g et h des applications de $\mathscr{L}(E,E)$, on a alors :

$$f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h, \qquad (f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$$

Ces résultats se généralise au cas où les applications ne sont plus des endomorphismes mais que les composées sont bien définies.

Démonstration. Il suffit encore de le vérifier :

$$\begin{aligned} f\circ(g+h)(x) =& f((g+h)(x)) = f(g(x)+h(x)) \\ =& f(g(x)) + f(h(x)) = f\circ g(x) + f\circ h(x). \end{aligned}$$

et :

$$(f+g)\circ h(x) = (f+g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)).$$

■

R La dernière propriété ne fait pas intervenir le caractère linéaire des fonctions. Elle a déjà été vue dans le chapitre applications.

⋆ Bijection réciproque

Proposition I.5 Soit f un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est aussi un isomorphisme de F dans E.

Ainsi, la bijection réciproque d'une application linéaire est linéaire.

Démonstration. Il faut montrer que $\forall x,y \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f^{-1}(x+\lambda y) = f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y)$. C'est-à-dire puisque f est bijective :

$$x + \lambda y = f(f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y))$$

Il suffit donc de calculer :

$$f(f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x)) + \lambda f(f^{-1}(y)) = x + \lambda y.$$

■

Notation I.3. *Si f est un automorphisme, on peut donc définir f^{-p} comme l'inverse de f^p, ou comme f^{-1} composé p fois.*

I.3 Images et noyaux

⋆ Image directe d'un sous-espace vectoriel

Proposition I.6 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et G un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Autrement dit, l'image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Démonstration. Déjà $0 \in G$, donc $f(0) = 0 \in f(G)$. Ainsi, $f(G)$ est non vide.

Soit u et v des éléments de $f(G)$ et un $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche à montrer que $u + \alpha v$ est un élément de $f(G)$. On doit donc construire $z \in G$, tel que $f(z) = u + \alpha v$.

Comme u et v sont des éléments d'une image directe, on a :

$$\exists x \in G,\ u = f(x) \qquad \exists y \in G,\ v = f(y)$$

On considère alors $z = x + \alpha y$, c'est bien un élément de G (puisque G est un sous-espace vectoriel). On a de plus :

$$f(z) = f(x) + \alpha f(y) = u + \alpha v$$

On a bien $u + \alpha v \in f(G)$ et $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F. ∎

R On peut aussi vérifier que l'image réciproque d'un SEV par une application linéaire est un SEV.

⋆ Espace image d'une application linéaire

Définition I.3 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, on appelle espace image de f l'ensemble $f(E)$.

C'est un sous-espace vectoriel de F.

Notation I.4. *On note* $\mathrm{Im}(f)$ *l'espace image.*

⋆ Caractérisation de la surjectivité par l'espace image

Proposition I.7 L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. C'est une évidence : f est surjective si tout élément de F est image d'un élément de E, ie est dans $\mathrm{Im}(F)$. ∎

R Dans tous les cas on a $\mathrm{Im}(f) \subset F$ (et même est un SEV de F) !

C'est vrai pour une application quelconque !

✎ Rappel des raisonnements habituel :
- Lorsque $y \in \mathrm{Im}(f)$, on est assuré qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$, c'est la première chose qu'il faut utiliser lorsqu'on a un élément de l'ensemble image.
- Tandis que pour prouver qu'un élément $y \in F$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, il faut trouver un x tel que $y = f(x)$.

✎ Pour montrer qu'une application linéaire f est surjective, on a donc deux choix :
- on prend un élément générique $y \in F$, et on résout le système $f(x) = y$, avec un second membre y générique,
- ou, on montre que $\mathrm{Im}(f) = F$, en particulier dans le cadre de la dimension finie, il suffit de $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$ puisqu'on a de manière évidente $\mathrm{Im}(F) \subset F$

■ **Exemple I.6**

$$\left\{(a+5b, 3a+b, 4b+2c, c+a) | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

est l'image de l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (a,b,c) & \mapsto & (a+5b, 3a+b, 4b+2c, c+a) \end{array} \right.$$

c'est donc un sev.

■

D'une manière générale, un SEV écrit à partir de paramètres corresponds à un espace image.

■ **Exemple I.7** Pour les polynômes, si on considère :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

son image est $\mathbb{K}[X]$ (cette application est surjective) car tout polynôme admet une primitive (pour la dérivation formelle). ■

■ **Exemple I.8** Si on considère :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & QP \end{array} \right.$$

Alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ QP \middle| P \in \mathbb{K}[X] \in \right\}$$

C'est l'ensemble des polynômes divisibles par P. ■

✯ Cas de la dimension finie

Proposition I.8 Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On note $\mathscr{F}$ la famille $\mathscr{F} = (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.

Alors : $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Autrement dit :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$$

R C'est valable pour n'importe quelle base !

Démonstration. Déjà ce que l'on écrit a un sens : $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ est une famille de $\mathrm{Im}(f)$.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, on sait qu'il existe $x \in E$, tel que $y = f(x)$.

On sait de plus que :

$$x \text{ s'écrit } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } (x_1, \ldots, x_n) \text{ les coordonnées de } x \text{ dans la base } \mathscr{B}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \in \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$

D'où l'inclusion.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$. On écrit :

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) \text{ pour un certain } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

On pose alors :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

c'est bien un vecteur de E, et on n'a bien :

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = y. \end{aligned}$$

■

R En fait il suffit que $\mathscr{B}$ soit génératrice.

On peut ainsi trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$ puisqu'on a une famille génératrice. Pour montrer que f est surjective, il faut montrer $\mathrm{Im}(f) = F$, donc (puisqu'on est dans le cas de la dimension finie), $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$, en remplaçant $\mathrm{Im}(f)$ par $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, cela donne : $\mathrm{Rg}(\mathscr{F}) = \dim(F)$. On reverra cela après avoir défini le rang d'une application linéaire.

■ **Exemple I.9** Considérons l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \longmapsto & P'(X+1) \end{array} \right.$$

On choisis alors la base canonique dans $\mathbb{K}_3[X]$, cela donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(P(1), P(X), P(X^2), P(X^3)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(0, 1, 2(X+1), 3(X+1)^2\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(1, 2(X+1), 3(X+1)^2\right) \end{aligned}$$

On a ainsi trouvé une base de $\mathrm{Im}(f)$ ■

✯ Noyau d'une application linéaire

Définition I.4 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle noyau de f la pré-image de $\{0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments u de E vérifiant $f(u) = 0$.

Notation I.5. *On note* $\ker(f)$ *le noyau de* f. *On a donc :*

$$\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}.$$

✎ Rappel des raisonnements habituels :
- Si on sait que $x \in \ker(f)$, alors on sait que $f(x) = 0$.
- Si on veut montrer que $f(x) \in \ker(f)$, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$.

Proposition I.9 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\ker(f)$ est un SEV de E.

Démonstration. Déjà $0 \in \ker(f)$ puisque $f(0) = 0$.

Considérons maintenant x et $y \in \ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = 0 + \lambda 0 = 0$. Et donc $(x+\lambda y) \in \ker(f)$. ∎

■ **Exemple I.10**

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + 4z = 0 \text{ et } x + 3z = 0\right\}.$$

est un espace vectoriel, puisque c'est le noyau de l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+4z, x+3z) \end{array} \right.$$

■

✎ D'une manière générale, un SEV écrit à partir d'équations corresponds à un noyau.

■ **Exemple I.11** Si on considère :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P'' \end{array} \right.$$

Alors en utilisant la formule de Taylor, on a : $\ker(f) = \mathbb{R}_1[X]$ (ensemble des polynômes dont la dérivée seconde est nulle).

■

■ **Exemple I.12** En utilisant la relation racine et divisibilité :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1)) \end{array} \right.$$

alors :

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{P \in \mathbb{K}[X] \middle| P(0) = 0 \text{ et } P(1) = 0\right\} \\ &= \left\{P \in \mathbb{K}[X] \middle| X(X-1) | P\right\} \\ &= \left\{X(X-1)Q \middle| Q \in \mathbb{K}[X]\right\} \end{aligned}$$

■

■ **Exemple I.13** Si on considère :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ \left(u_n\right) & \longmapsto & \left(u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n\right) \end{array} \right. \quad \text{est linéaire} \qquad (a,b) \in \mathbb{K}^2 \text{ fixé}$$

alors $\ker(f)$ est l'ensemble des suites $\left(u_n\right)$ vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

■

⋆ Caractérisation de l'injectivité par le noyau

On sait que f est injective si pour tout couple (x,y), on a $f(x) = f(y) \implies x = y$. Autrement dit si chaque élément a une unique pré-image.

En fait, dans le cadre d'une application linéaire, il suffit que 0 ait une unique pré-image.

> **Proposition I.10** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.

Démonstration. Si f est injective et x vérifie $f(x) = 0_F = f(0_E)$ alors $x = 0_E$, ce qui montre ainsi $\ker(f) = \{0\}$.

Si $\ker(f) = \{0\}$, soit x et y tel que $f(x) = f(y)$, alors $f(x) - f(y) = f(x-y) = 0$, ainsi $x - y \in \ker(f)$, et $x - y = 0$, D'où $x = y$ et l'injectivité. ■

✎ Il faut rapprocher ce résultat du fait qu'une famille est libre peut se comprendre comme « *les seules coordonnées possibles du vecteur nulle sont celle ou toutes les coordonnées sont nulles* », ce qui implique que « *les coordonnées d'un vecteur sont uniques* ». Ici on montre que 0 a une unique antécédent est équivalent à tout élément a une unique antécédent.
Il y a bien sûr aussi un lien avec les systèmes linéaires.

✎ Pour montrer qu'une application est injective, on résout donc le système $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in E$, et on montre que cela implique que $x = 0$.

R On montre que $\ker(f) \subset \{0\}$, jamais l'inclusion réciproque.

II Isomorphismes

⋆ Rappels

✎ Vocabulaire :
- On parle d'**isomorphismes** pour les applications linéaires et bijectives de E dans F.
- On parle d'**automorphismes** pour les applications linéaires et bijectives de E dans E (on peut aussi dire les endomorphismes bijectifs).

✎ Réciproque d'isomorphimes : si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective, alors f^{-1} est aussi bijective.

Composée d'isomorphismes : si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ sont bijectives, alors $f \circ g$ est aussi bijective et linéaire. L'application réciproque est : $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \ker(f) = \{0\} \\ f \text{ surjective} &\iff \operatorname{Im}(f) = F \end{aligned}$$

Si E est de dimension finie avec $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, et si on construit l'image de ces vecteurs : $\mathscr{F} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$, alors :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(\mathscr{F}).$$

Notation II.1. *On note $GL(E)$ et on appelle **groupe linéaire** de E l'ensemble des automorphismes de E.*

C'est une structure de groupe pour la composée : il y a un élément neutre (l'application identité), on peut composer deux éléments et tout élément à un inverse (la bijection réciproque.)

Dans $GL(E)$, on peut définir f^p et f^{-p} par la composée.

II.1 Caractérisation des isomorphismes par des bases

Proposition II.1 Soit E un espace vecteoriel de dimension finie, et F un espace vectoriel (de dimension quelconque), $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note $\mathscr{F} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$.

On a alors :

$$\begin{aligned} & f \text{ est injective} \iff \mathscr{F} \text{ est libre} \\ \text{et} \quad & f \text{ est surjective} \iff \mathscr{F} \text{ est génératrice de } F \end{aligned}$$

On en déduit :

$$f \text{ est bijective} \iff \mathscr{F} \text{ est une base.}$$

Ainsi, une application linéaire est bijective si et seulement si elle transforme une base de E en une base de F.

R Si c'est vrai pour une base, c'est vrai pour toutes les bases. Cela ne dépends pas de la base choisie !

Démonstration. Pour la première partie.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est injective et on montre que $\mathscr{F}$ est libre. On forme donc l'équation :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$$

que l'on écrit par linéarité :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right)=0 \text{ ie } \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i \in \ker(f)$$

Comme f est injective, cela donne :

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i = 0 \text{ d'où } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0 \text{ car } \mathscr{B} \text{ est libre.}$$

D'où l'implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose maintenant que $\mathscr{F}$ est libre et on considère $x \in E$, tel que $f(x)=0$. On écrit :

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i \text{ avec } (x_1,\ldots,x_n) \text{ les coordonnées de } x \text{ dans la base } \mathscr{B}$$

On a alors :

$$0=f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(e_i)$$

On a ainsi obtenu une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}$ qui donne le vecteur nul :

$$\sum_{i=1}^{n}x_i f(e_i)=0$$

puisque $\mathscr{F}$ est libre, on en déduit : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i=0$ et donc $x=0$, ce qui permet de conclure que $\ker f=\{0\}$ et donc que f est injective. D'où la réciproque.

La deuxième partie peut se faire par équivalence, car on a déjà démontré :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),\ldots,f(e_n)) \qquad \text{ie } \mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f \text{ surjective } &\iff \mathrm{Im}(f)=F \\ &\iff \mathrm{Vect}(\mathscr{F})=F \\ &\iff \mathscr{F} \text{ est génératrice de } F \end{aligned}$$

La dernière propriété est donc un mélange des deux. ■

Dans le cas où l'espace de départ E est de dimension finie.

Si une application $f \in \mathscr{L}(E,F)$ envoie une base $\mathscr{B}$ de E en un famille libre, alors elle est injective et donc elle envoie toute base de E en une famille libre. (Cela ne dépends pas de la base choisie). Cette famille contient alors $\dim(E)$ vecteurs. On en déduit que F est soit de dimension infinie, soit $\dim(F) \geqslant \dim(E)$.

On vient donc de montrer : si il existe une application linéaire injective de E dans F c'est que $\dim(F) \geqslant \dim(E)$. Par contraposé, si $\dim(F) < \dim(E)$, alors toute application linéaire de E dans F est non injective.

On recommence pour les applications surjectives.

Si l'application f envoie une base $\mathscr{B}$ de E en un famille génératrice de F, alors elle est surjective et donc elle envoie toute base de E en une famille génératrice de

F. (Cela ne dépends pas de la base choisie). Cette famille contient alors $\dim(E)$ vecteurs. On en déduit que F est de dimension infinie et que $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

On vient donc de montrer : si il existe une application linéaire surjective de E dans F c'est que $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Par contraposé, si $\dim(F) > \dim(E)$, alors toute application linéaire de E dans F est non surjective.

Enfin, on peut voir que si il existe une application linéaire bijective (un isomorphisme) entre E et F, c'est que $\dim(E) = \dim(F)$.

II.2 Espaces isomorphes

Définition II.1 Deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes, si il existe un isomorphisme (ie une bijection linéaire) entre E et F.

La relation « être isomorphe » est une relation d'équivalence entre espace vectoriel.

Proposition II.2 Deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

Démonstration. Si les espaces sont isomorphes, on a déjà vu qu'ils ont la même dimension.

Réciproquement si E et F ont la même dimension, on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E. On considère alors l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathscr{B}} & \longmapsto & x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathscr{C}} \end{array} \right.$$

Ainsi, pour un vecteur de x, on le décompose dans la base $\mathscr{B}$, en notant : $(x_1, \dots, x_n)_{\mathscr{B}}$ et on pose : $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$. On a donc :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

On vérifie que φ est linéaire et de manière évidente :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \varphi(e_i) = f_i.$$

Ainsi, φ envoie la base $\mathscr{B}$ sur la base $\mathscr{F}$. C'est donc un isomorphisme. ∎

En particulier, tout espace vectoriel E de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Un isomorphisme simple consiste à choisir une base $\mathscr{B}$ dans E et à faire :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array} \right.$$

La relation « être isomorphe » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des EV de dimension finie. Pour chaque classe d'équivalence, il existe un représentant simple : $\mathbb{K}^n$!.

⋆ Application aux suites récurrentes d'ordre 2

Considérons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé et :

$$E = \left\{ (u_n) \middle| \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}$$

E est alors un SEV de l'ensemble des suites réelles (E est l'ensemble des suites qui vérifient la relation de récurrence).

On a un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{cases}$$

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & E \\ (a,b) & \longmapsto & (u_n) \text{ définie par } \begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \end{cases} \end{cases}$$

φ et ψ sont clairement bijection réciproque l'une de l'autre, de plus il est clair que φ est linéaire (pour ψ on peut aussi le démontrer mais c'est plus long, on peut le déduire du fait que c'est la bijection réciproque de φ).

On en déduit que E est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

En particulier, on en déduit que $\dim(E) = 2$.

Si on suppose que le polynôme caractéristique $P = X^2 - aX - b$ a deux racines distinctes r_1 et r_2, on a alors :

$$\left((r_1^n), (r_2)^n \right) \text{ est une famille libre}$$

En effet, le système $\alpha(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ (est la suite nulle), s'écrit pour $n = 0$ et 1 :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ r_1\alpha + r_2\beta = 0 \end{cases} \quad \text{ie} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$$

cela donne $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. D'où la famille est libre.

En écrivant que cette famille est une base de E, on en déduit le résultat vu sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

$$\forall (u_n) \in E,\ \exists!(\alpha,\beta),\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

II.3 Applications entre deux EV de même dimension

Proposition II.3 Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors on a :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

R On est donc dans le cas où l'unicité est équivalente à l'existence et réciproquement.

Démonstration. La démonstration reprends les même notations que précédemment : on considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et $\mathscr{F} = \Big(f(e_1), \dots, f(e_n)\Big)$. La famille $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de F qui contient autant de vecteurs que la dimension.

On sait alors que :

$$\begin{aligned} f \text{ est bijective } &\iff \mathscr{F} \text{ est une base} \\ &\iff \mathscr{F} \text{ est libre} \\ &\iff f \text{ est injective} \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} f \text{ est bijective } &\iff \mathscr{F} \text{ est une base} \\ &\iff \mathscr{F} \text{ est génératrice de } F \\ &\iff f \text{ est surjective} \end{aligned}$$

■

Corollaire II.4 Si E est un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme, alors :

$$f \text{ est bijective } \iff f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective}$$

⋆ Application aux polynômes de Lagrange

Considérons l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \Big(P(1), P(2), P(3)\Big) \end{array} \right.$$

C'est clairement une application linéaire. Elle est injective, puisque si $P \in \ker(f)$, alors $(X-1)(X-2)(X-3)$ divise P et comme P est de degré inférieur ou égal à 2, on en déduit qu'il est nul.

De plus, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$, c'est donc un isomorphisme. Ce qui montre que pour tous triplets de valeurs $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique polynôme P vérifiant :

$$P(1) = u, \quad P(2) = w, \quad P(3) = w$$

En particulier, il existe une unique famille de 3 polynômes de degré inférieur ou égal à 2 qui s'envoie sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est la famille $\mathscr{F} = (L_1, L_2, L_3)$ définie par :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{(1-2)(1-3)}(X-2)(X-3) \\ L_2 &= \frac{1}{(2-1)(2-3)}(X-1)(X-3) \\ L_3 &= \frac{1}{(3-1)(3-2)}(X-1)(X-2) \end{aligned}$$

Cette famille est une base (c'est l'image d'une base par l'isomorphisme f^{-1}). Et donc tout polynôme s'écrit de manière unique dans cette base :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ P = P(1)L_1 + P(2)L_2 + P(3)L_3$$

Bien entendu, cela peut se généraliser : un polynôme de degré inférieur ou égal à n est entièrement déterminé par sa valeur en $n+1$ points distincts. Plus précisément, si $(x_0,\dots,x_n)$ sont les $n+1$ points distincts, L'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \Big(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)\Big) \end{array} \right.$$

est injective du fait qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui a $n+1$ racines est nul. C'est alors un isomorphisme.

La base des polynômes de Lagrange est l'image par f^{-1} de la base canonique. C'est la famille de $n+1$ polynômes :

$$\mathscr{F} = \Big(L_0, \dots, L_n\Big)$$

définie par :

$$\forall i \in [\![0, n+1]\!],\ L_i = \frac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (x_i - x_k)} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (X - x_k)$$

C'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i.$$

III Modes de définition d'une application linéaire

III.1 Par une base

Comme précédemment, on regarde le cas où l'espace de départ est de dimension finie.

Proposition III.1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un espace vectoriel (de dimension quelconque).

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille quelconque de n vecteurs de F.

Alors, il existe une unique application linéaire vérifiant transformant la base $\mathscr{B}$ en la famille $\mathscr{F}$, ie telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], f(e_i) = f_i.$$

Démonstration. Commençons par l'unicité : Soit f et g deux applications linéaires qui conviennent, il faut donc montrer que $f = g$. Pour cela, on considère un $x \in E$

quelconque, et on montre que $f(x) = g(x)$. On décompose x dans la base $\mathscr{B}$, cela s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

et on a :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

et de même :

$$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

On a donc bien $f(x) = g(x)$. D'où $f = g$ (car x est quelconque) et l'unicité.

Pour l'existence, on reprends ce qui a déjà été utilisé pour démontrer que deux espaces de même dimension sont isomorphes.

On considère :

$$\varphi : \begin{cases} E & \to & F \\ x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathscr{B}} & \longmapsto & y = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i. \end{cases}$$

Ainsi, pour un vecteur de x, on le décompose dans la base $\mathscr{B}$, en notant : $(x_1, \dots, x_n)_{\mathscr{B}}$ et on pose : $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$.

On a donc :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

On vérifie que φ est linéaire et de manière évidente :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \varphi(e_i) = f_i.$$

Ainsi, φ envoie la base $\mathscr{B}$ sur la famille $\mathscr{F}$. ■

✎ Ainsi, une application linéaire est entièrement déterminée par sa valeur sur une base. Si deux applications linéaires coïncident sur une base alors elles sont égales partout.
Si on choisit une famille $\mathscr{F}$ de n vecteurs de F, alors il existe une unique application f qui transforme la base $\mathscr{B}$ en la famille $\mathscr{F}$.

✎ La démonstration donne un algorithme pour déterminer cette application : en partant d'un vecteur x dans l'ensemble de départ, on le décompose dans la base $\mathscr{B}$ puis on utilise la propriété $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$.

■ **Exemple III.1** On peut chercher l'unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f((1,0,0)) = (1,2,3) \qquad f((1,1,0)) = (2,2,0) \qquad f((1,1,1)) = (0,0,0)$$

Comme la famille :

$$\mathscr{B} = \Big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\Big) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3$$

cette application existe et est unique.

On va chercher son expression en fonction des coordonnées d'un vecteur dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on considère $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, et on cherche ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. On peut résoudre le système, mais cela revient à :

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (x-y)(1,0,0)+(y-z)(1,1,0)+z(1,1,1)\\ &= (x-y,y-z,z)_{\mathscr{B}}\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}f((x,y,z)) &= (x-y)f(1,0,0)+(y-z)f(1,1,0)+zf(1,1,1)\\ &= (x-y)(1,2,3)+(y-z)(2,2,0)+z(0,0,0)\end{aligned}$$

On trouve alors facilement l'expression. ■

III.2 Par une somme directe

Cette fois on suppose que l'espace de départ se décompose en une somme directe.

Proposition III.2 Soit F un SEV quelconque (l'espace d'arrivée) et soit E un espace vectoriel (l'espace de départ) qui se décompose en une somme directe de deux sous-espace supplémentaires. C'est-à-dire telle qu'il existe E_1 et E_2 deux SEV de E, vérifiant $E = E_1 \oplus E_2$.

On considère $f_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ vérifiant $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.

Ainsi, une application linéaire est entièrement déterminée par sa restriction à chacun des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Démonstration. On commence par l'unicité. On considère f et g deux solutions On considère $x \in E$, on écrit de manière unique $x = u+v$ avec $u \in E_1$ et $v \in E_2$, on a alors :

$$\begin{aligned}f(x) &= f(u+v) = f(u)+f(v)\\ &= f_1(u)+f_2(v)\\ &= g(u)+g(v) = g(u+v) = g(x).\end{aligned}$$

On considère $x \in E$, on écrit de manière unique $x = u+v$ avec $u \in E_1$ et $v \in E_2$, et on pose :

$$f(x) = f_1(u)+f_2(v).$$

Montrons que l'application f est linéaire.
Soit x et y deux éléments de E et $\alpha \in \mathbb{K}$, on écrit alors :

$$x = u + v \qquad y = u' + v' \qquad (u, u') \in F^2 \text{ et } (v, v') \in G^2$$

et donc $x + \alpha y = (u + \alpha u') + (v + \alpha v')$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(x + \alpha y) &= f_1(u + \alpha u') + f_2(v + \alpha v') \\ &= f_1(u) + \alpha f_1(u') + f_2(v) + \alpha f_2(v') \\ &= f(u) + \alpha f(v). \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire.
De plus, clairement, $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$. ∎

IV Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

Dans cette section la lettre E désigne un espace vectoriel.

IV.1 Homothéties

Notation IV.1. *L'application identité de E dans E est noté Id_E. C'est bien sûr un endomorphisme de E.*

Définition IV.1 Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle homothétie de rapport λ l'application $h = \lambda Id_E$.
C'est l'application linéaire $h : x \longmapsto \lambda x$.

Géométriquement, cela corresponds à « agrandir la distance de chaque point à 0 par un facteur λ ».

Proposition IV.1 Les homothétie commutent avec toutes les endomorphismes (pour la composition).
Au sens où pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, on a :

$$(\lambda \mathrm{Id}_E) \circ f = f \circ (\lambda \mathrm{Id}_E)$$

Démonstration. Pour $x \in E$, il suffit de constater que :

$$(\lambda \mathrm{Id}_E) \circ f(x) = \lambda f(x) = f(\lambda x) = f \circ (\lambda \mathrm{Id}_E)(x).$$

∎

IV.2 Projecteurs

Définition IV.2 Soit E un espace vectoriel, qui se décompose en une somme directe. On note $E = F \oplus G$.

On appelle **projecteur** sur F parallèlement à G l'application :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u \text{ avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G. \end{array} \right.$$

R L'unicité de l'écriture $x = u + v$ assure que cette application est bien définie.

Proposition IV.2 Le projecteur sur F parallèlement à G est une application linéaire (un endomophisme de E).

Plus précisément, le projecteur p sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire vérifiant :

$$\forall x \in F,\ p(x) = x \text{ et } \forall x \in G,\ p(x) = 0$$

On retrouve bien sûr l'interprétation géométrique usuelle de la projection dans l'espace. (faire un dessin). En particulier, cela permet d'interpréter la proposition suivante.

Démonstration. La définition d'une application linéaire par une somme directe assure que cet endomorphisme existe et est unique.

De plus, p vérifie ces conditions. ■

■ **Exemple IV.1** Dans l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a la décomposition :

$$\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \oplus \mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

avec $\mathscr{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions paires et impaires.

Le projecteur p sur $\mathscr{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'application :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \right.$$

Le projecteur q sur $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'application :

$$q : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array} \right.$$

■

Proposition IV.3 Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$. et soit p la projection sur F parallèlement à G.

On a alors :

$$p^2 = p \qquad \text{c'est-à-dire} \quad p \circ p = p.$$

et :

$$G = \ker p \qquad \text{et} \qquad F = \operatorname{Im} p = \left\{x \in E | p(x) = x\right\} = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$$

Démonstration. Commençons par une évidence :

$$\left\{x \in E | p(x) = x\right\} = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$$

En effet :

$$x = p(x) \iff p(x) - x = 0 \iff (p - \mathrm{Id}_E)(x) = 0 \iff x \in \ker(p - \mathrm{Id}_E)$$

Pour $x \in E$, on écrit $x = u + v$ et on a : $p(x) = u$ et $p^2(x) = p(u) = u$ ainsi, $p \circ p(x) = p(x)$.

Maintenant, on a pour $x \in E$ quelconque, que l'on écrit toujours $x = u + v$

$$x \in \ker(p) \iff p(x) = 0 \iff u = 0 \iff x \in G.$$

De même :

$$p(x) = x \iff x \in F$$

L'inclusion $\operatorname{Im}(F) \subset F$ est évidente étant donné la définition d'un projecteur, la relation : $\forall x \in F,\ p(x) = x$ montre $F \subset \operatorname{Im}(F)$ Au final, on a bien : $F = \operatorname{Im}(F)$ ∎

La proposition suivante est alors une réciproque :

Proposition IV.4 Soit p un endomorphisme vérifiant $p \circ p = p$.
Alors $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$ et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Démonstration. Soit donc p un endomorphisme qui vérifie $p \circ p = p$.

Montrons que $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$. Pour cela, on montre :

$$E = \ker p + \operatorname{Im} p \qquad \text{et} \qquad \ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$$

(ici on n'est pas en dimension finie, on ne peut donc pas utiliser la dimension).

Pour $x \in E$, on écrit :

$$x = p(x) + (x - p(x))$$

On a $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \ker p$. Ainsi, $E = \operatorname{Im}(p) + \ker p$.

Enfin, si $x \in \ker p \cap \operatorname{Im} p$. O sait $p(x) = 0$ et $\exists c \in R,\ p(c) = x$. On a alors :

$$0 = p(x) = p(p(c)) = p(c) = x$$

Ainsi, $x = 0$.

Au final, on a bien $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ supplémentaire.

Montrons que p est le projecteur correspondant à cette somme directe. On a clairement :

$$\forall x \in \ker p,\ p(x) = 0$$

puis si $s \in \mathrm{Im}(p)$, on écrit $x = p(a)$ pour un certain $a \in E$, et $p(x) = p^2(a) = p(a) = a$.

Ainsi :

$$\forall x \in \mathrm{Im}\, p, \; p(x) = x.$$

■

On peut donc dire qu'un endomorphisme p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas, on a : $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\ker p$.

IV.3 Symétries

Définition IV.3 Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$.

On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application :

$$s : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \longmapsto & u - v \text{ avec } x = u + v \text{ et } u \in F, \; v \in G. \end{cases}$$

R De même que précédemment, l'unicité de l'écriture $x = u + v$ assure que cette application sont bien définies. L'interprétation géométrique est aussi évidente.

Proposition IV.5 Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$.

Le symétrie par rapport à F parallèlement à G est une application linéaire (un endomophisme de E).

Plus précisément, la symétrie s par rapport à F et parallèlement à G est l'unique application linéaire vérifiant :

$$\forall x \in F, \; s(x) = x \text{ et } \forall x \in G, \; s(x) = -x.$$

Proposition IV.6 Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$. Soir p le projecteur sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

On a alors :

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E \text{ ou encore } p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$$

Démonstration. Soit $x \in E$, on écrit $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. On a :

$$s(x) = u - v$$
$$p(x) = u$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} 2p(x) - x &= 2u - (u+v) = u - v = s(x) \\ \frac{1}{2}(s(x)+x) &= \frac{1}{2}((u-v)+u+v) = u = p(x). \end{aligned}$$

■

Proposition IV.7 Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$. et soit s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

On a alors :

$$s^2 = \mathrm{Id}_E \text{ c'est-à-dire : } s \circ s = \mathrm{Id}_E$$

et :

$$\begin{aligned} G &= \ker(s + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E | s(x) = -x\} \\ \text{et } F &= \ker(s - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E | s(x) = x\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Clairement on a : $s^2 = s$, si $x \in G$, on a $s(x) = -x$ et si $x \in F$, $s(x) = x$. ■

Comme pour les projecteurs, on a la réciproque :

Proposition IV.8 Soit s un endomorphisme de E tel que : $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Alors :

$$E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$$

De plus, s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration. Pour commencer, il faut montrer :

$$E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$$

Pour cela, on écrit :

$$\forall x \in E,\ x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x))$$

On a :

$$\begin{aligned} s\left(\frac{1}{2}(x+s(x))\right) &= \frac{1}{2}(s(x) + s^2(x)) = \frac{1}{2}(s(x)+x) \\ &= \frac{1}{2}(x + s(x)) \end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{1}{2}(x+s(x)) \in \ker(s - \mathrm{Id}_E).$$

De même :

$$s\left(\frac{1}{2}(x-s(x))\right) = \frac{1}{2}\left(s(x)-s^2(x)\right) = \frac{1}{2}(s(x)-x)$$
$$= -\frac{1}{2}(x-s(x))$$

et donc :

$$\frac{1}{2}(x-s(x)) \in \ker(s+\mathrm{Id}_E).$$

On a donc bien écrit :

$$\forall x \in E,\ \exists (u,v) \in \ker(s+\mathrm{Id}_E)\times\ker(s-\mathrm{Id}_E),\ x=u+v$$

Ainsi, on a $E = \ker(x+s)+\ker(x-s)$.

D'autre part, soit $x \in \ker(s+\mathrm{Id}_E)\cap\ker(s-\mathrm{Id}_E)$, cela donne :

$$s(x) = x \text{ et } s(x) = -x \text{ ainsi } x = -x \text{ et } x = 0.$$

On a donc montré :

$$E = \ker(s-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(s+\mathrm{Id}_E)$$

De plus :

$$\forall x \in \ker(s-\mathrm{Id}_E),\ s(x) = x \text{ et } \forall x \in \ker(s+\mathrm{Id}_E),\ s(x) = -x$$

Ainsi, s est la symétrie par rapport à $\ker(s-\mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\ker(s+\mathrm{Id}_E)$. ■

R On peut aussi démontrer cela en utilisant le lien entre s et p : $s = 2p-\mathrm{Id}_E$

V Rang d'une application linéaire

V.1 Généralités

Définition V.1 Soit E et F deux espaces vectoriels.

Une application linéaire f est **de rang fini** si $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie. On appelle alors **rang de l'application linéaire** f cette dimension

Notation V.1. *On note* $\mathrm{Rg}(f)$ *et on a donc :*

$$\mathrm{Rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

V.2 Cas de la dimension finie

Proposition V.1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, alors toute application linéaire d'espace de départ E est de rang fini.

Plus précisément, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Rg}(f) \leqslant \dim(E)$.

De plus, $\mathrm{Rg}(f) = \dim(E)$ si et seulement si l'application linéaire f est injective

Démonstration. On a vu que si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors l'image de cette base par f, c'est-à-dire la famille $\mathscr{F} = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

On a donc $\mathrm{Im}(f)$ de dimension finie (puisque généré par une famille finie) et $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n$, ie $\mathrm{Rg}(f) \leqslant \dim(E)$.

Dans le cas où $\mathrm{Rg}(f) = \dim(E)$, cela signifie que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ (puisque génératrice et a le bon nombre de vecteurs). On en déduit que $\mathscr{F}$ est libre.

D'après ce que l'on a vu, cela signifie que l'application linéaire est injective. ■

D'une manière générale, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et A est un SEV de E de dimension finie, alors $\dim(f(A)) \leqslant \dim(A)$.

Proposition V.2 Soit F un espace vectoriel de dimension finie, alors toute application linéaire d'espace d'arrivée F est de rang fini.

Plus précisément, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Rg}(f) \leqslant \dim(F)$.

De plus, $\mathrm{Rg}(f) = \dim(F)$ si et seulement si l'application linéaire f est surjective.

Démonstration. On a $\mathrm{Im}(f) \subset F$, donc nécessairement $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(F)$, c'est-à-dire $\mathrm{Rg}(f) \leqslant \dim(F)$.

De plus, si $\mathrm{Rg}(f) = \dim(F)$, cela signifie que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$, on a donc $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et égalité des dimension, et donc $\mathrm{Im}(f) = F$. ■

V.3 Théorème du rang

Théorème V.3 — Théorème du rang. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel (quelconque). et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a alors :

$$\dim(E) = \mathrm{Rg}(f) + \dim(\ker(f)).$$

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E alors la famille $\mathscr{F} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$. On peut donc extraire de cette famille une base de $\mathrm{Im}\, f$ qui contiendra donc $\dim(\mathrm{Im}(f))$ vecteurs, c'est à dire $\mathrm{Rg}(f)$ vecteurs.

Pour simplifier les notations, on pose $r = \mathrm{Rg}(f)$, et on suppose que la base extraite de $\mathscr{F}$ est constituée des r premiers vecteurs : $\mathscr{F} = (f(e_1), \dots, f(e_r))$.

Soit d'autre part, une base de $\ker(f)$ qui contiendra donc $\dim(\ker f)$ vecteurs. On pose $k = \dim(\ker f)$, et on note cette base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$.

Le but est de montrer que la famille : $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, e_1, \dots, e_r)$ est une base de E. On obtiendra alors : $dim(E) = k + r = dim(Kerf) + Rgf$.

Montrons que cette famille est libre. Soit des poids $(\alpha_i)_{i=1\dots k}$ et $(\lambda_i)_{i=1\dots r}$, tel que :

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0.$$

En utilisant la fonction f, on obtient :

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(e_i) = 0.$$

Comme $(f(e_i))_{i=1\dots r}$ est une base de $Im(f)$, elle est libre, et ainsi, on obtient que les poids λ_i sont tous nuls. La relation devient alors :

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_i = 0.$$

qui entraîne (car les (ε_i) sont une base de $Kerf$, donc libre), que tous les α_i sont nuls.

Ainsi, la famille est libre.

Montrons qu'elle est génératrice.

Soit $x \in E$, on cherche des (α_i) et des (λ_i) qui permettent d'écrire x sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i.$$

Procédons par analyse synthèse et supposons que les (α_i) et les (λ_i) existent. On a alors :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(e_i).$$

Ainsi, on voit que les λ_i sont les coordonnées de $f(x)$ dans la base $(f(e_1),\dots,f(e_r))$. On a ainsi trouvé les λ_i. D'autre part, on a :

$$x - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_i.$$

Ainsi, les (α_i) sont les coordonnées du vecteur $x - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$ dans la base des ε_i. On a donc caractérisé les α_i.

Passons maintenant à la synthèse. Soit un $x \in E$. On pose pour valeur de λ_i, les coordonnées de $f(x)$ dans la base des $(f(e_i))$, qui existent car $f(x) \in Imf$. On voit alors que $f(x - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i) = 0$, ainsi, $x - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in Kerf$, et donc on peut trouver des α_i tels que :

$$x - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_i,$$

i.e.

$$x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i.$$

Ainsi la famille est génératrice. ■

■ Exemple V.1

$$E = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x+y+2z = & 0 \\ x+2y+z = & 0 \\ y-z = & 0 \end{cases} \right\}$$

Alors, $\dim(E) = 1$, en effet, on a 3 inconnues et 2 équations indépendantes (la troisième est une combinaison linéaire des deux autres).

Pour le prouver, il faut considérer :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+2z, x+2y+z, -y+z) \end{array} \right.$$

On trouver que le rang de l'application est 2, pour cela, il faut passer par la famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ l'image de la base canonique et en extraire une base :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(1,2,-1),(2,1,1)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(1,2,-1)\right) \text{ qui est libre.} \end{aligned}$$

En effet, on a la relation :

$$-3(1,1,0)+(1,2,-1)+(2,1,1) = 0.$$

Le rang est donc 2 et :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \mathrm{Rg}(f) = 3 - 2 = 1.$$

■

✎ C'est l'interprétation intuitive de la dimension : le nombre de degré de liberté moins le nombre d'équations indépendantes (le rang).

✎ Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ (cas d'un endomorphisme), on a :

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

Ainsi, si on a de plus $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$, alors ces espaces sont en somme supplémentaire dans E.

V.4 Rang et composition

Proposition V.4 Soit E, F et G trois espaces vectoriels .

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. On suppose de plus que f et g sont de rang fini.

On a alors : $g \circ f$ de rang fini et la relation :

$$\mathrm{Rg}(g \circ f) \leqslant \min\Big(\mathrm{Rg}(f), \mathrm{Rg}(g)\Big).$$

Démonstration. On a :

$$\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$$

En effet, si $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, alors on peut écrire : $y = g \circ f(x)$ et donc $y = g(f(x))$. En posant $X = f(x)$, on a $y = g(X)$, donc $y \in \mathrm{Im}(g)$.

Comme $\mathrm{Im}(g)$ est de dimension finie, on en déduit déjà que $\mathrm{Im}(g \circ f)$ est de dimension finie, (puisque inclus dans un sous-espace vectoriel de dimension finie), ie que $g \circ f$ est de rang fini.

En appliquant la dimension, on en déduit :

$$\dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) \subset \dim(\mathrm{Im}(g)) \text{ c'est-à-dire : } \mathrm{Rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Rg}(g)$$

Il reste à démontrer que

$$\mathrm{Rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Rg}(f)$$

Pour cela, on considère l'application $\tilde{g}$ définie comme la restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$. Montrons alors que :

$$\mathrm{Im}(\tilde{g}) = \mathrm{Im}(g \circ f)$$

En effet, si $y \in \mathrm{Im}(\tilde{g})$, alors $y = g(x)$ avec $x \in \mathrm{Im}(F)$ et x s'écrit $x = f(a)$, et donc $y = g \circ f(a) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. D'où $\mathrm{Im}(\tilde{g}) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Dans l'autre sens : soit $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, on a alors :

$$\exists a \in E,\ y = (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

en notant $x = f(a)$, on a $x \in \mathrm{Im}(f)$, et donc $g(f(a)) = \tilde{g}(f(a))$ ainsi, $y \in \mathrm{Im}(\tilde{g})$. D'où $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(\tilde{g})$. D'où l'égalité.

Or on a :

$$\mathrm{Rg}(\tilde{g}) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) \text{ ie } \mathrm{Rg}(\tilde{g}) \leqslant \mathrm{Rg}(f)$$

puisque le rang d'une application est inférieur à la dimension de l'espace de départ. On en déduit que

$$\mathrm{Rg}(g) = \mathrm{Rg}(\tilde{g}) \leqslant \mathrm{Rg}(f).$$

■

Une autre démonstration dans le cas où E est de dimension fini.
Pour cela, on va utiliser le théorème du rang. On commence par montrer que :

$$\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$$

En effet, soit $x \in \ker(f)$, on a alors : $f(x) = 0$ et donc

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$$

d'où $x \in \ker(g \circ f)$.
Ainsi, $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\dim(\ker(f)) \leqslant \dim(\ker(g \circ f))$
En appliquant le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned} \dim(\ker(g \circ f)) + \mathrm{Rg}(g \circ f) &= \dim(E) \\ \dim(f)) + \mathrm{Rg}(g \circ f) &= \dim(E) \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}(g \circ f) &= \dim(E) - \dim(\ker(g \circ f)) \\ &\leqslant \dim(E) - \dim(\ker(f)) \\ &\leqslant \mathrm{Rg}(f) \end{aligned}$$

R Les démonstrations de $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ et de $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ sont à retenir.

Théorème V.5 Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On considère un automorphisme φ de E (une application linéaire et bijective ie $\varphi \in GL(E)$) alors :

$$\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}(f \circ \varphi)$$

De même, on considère un automorphisme ψ ie $\psi \in GL(E)$ de F alors :

$$\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}(\psi \circ f)$$

Ainsi, le rang est invariant par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

Démonstration. Soit donc φ un automorphisme de l'espace de départ. Montrons que l'on a :

$$\mathrm{Im}(f \circ \varphi) = \mathrm{Im}(f)$$

En utilisant les dimensions, on aura alors directement :

$$\mathrm{Rg}(f \circ \varphi) = \mathrm{Rg}(f).$$

Pour montrer cette égalité d'ensemble, on fait la double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f \circ \varphi)$, alors y s'écrit : $y = f \circ \varphi(x)$ pour un certain $x \in E$. Cela donne alors :

$$y = f(\varphi(x)) = f(X) \text{ en posant } X = \varphi(x).$$

On a $X \in E$ et $y = f(X)$, donc $y \in \mathrm{Im}(f)$ et donc l'inclusion $\mathrm{Im}(f \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}\, f$.

R Cette partie n'utilise pas le fait que φ est bijective. C'est un résultat à retenir : si $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Im}(f \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}\, f$, avec égalité dans le cas où φ est surjective.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors y s'écrit : $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Comme φ est surjective, on sait que x s'écrit sous la forme $\varphi(a)$ pour un certain $a \in E$.

On a $a \in E$ et $y = g \circ \varphi(a)$, donc $y \in \mathrm{Im}(f \circ \varphi)$. D'où l'inclusion réciproque $\mathrm{Im}(f \circ \varphi) \supset \mathrm{Im}\, f$ et donc l'égalité des ensembles et des dimensions.

Pour la deuxième partie. En reprenant la remarque précédente, on a :

$$\mathrm{Im}(\psi) \leqslant \mathrm{Im}(\psi \circ f)$$

Ce qui donne $\mathrm{Rg}(\psi) \leqslant \mathrm{Rg}(\psi \circ f)$, il faut donc trouver l'autre inégalité.

On considère la restriction $\tilde{(\psi)}$ de ψ à $\mathrm{Im}(f)$. C'est une application linéaire, et on va montrer que :

$$\mathrm{Im}(\tilde{(\psi)}) = \mathrm{Im}(\psi \circ f).$$

En effet, si $y \in \mathrm{Im}\, \psi \circ f$, alors y s'écrit sous la forme $y = \psi \circ f(a)$ pour un certain $a \in E$, on a $f(a) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $\psi(f(a)) = \tilde{\psi}(f(a))$, ainsi, y du est l'image du vecteur $f(a)$ par l'application $\tilde{\psi}$, donc $y \in \mathrm{Im}(\tilde{\psi})$. D'où l'inclusion $\mathrm{Im}(\tilde{(\psi)}) \supset \mathrm{Im}(\psi \circ f)$

D'un autre côté, si $y \in \operatorname{Im}(\tilde{(}\psi))$, alors y est image d'un élément x de $\operatorname{Im}(f)$ par $\tilde{\psi}$. Comme $x \in \operatorname{Im}(f)$, alors x s'écrit sous la forme $f(a)$ pour un certain $a \in E$. On obtient ainsi :

$$y = \tilde{\psi}(x) = \psi(x) = \psi(f(a)) \in \operatorname{Im}(f).$$

On en déduit l'inclusion $\operatorname{Im}(\tilde{(}\psi)) \subset \operatorname{Im}(\psi \circ f)$, puis l'égalité.
de $\operatorname{Im}(\tilde{(}\psi)) = \operatorname{Im}(\psi \circ f)$, on en déduit :

$$\operatorname{Rg}(\psi \circ f) = \operatorname{Rg}(\tilde{\psi})$$

or $\tilde{\psi}$ est une application linéaire définie sur $\operatorname{Im}(f)$, donc $\operatorname{Rg}(\tilde{\psi}) \leqslant \operatorname{Rg}(f)$. On en déduit :

$$\operatorname{Rg}(\psi \circ f) \leqslant \operatorname{Im}(f),$$

ce qui est l'autre inégalité. ■

Ici encore, une démonstration dans le cas de la dimension finie est facile et intéressante. Si φ est un automorphisme de E, on a :

$$\ker(\psi \circ f) = \ker(f).$$

En effet, si $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = 0$ et donc $\psi \circ f(x) = 0$, ce qui donne $x \in \ker(\psi \circ f)$. D'où l'inclusion $\ker(\psi \circ f) \supset \ker(f)$.
Ensuite, si $x \in \ker(\psi \circ f)$, alors $\psi(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \ker(\psi)$ et donc $f(x) = 0$, ie $x \in \ker(f)$. On en déduit l'inclusion $\ker(\psi \circ f) \subset \ker(f)$ et l'égalité.
En utilisant le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned} \dim(\ker(\psi \circ f)) + \operatorname{Rg}(\psi \circ f) &= \dim(E) \\ \dim(\ker(f)) + \operatorname{Rg}(f) &= \dim(E) \end{aligned}$$

Comme on a l'égalité $\dim(\ker(\psi \circ f)) = \dim(\ker(f))$, on en déduit :

$$\operatorname{Rg}(f) = \operatorname{Rg}(\psi \circ f).$$

R Ici encore la première partie n'utilise pas le fait que l'application ψ est bijective. Le résultat est à retenir : si $\psi \in \mathscr{L}(E)$, alors : $\ker(\psi \circ f) \supset \ker(f)$, avec égalité si ψ est injective.

VI Équations linéaires

Proposition VI.1 Soit E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $y \in F$.
On considère l'équation $(E) : f(x) = y$.
On a alors deux cas :
- soit l'équation (E) n'a aucune solution,
- soit l'équation (E) admet une solution x_0 et dans ce cas, l'ensemble des solutions est :

$$\mathscr{S} = \left\{ x_0 + x_h \middle| x_h \in \ker(f) \right\}$$

> En particulier, dans le cas où $\ker(f) = \{0\}$ la solution x_0 est unique.

Notation VI.1. *On utilisera parfois la notation « élément + ensemble » :*

$$x_0 + \ker(f) = \left\{x_0 + x_h \middle| x_h \in \ker(f)\right\}$$

■ **Exemple VI.1** On retrouve les solutions d'un système linéaire $AX = B$. Si X_0 est solution particulière, alors les solutions sont :

$$X_0 + \mathscr{S}_H \text{ avec } \mathscr{S}_H \text{ les solutions du système homogènes.}$$

■

■ **Exemple VI.2** On retrouve aussi les solutions d'une équations différentielles linéaires (du premier ou du deuxième ordre) : les solutions de l'équation sont la somme de la solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. ■

■ **Exemple VI.3** Plus compliqué, lorsqu'on cherche l'expression de la suite $u_{n+1} = au_n + b$. Pour cela, on considère l'application linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & \left(u_{n+1} - au_n\right) \end{array}$$

Il s'agit d'une application linéaire, dont le noyau est l'ensemble des suites géométrique de raison a.

Considérons le réel b comme la suite constante égale à b. On cherche alors les suites solutions de $f\Big((u_n)\Big) = b$.

Une solution particulière, est la suite w constante égale à $l = \frac{b}{1-a}$. Ainsi, l'ensemble des suites vérifiant la relation est l'ensemble des suites de vérifiant :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in\ N,\ u_n = \lambda a^n + \frac{b}{1-a}$$

En cherchant λ à partir de u_0, on trouve :

$$\lambda + \frac{b}{1-a} = u_0 \text{ donc } \lambda = u_0 - \frac{b}{1-a}$$

Ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0^n + b\frac{a^n - 1}{a-1}$$

C'est bien l'expression trouvé au chapitre sur les suites usuelles. ■

■ **Exemple VI.4** On cherche l'expression des suites définies par la relation :

$$(R) : \qquad u_{n+1} = u_n + n + 1$$

On constate que la suite $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ vérifie la relation. De plus, si on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & \left(u_{n+1} - u_n\right) \end{array}$$

Alors f est une application linéaire, de noyaux les suites constantes et la relation s'écrit $f\Big((u_n)\Big) = (n+1)$.

Ainsi, l'ensemble des suites vérifiant la relation est l'ensemble des suites de la forme :

$$u : n \longmapsto \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

■

■ **Exemple VI.5** On cherche les suite $(u_n)_n$ vérifiant la relation

$$(R) : \qquad u_{n+1} = 2u_n + n + 1$$

On constate que la suite $n \mapsto -n-2$ est solution.

L'ensemble des suites vérifiant la relation est l'ensemble des suites de la forme :

$$n \mapsto \lambda 2^n - n - 2 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

■

VII Matrices et applications linéaires

Rappel :matrice associée à une famille de vecteur. Si $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$, la matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{C}$ est la matrice obtenue en mettant dans la colonne j, les coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathscr{C}$.

VII.1 Matrice associée à une application linéaire

Définition VII.1 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie (respectivement n et p) et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, On considère la famille : $\mathscr{F} = f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

On apelle matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, la matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{C}$.

C'est donc une matrice de taille $\dim(E) \times \dim(F)$ coefficients : les coordonnées des $(f(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ dans la base $\mathscr{C}$.

Notation VII.1. *On note cette matrice $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. On peut aussi noter : $Mat_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}(f)$ pour bien indiquer quelle est la base de départ et d'arrivée.*

! Certains auteurs/ sujets préfèrent la notation : $Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$ (base d'arrivée puis base de départ).

Ainsi, la matrice d'une application linéaire est la matrice des coordonnées (rangées en colonne) des p vecteurs $(f(e_i))$. C'est donc une matrice à $\dim(E)$ colonnes (dimension de l'espace de départ) et de $\dim(F)$ lignes (dimension de l'espace d'arrivée).

On peut écrire :

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = Mat_{\mathscr{C}}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right) = Mat_{\mathscr{C}}(f(\mathscr{B}))$$

■ **Exemple VII.1** On peut simplement écrire la matrice associée à une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$.

Si :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+z, x-y-t, x+2y, x+3z+t) \end{array} \right.$$

Alors la matrice associée à f dans les bases canoniques est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

■

■ **Exemple VII.2** On peut écrire la matrice de l'application linéaire $P \longmapsto P'$ de $\mathbb{K}_3[X]$ dans $\mathbb{K}_2[X]$. Dans les bases canoniques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

■

■ **Exemple VII.3** Matrice de l'application linéaire $P \longmapsto P(X+1)$ de $\mathbb{K}_3[X]$ dans $\mathbb{K}_3[X]$. Dans les bases canoniques :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

✎ Ainsi, la j-ième colonne de la matrice $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ contient les n coordonnées du vecteur $(f(e_j))$, l'élément (i,j) contient $(f(e_j))_i$.

✎ La matrice dépend des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

■ **Exemple VII.4** Reprendre les exemple précédents en changeant la base. ■

Proposition VII.1 Soit E et F de dimension finie (n et p respectivement). Soit $\mathscr{B}$, respectivement $\mathscr{C}$ une base de E, respectivement de F.

Alors pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que :

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = M$$

Démonstration. Pour l'existence, on considère une matrice de $M \in \mathscr{M}_{p,n}$ et on note $C_1, \ldots, C_n$ les n colonnes et $\mathscr{F} = (v_1, \ldots v_n)$ la famille de n vecteurs dont les coordonnées dans la base $\mathscr{C}$ sont les C_i.

Alors, on pose f est l'unique application qui envoie les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ sur la famille $\mathscr{F}$. On a vu qu'une telle application existe et est unique. ■

✎ L'application linéaire f est bien déterminée par sa matrice $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, puisque cette matrice contient les coordonnées des vecteurs de la famille $f(\mathscr{B})$.
Ainsi, une application linéaire admet plusieurs matrices (une pour chaque base $\mathscr{B}$), par contre, une fois une base choisie, il correspond à chaque matrice une et une seule application linéaire.

✎ En particulier la seule application linéaire dont la matrice dans les bases $(\mathscr{B},\mathscr{C})$ est nulle est l'application nulle, et cela ne dépend pas de la base choisie.

⋆ Cas d'un endomorphisme

Notation VII.2. *Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on choisit généralement (mais pas toujours) la même base pour E vu comme espace de départ et comme espace d'arrivée.*

On note alors $Mat_{\mathscr{B}}(E)$ la matrice $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(E)$.

La matrice de l'application identité dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$, $Mat_{\mathscr{B}}(Id)$ est la matrice identité de taille p : $Mat_{\mathscr{B}}(Id) = I_p$. Réciproquement si une application linéaire f vérifie, pour une base $\mathscr{B}$ donnée, $Mat_{\mathscr{B}}(f) = I_p$, alors elle coïncide avec l'identité sur la base $\mathscr{B}$, donc elle égale à l'identité.

VII.2 Calcul de l'image d'un vecteur

Proposition VII.2 Soit E et F de dimension finie (n et p respectivement). Soit $\mathscr{B}$, respectivement $\mathscr{C}$ une base de E, respectivement de F.

Soit $x \in E$, on écrit ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$:

$$x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathscr{B}}$$

alors on calcule les coordonnées $f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ en utilisant la matrice.

Plus précisément, si on note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

On calcul $Y = AX$, et on écrit :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \qquad \text{on note alors } y = (y_1, \dots, y_p)_{\mathscr{C}}$$

on a alors $y = f(x)$.

Cela explique pourquoi on identifie les vecteurs et les matrices colonne de leur coordonnées.

Démonstration. On a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$\text{donc } f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

Ainsi, le vecteur colonnes des coordonnées de $f(x)$ est la combinaison linéaire des colonnes de la matrices A. ■

R On retrouve l'application $X \mapsto AX$ vu au chapitre sur les matrices !

On peut donc remplacer le calcul de l'image d'un vecteur par un calcul matriciel, plus facile à faire. En exploitant la linéarité, on a découpé le problème en partie plus facile.

■ **Exemple VII.5** À partir de la matrice de l'application $P \mapsto P(X+1)$, on peut facilement calculer l'image d'un polynôme quelconque. ■

VII.3 Isomorphisme entre les matrices et les applications linéaires

Proposition VII.3 Soit E et F de dimension finie (n et p respectivement). Soit $\mathscr{B}$, respectivement $\mathscr{C}$ une base de E, respectivement de F.

Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a alors :

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f + \alpha g) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \alpha Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$$

Démonstration. Il suffit de constater que pour tout vecteur e_i de la base $\mathscr{B}$:

$$(f + \alpha g)(e_i) = f(e_i) + \alpha g(e_i).$$

La colonne i de la matrice $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f + \alpha g)$ est ainsi égale à la combinaison linéaire de la colonne i de $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et de la colonne i de $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$.

■

On peut donc écrire :

Proposition VII.4 Si E et F sont deux espaces de dimension finie. Avec $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$, alors il y a isomorphisme entre $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{L}(E,F)$ par l'application :

$$\begin{cases} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{cases}$$

En particulier, $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E)\dim(F)$.

Démonstration. On a vu que l'image d'une combinaison linéaire d'application linéaire est une combinaison linéaire de matrices. On a aussi vu que c'est bijectif. ■

VII.4 Matrice d'une composée

On a aussi un lien entre le produit matriciel et la composition :

Proposition VII.5 Soit E, F et G trois espaces de dimension finie. $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des bases de E, F et G (respectivement).

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

En particulier dans le cas d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, Mat_{\mathscr{B}}(f^p) = (Mat_{\mathscr{B}}(f))^p$$

Démonstration. $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f)$ est composé des vecteurs $g \circ f(e_j)$ exprimés dans la base $\mathscr{D}$. Plus précisément, pour j entre 1 et p, la colonne j de $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f)$ contient les q coordoonées de $g \circ f(e_j)$, *i.e.* le vecteur $Mat_{\mathscr{D}}(g \circ f(e_j))$

Puisque $g \circ f(e_i) = g(f(e_i))$, en appliquant le résultat précédent, on obtient que

$Mat_{\mathscr{D}}(g \circ f(e_j)) = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times Mat_{\mathscr{C}} f((e_j))$. Puis, $Mat_{\mathscr{C}} f((e_j))$ est la j-ème colonne de la matrice $Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$. Ainsi, la j-ième collone de $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f)$ est obtenu comme le produit de la matrice $Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)$ par la j-ème collonne de la matrice $Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$. Et donc :

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$

■

✎ Autrement dit, lorsqu'on compose des applications linéaires, on multiplie les matrices correspondantes.
L'intérêt est donc d'utiliser les matrices comme un support de calcul : il n'est pas facile de calculer la composée $g \circ f$ de deux applications linéaires.
On remplace donc ce calcul pénible, par un calcul plus simple de produit de matrice.
En particulier pour montrer des propriétés sur les applications linéaire, par exemple $g \circ f = f \circ g$ ou $f^2 + 3f + Id = 0$, on est ramené à démontrer des égalités de matrices.

■ **Exemple VII.6** Prendre un endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, calculer f^2 directement, puis par le produit matriciel.

On constate qu'il est beaucoup plus simple d'utiliser la méthode matricielle. ■

VII.5 Matrice d'un isomorphisme

Proposition VII.6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in GL(E)$, un isomophisme, et soit $\mathscr{B}$ une base de E, avec $\dim(E) = n$. alors, $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible et on a :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathscr{B}}(f))^{-1}.$$

Réciproquement, si la matrice $M \in \mathscr{M}_n(E)$ est inversible, alors l'application linéaire f telle que $Mat_{\mathscr{B}}(f) = M$ est bijective, et f^{-1} est l'application associé à la matrice M^{-1}.

Démonstration. Supposons f inversible.

Alors on a l'existence de f^{-1} et : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$, donc :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) \times Mat_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = Mat_{\mathscr{B}}(f^{-1}) \times Mat_{\mathscr{B}}(f) = I_p$$

Ainsi, $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible d'inverse $Mat_{\mathscr{B}}(f^{-1})$.

Réciproquement supposons que M soit inversible, et soit $f \in Ł(E)$ telle que : $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = M$. Considérons g l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $Mat_{\mathscr{B}}(g) = M^{-1}$.

Alors on voit que

$$Mat_{\mathscr{B}}(f \circ g) = Mat_{\mathscr{B}}(f) \times Mat_{\mathscr{B}}(g) = I_p$$

Donc $f \circ g = Id$, de même $g \circ f = I_d$. ■

✎ Ici encore, on remplace les matrices sont un support de calcul : pour montrer qu'une application est bijective, on vérifie que la matrice associée est inversible, ce qui se fait avec l'algorithme de Gauss Jordan.

✎ Cela explique le lien entre les notations $GL(E)$ pour les isomorphismes et Gl_n pour les matrices inversibles.

VIII Noyau, image et rang d'une matrice

VIII.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition VIII.1 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. L'application linéaire canoniquement associée à M est l'application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ telle que

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = A$$

où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

✎ On trouve directement l'application linéaire associée f en faisant le produit de la matrice A et d'une vecteur colonne

Cette association va permettre d'utiliser le vocabulaire des applications linéaires pour les matrices.

Bien entendu, deux matrices sont égales si et seulement si les applications linéaires canoniquement associées sont égales.

! On va parler du noyau, de l'image et du rang d'une matrice car cela a un sens sans avoir besoin « d'attacher » un espace de départ et d'arrivée à la matrice.

Mais on ne dit pas qu'une matrice est injective ou surjective. On utilise aussi le mot inversible à la place de bijective.

■ **Exemple VIII.1** Prendre une matrice décrire l'application canoniquement associée. ■

VIII.2 Noyau et image d'une matrice

Définition VIII.2 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et f l'application linéaire canoniquement associée à A.

Le noyau de A est alors le noyau de f (c'est un SEV de $\mathbb{K}^p$), l'image de A est alors l'image de f (c'est un SEV de $\mathbb{K}^n$)

En identifiant les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}^p$ et les matrices colonnes correspondantes, on a :

$$\ker(A) = \left\{ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \middle| AX = 0 \right\}$$
$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ AX \middle| X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \right\}$$

R L'image de A est par définition engendré par les colonnes de A. Tandis que le noyau corresponds au système homogène $AX = 0$.

Proposition VIII.1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = I_n$, alors les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

Démonstration. Si on note f et g les endomorphismes canoniquement associés alors $f \circ g = \mathrm{Id}$, donc f est surjectif et g est injectif.

Comme c'est des endomorphismes, ils sont bijectifs et donc $f^{-1} = g$. Pour les matrices, cela donne $A^{-1} = B$. ■

VIII.3 Rang d'une matrice

Définition VIII.3 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et f l'endomorphisme canoniquement associé.

On appelle rang de la matrice A, le rang de l'endomorphisme f. On a donc :

$$\operatorname{Rg}(A) = \operatorname{Rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p))$$

où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A (identifié avec les vecteurs correspondants).

De manière équivalente, on peut définir le rang ainsi :

Définition VIII.4 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice, $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A (identifié avec les vecteurs correspondants) et $(u_1, \dots, u_p)$ la famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ telle que pour tout i, les coordonnées de u_i dans la base canonique sont le vecteur colonne C_i.

On pose alors :

$$\operatorname{Rg}(A) = \operatorname{Rg}(\mathscr{F}) = \dim(\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p))$$

Cette autre définition est bien justifié, puisqu'on a vu :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(\mathscr{F}).$$

On a alors le théorème du rang :

Proposition VIII.2 — Théorème du rang pour les matrices. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :

$$p = \dim(\ker(A)) + \mathrm{Rg}(A).$$

Et les caractérisation suivante :

Proposition VIII.3 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et f l'endomorphisme canoniquement associé. On a :

$$\mathrm{Rg}(A) \leqslant n \text{ avec égalité si et seulement si } \mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n \text{ ie } f \text{ surjective.}$$
$$\mathrm{Rg}(A) \leqslant p \text{ avec égalité si et seulement si } \ker(A) = 0 \text{ ie } f \text{ injective.}$$

Dans le cas d'une matrice carrée, cela donne :

Corollaire VIII.4 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, alors

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\iff \ker(A) = \{0\} \\ &\iff \mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n \\ &\iff \mathrm{Rg}(A) = n. \end{aligned}$$

VIII.4 Calcul du rang par la méthode de Gauss

⋆ Conservation du rang par opérations élémentaires inversibles

Proposition VIII.5 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, alors :

$$\mathrm{Rg}(A) = Rg(PA)$$

Ainsi, on ne change pas le rang en multipliant à gauche par une matrice inversible.

De même, si $Q \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est une matrice inversible, alors :

$$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(AQ)$$

Ainsi, on ne change pas le rang en multipliant à droite par une matrice inversible.

En conséquence, on ne change pas le rang en effectuant des opérations élémentaires inversibles sur les lignes ou les colonnes de A.

Démonstration. Soit f l'application canoniquement associée à A et ψ l'application canoniquement associée à P.

On a alors : ψ est un automorphisme, puisque P est inversible. Donc $\mathrm{Rg}(\psi \circ f) = \mathrm{Rg}(f)$, ce qui s'écrit $\mathrm{Rg}(PA) = Rg(A)$.

On procède de même pour la composée à droite (la multiplication à droite). ■

⋆ Rang d'une matrice échelonnée

Rappelons qu'une matrice échelonnée est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * \\ & & \square & * & * & * & * \\ & & & \square & * & * & * \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

où les $\square$ désignent des éléments non nuls, les $*$ des éléments quelconques, et les termes vides sont nuls.

On montre :

Proposition VIII.6 Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de lignes non vide, *i.e.* le nombre de pivot.

Démonstration. Le principe est que l'espace vectoriel engendré par toutes les colonnes du matrice échelonnée est égal à l'espace vectoriel engendré par les colonnes qui contiennent les pivots, *i.e.* les premiers éléments non nuls de chaque ligne.

Sur un exemple, montrons que le rang de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \square_1 & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} & A_{1,6} & A_{1,7} \\ & & \square_2 & A_{2,4} & A_{2,5} & A_{2,6} & A_{2,7} \\ & & & \square_3 & A_{3,5} & A_{3,6} & A_{3,4} \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

est 3. Si on note $(c_1, c_2, \ldots c_7)$, les 7 vecteurs de $\mathbb{K}^4$ dont les coordonnées dans la base canonique se lisent en colonne, on a :

$$Rg(A) = Rg(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7).$$

En faisant des opération sur les vecteurs, on ne change pas le rang, on se ramène ainsi à :

$$Rg(A) = Rg(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 - \frac{\square_3}{A_{3,4}} c_7).$$

Ainsi, cela transforme le vecteur c_7 en un vecteur (encore noté c_7) du type :

$$c_7 = \begin{bmatrix} A_{1,7} \\ A_{2,7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

puis sur ce nouveau vecteur on a encore

$$Rg(A) = Rg(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 - \frac{\square_2}{A_{2,7}} c_7),$$

cette fois-ci on a transformé le vecteur c_7 en un vecteur du type : $c_7 = \begin{bmatrix} A_{1,7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Avec une dernière opération du type :

$$Rg(A) = Rg(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 - \frac{\square_1}{A_{1,7}} c_7),$$

le vecteur c_7 devient nul, et on peut donc l'enlever des vecteurs générateurs. Ce qu'on a fait avec c_7, peut être fait avec les vecteurs $_6$ et c_5, puis aussi c_2 (celui-ci en une seule étape). Au final, on obtient :

$$Rg(A) = Rg(c_1, c_3, c_4)$$

Puis la famille (c_1, c_3, c_4) est clairement libre puisque le système $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_4 c_4 = 0$ conduira pour la dernière équation non nulle à

$\lambda_4 \Box_3 = 0$ soit $\lambda_4 = 0$. Puis, une fois éliminé λ_4, cela il restera $\lambda_2 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$. Ainsi, on a bien $Rg(A) = 3$. ■

On peut donc justifier le résultat théorique vu dans le chapitre systèmes : pour calculer le rang, on peut effectuer les opérations élémentaires inversibles que l'on veut sur les lignes et les colonnes, jusqu'à avoir une matrice échelonnée.

On compte alors le nombre de pivot.

⋆ Rang d'une transposée

Proposition VIII.7 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice, alors $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}({}^t A)$.

Démonstration. Les mêmes opérations qui réduisent les lignes de la matrices appliquées au colonnes réduisent ${}^t A$. ■

✎ En pratique, parfois on préfère travailler sur ${}^t A$ à la place de A.

⋆ Application du calcul du rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire canoniquement associée, mais on peut aussi calculer le rang d'un endomorphisme quelconque à partir du rang de sa matrice.

Proposition VIII.8 Soit E et F deux EV de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ une base Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $M = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. On a alors $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}(M)$.

Proposition VIII.9 Si on considère les isomorphismes : $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$ et $\psi : F :\to \mathbb{K}^p$ qui consistent à identifier les vecteurs de E (et de F) avec les n-uplets (et les p-uplets) des coordonnées, et si on note $\tilde{f}$ l'application canoniquement associée à M, alors

$$f = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi$$

Ainsi, $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}(\tilde{f}) = \mathrm{Rg}(M)$.

✎ On peut aussi écrire :

$$\ker(f) = \varphi^{-1}(\ker(M)) \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \psi^{-1}(\mathrm{Im}(M))$$

On peut donc calculer le rang d'une application linéaire (et donc savoir si elle est injective/ surjective) en calculant le rang d'une matrice (par la méthode de Gauss donc).

✎ Comme on l'a vu il existe une infinité de matrice qui correspondent à l'application f (une matrice pour chaque choix des base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$), mais toutes ces matrices ont le même rang et donc la même dimension du noyau !

Proposition VIII.10 Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{F}$ une famille de E.

On a alors :

$$\mathrm{Rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{Rg}(Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$$

Démonstration. Même principe, c'est le rang de l'application linéaire canoniquement associée. ∎

✎ En pratique, on va donc calculer le rang d'une famille (et donc savoir si elle est libre / génératrice de E) à partir du rang de la matrice (par la méthode de Gauss donc).

✎ Le rang de la matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ ne dépends donc pas de la base $\mathscr{B}$ choisie ! On choisit donc la base dans laquelle la matrice de la famille est le plus simple.

■ **Exemple VIII.2** On peut retrouver l'exemple d'une famille de polynômes échelonnés en degré qui correspondent à une matrice échelonnée dans la base canonique. ■

VIII.5 Changement de base

Comme on l'a vu les matrices dépendent de la base choisie, on peut donc se demander ce qu'il se passe si on change de base.

Définition VIII.5 Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E (l'ancienne base) et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ (la nouvelle base).

On appelle matrice de changement de base la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

C'est donc $Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$

! Attention à l'ordre des bases !

Notation VIII.1. *On note $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ la matrice de changement de base. Une autre notation est : $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.*

! Attention aux notations, normalement, elles sont rappelées dans un sujet.

Proposition VIII.11 On a :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})$$

C'est donc la matrice de l'application identité de $E \to E$, avec l'espace de départ E

muni de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ et l'espace d'arrivée (toujours E) muni de l'ancienne base $\mathscr{B}$.

■ **Exemple VIII.3** On peut prendre la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ à la base des polynômes de Lagrange aux points $(0,1,-1,2)$. L'ancienne base est : $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et la nouvelle base est $\mathscr{B}' = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ avec

$$\begin{aligned}
L_1 =& (X-1)(X+1)(X-2)\\
L_2 =& X(X+1)(X-2)\\
L_3 =& X(X-1)(X-2)\\
L_3 =& X(X+1)(X-1)
\end{aligned}$$

En utilisant la relation coefficient racine pour les polynômes de degré 3 :

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
L_1 =& X^3 - 2X^2 - X + 2\\
L_2 =& X^3 - X^2 - 2X\\
L_3 =& X^3 + 3X^2 + 2X\\
L_4 =& X^3 - X
\end{aligned}$$

Cela donne :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Proposition VIII.12 Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E (l'ancienne base) et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ (la nouvelle base).

Soit $x \in E$, on note les coordonnées dans las bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$:

$$x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathscr{B}} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{et } x = (x'_1, \ldots, x'_n)_{\mathscr{B}'} \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Alors, on a :

$$X = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} X'$$

$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ (l'ancienne base) à la base $\mathscr{B}'$ (la nouvelle base), elle contient les coordonnées de la nouvelle base dans l'ancienne.

Par contre, elle permet d'obtenir les coordonnées dans l'ancienne base à partir des coordonnées dans la nouvelle.

Autrement dit, elle permet de transformer les coordonnées dans la nouvelle base en les coordonnées dans l'ancienne.

Formule à retrouver plutôt qu'à apprendre par coeur en raison du risque de confusion sur l'ordre des bases.
Le meilleur moyen pour le retrouver :

$$\text{on a : } x = \mathrm{Id}(x)$$

donc avec les coordonnées :

$$\begin{aligned} X =& Mat_{\mathscr{B}}(x) = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})Mat_{\mathscr{B}'}(x) \\ =& P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}X' \end{aligned}$$

Autre démonstration. On note $P = (p_{i,j})$ la matrice de passage, on a alors :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}e_i.$$

On a :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}e_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}x'_j e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}x'_j\right) e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (PX')_i e_i \text{ avec } (PX)_i \text{ le coef d'indice } i \text{ du produit } PX. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = (PX)_i$$

et donc $X' = PX$. ■

■ **Exemple VIII.4** Toujours avec les polynômes et les polynômes de Lagrange. ■

Proposition VIII.13 Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E (l'ancienne et la nouvelle).
Alors la matrice $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible d'inverse $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

✎ C'est tout simplement évident : l'inverse de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

Démonstration. Pour tout vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a :

$$P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} X = X.$$

Ce qui donne $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = I_n$ le résultat en prenant pour X les vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}$ ■

✎ Ainsi, les matrices de changement de base correspondent à des matrices inversibles. Réciproquement, une matrice inversible corresponds à une application linéaire qui envoie une base sur une base, donc à un changement de base !

Proposition VIII.14 Soit E et F deux espaces de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E (l'ancienne et la nouvelle), $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F (l'ancienne et la nouvelle).

On considère $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ (qui donne les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ à partir des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$').

On note Q la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}'$ (qui donne les coordonnées dans la base $\mathscr{C}$ à partir des coordonnées dans la base $\mathscr{C}$').

Alors on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) &= Q^{-1} Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) P && \text{changement de base dans les deux espaces}\\
Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(f) &= Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) P && \text{changement de base dans l'espace de départ}\\
Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}'}(f) &= Q^{-1} Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) && \text{changement de base dans l'espace d'arrivée}
\end{aligned}$$

✎ Pour changer de base dans l'espace de départ : on multiplie à droite par la matrice de changement de base. Pour changer de base dans l'espace d'arrivée, on multiplie à gauche par l'inverse de la matrice de changement de base.
Ici encore, vu le risque de confusion, il vaut mieux retenir la démonstration que la formule.

Démonstration. Il suffit d'écrire que $f = \mathrm{Id} \circ f \circ \mathrm{Id}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) &= Mat_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}(\mathrm{Id}) Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})\\
&= Q^{-1} Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) P
\end{aligned}$$

■

Corollaire VIII.15 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E (l'ancienne et la nouvelle).

On considère $f \in \mathscr{L}(E)$.

On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ (qui donne les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ à partir des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$').

Alors :

$$Mat_{\mathscr{B}'}(P) = P^{-1}Mat_{\mathscr{B}}(f)P$$

■ **Exemple VIII.5** On peut reprendre l'exemple précédent de base de Lagrange dans l'ensemble des $\mathbb{R}_3[X]$ et prendre $f : P \mapsto P(X+1)$. ■

On a vu qu'étant donne $f \in \mathscr{L}(E)$, il existe une infinité de matrices pour représenter f (une pour chaque choix de base de E). On a vu que ces matrices ont toutes le même rang.

On peut dire que toutes ces matrices sont de la forme : $P^{-1}AP$, où A est l'une des matrice qui représente f.

On pourra noter que la relation :

$$A \sim B \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ A = P^{-1}BP$$

est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices. C'est la relation : « représenter la même application linéaire ».

Applications linéaires

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Manipuler les notions de noyau et d'image

Exercice 1 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Correction : très classique. Soit $x \in \ker(f)$, on $f(x) = 0$ donc $f^2(x) = f(0) = 0$ d'où $x \in \ker(f^2)$ et $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$, on sait alors que y s'écrit $y = f^2(a)$ pour un certain $a \in E$, on écrit alors $y = f(f(a))$, ou en posant $b = f(a)$, on a $y = f(b)$ donc $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

Montrer que $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$.

Correction : Faire double implication.

Exercice 3 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$

Montrer que :

$$\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\} \iff \ker(f) = \ker(f \circ f)$$

et

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right) \iff E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$$

Dans le cas où E est de dimension finie, montrer que :

$$\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\} \iff E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f) \iff E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

et

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right) \iff \ker(f) = \ker(f \circ f)$$

(ces quatre propriétés sont donc équivalentes)

Correction : faire des doubles implications pour les deux premiers points.

Pour la suite, c'est des applications du théorème du rang avec les propriétés sur les bases et les sommes directes.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\} \\ \dim(\ker(f)) + \mathrm{Rg}(f) = \dim(E) \end{cases} \\
\iff & E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \\
\iff & \begin{cases} E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f) \\ \dim(\ker(f)) + \mathrm{Rg}(f) = \dim(E) \end{cases}
\end{aligned}$$

Enfin, c'est encore le theorème du rang :

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{Rg}(f) = \dim(E) \qquad \dim(\ker(f^2)) + \mathrm{Rg}(f^2) = \dim(E)$$

Ainsi, si on a $\ker(f) = \ker(f^2)$, alors $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}(f^2)$, et donc on a égalité d'ensemble et inclusion donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, idem pour la réciproque.

Exercice 4 Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$, un endormorphisme **nilpotent**. C'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $f^p = 0$, et $f^{p-1} \neq 0$.

Soit x_0 un vecteur tel que : $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que la famille
$$\mathscr{F} = \left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$$
est libre.
2. On suppose E est de dimension finie. Que peut-on en déduire sur p?.
3. Si de plus, $p = \dim(E)$, donner la matrice de l'application f dans la base $\mathscr{F}$.
4. On considère un entier k entre 1 et n,
   - Trouver une base de $\ker f^k$ permettant de montrer que $\dim(\ker f^k) = k$.
   - Trouver une base de $\operatorname{Im} f^k$ permettant de montrer que $\operatorname{Rg}(f^k) = p - k$.

Correction :

1. On forme le système d'équation :
$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0$$
On compose par f^{p-1}, ce qui donne $\alpha_0 f^{p-1}(x_0) = 0$, et $\alpha_0 = 0$. On remplace :
$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0$$
on compose par f^{p-2}, ce qui donne $\alpha_1 f^{p-1}(x_0) = 0$, et $\alpha_1 = 0$. On conclue avec une récurrence forte !
2. $p \leqslant \dim(E)$.
3. $\mathscr{F}$ est libre et contient le bon nombre de vecteurs donc c'est une base. La matrice contient des 1 en dessous de la diagonale (c'est une matrice nilpotente).
4. Pour $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\left(f^{p-k}(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right) \text{ est une base de } \ker(f^k)$$
$$\left(f^k(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f^k)$$
Une technique pour faire cela rapidement est de se souvenir qu'une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f^k)$ est donné par l'image des vecteurs d'une base. On choisit donc la base $\mathscr{F}$ et on a :
$$\left(f^k(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0), \underbrace{f^p(x_0), \dots, f^{p-1+k}(x_0)}_{\text{nuls}}\right) \text{ est génératrice de } \operatorname{Im}(f^k)$$
On obtient alors la famille génératrice qui est libre puisque extraite d'une base.
On obtient alors une base de $\operatorname{Im}(f^k)$ puis sa dimension.
On connaît alors la dimension de $\ker(f^k)$, la famille : $\left(f^{p-k}(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est bien dans $\ker(f^k)$, elle est libre (car extraite d'une base) et elle a le bon nombre de vecteurs. C'est donc une base.

Exercice 5 Soit f et $g \in \mathscr{L}(E)$, tels que $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que $f(\ker(g)) \subset \ker(g)$, et $f(\operatorname{Im}(g)) \subset \operatorname{Im}(g)$.

Correction : appliquer les définitions.

Exercice 6 Noyaux itérés

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endormorphisme de E.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose :
$$K_p = \ker(f^p),\ k_p = \dim(\ker f^p)) \qquad I_p = \operatorname{Im}(f^p),\ i_p = \operatorname{Rg}(f^p)$$

1. Montrer que $K_p \subset K_{p+1}$, et $I_{p+1} \subset I_p$. Que peut-on en déduire sur les suites (k_p) et (i_p) ?
2. Montrer qu'il existe un $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
3. Montrer que $I_r = I_{r+1}$.
4. Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à r, on a $K_r = K_p$ et $I_r = I_p$.
5. Montrer que $K_r \cap I_r = \{0\}$ et que :
$$E = K_r \oplus I_r.$$

Correction : exercice très classique.

1. Idem que exo 1. (k_p) est croissante et majorée par n constituée d'entiers. (i_p) est décroissante et minorée par 0 constituée d'entiers.
2. Intuitivement, une suite croissante et majorée par n et constituée d'entiers positifs fait un « palier » avant le n-ième rang.
Il faut le démontrer en raisonnant par l'absurde : si $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $k_p \neq k_{p+1}$, ie $k_{p+1} \geqslant k_p + 1$, alors par récurrence : $\forall n \in [\![0,n+1]\!]$, $k_n \geqslant n$ et $k_{n+1} \geqslant n+1$ contradiction.
3. On a une inclusion et par le théorème du rang égalité des dimension. Le théorème du rang s'écrit :
$$k_p + i_p = n$$
$$k_{p+1} + i_{p+1} = n.$$
4. Par récurrence. On montre :
$$\forall p \geqslant r,\ K_p = K_r$$
Pour l'hérédité, on a déjà $K_p \subset K_{p+1}$ et si $x \in K_{p+1}$, alors $f(x) \in K_p$ HR donne : $f(x) \in K_r$, ie $x \in K_{r+1}$ puis la définition de r donne : $x \in K_r$ d'où l'inclusion.
Comme à la question précédente, le théorème du rang donne : $I_p = I_r$ à partir de $K_p = K_r$.
5. si $x \in K_r \cap I_r$, alors $x = f(a)$ avec $f^{2r}(a) = 0$, donc $a \in K_{2r} = K_r$ et $x = f^r(a) = 0$.
Le théorème du rang donne que K_r et I_r sont supplémentaire.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et a un élément non nul de $\mathbb{K}$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0$.
Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E.

Correction : Avec le théorème du rang, il suffit de prouver que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.
Soit donc $x \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$, on a alors :
$$f(x) = 0 \text{ et } \exists u \in \mathbb{R},\ f(u) = x.$$
et donc $f^2(u) = 0$ et $f^3(u) = 0$ On a alors :
$$f^3(u) - 3af^2(u) + a^2 f(u) = 0$$
et donc $a^2 f(u) = 0$ et donc $f(u) = 0$ ie $x = 0$.

✭ Études d'applications linéaires

Exercice 8 Justifier l'existence d'une unique application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(3,2) = (1,1,0)$ et $f(2,4) = (0,1,1)$.
Expliciter f.

Correction : $(3,2)$ et $(2,4)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On peut définir une application linéaire en donnant l'image des vecteurs d'une base.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on cherche (α,β) tels que $(x,y) = \alpha(3,2) + \beta(2,4)$ et on a :
$$f\Big((x,y)\Big) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1).$$

✭ Projecteurs

Exercice 9 On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-y-z, -x-z, x+y+2z) \end{array} \right.$$

1. Déterminer $f \circ f$ et déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. Déterminer l'expression analytique de $g = 2f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

Correction :

1. Le plus simple est de passer par l'expression matricielle de f, il suffit alors de mettre la matrice au carré. on a alors $f^2 = f$ et donc f est un projecteur.
   Il fut déterminer $\mathrm{Im}(f)$ (on connaît la famille génératrice), et $\ker(f)$ (résoudre le système).
2. g est une symétrie ! Pour l'expression : on utilise la matrice. Pour les éléments caractéristiques, c'est les même que f !

Exercice 10 Soient p et q des projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Si $p+q$ est un projecteur de E, montrer que $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$ et que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Correction :

1. il suffit de calculer $(p+q)^2$, cela donne :

   $$(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q + p \circ q + q \circ p.$$

   On en déduit que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q + q \circ p = 0$.
   Il reste à vérifier que cette condition implique $p \circ q = q \circ p = 0$ (la réciproque est évidente).
   On suppose donc $p \circ q + q \circ p = 0$, cela donne :

   $$\begin{array}{r} p \circ q + p \circ q \circ p = 0 \text{ en composant par } p \text{ à gauche} \\ p \circ q \circ p + q \circ p = 0 \text{ en composant par } p \text{ à droite} \end{array}$$

   Ainsi : $p \circ q = q \circ p = -p \circ q$ et donc $p \circ q = 0$ et idem pour $q \circ p = 0$.
2. On suppose donc $p+q$ projecteur, ie $p \circ q = q \circ p = 0$.
   L'inclusion : $\ker(p+q) \supset \ker(p) \cap \ker(q)$ est évidente (et ne dépends pas de l'hypothèse).
   Pour la réciproque, si $x \in \ker(p+q)$, alors $p(x) = -q(x)$, puis :

   $$p(x) = p^2(x) = -p \circ q(x) = 0 \text{ d'où } x \in \ker(p)$$

   et idem avec q. D'où l'égalité.
   L'inclusion : $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. est évidente.
   Réciproquement, si on considère un élément y qui s'écrit $y = p(a) + q(b)$. On a : $p(y) = p^2(a) = p(a)$ et $q(y) = q(b)$, ainsi $y = p(y) + q(y)$. D'où $y \in \mathrm{Im}(p+q)$ et l'inclusion réciproque.

Exercice 11 Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E)$, on considère

$$\varphi_f : \left\{ \begin{array}{c} \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E) \\ g \mapsto f \circ g - g \circ f \end{array} \right.$$

1. Vérifier : $\varphi_f \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.
2. Montrer que :

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall g \in \mathscr{L}(E),\ (\varphi_f)^k(g) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{i}{k} f^{k-i} g f^i$$

   en déduire que si f est nilpotent, alors φ_f l'est aussi.
3. On suppose qu'il existe u et v dans $\mathscr{L}(E)$ tel que u soit un vecteur invariant de φ_v.
   Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}, u^k \circ v - v \circ u^k$ en fonction de u et de k.

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned}\varphi_f(g_1+\alpha g_2) &= f\circ(g_1+\alpha g_2)+(g_1+\alpha g_2)\circ f\\ &= f\circ g_1+\alpha f\circ g_2)+g_1\circ f+\alpha g_2\circ f\\ &= \varphi_f(g_1)+\alpha\varphi_f g_2)\end{aligned}$$

2. Récurrence. Si $f^p=0$, alors $(\varphi_f)^{2p-1}=0$, car

$$\begin{aligned}\forall i\in[\![0,p-1]\!]\,,\ f^{2p-1-i}=0 \text{ car } 2p-1-i\geqslant p\\ \forall i\in[\![p,2p-1]\!]\,,\ f^{i}=0 \text{ car } i\geqslant p\end{aligned}$$

donc la somme $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{i}{k}f^{k-i}gf^i$ ne contient que des termes nuls.

3. On a donc :

$$\varphi_v(u)=u \text{ ie } v\circ u-u\circ v=u$$

En composant droite / gauche par u :

$$v\circ u^2-u\circ v\circ u=u^2$$
$$u\circ v\circ u-u^2\circ v=u^2$$

En sommant :

$$\varphi_v(u^2)=2u^2$$

Le résultat $\varphi_v(u^k)=ku^k$ suit par récurrence.

Exercice 12 [CCP]

Soit Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par : $\Delta(P)=P(X+1)-P(X)$.

1. Vérifier que Δ est linéaire, déterminer son noyau et le degré de $\Delta(P)$.
2. Si $E=\{P\in\mathbb{R}[X]\,/\,P(0)=0\}$, montrer que Δ réalise un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

Correction :

1. Appliquer la définition pour la linéarité.
   Si $P\in\ker(\Delta)$, alors $P(X+1)=P(X)$, donc P est 1 périodique donc est constant. Réciproque évidente. Donc $\ker(\Delta)=\mathbb{R}_0[X]$ (ens des polynômes constants).
   En écrivant $P=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots$, on obtient :

$$\Delta(P)=na_nX^{n-1}+\dots$$

   Ainsi le degré de $\Delta(P)$ est le degré de P moins 1.
2. Pour l'injectivité, c'est $\ker(\Delta)\cap R_0[X]=\{0\}$.
   Pour la surjectivité, c'est :

$$\text{la famille : } \left((X+1)^i-X^i\right) \text{ pour } i\in[\![1,N+1]\!]$$

   est une base de $\mathbb{R}_N[X]$ (famille échelonnée de polynômes).
   Ainsi, si $P\in\mathbb{R}_N[X]$, alors P s'écrit :

$$\begin{aligned}P&=\sum_{i=1}^{N+1}\alpha_i(X+1)^i-X^i\\ &=\sum_{i=1}^{N+1}\alpha_i\Delta(X^i)\\ &=\Delta\left(\sum_{i=1}^{N+1}\alpha_iX^i\right)\end{aligned}$$

   En posant $Q=\sum_{i=1}^{N+1}\alpha_iX^i\in E$, on a $\Delta(Q)=P$.
   L'application $\Delta:E\to\mathbb{R}[X]$ est donc bijective.

⋆ **Étude de matrices et d'applications linéaires**

Exercice 13 Soit :

$$A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

avec $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ et où $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ désignent les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Expliciter u.
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. Déterminer le noyau et l'image de u.

Correction :

1. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3b \\ -a+b+2c \\ b-c \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$u : (a,b,c) \longmapsto a - 3b + (-a+b+2c)X + (b-c)X^2$$

2. Il faut calculer le déterminant par exemple.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} l_1 \\ l_2 + l_1 \\ l_3 \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 + \frac{1}{2} l_2 \end{matrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La matrice n'est pas inversible.

3. Pour le noyau, il faut résoudre $AX = 0$.
On peut utiliser les opérations sur les lignes faites pour le calcul du déterminant :

$$AX = 0 \text{ donne } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$$

$$\begin{cases} x = & 3y \\ y = & z \end{cases}$$

On trouve donc :

$$\ker(u) = \left\{ (3z, z, z) \middle| z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\Big((3,1,1) \Big)$$

Pour l'image, on utilise le thm du rang, qui donne la dimension de l'espace image (le rang donc). On sait aussi que l'espace image est engendré par les colonnes de la matrice.
Le rang est 2.
On a plusieurs techniques ensuite.
On peut dire que la famille de vecteurs $\Big((1,-1,0), (-3,1,1) \Big)$ forment une famille libre (en effet, les calculs sur le déterminant montre qu'elle est de rang 2), et c'est donc une famille libre de $\text{Im}(A)$ (qui est de dimension 2). Donc :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}\Big((1,-1,0), (-3,1,1) \Big).$$

Autre idée, on peut utiliser le fait que $(3,1,1)$ est dans le noyau. ainsi :

$$-3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=0$$

et donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(A)&=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)\\&=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Puisqu'on peut enlever le dernier vecteur qui est combinaison linéaire des autres.
On peut aussi faire des opérations sur les colonnes pour simplifier les colonnes de la matrice (ie la famille génératrice).

$$\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&-3&0\\-1&1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\right)$$

On fait des opérations sur les colonnes (ie sur les vecteurs générateurs de l'espace image) :

$$\begin{pmatrix}1&-3&0\\-1&1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}C_2\leftarrow C_2+3C_1$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-2&2\\0&1&-1\end{pmatrix}C_3\leftarrow C_3+C_2$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-2&0\\0&1&0\end{pmatrix}C_3\leftarrow C_3+C_2$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-2&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

On trouve alors une base un peu plus simple :

$$\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Vect}\Big((1,-1,0),(0,-2,1)\Big)$$

Il reste à en déduire l'image de u (comme un SEV des polynômes). Cela donne (pour les deux écritures) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(u)&=\mathrm{Vect}\left(1-X,-2X+X^2\right)\\&=\mathrm{Vect}\left(1-X,-3+X+X^2\right).\end{aligned}$$

Exercice 14 Soit :

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ représenté par A dans la base canonique.

1. Expliciter u.
2. Déterminer deux réels (α,β) tels que : $\ker(u-\alpha I_d)\neq\{0\}$ et $\ker(u-\beta I_d)\neq\{0\}$.
3. Montrer que :

$$\ker(u-\alpha I_d)\oplus\ker(u-\beta I_d)=\mathbb{R}_2[X]$$

4. On note $\mathscr{C}$ une base adaptée à la somme directe. Déterminer $Mat_{\mathscr{C}}(u)$.

Correction :

1.
2. Il s'agit d'une résolution de système / calcul de rang/ calcul de déterminant avec paramètre.

$$\det(A-\alpha I_3) = \begin{vmatrix} 3-\alpha & -1 & -1 \\ 1 & 1-\alpha & -1 \\ 1 & -1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

On trouve $\alpha = 2$ et $\alpha = 1$.

3. Il faut vérifier que

$$\ker(u-I_d)\cap\ker(u-2I_d) = \{0\} \text{ et } \dim(\ker(u-I_d))+\dim(\ker(u-2I_d))$$

Pour la première partie, si $x \in \ker(u-I_d)\cap\ker(u-2I_d)$ alors $u(x) = x$ et $u(x) = 2x$, donc $x = 0$!
Pour le deuxième, il faut calculer les rang des matrices $A-2I_3$ et $A-I_3$, ce qui se fait rapidement. On voit facilement que le rang de $A-2I_3$ est 1.

4. On prends e_1 base de $\ker(u-Id)$ et (e_2,e_3) base de $\ker(u-2I_d)$. et $B = (e_1,e_2,e_3)$ On a alors :

$$Mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. La matrice est inversible (triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale). On calcule son inverse avec Gauss-Jordan.

Exercice 15 Soit l'application linéaire :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P'(X) \end{array} \right.$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique.
2. La matrice de A est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

1. On calcule :

$$f(1) = 1 \qquad f(X) = X \qquad f(X^2) = (X+1)^2-2X = X^2+1 \qquad f(X^3) = (X+1)^3-3X^2 = X^3+3X+1$$

ce qui donne la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 Soit l'application linéaire :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+2)+P(X)-2P(X+1) \end{array} \right.$$

1. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ telle que :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, on dit que f, endomorphisme de E est une **affinité** de base F et direction G et de rapport α lorsque :

$$f = p + \alpha q$$

où p est le projecteur sur F parallèlement à G et $q = Id - p$.

1. Que se passe-t-il si $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$?
2. On suppose maintenant que $\alpha \notin \{-1, 0, 1\}$. Soit $u \in E$. Démontrer que $f(u) - u$ appartient à G et que $f(u) - \alpha u$ appartient à F.
3. **un exemple :** Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le plan P dont une équation est $x + 2y + z = 0$ et D la droite vectoriel de vecteur directeur $(1, 0, 2)$. On considère f l'affinité de base P, de direction D et de rapport 2.
   Soit $u = (x, y, z)$.
   Déterminer les coordonnées de (x', y', z') de $f(u)$.

Exercice 18 Soit a et b deux réels distincts. Soit

$$F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(a) = P(b) = 0\right\}$$

et

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(a)X + P(b) \end{array} \right.$$

avec n un entier naturel non nul.

1. Vérifiez que F est un SEV de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelle est sa dimension ?
2. Vérifiez que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Rg} \varphi$.

Révisions algèbre linéaire

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Espaces et sous-espaces vectoriels

Définition VIII.6 Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :

l'addition interne on peut ajouter les éléments de E : si u et v sont éléments de E, et la somme $u+v$ est un élément de E,

la multiplication externe on peut multiplier les éléments de E par les éléments de $\mathbb{K}$: si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λu est un élément de E.

Proposition VIII.16 — Espaces vectoriels de référence. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.

Si Ω est un ensemble, l'ensemble K^{Ω} (noté aussi $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel.

Pour deux entiers (n,p), l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n,p) est un espace vectoriel.

- Un produit cartésien d'espace vectoriel est un espace vectoriel.
- L'intérêt des espaces vectoriels est que l'on peut y faire des **combinaisons linéaires** : si $u_1,\dots u_p$ est une famille finie de vecteurs de E et $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ p scalaires, alors on peut calculer :

$$\alpha_1 u_1 + \dots \alpha_p u_p = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k.$$

Si E et F sont deux EV, on peut parler d'application linéaire de E dans F.

Définition VIII.7 Si E est un EV, un sous-espace vectoriel de E est une partie de E qui est elle-même un espace vectoriel.

Pour montrer qu'une partie F d'un EV E est un sous-espace vectoriel on vérifie :

- $0 \in F$,
- $\forall (x,y) \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $x+\lambda y \in F$.

- Une **intersection** de sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, jamais une réunion.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est un SEV de E. C'est l'ensemble des combinaison linéaire des vecteur de la famille $\mathscr{F}$.
  On peut écrire :

$$\mathrm{Vect}((u_1,\dots,u_p)) = \left\{ x \in E \,\middle|\, \exists (\alpha_1,\dots,\alpha_p)\,,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\}$$

  Plus on ajoute des vecteurs à la famille plus cet espace grandit, mais on peut enlever les vecteurs combinaisons linéaires des autres.
- Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\ker(f)$ (respectivement $\mathrm{Im}(f)$) sont des SEV de E (respectivement de F).
  Cela corresponds à la description d'un SEV sous la forme **d'équations cartésienne** (comme un noyau, les solutions d'un système homogène) ou de **paramètres** (comme une image, l'ensemble des Y tel que le système $AX=Y$ admet au moins une solution).
  On passe d'une forme à une autre en calculant la solution du système homogène ou en cherchant les équations de compatibilité du système linéaire.
  Le théorème du rang permet de déterminer dans ce cas la dimension du SEV.
- Si E est un EV et F et G sont deux SEV de E, l'égalité $F=G$ peut se démontrer simplement par double inclusion (comme une égalité d'ensemble) mais on a aussi :
  - dans le cas de la dimension finie : $F=G$ est équivalent à $F \subset G$ et $\dim(F)=\dim(G)$.
  - les inclusions $\{0\} \subset F$ et $F \subset E$ sont évidentes !
  - l'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subset E$ se démontre en vérifiant que les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont dans le SEV E !
- Si A est une partie de E, alors $A^{\perp}$ est un SEV de E.

⋆ Somme et somme directe de SEV

Définition VIII.8 Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

On définit $F+G$ comme :

$$F+G=\left\{u+v \middle| u\in F, v\in G\right\}.$$

Si on considère :

$$\varphi:\begin{cases} F\times G & \rightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{cases}$$

alors $F+G=\operatorname{Im}(\varphi)$.

Le symbole $+$ est donc un opérateur entre SEV de E (à partir de deux SEV on en crée un troisième).

- Lorsque l'on sait que $x\in F+G$, alors on sait que x s'écrit sous la forme $u+v$ avec $u\in F$ et $v\in G$.
  Pour montrer qu'un élément x de E vérifie $x\in F+G$, il faut construire $u\in F$ et $v\in G$, tels que $x=u+v$. On peut utiliser une analyse /synthèse.
- Dans le cas de SEV engendré par des vecteurs, on a :

$$\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_p)+\operatorname{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)=\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_n).$$

Définition VIII.9 Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

On dit que F et G sont en somme directe sipour tout $x\in F+G$ la décomposition sous la forme $x=u+v$ avec $u\in F$ et $v\in G$ est unique.

C'est-à-dire si l'application φ définie ci-dessus est injective.

- C'est équivalent à $F\cap G=\{0\}$. C'est généralement ainsi qu'on le démontre.
- Pour indiquer que la somme est directe, on ajoute un décorateur autour de $+$ et on écrit $F\oplus G$ à la place de $F+G$.

Définition VIII.10 Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

On dit que F et G sont supplémentaires dans E, lorsque l'on a $E=F\oplus G$.

Cela signifie donc que $F+G=E$ (que φ est surjective) et que F et G sont en somme directe (que φ est injective). Autrement dit que φ est un isomorphisme.

On a alors existence et unicité de l'écriture $u+v$, ie :

$$\forall x\in E,\ \exists!(u,v)\in F\times G,\ x=u+v$$

Dans le cadre de la dimension finie :

- Si $E=F\oplus G$, soit $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{C}$ une base de G, alors la famille obtenue en réunissant $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est une base de E. On parle de base adaptée à une somme directe.
- Soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_p)$ une base de l'EV E.
  On considère les SEV suivants :

$$F=\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_k) \text{ et } G=\operatorname{Vect}(e_{k+1},\dots,e_n)$$

  Alors $E=F\oplus G$.
- Pour trouver un supplémentaire de F dans E, on part d'une base de F que l'on complète pour avoir une base de E. L'espace engendré par les vecteurs ajoutés est un supplémentaire de F.
- On a des relations sur les dimensions :
  Si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(F\oplus G)=\dim(F)+\dim(G)$$

  Dans le cas général :

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G).$$

  En particulier :

$$\dim(F)+\dim\left(F^{\perp}\right)=\dim(E)$$

- On peut montrer plus facilement que F et G sont supplémentaires :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ &\iff E = F + G \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{aligned}$$

C'est la caractérisation : $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ qui est la plus simple.
- Tout SEV admet des supplémentaires. L'un d'entre eux est unique et particulier, c'est le supplémentaire orthogonal. Si F est un SEV de E, alors $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$.

⋆ Famille finie de vecteur

Définition VIII.11 La famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est libre si la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle triviale où tous les poids sont nuls.

C'est-à-dire :

$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_p = 0 \right)$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

- La famille est libre si et seulement si elle est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On peut aussi dire que son rang est le nombre vecteurs qu'elle contient.
Une famille est liée si et seulement si au moins l'un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres, ie si l'un des vecteurs appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.
- Une famille de polynômes de degrés échelonnés est libre. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, une famille orthonormale de vecteurs est libre.

Définition VIII.12 — Famille génératrice. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E, on dit qu'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ d'éléments de F est génératrice du SEV F si $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

Autrement dit si tout vecteur de F est combinaison linéaire de des vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$.

Pour une famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ d'un SEV E, si considère l'application linéaire :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \rightarrow & E \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \end{array}$$

On a :

φ est injective si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre

$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$

φ est surjective si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice de E

φ est bijective si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base de E

⋆ Bases

Définition VIII.13 — Base. Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.

Il y a existence (famille génératrice) et unicité (famille libre) des **coordonnées** dans une base.

- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la **dimension**. Une fois une base choisie, on peut travailler dans E comme dans $\mathbb{K}^n$ en identifiant un vecteur et ses coordonnées.
- On peut construire une base en partant d'une famille génératrice et en enlevant les vecteurs combinaison linéaire des autres ou bien (moins fréquent) en partant d'une famille libre et en ajoutant des vecteurs qui ne sont pas dans l'espace engendré par les précédents.
En conséquence une famille libre contient nécessairement moins de vecteurs que la dimension, et une famille génératrice contient nécessairement plus de vecteurs que la dimension. Une famille qui a le bon nombre de vecteurs est automatiquement une base si elle est libre ou génératrice.

Proposition VIII.17 — Dimension des espaces vectoriels de référence. La dimension de $\mathbb{K}^p$ est p.

La dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ est $n+1$.

La dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $n \times p$.

⋆ Application linéaire

Définition VIII.14 — Application linéaire. Soit E et F des espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une application linéaire si elle vérifie les deux propriétés :

- $\forall (x,y) \in E^2, \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$,
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

L'image par une application linéaire d'une combinaison linéaire est une combinaison linéaire. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille de p vecteurs de E et que $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est p scalaires, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(u_i).$$

- $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi un espace vectoriel. On peut aussi composer les applications linéaires.
- On définit $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ l'espace image de f.
  L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$. En dimension fini, cela se démontre souvent avec le rang (égalité des dimension) car une inclusion est évidente !
  Si E est de dimension finie, on considère $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors on étudie souvent la famille $\mathscr{F} = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$. C'est les coordonnées de cette famille que l'on met dans la matrice de l'application. On sait quecette famille engendre l'espace image
  $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$$
  On a aussi :
  $$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff \mathscr{F} \text{ est libre} \\ f \text{ est surjective} &\iff \mathscr{F} \text{ est génératrice de } F \\ f \text{ est bijective} &\iff \mathscr{F} \text{ est une base.} \end{aligned}$$
  Enfin, cette famille détermine l'application linéaire (si deux applications linéaires sont égales sur une base, alors elles sont égales partout !). Ce qui permet de déterminer une application à partir de la matrice.
- On note $\ker(f)$ le noyau de f c'est :
  $$\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}.$$
  L'application est injective si et seulement si le noyau est réduit à $\{0\}$.
- Rappel des raisonnements algébriques habituels :
  - Si on sait que $x \in \ker(f)$, alors on sait que $f(x) = 0$.
  - Si on veut montrer que $f(x) \in \ker(f)$, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$.
  - Lorsque $y \in \mathrm{Im}(f)$, on saitqu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$
  - Tandis que pour prouver qu'un élément $y \in F$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, il faut construire un x tel que $y = f(x)$.
- Si il existe une application linéaire injective de E dans F alors $\dim(F) \geqslant \dim(E)$. Si il existe une application linéaire surjective de E dans F alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Si il existe un application linéaire bijective (isomorphisme) de E dans F alors $\dim(F) = \dim(E)$.
  Si $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors on a :
  $$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

⋆ Rang

Définition VIII.15 Le rang d'une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré :

$$Rg(\mathscr{F}) = Rg(u_1, \dots, u_n) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n))$$

Le rang d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est la dimension de l'espace image :

$$Rf(f) = \dim(Im(f))$$

Le rang d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}$ est :

- le rang de l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ associée

- le rang de la famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ associée,
- le nombre de pivots après réduction de Gauss.

Ces trois définitions donnent le même rang. Souvent, on calcule le rang avec la troisième.

- Une famille est libre si son rang est égal au nombre vecteurs qu'elle contient.
  Une famille est génératrice de E si son rang est égal à la dimension de E.
  Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux valeurs.
  Une application linéaire est injective si son rang est égal à la dimension de son espace de départ.
  Une application linéaire est surjective si son rang est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.
  Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux dimensions.

⋆ Projecteur et symétrie

Définition VIII.16 Soit E un espace vectoriel, qui se décompose en une somme directe. On note $E = F \oplus G$.
On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u \end{array} \right. \qquad \text{avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G.$$

- On sait : le projecteur p sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire vérifiant :

$$\forall x \in F,\ p(x) = x \text{ et } \forall x \in G,\ p(x) = 0$$

- On a : $p^2 = p$ et :

$$G = \ker p \qquad \text{et} \qquad F = \operatorname{Im} p = \Big\{ x \in E | p(x) = x \Big\} = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$$

Réciproquement, pour montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur, il suffit de vérifier $p^2 = p$. On a alors directement :$\operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$ et p est alors le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Définition VIII.17 — Symétrie. Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$.
On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u - v \text{ avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G. \end{array} \right.$$

On a

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E \text{ ou encore } p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$$

où p est le projecteur.

- On a $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$.
  Réciproquement, pour montrer que s est une symétrie, il suffit de vérifier $s^2 = s$ et on a directement :

$$E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$$

De plus, s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

⋆ Représentation matricielle

Étant donné E et F deux espaces vectoriels de dimension finie : $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = m$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F et une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

On peut associer à f une unique matrice : on met dans cette matrice les coordonnées des images de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$. On la note : $Mat_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}}(f)$.

faire un dessin

Étant donné un vecteur x de E, on peut aussi construire la matrice colonne associée : $Mat_{\mathscr{B}}(x)$, c'est la matrice des coordonnées (en colonne).

Étant donné une famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de E, on peut aussi construire la matrice de la famille : dans chaque colonne les coordonnées d'un vecteurs.

faire un dessin

- Les matrices sont un support de calculs : faire des calculs sur la matrice permet de démontrer des relations sur les applications linéaires :
  - une égalité de matrice correspond à une égalité d'applications linéaires,
  - un produit de matrices correspond à une composée d'application linéaire, une combinaison linéaire de matrices correspond à une combinaison linéaire d'application linéaire,
  - une matrice inversible correspond à un endomorphisme inversible.
  - L'image de x par f correspond au produit AX.
- Cela dépends des bases choisies.
  On a les formules de changements de base : pour un vecteur x de E, une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ une base de E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ une base de F.
  $$x = \mathrm{Id}_E(x) \text{ donc } Mat_{\mathscr{B}}(x) = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})Mat_{\mathscr{B}'}(x)$$
  $$f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_F \text{ donc } Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(x) = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\mathrm{Id})Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})$$
  Les matrices $Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})$ sont les matrices de passage (de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$). Elles contiennent les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.
  En particulier pour un endomorphisme f, les matrices A et B représentent toutes les deux l'endomorphisme f dans deux bases différentes si et seulement si il existe une matrice P inversible telle que :
  $$B = P^{-1}AP.$$
- Par contre, étant donné une matrice, on ne connaît ni l'espace de départ, ni l'espace d'arrivée, ni les bases. Si on a ces informations, on peut retrouver l'application linéaire à partir de la matrice, sinon on peut associer à une matrice un endomorphisme de $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ que l'on dit canoniquement associé.
  On peut ainsi définir le noyau et l'image d'une matrice comme le noyau et l'image de l'endomorphisme canoniquement associé.

✯ Produit scalaire et espace euclidien

Définition VIII.18 — Produit scalaire. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un produit scalaire est une application φ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.
1. pour tout couple (x,y) de E, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (symétrie)
2. pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (bilinéarité).
3. pour $x \in E$, on a $\varphi(x,x) \geqslant 0$ (positivité).
4. pour $x \in E$, on a $\varphi(x,x) = 0 \implies x = 0$ (définie positive).

- Les exemples de références sont :
  $$\text{dans } \mathbb{R}^n : \Big\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
  $$\text{dans } \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) : \Big\langle f,g \Big\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$
- Pour démontrer la positivité et « définie positive », on utilise souvent les arguments suivants :
  - la forme canonique : $x^2 + by + cz... = (x + \frac{b}{2}y + \frac{c}{2}z)^2 + ...$, en éliminant les variables une par une.
  - La somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls,
  - L'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si la fonction est nulle.
- On appelle espace préhilbertien réel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire espace vectoriel euclidien. si il est de dimension finie.
- On peut associer la norme : $\|x\| = \sqrt{< x,x >}$ et la distance : $d(x,y) = \|x-y\|$ à un produit scalaire.

Proposition VIII.18 La norme associée au produit scalaire vérifie :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ |< x,y >| \leqslant \|x\|\|y\|$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si :

$\exists\lambda \in \mathbb{R},\ y = \lambda x$ ou $\exists\lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda y$ ou

- En conséquence, on a l'inégalité triangulaire :

$$\forall(x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés, ie :

$\exists\lambda \in \mathbb{R}^+,\ y = \lambda x$ ou $\exists\lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y.$

On a aussi l'**inégalité triangulaire renversée** :

$$\forall(x,y) \in E^2,\ |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|.$$

et le Théorème de Pythagore : Deux vecteurs (x,y) de E sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

⋆ Orthogonalité

Définition VIII.19 — Vecteurs orthogonaux. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $< x,y >= 0$.
L'orthogonale d'une partie A de E est :

$$\begin{aligned} A^\perp &= \left\{x \in E, \middle| \forall a \in A, < a,x >= 0\right\} \\ &= \left\{x \in E, \middle| \forall a \in A, a \perp x\right\} \end{aligned}$$

On dit que deux SEV F et G de E sont orthogonaux si

$$\forall(x,y) \in F \times G,\ < x,y >= 0$$

Définition VIII.20 On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
L'image d'un vecteur x de E par cette projection est appelée le projeté orthogonal de x sur F.
C'est l'élément de F le plus proche de x :

$$d(x,F) = d(x,P_F(x)) = \inf_{y\in F} d(x,y)$$

$\forall y \in F,\ d(x,y) \geqslant d(x,P_F(x))$ avec égalité si et seulement si $y = P_F(x)$.

On a deux moyens de calculer le projeté orthogonal :

- Si on connaît une BON $(u_1,\dots,u_n)$ de E, tels que les premiers vecteurs $(u_1,\dots,u_p)$ forment une BON de F, alors :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < u_i,x > u_i.$$

- Sinon on résout un système d'équations : si $\mathscr{G} = \{e_1,\dots,e_n\}$ est une famille génératrice de F.
Alors $P_F(x)$ est l'unique vecteur y vérifiant :

$$\begin{cases} y \in F, & \text{puisque le projeté sur } F \text{ est un vecteur de } F \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ < x-y,e_i >= 0 \end{cases}$$

⋆ Base orthonormée

Soit $\mathscr{F} = (u_1,\dots,u_p)$ une famille libre de E. Alors, on peut construire une famille orthonormale $\mathscr{G} = (v_1,\dots,v_p)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_i) = \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_i).$$

Pour cela, on procède vecteur par vecteurs :

- on construit v_1 en divisant u_1 par sa norme,
- on construit v_2 en cherchant un vecteur $x = u_2 + \alpha v_1$ avec α tel que $< x,v_1 >= 0$, puis on divise par la norme.

- on construit v_i, à partir des précédent, en cherchant un vecteur

$$x = u_i + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \cdots + \alpha_1 v_i = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k v_k$$

en choisissant les α_k pour que $< x, v_k >= 0$. On divise ensuite par la norme.

- Cela permet de construire des bases orthonormées, ou de compléter des familles orthonormées en des bases orthonormées.
- Avantage de travailler avec une BON $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$: si $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathscr{B}}$ et $y = (y_1, \dots, y_n)_{\mathscr{B}}$ alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \langle x, u_i \rangle$$

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Compléments sur les espaces vectoriels

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

✯ Famille infinie de vecteurs

Dans tout le cours, on a surtout considéré des familles finies de vecteurs, mais on peut aussi travailler avec des famille infinie de vecteurs.

On peut ainsi avoir une suite de vecteurs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, ou même une famille indexée sur une partie de $\mathbb{R}$ $(u_i)_{i\in I}$.

■ **Exemple VIII.6** Dans les polynômes, on peut considérer la famille $\left(X^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$, ou la famille $((X-a)_{a\in\mathbb{R}})$. ■

La principale difficulté est que l'on ne peut pas faire une somme infinie dans un espace vectoriel.

Définition VIII.21 — Combinaison linéaire d'une famille infinie de vecteurs. Soit une famille infinie de vecteurs $\mathscr{F}=\left(u_i\right)_{i\in I}$.

Une combinaison linéaire de la famille $\mathscr{F}$ est alors un vecteur qui s'écrit sous la forme :

$$\alpha_1 u_1+\dots\alpha_p u_p=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k u_k,$$

avec $(\alpha_k)_{k=1\dots p}$ p scalaires et $(u_1,\dots,u_p)$ p vecteurs extraits de la famille $\left(u_i\right)_{i\in I}$.

■ **Exemple VIII.7** Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est par définition une combinaison linéaire des $\left(X^k\right)$ pour $k\in\mathbb{N}$. Puisqu'un polynôme P s'écrit

$$P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k \text{ avec } a_k\in\mathbb{K}.$$

■

Contre-exemple : Par contre, la fonction exponentielle, n'est pas combinaison linéaire de la famille de fonctions $\left(x\mapsto x^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Ce qui revient à dire que la fonction exponentielle n'est pas une application polynôme.

■ **Exemple VIII.8** Soit $\omega>0$, pour $k\in\mathbb{N}$, on note :

$$c_k:\ x\longmapsto\cos\left(\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right)x\right)\qquad\text{et}\qquad s_k:\ x\longmapsto\sin\left(\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right)x\right)$$

Considérons la famille des fonctions :

$$\mathscr{F}=(s_k)_{k\in\mathbb{N}}\bigcup(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

Dire qu'une fonction f est combinaison linéaire des fonctions de cette famille c'est dire que f s'écrit sous la forme :

$$f=\sum_{k=0}^{n}\alpha_kc_k+\beta_ks_k$$

avec $n\in\mathbb{N}$, (α_k) et (β_k) $2(n+1)$ réels. Autrement dit que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cos\left(\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right)x\right)+\beta_k\sin\left(\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right)x\right)$$

Ceci n'est possible que si f est ω périodique et de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Une telle écriture est la décomposition de la fonction f en série de Fourier, très utilisée en physique. ■

⋆ Famille libre (infinie)

On rappelle que si $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ est une famille infinie de vecteurs, alors une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}$ est un combinaison linéaire d'un nombre fini vecteurs de $\mathscr{F}$, c'est-à-dire un vecteur de la forme :

$$\alpha_1 u_1 + \dots \alpha_p u_p = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k,$$

avec $(\alpha_k)_{k=1\dots p}$ p scalaires et $(u_1,\dots,u_p)$ p vecteurs extraits de la famille $\left(u_i\right)_{i\in I}$.

Définition VIII.22 Pour une famille $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ infinie de vecteurs, On dit que la famille est libre si toute sous famille finie de $\mathscr{F}$ est libre.

Autrement dit : (toutes ces définitions sont les mêmes) :

- La seule combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}$ qui donne le vecteur nul est celle triviale où tous les poids sont nuls,
- dès que l'on choisit $p \in \mathbb{N}$ et p vecteurs $(u_1,\dots,u_p)$ de la famille $\mathscr{F}$ On a :

$$\forall (\alpha_1,\dots,\alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\dots,\alpha_p = 0\right)$$

■ **Exemple VIII.9** On peut par exemple vérifier que la famille de polynômes $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre. ■

⋆ Famille génératrice infinie

On étend naturellement cette définition aux cas d'une famille infinie.

Définition VIII.23 Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E, on dit qu'une famille inifinie $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ d'éléments de F est génératrice du SEV F tout vecteur de F est combinaison linéaire de des vecteurs $(u_1,\dots,u_p)$.

■ **Exemple VIII.10** La famille $\left(X^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

La famille $\left(X^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\{P \in \mathbb{K}[X] | P(0) = 0\}$. ■

On peut généraliser au cas d'une base infinie $\mathscr{B} = (u_i)_{i\in I}$, en disant que tout vecteur x admet des coordonnées $(\lambda_i)_{i\in I}$ qui sont à support fini, maison n'étudiera pas ce points.

⋆ Dimension sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

21 — Séries numériques

La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

R Pour comprendre ce chapitre, il est essentiel de revoir les équivalents et les DLs.

I Généralités

I.1 Définitions

Définition I.1 — Série. Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n est appelé la somme partielle d'ordre n.

Notation I.1. *On note $\sum u_k$ la série de terme général u_k. C'est une suite, ie une application :*

$$\sum u_k : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \longmapsto \sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$$

On eut aussi noter : $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k$ ou $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$. La variable est bien entendu muette.

La série caractérise la suite puisque :

$$u_0 = S_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$

Définition I.2 On dit que la série $\sum u_k$ converge si la suite des sommes partielles admet une limite finie dans $\mathbb{K}$. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

Notation I.2. *Si la série converge, on note* $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *la limite de la série, on a donc :*

$$\lim_{n\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

La nature de la série est le fait de converger ou non. Si $\lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$ ou si $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ n'a pas de limite, la série diverge.

Définition I.3 — Somme d'une série convergente. Soit (u_n) une suite telle que la série $\sum u_k$ converge.

On appelle alors somme de la série le réel $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Ne pas confondre la série $\sum u_k$ (qui est une suite) et sa limite $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (qui est un réel).

On ne peut utiliser la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ que lorsque l'on a prouvé la convergence !

Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie pour $n \geqslant n_0$, on définit de même :

La série $\sum u_k$ notée aussi $\sum_{k\geqslant n_0} u_k$

La limite de la série $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

La notion de convergence étant asymptotique, on ne change pas la nature de la série en modifiant les premiers termes. Autrement dit pour $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé :

$\sum_{k\geqslant n_0} u_k$ et $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ ont la même nature.

On peut aussi dire que l'on ne modifie pas la série en changeant un nombre fini de terme.

■ **Exemple I.1** On a vu que $\lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$, on peut donc écrire : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ ■

Définition I.4 — Reste d'une série convergente. Soit (u_n) une suite telle que la série $\sum u_k$ converge.

On appelle alors reste d'ordre n de la série la valeur de :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

La suite des restes $\left(R_n\right)$ converge vers 0.

R On ne peut parler du reste d'une série que dans le cas d'une série convergente.

✯ Linéarité

De même que pour les suites, on a le résultat :

Proposition I.1 Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que les séries associées $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors : $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Autrement dit, toute combinaison linéaire de deux séries convergentes et convergentes.

Ou encore : l'ensemble des suites dont la série converge est un SEV de l'ensemble des suites et l'application qui à une telle suite associe la somme de sa série est une application linéaire.

R La somme de deux série divergente peut être divergente !

I.2 Divergence grossière

Proposition I.2 Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite (u_n) tends vers 0.

Démonstration. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$

Si la série converge et σ désigne la somme, alors

$$\lim_{n\infty} S_n - S_{n-1} = 0 \text{ et donc } \lim_{n\infty} u_n = 0.$$

■

Si la suite (u_n) ne tends pas vers 0, on dit que la série $\sum u_k$ **diverge grossièrement**. Bien entendu, c'est uniquement une condition nécessaire non suffisante.

■ **Exemple I.2** La série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}$ diverge pourtant sont terme général tends vers 0.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
S_{2n}-S_n &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\\
&\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Or si une série converge, $\lim_{n\infty} S_{2n}-S_n=0$. ■

I.3 Série géométrique

Proposition I.3 Soit $\lambda\in\mathbb{C}$.

La série $\sum\lambda^k$ converge si et seulement si $|\lambda|<1$.

Plus précisément, on a l'expression des sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda^k=\begin{cases}(n+1) & \text{si } \lambda=1\\ \dfrac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} & \text{si } \lambda\neq 1.\end{cases}$$

et l'expression de la somme :

$$\text{si } |\lambda|<1,\ \sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k=\frac{1}{1-\lambda}$$

I.4 Série télescopique

On a déjà vu plusieurs exemples de série télescopique :

Définition I.5 Une série $\sum u_n$ est dite télescopique lorsque l'on peut trouver une suite (v_n) telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_{n+1}-v_n$$

Proposition I.4 Avec les notations de la définition précédente, les sommes partielles se calculent très facilement :

$$\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=0}^{n}v_{k+1}-v_k=v_{n+1}-v_0.$$

Ainsi, la suite (v_n) converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

On peut appliquer ce résultat à l'envers :

Proposition I.5 Soit (u_n) une suite. Alors la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

II Séries à termes positifs

Pour qu'une série à termes positifs converge il faut qu'elle tende vers 0 suffisamment vite.

II.1 Critères de convergence

Proposition II.1 Soit (u_n) une suite à termes positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante.

En particulier, la suite des sommes partielles converge ou tends vers $+\infty$.

En conséquence, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Démonstration. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$$

Ainsi, la suite des sommes partielles est croissante. On applique alors à (S_n) les résultats sur la convergence des suites monotones. ∎

R Une série à termes positifs converge si elle tends suffisamment vite vers 0.

✯ Comparaison

Proposition II.2 Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

On a alors :

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et :

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- Si $\sum u_n$ diverge (tends vers $+\infty$) alors $\sum v_n$ diverge (tends vers $+\infty$).

Démonstration. Si $\sum v_n$ converge alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Ainsi, les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée par $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ donc converge.

Pour le deuxième point, on utilise encore :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$$

ce qui donne :

$$\lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$$

■

R Il arriver parfois que la comparaison : $u_n \leqslant v_n$ ne soit valable qu'à partir d'un certain rang (sauf pour un nombre fini de valeurs). Cela ne change en rien le résultat.

! Ce résultat est uniquement valable pour les suites à termes positifs !

Proposition II.3 Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs telles que : $u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n)$.
Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration. On sait :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant u_n \leqslant M v_n,$$

et la série $\sum (M v_n)$ converge. ■

Proposition II.4 Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs telles que : $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$.
Alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

Démonstration. Comme $\lim_{n\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \frac{1}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n.$$

On obtient alors le résultat facilement.

■

✭ Exemples

■ Exemple II.1 On a :

$$\forall n \geqslant 2,\ \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$$

Or :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$$

Ainsi, la série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente (c'est une série téléscopique) et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente avec :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \leqslant 1+\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2.$$

■

■ **Exemple II.2** De la même manière, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Ici c'est une série télescopique divergente, donc la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

■

■ **Exemple II.3** Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes, on a :

$$\sum \max(u_n, v_n) \text{ converge.}$$

en effet,

$$\max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n.$$

■

II.2 Lien série intégrale

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives. On peut alors construire :

la suite d'intégrale : $\int_0^n f(t)dt$ qui est une suite croissante

la série $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ qui est une série à termes positifs

un dessin des rectangles montre que ces deux suites ont liées

On commence par le cas courant d'une fonction décroissante.

Soit donc f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante.

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [n, n+1],\ f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{R},\ f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n)$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leqslant f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt$$

D'où un premier résultat :

$$\text{Si } \lim_{n\infty} \int_0^n f(t)dt \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ alors } \sum_{k\in\mathbb{N}} f(k) \text{ converge.}$$

Dans l'autre sens, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{n+1} f(t)dt &= \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k).\end{aligned}$$

D'où le deuxième résultat :

$$\text{Si } \lim_{n\infty} \int_0^n f(t)dt = +\infty \text{ alors } \sum_{k\in\mathbb{N}} f(k) \text{ diverge.}$$

On peut ainsi écrire le résultat :

Proposition II.5 Soit donc f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante, alors la suite $\int_0^n f(t)dt$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ ont la même nature.

Ici il s'agit de suite qui converge ou tendent vers $+\infty$.

R Si la fonction est croissante et positive, sa limite est non nulle (sauf si la fonction est la fonction nulle). La série $\sum f(k)$ est alors grossièrement divergente. On peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^n f(t)dt \geqslant f(0)n \text{ tends aussi vers } +\infty$$

ainsi, la suite $\int_0^n f(t)dt$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ ont toujours la même nature.

Au delà de ce résultat, il faut penser à comparer les séries et les intégrales, dès que l'on sait calculer $\int_0^n f(t)dt$ cela donne par exemple des équivalents (voir exemple suivant).
On peut retenir le résultat (dans le cas d'une fonction décroissante) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt$$

mais il est préférable de savoir le retrouver rapidement.

■ **Exemple II.4** Application à la série harmonique.

$$\int_1^n \frac{1}{t} \text{ diverge donc } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ diverge.}$$

On a plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

On en déduit alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$$

■

■ **Exemple II.5** Étude de la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$. On a :

$$\int_2^n \frac{1}{t\ln(t)} dt = \Big[\ln(\ln(t))\Big]_2^n = \ln(\ln(n)).$$

ainsi, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ tends vers $+\infty$

On peut aussi obtenir un équivalent en comparant série / intégrale. ■

II.3 Séries de Riemann

Proposition II.6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. C'est une série à terme positifs, elle converge si et seulement si :

$$\text{La suite : } \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge}$$

Or on a pour $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^n t^{-\alpha} dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^n$$
$$= \frac{1}{-\alpha+1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right).$$

Cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 1$ (cas limite), on a déjà vu que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.

■

Le résultat suivant consiste comparer une série avec les séries de Riemann.

Corollaire II.7 — Règle du $n^\alpha u_n$. Soit $\sum u_k$ une série à termes réels positifs.

- Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors $\sum_{u_k}$ converge.
- Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{=} o\,(u_n)$, alors $\sum_{u_k}$ diverge.
- Si il existe un réel α et un réel $l \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ alors $\sum_{u_k}$ diverge si et seulement si $\alpha > 1$.

■ **Exemple II.6** Soit $\beta > 1$. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$ est convergente.

On considère $\alpha \in]1, \beta[$ (par exemple $\alpha = \frac{1+\beta}{2}$), on a alors :

$$\frac{\ln n}{n^\beta} n^\alpha = \ln(n) n^{\alpha-\beta} \to 0$$

donc à partir d'un certain rang :

$$\frac{\ln n}{n^\beta} \leqslant n^\alpha$$

D'où la convergence. ■

■ **Exemple II.7** Série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Si $\alpha = 0$, alors $u_n = 1$ et la série diverge grossièrement.
Si $\alpha < 0$, alors $n^\alpha \to 0$ et donc $u_n \to 1$ et la série diverge grossièrement.
Si $\alpha > 0$, alors $e^{-n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc

■

III Séries absolument convergentes

On revient au cas général d'une suite à termes quelconques (pas nécessairement positifs).

C'est en fait beaucoup plus compliqué : pour qu'une série à termes positifs converge il faut qu'elle tende vers 0 suffisamment vite, pour une série à termes quelconques, il peut arriver que des termes se compensent.

(R) SI tous les termes sont négatifs, il n'y a pas de difficulté.

Définition III.1 Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\sum u_k$ la série de terme général u_n.

On dit que la série $\sum u_k$ converge absolument si et seulement si la série à termes réels positifs $\sum |u_k|$ converge.

Proposition III.1 Toute suite absolument convergente est convergente.

Si la suite (u_n) est absolument convergente, on a de plus :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Démonstration. La convergence est admise.

Pour l'estimation, on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

et c'est un simple passage à la limite dans cette inégalité. ■

! La réciproque est fausse.

■ **Exemple III.1** Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1 \text{ est une série télescopique convergente}$$

mais :

$$|u_n| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$$
$$\underset{n\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{n} = 2\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}$$

Ainsi, c'est une série convergente non absolument convergente. ■

L'idée est de remplacer la suite u_n par $|u_n|$. On peut alors utiliser les résultats de comparaisons qui ne sont valables que pour les suites à termes positifs.

Pour une suite complexe ou à termes de signe quelconque, il faut toujours commencer par montrer la convergence absolue, si cela n'est pas possible, c'est qu'il est possible d'estimer la valeur de la somme partielle (ex : c'est une somme télescopique).

■ **Exemple III.2** Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in}}{n^2}$ est convergente.

La série est absolument convergente, car :

$$\left|\frac{e^{in}}{n^2}\right| \underset{n\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

■

On peut généraliser au résultat suivant :

Proposition III.2 Soit (u_n) une suite complexe, telle qu'il existe une suite de réels positifs (v_n) tels que :

$$u_n \underset{n\infty}{=} O(v_n) \qquad \text{ie} \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists M \in R,\ |u_n| \leqslant M v_n.$$

Si la série (à termes positifs) $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge absolument.

Démonstration. On a : $|u_n| \leqslant M v_n$ à partir d'un certain rang, donc la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge et donc $\sum u_n$ converge absolument. ■

IV Application au développement décimal d'un nombre réel

Théorème IV.1 Soit $x \in [0,1[$, alors il existe une unique suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in [\![0,9]\!] \qquad \text{et} \qquad x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}.$$

et (a_n) n'est pas une suite stationnaire sur 9.

C'est le **développement décimal propre** du réel x.

Démonstration. ADMIS conformément au programme. ■

Cette propriété est une redite de $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Elle est surtout utile combinée à la continuité (par exemple si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et nulle sur les rationnels, alors elle est nulle partout).
On rappelle qu'il y a deux suites d'approximation décimale qui convergent vers le réel x (en fait un couple de suites adjacentes).
La suite croissante est l'approximation décimale par défaut et la suite décroissante est l'approximation décimale par excès. La suite des approximation décimale (par défaut) est : $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. La suite des approximations décimales par excès est : $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
La suite (a_k) ci-dessus est définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor$$

R Il n'y a pas d'unicité si on enlève l'hypothèse : la suite n'est pas stationnaire sur 9, car :

$$1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 0.999999999\ldots$$

Proposition IV.2 Soit $x \in [0,1[$, alors x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

Démonstration. Admis conformément au programme. ■

■ **Exemple IV.1** Le plus simple : $\frac{1}{3} = 0.3333333$, plus compliqué :

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= 0.\underline{142857}14285714285... \\ \frac{1}{1300} &= 0.00\underline{076923}07692307693 \end{aligned}$$

■

Séries numériques

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Séries à termes positifs

Exercice 1 Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

$$\frac{|\cos(n)|}{n^2} \qquad \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \frac{\ln(n)}{n} \qquad \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}\right)$$

$$\frac{n!}{n^n} \qquad \sqrt{n+\frac{1}{2}}-\sqrt{n} \qquad \frac{1}{n^2\ln(n)} \qquad \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}$$

Correction : Toujours indiquer qu'il s'agit de séries à termes positifs :

$$\frac{|\cos(n)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\infty}{\sim} e^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3^n} \qquad \frac{1}{n} \underset{n\infty}{=o} \left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \qquad \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n^2+3n+1}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{n!}{n^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \sqrt{n+\frac{1}{2}}-\sqrt{n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \qquad \frac{1}{n^2\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Exercice 2 Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente.

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n} \qquad \sum e^{a_n}-1 \qquad \sum \frac{1-\cos(a_n)}{a_n} \qquad \sum a_n^2$$

Correction : c'est encore des séries à termes positifs :

$$\frac{a_n}{1+a_n} \leqslant a_n \qquad e^{a_n}-1 \underset{n\infty}{\sim} a_n \qquad \frac{1-\cos(a_n)}{a_n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{a_n}{2} \qquad an^2 = o(a_n).$$

⋆ Nature d'une série

Exercice 3 Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

$$u_n = \frac{n-2}{2^n+1} \qquad u_n = n\sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \qquad u_n = \frac{n(3n+1)\sqrt{n-1}}{(n-\pi)(n+\mathrm{e})}$$

Correction :

1. La suite (u_n) étant à termes positifs (à partir de $n=2$), il suffit de la majorer par le terme général d'une série convergente :
$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{n}{2^n} \underset{n\infty}{=o} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
2. On rappelle $\forall x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$: On a donc :
$$0 \leq u_n \leq n \times \frac{1}{3^n} = n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
Or la série de terme général $n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge car $n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = o\left(\alpha^n\right)$ en choisissant $\alpha \in]\frac{1}{3},1[$. Donc en appliquant le critère de comparaison, on en déduit que $\sum u_n$ converge.
3. Les règles de calcul sur les équivalents donnent facilement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\sqrt{n}$, donc (u_n) ne tend pas vers 0 et $\sum u_n$ ne converge pas (divergence grossière).

⋆ Critère des séries alternées

Exercice 4 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs, convergente vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

1. Monter que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.
3. Donner la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
4. Étudier la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Correction :

1. On pose $p_n = S_{2n}$ et $i_n = S_{2n+1}$. Il s'agit de montrer que les suites (p_n) et (i_n) sont adjacentes. Or :

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} \\ &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+1}. \end{aligned}$$

Or la suite (a_k) est décroissante donc $a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ et donc (S_{2n}) est décroissante.
De même :

$$\begin{aligned} i_{n+1} - i_n &= S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} \\ &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} \\ &= -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc (S_{2n+1}) est croissante.
Enfin : $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc bien adjacentes.
2. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) étant adjacentes, elles convergent toutes les deux, et ce vers une même limite ℓ. Donc la suite (S_n) converge vers ℓ, ce qui signifie que la série $\sum_{k\geq 0} (-1)^k a_k$ converge.
3. Tâchons d'appliquer la première question.
Posons $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Pour $n \geq 1$, il est clair que $\frac{1}{n} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est décroissante. Or la fonction sinus est positive et croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0. En appliquant la première question, on peut donc en déduire que la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge. (Le fait que l'on commence à $n = 1$ et non pas à $n = 0$ ne change pas le résultat, car la nature d'une série ne dépend pas de la valeur de ses premiers termes).
4. Si $\alpha \leq 0$ alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 et donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
Si $\alpha > 0$ alors on pose $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Il est clair que (a_n) est positive, décroissante et tend vers 0. Donc on peut appliquer le résultat de la première question : la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

⭐ Série harmonique et série harmonique alternée

Exercice 5 Série harmonique

Soit $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$.

En étudiant la nature de $\sum\limits_{n} (a_{n+1} - a_n)$, montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\infty}{o}(1)$$

La constante γ est appelée **constante d'Euler**.

Exercice 6 Série harmonique alternée

1. Montrer :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{1-(-1)^N x^N}{1+x} dx$$

2. En déduire : que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Correction :

1. Il faut écrire :

$$\forall x \in [0,1], \ \frac{1-(-1)^N x^N}{1+x} = \sum_{k=0}^{N} (-x)^k$$

puisqu'il s'agit d'une série géométrique de raison $(-x) \neq 1$.
Il reste à intégrer.

2. Il suffit d'écrire :

$$\forall x \in [0,1], \ 0 \leqslant \frac{x^N}{1+x} \leqslant x^N$$

et donc :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^N}{1+x} dx \leqslant \frac{1}{N+1}$$

On en déduit que

$$\lim_{N\infty} \int_0^1 \frac{x^N}{1+x} dx = 0$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{1-(-1)^N x^N}{1+x} dx = \ln(2) + (-1)^N \int_0^1 \frac{x^N}{1+x} dx \to \ln(2).$$

On en déduit :

$$\lim_{N\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

✯ Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (d'après Agro-Véto)

Exercice 7

1. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que :

$$\forall t \in]0,\pi], \ \frac{1-\mathrm{e}^{imt}}{1-\mathrm{e}^{it}} \mathrm{e}^{it} = \frac{\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{e}^{i\frac{m+1}{2}t}.$$

En déduire que :

$$\forall t \in]0,\pi], \ \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{m+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{m}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

3. (a) Soit l'application $f:[0,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f(t)=\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\text{ si } 0<t\leqslant\pi \text{ et } f(0)=-1$$

Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

(b) Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\,\mathrm{d}t$$

En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Correction :

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour calculer

$$I_n=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

on fait une intégration par parties, avec :

$$u(t)=\frac{t^2}{2\pi}-t,\qquad u'(t)=\frac{t}{\pi}-1,$$
$$v'(t)=\cos(nt),\qquad v(t)=\frac{\sin(nt)}{n}$$

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
Cela donne :

$$I_n=\left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi-\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t1$$

Le crochet est nul, car $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sin(n\pi)=0$.
Pour calculer la nouvelle intégrale, on fait une autre intégration par parties, avec :

$$u(t)=\frac{t}{\pi}-1,\qquad u'(t)=\frac{1}{\pi},$$
$$v'(t)=-\frac{\sin(nt)}{n},\qquad v(t)=\frac{\cos(nt)}{n^2}$$

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
Donc

$$\begin{aligned}I_n&=\left[\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{\cos(nt)}{\pi n^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n^2}-\left[\frac{\sin(nt)}{\pi n^3}\right]_0^\pi=\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

2. On factorise par “l'angle moitié” en haut et en bas :

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}e^{it}&=\frac{e^{i\frac{mt}{2}}\left(e^{-i\frac{mt}{2}}-e^{i\frac{mt}{2}}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}\right)}e^{it}\\&=\frac{e^{i\frac{mt}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}}\times\frac{-2i\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}e^{it}\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}e^{it}=\frac{\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}e^{i\frac{m+1}{2}t}$$

D'autre part, $\forall x\in\mathbb{R}, \cos(x)=\mathrm{Re}(e^{ix})$, donc

$$\sum_{n=1}^{m}\cos(nt)=\sum_{n=1}^{m}\mathrm{Re}(e^{int})=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{m}e^{int}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{m}(e^{it})^n\right)$$

C'est la somme d'une suite géométrique de raison $e^{it}\neq 1$ (car $t\in]0,\pi]$). Donc

$$\sum_{n=1}^{m}\cos(nt)=\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}e^{it}\right)$$

D'après le résultat précédemment montré, on obtient

$$\sum_{n=1}^{m}\cos(nt)=\mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}e^{i\frac{m+1}{2}t}\right)=\frac{\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{m+1}{2}t\right)$$

3. (a) Le problème se situe en 0.
La fonction $t\longmapsto\frac{t^2}{2\pi}-t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$, et la fonction $t\longmapsto 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et **ne s'annule pas**. Donc leur quotient f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$.
Étudions f en 0. Commençons par montrer qu'elle est continue en 0. On a : $\frac{t^2}{2\pi}-t\underset{t\to 0}{\sim}-t$ et comme $\sin(u)\underset{u\to 0}{\sim}u$ et $\frac{t}{2}\xrightarrow{t\to 0}0$, on a $\sin\left(\frac{t}{2}\right)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{t}{2}$.
Donc par quotient : $f(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{-t}{2\frac{t}{2}}=-1$, c'est-à-dire $f(t)\xrightarrow{t\to 0}-1$, d'où f **est continue en** 0**, donc sur** $[0,\pi]$.
Pour montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, il reste à montrer que f est dérivable en 0 et que f' est continue en 0.
Pour cela, on va utiliser le théorème sur la limite de la dérivée. Comme on sait que f est continue sur $[0,\pi]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$, il suffit de montrer que f' admet une limite finie en 0.

$$\forall t\in]0,\pi],\ f'(t)=\frac{\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin\left(\frac{t}{2}\right)-\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Cherchons un équivalent du numérateur : pour cela, utilisons le DL à l'ordre 2 de sin et cos en 0 :

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{t}{2}+o(t^2)$$

donc après simplification $\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin\left(\frac{t}{2}\right)=-t+\frac{t^2}{\pi}+o(t^2)$

D'autre part, $\cos\left(\frac{t}{2}\right)=1+o(t)$ donc après simplification,

$$\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)=-t+\frac{t^2}{2\pi}+o(t^2)$$

Donc

$$\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin\left(\frac{t}{2}\right)-\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{t^2}{2\pi}+o(t^2)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{t^2}{2\pi}$$

D'autre part, $4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\underset{t\to 0}{\sim}4\left(\frac{t}{2}\right)^2\underset{t\to 0}{\sim}t^2$.
Donc par quotient, $f'(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{2\pi}$, c'est-à-dire $f'(t)\xrightarrow{t\to 0}\frac{1}{2\pi}$.

Le théorème sur la limite de la dérivée nous affirme que f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{2\pi}$, donc f' est continue en 0.

R Il faut préciser les hypothèses ici et passer par plusieurs étapes.

On a donc montré que f **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $[0,\pi]$.

(b) Posons $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}$. D'après la question a) :

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{n=1}^{m} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{n=1}^{m} \cos(nt)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'après le b),

$$\forall t \in]0,\pi],\ \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{m+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{m}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Donc

$$\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\cos\left(\frac{m+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{m}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

C'est-à-dire, pour tout $t \in]0,\pi]$:

$$\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = 2f(t)\cos\left(\frac{m+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{m}{2}t\right)$$

Il est clair que cette égalité est vraie aussi pour $t = 0$, donc

$$S_m = \int_0^\pi 2f(t)\cos\left(\frac{m+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{m}{2}t\right)\mathrm{d}t$$

D'après la formule $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_m &= \int_0^\pi f(t)\left[\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\mathrm{d}t - \int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2}\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{6}$$

d'où

$$S_m = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$$

Posons $T_m = \int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$. Pour montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge et vaut $\frac{\pi^2}{6}$, il n'y a qu'à montrer que $T_m \xrightarrow{m+\infty} 0$.

On fait pour cela une intégration par parties en dérivant f et en intégrant $t \longmapsto \sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)$, ce qui est légitime car on a montré que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$:

$$T_m = \left[-f(t)\frac{2}{2m+1}\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\right]_0^\pi + \int_0^\pi f'(t)\frac{2}{2m+1}\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$$

on regarde le crochet :

$$\left[-f(t)\frac{2}{2m+1}\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\right]_0^\pi = -\frac{2}{2m+1}f(\pi)\cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right) + \frac{2}{2m+1}f(0)\cos(0)$$

Le crochet tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$, car la fonction cos est bornée, et $\frac{2}{2m+1} \xrightarrow{m+\infty} 0$.
D'autre part :

$$\left| \int_0^\pi f'(t) \cos\left(\frac{2m+1}{2} t\right) \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\pi \left| f'(t) \cos\left(\frac{2m+1}{2} t\right) \right| \mathrm{d}t$$

Comme $|\cos| \leq 1$, on a :

$$\left| \int_0^\pi f'(t) \cos\left(\frac{2m+1}{2} t\right) \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\pi \left| f'(t) \right| \mathrm{d}t$$

qui est une constante indépendante de m.
Donc :

$$\frac{2}{2m+1} \int_0^\pi f'(t) \cos\left(\frac{2m+1}{2} t\right) \mathrm{d}t \xrightarrow{m+\infty} 0$$

On a montré que $T_m \xrightarrow{n+\infty} 0$, donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge et sa somme est $\frac{\pi^2}{6}$.

22 — Déterminants

I Déterminant d'une matrice carrée de taille n

⋆ Le théorème d'existence des déterminants

Théorème I.1 Il existe une unique application

$$\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

(prenant en entrée une matrice carrée et calculant un scalaire donc) vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. det est **linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable**.
   Autrement dit :

$$\det \begin{pmatrix} | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \\ C_1 & & C_{i-1} & C_i + D_i & C_{i+1} & & C_n \\ | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \\ C_1 & & C_{i-1} & C_i & C_{i+1} & & C_n \\ | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \\ C_1 & & C_{i-1} & D_i & C_{i+1} & & C_n \\ | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

et :

$$\det\begin{pmatrix} | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \\ C_1 & & C_{i-1} & \alpha C_i & C_{i+1} & & C_n \\ | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \\ C_1 & & C_{i-1} & C_i & C_{i+1} & & C_n \\ | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

2. det est **antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable**.
   Autrement dit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ \det\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ C_1 & C_i & C_j & C_n \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ C_1 & C_j & C_i & C_n \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

   (lorsqu'on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1).
3. **Le déterminant de l'identité est** 1, ie $\det(I_n) = 1$.

Démonstration. Ce théorème est admis conformément au programme. ■

Notation I.1. *On écrit* $\det(M)$ *le déterminant d'une matrice carrée. ou* $\det(C_1,\dots,C_n)$ *en écrivant les colonnes de* M.

On peut aussi noter :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(avec des traits verticaux à la place des crochets ou des parenthèses).

☆ **Exemples**

■ **Exemple I.1** Sur des matrices 3×3 illustrer ces propriétés. ■

II Propriétés du déterminant

Dans cette section, on liste les propriétés du déterminant d'une matrice.

II.1 Conséquences directes de la définition

Proposition II.1 Si la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a deux colonnes égales, alors $\det(M) = 0$.
Si la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne de 0, alors $\det(M) = 0$

Démonstration. En notant C_i et C_j les colonnes égales, on applique l'antisymétrie par rapport aux colonnes :

$$\begin{aligned}\det(M) &= \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n)\\ &= -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) = -\det(M)\end{aligned}$$

Ainsi, $\det(M) = 0$.

La deuxième provient du fait que l'application est linéaire par rapport à chaque colonne. ∎

Proposition II.2 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$$

> **R** Cela se comporte comme « l'aire ».

Démonstration. C'est la linéarité pour chaque colonne :

$$\begin{aligned}\det(\lambda M) &= \det(\lambda C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_n)\\ &= \lambda \det(C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_n) = \dots\\ &= \lambda^n \det(C_1, C_2, \dots, C_n) = \lambda^n \det(M)\end{aligned}$$

∎

Proposition II.3 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

- L'opération élémentaire de transposition (inverser deux colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$) multiplie le déterminant par -1 :

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

- L'opération élémentaire de dilatation (faire $C_i \leftarrow \beta C_i$) multiplie le déterminant par β :

$$\det(C_1, \dots, \beta C_i, \dots, C_n) = \beta \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

- L'opération de transvection (faire $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$) ne change pas le déterminant.

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i + \alpha C_j, \dots, C_n)$$

> **R** L'opération $C_i \leftarrow \beta C_i + \alpha C_j$ multiplie le déterminant par β. Par contre, ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres (ie $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j C_j$) ne change pas le déterminant.

Démonstration. C'est des conséquences de la définition.

Les deux premiers sont directement la définition. Pour le troisième, c'est :

$$\begin{aligned}
&\det(C_1,\dots,C_i+\alpha C_j,\dots,C_j,\dots C_n)\\
=&\det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j,\dots,C_n)+\alpha\underbrace{\det(C_1,\dots,C_j,\dots,C_j,\dots,C_n)}_{=0 \text{ car deux colonnes identiques}}
\end{aligned}$$

■

Corollaire II.4 Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

R Triangulaire supérieure ou inférieure.

Démonstration. On traite la cas où $n=4$ en considérant T une matrice triangulaire, notée :

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & * & * & * \\ & t_{22} & * & * \\ & & t_{33} & * \\ & & & t_{44}\end{pmatrix}$$

On va donc montrer :

$$\det(T)=t_{11}t_{22}t_{33}t_{44}$$

Si t_{11} est nul, on a $\det(T)=0$. Sinon, on peut faire l'opération élémentaire : $C_2\to C_2-\frac{*}{t_{11}}$, qui ne change pas le déterminant, on obtient :

$$\det(T)=\det\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & * & * \\ & t_{22} & * & * \\ & & t_{33} & * \\ & & & t_{44}\end{pmatrix}$$

puis on recommence avec la troisième colonne, etc, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\det(T)&=\det\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & t_{22} & * & * \\ & & t_{33} & * \\ & & & t_{44}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & t_{22} & 0 & 0 \\ & & t_{33} & * \\ & & & t_{44}\end{pmatrix}\\
&=\det\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & t_{22} & 0 & 0 \\ & & t_{33} & 0 \\ & & & t_{44}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(si l'un des termes diagonaux est nuls, la matrice a un déterminant nul).

On continue ensuite en faisant : $C_1 \leftarrow \frac{1}{t_{11}}$, puis de même pour les autres colonnes, ce qui donne :

$$\begin{aligned} det(T) =& t_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & t_{22} & 0 & 0 \\ & & t_{33} & 0 \\ & & & t_{44} \end{pmatrix} = t_{11}t_{22}t_{33}t_{44} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ =& t_{11}t_{22}t_{33}t_{44} \end{aligned}$$

d'après la propriété $\det(I_n) = 1$. ■

II.2 Méthode pratique de calcul du déterminant

On a donc une technique pour calculer le déterminant : réduire la matrice (avec Gauss) puis faire le produit des éléments diagonaux. Attention : certaines opérations modifient le déterminant.

En particulier, si la matrice n'est pas de rang plein, alors son déterminant est nul !

✎ On verra que l'on peut faire des opérations sur les lignes aussi.

■ **Exemple II.1** Prendre une matrice 3×3 calculer le déterminant en réduisant la matrice. ■

⋆ Cas de la dimension 2

■ **Exemple II.2** Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on constate que $det(M) = ad - bc$. On retrouve ainsi la définition déjà utilisée au chapitre systèmes : ■

✎ On peut vérifier rapidement que l'application $M \longmapsto \det(M)$ vérifie les conditions pour les matrices carrées de taille 2.

Considérons un parallélogramme du plan (A,B,C,D). On munit le plan du repère orthonormé : $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, avec $\overrightarrow{i}$ colinéaire à $[A,B]$ (dans le même sens). on note $\mathscr{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base de $\mathbb{R}^2$.

On sait que l'aire du parallélogramme est la valeur $h||\overrightarrow{AB}||$. On note P le pieds de la hauteur issue de D (faire un dessin).

On a alors :

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) &= \det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP}\right) \\ &= \det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\right) + \det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\right) \\ &= \det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\right) \\ &= \begin{vmatrix} ||\overrightarrow{AB}|| & 0 \\ 0 & \pm h \end{vmatrix} = \pm h||\overrightarrow{AB}|| \end{aligned}$$

Ainsi, la valeur du déterminant est égale à l'aire algébrique du parallélogramme.

On verra que cette valeur ne dépend pas de la base choisie.

II.3 Développement selon une ligne ou une colonne

Définition II.1 Étant donné une matrice $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et un couple d'entiers $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle :

- mineur de $a_{i,j}$ le déterminant noté $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de M obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne.
- cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

R Il s'agit bien de matrice carrée.

■ **Exemple II.3** Prendre une matrice 3×3 et la « découper » en mineur. ■

Théorème II.5 — Développement selon une ligne ou une colonne. Soit $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n alors on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

Autrement dit : on peut calculer le déterminant de la matrice M en la découpant selon les mineurs et en calculant le déterminant des petites matrices.

! Ne pas oublier le signe !

⋆ **Cas de la dimension 3**

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ On a :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

On peut retrouver cette formule en écrivant la matrice puis les deux premières lignes et en faisant des diagonales.

✎ Cette règle (dite règle de Sarus) ne se généralise pas aux déterminants de taille supérieure.
Il ne faut pas en abuser, c'est souvent plus simple et mieux vu d'utiliser les techniques de réduction des déterminants plutôt que la règle de Sarus.
Si il y a un paramètre, alors le déterminant doit être factorisé.

⋆ **Cas particuliers fréquents**

Si la matrice contient un seul terme non nul dans une ligne ou colonne, il faut systématiquement développer selon cette ligne ou cette colonne.

Par exemple, si

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline * & * & * & a_{nn} \end{array}\right)$$

alors :

$$\det(A) = (-1)^{2n}\det(A')$$

De même, si

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \det(A) = (-1)^{1+1}\det(A')$$

On peut développer selon n'importe qu'elle ligne ou colonne.

✎ Cela donne par exemple des formules de récurrence pour le calcul de déterminants.

■ **Exemple II.4** Calcul de $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ ■

✎ On peut aussi réduire la matrice avec des opérations sur les lignes (et les colonnes) puis faire un développement selon une ligne / colonne.

III Applications du calcul du déterminant

III.1 Déterminant d'une matrice inversible

Proposition III.1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$

Démonstration. On a vu que A est inversible si et seulement si son rang est n si et seulement si elle se réduit en une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont non nuls ! ■

III.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition III.1 — Déterminant d'une famille de vecteurs. Soit E un EV de dimension finie n, $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{F}$ une famille de E constituée de n vecteurs.

On appelle alors déterminant de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ le déterminant de la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \det(Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$$

R Le déterminant d'une famille dépends de la base dans laquelle sont prises les coordonnées.

Proposition III.2 Soit E un EV de dimension finie n, $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{F}$ une famille de E constituée de n vecteurs.

Alors $\mathscr{F}$ est une base si et seulement si son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ est non nul. Cela ne dépends pas de la base choisie

Démonstration. $\mathscr{F}$ ayant le bon nombre de vecteurs, elle est une base si et seulement si son rang est n, si et seulement si la matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ est inversible si et seulement si le déterminant de cette matrice est non nul. ∎

Le déterminant d'une famille dépends de la base, mais si il existe une base $\mathscr{B}$ tel que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$, alors quelque soit le choix de la base $\mathscr{B}'$, on aura $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{F}) \neq 0$. La valeur dépends de la base, mais la nullité / non nullité ne dépends pas de la base.

III.3 Déterminant et opérations matricielles

Dans cette sous section, on regarde le lien entre les opérations sur les matrices (produit / inverse /transposée) et les déterminants.

Proposition III.3 Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a alors :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Démonstration. Si l'un des deux matrices A ou B est non inversible, alors le produit AB est non inversible, et on a bien la formule $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

On suppose donc les matrices AB inversibles, Ces matrices sont alors le produit de matrice d'opération élémentaire, puisqu'on peut les réduire par des opérations sur les lignes à l'identité.

On peut donc écrire :

$$A = P_1 \dots P_n \qquad \text{et} \qquad B = Q_1 \dots Q_m$$

avec P_i et Q_j des matrices de permutations, transvection ou dilatation.

On va donc commencer par traiter le cas où B est une matrice d'opérations élémentaires.

Pour une matrice P de permutation (inverse des colonnes), on a pour toute matrice B, $\det(AP) = -\det(A)$ (puisqu'on a inversé deux colonnes). Or $\det(P) = -1$ (puisque P est obtenu à partir de l'identité en inversant deux colonnes). On a donc :

$$\det(AP) = \det(A)\det(P)$$

Pour une matrice P de dilatation , c'est la même idée : $\det(AP) = \beta \det(A)$ puisqu'on a fait l'opération $C_j \leftarrow \beta C_j$, et $\det(P) = \beta$ puisqu'on a fait la même opération à l'identité. On a donc la même formule.

Enfin, pour une matrice P de transvection (correspondant à l'opération $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_k$), on a de même : $\det(AP) = \det(A)$ puisque cette opération ne change pas le déterminant et $\det(P) = 1$ puisqu'on a fait la même opération à l'identité. On a donc la même formule.

En appliquant à B que l'on décompose en un produit de matrice d'opérations élémentaires, on a :

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(AQ_1 \dots Q_m)\\ &= \det(A)\det(Q_1)\dots\det(Q_m)\\ &= \det(Q_1)\dots\det(Q_m)\det(A) = \det(Q_1\dots Q_m)\det(A) = \det(B)\det(A)\end{aligned}$$

■

✎ En particulier $\det(AB) = \det(BA)$, alors que $AB \neq BA$ dans le cas général.
On peut aussi voir que $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

✎ On a vu que le déterminant dépendait des bases.
On peut se demander ce qui se passe lorsque l'on change de base.
On a :

$$Mat_{\mathscr{B}'}(\mathscr{F}) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(id)Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$$

et donc :

$$\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{F}) = \det_{\mathscr{B}}\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$$

Cette formule de **changement de base** est hors-programme et n'est pas à retenir. Par contre, il est important de connaître la technique d'utiliser la matrice identité (que l'on a déjà vu pour les formules de changement de base pour les endomorphisme).

Corollaire III.4 Soit A une matrice inversible. Alors $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
Autrement dit, le déterminant de l'inverse est l'inverse du déterminant.

Démonstration. On a $AA^{-1} = I_n$. D'où le résultat en appliquant le déterminant. ■

III.4 Déterminant de la transposé

Proposition III.5 Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a alors :

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A)$$

Démonstration. Les opérations sur les colonnes de A pour la réduire en l'identité correspondent aux opérations sur les lignes de ${}^tA$.

Ainsi, si on réduit A par des opérations sur les colonnes (en multipliant à droite), on a :

$$AP_1 \dots P_N = I_n \text{ avec } \left(P_i\right) \text{les opérations sur les colonnes de } A \text{ pour la réduire}$$

donc en effectuant les mêmes opérations sur les lignes de ${}^tA$, on la réduit. Cela corresponds à multiplier à gauche par les mêmes matrices d'opérations élémentaires.

$$P_N \dots P_1 {}^tA = I_n$$

En appliquant le déterminant cela donne :

$$\det(A)\det(P_1)\dots\det(P_N) = 1 \text{ et } \det(P_1)\dots\det(P_N)\det\left({}^tA\right) = 1$$

D'où $\det(A) = \det\left({}^tA\right)$. ■

Ainsi, le déterminant vérifie les mêmes propriétés pour les lignes et pour les colonnes.

On peut donc calculer le déterminant en utilisant des opérations élémentaires inversibles sur les lignes et sur les colonnes. Précisément :

- l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ mutliplie le déterminant par -1,
- l'opération $L_i \leftarrow \beta L_i$ mutliplie le déterminant par β,
- l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant.

III.5 Déterminant d'un endomorphisme

Définition III.2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E.

Alors on appelle déterminant de f le réel :

$$\det(f) = \det_{\mathscr{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det\left(Mat_{\mathscr{B}}(f)\right)$$

C'est donc le déterminant de la matrice de l'application linéaire f en choisissant la base $\mathscr{B}$ (pour espace de départ et d'arrivée de f).

A priori, cela dépends donc du choix de la base $\mathscr{B}$.

Proposition III.6 Le déterminant de f ne dépends pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Démonstration. Soit $\mathscr{B}'$ une autre base de E.

On a alors :

$$Mat_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1} Mat_{\mathscr{B}}(f) P \text{ avec } P \text{ la matrice de passage de } \mathscr{B} \text{ à} \mathscr{B}'.$$

En utilisant la propriété du déterminant, on a :

$$\begin{aligned} det\left(Mat_{\mathscr{B}'}(f)\right) &= \det\left(P^{-1} Mat_{\mathscr{B}}(f) P\right) \\ &= \det\left(P^{-1}\right)\det\left(Mat_{\mathscr{B}}(f)\right)\det(P) \\ &= \det\left(Mat_{\mathscr{B}}(f)\right). \end{aligned}$$

■

Notation III.1. *On note donc* $\det(f)$ *sans indication de la base.*

On a les liens suivants entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur le déterminant :

Proposition III.7 Soit f et g deux endomorphisme de l'EV E de dimension finie n, alors on a :

$$\begin{aligned} \det(\lambda f) &= \lambda^n \det(f) \\ \det(f \circ g) &= \det(f)\det(g) \end{aligned}$$

De plus, f est bijective si et seulement si $\det(f) \neq 0$ et dans ce cas :

$$\det\left(f^{-1}\right) = \frac{1}{\det(f)}.$$

Démonstration. La matrice $Mat_{\mathscr{B}}(\lambda f)$ est égale à $\lambda Mat_{\mathscr{B}}(f)$ (puisqu'on multiplie toutes les colonnes par λ). Ainsi : $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

La deuxième propriété provient de :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f \circ g) = Mat_{\mathscr{B}}(f) Mat_{\mathscr{B}}(g)$$

On applique alors le déterminant.

Pour la dernière, on a f est bijective si et seulement si sa matrice $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible et donc si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce cas :

$$Mat_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right) = Mat_{\mathscr{B}}(f)^{-1}.$$

D'où le résultat en appliquant le déterminant. ■

! Le déterminant n'est pas linéaire !

Déterminants

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

✰ Calculs de déterminants sans paramètre

Exercice 1 Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Correction : faire des opérations selon les lignes ou les colonnes, puis développer ou utiliser la règle de Sarus.

✰ Calculs de déterminants avec paramètres

Exercice 2 Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs de λ pour lesquels $\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}$.

Correction : Il faut trouver les valeurs de λ tel que $\det(f - \lambda I_d) = 0$.
Faire des opérations selon les lignes ou les colonnes, puis développer ou utiliser la règle de Sarus.

Exercice 3 Déterminer pour quelle(s) valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m & -m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & -1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

est inversible.

Correction : En faisant :

$$l_2 \leftarrow l_2 + l_1$$
$$l_3 \leftarrow l_3 - m l_1$$
$$l_4 \leftarrow l_4 - m l_1$$

cela donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & m & -1 & m \\ 0 & 1+m & -m-1 & 0 \\ 0 & 1-m^2 & 1+m & m-m^2 \\ 0 & -1-m^2 & 1+m & -m-m^2 \end{vmatrix}$$

Si $m = -1$ la ligne 2 est vide, sinon on la divise par $1+m$.

$$\begin{vmatrix} 1 & m & -1 & m \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & (1-m)(1+m) & 1+m & m(1-m) \\ 0 & -1-m^2 & 1+m & -m(1+m) \end{vmatrix}$$

On peut finir par des opérations sur les lignes, ou développer selon la deuxième ligne.

✰ Déterminant de taille quelconque

Exercice 4 Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Correction : on vérifie que $D_{n+2} = D_n$ avec $D_2 = 1$ et $D_3 = 0$. Il faut faire : $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$, puis $l_1 \leftarrow l_1 + l_n$.

Exercice 5 Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Faire :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ L_i \leftarrow L_i - L_n \qquad \text{suivi de } C_n \leftarrow \sum_{i<n} C_n$$

pour avoir une matrice triangulaire supérieure.

On obtient : $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Exercice 6 Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix}$$

En faisant $l_1 \leftrightarrow l_n$, puis $l_2 \leftrightarrow l_{n-1}$, etc..... $D_n = (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n$.

On peut aussi développer selon la première colonne : $D_n = (-1)^{n+1} \lambda_n D_{n-1}$.

Ensuite chercher et démontrer une formule par récurrence :

$$D_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \lambda_1 \dots \lambda_n$$

Exercice 7 Déterminant de Vandermonde

Soit $n \geqslant 2$, $(a_1, \dots, a_n)$ des scalaires et le déterminant :

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Montrer que :

$$V_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On note $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$.

Vérifier :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(a_1) \\ P(a_2) \\ \vdots \\ P(a_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Interpréter : quel résultat on vient de retrouver ?

Correction :
On démontre par récurrence en utilisant :

$$\begin{aligned} & C_n \leftarrow C_n - a_1 C_{n-1} \\ \text{puis } & C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - a_1 C_{n-2} \\ & \vdots \\ & C_i \leftarrow C_i - a_1 C_{i-1} \\ & C_2 \leftarrow C_i 2 - a_1^i C_1 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} V_n = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ = & (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) V_{n-1} \end{aligned}$$

On retrouve les polynômes de Lagrange, la matrice corresponds à l'application :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{cases}$$

Si $(a_0, \dots, a_n)$sont $n+1$ réels distincts, alors l'application est bijective.

23 — Variables aléatoires

I Variables aléatoires sur un univers finis

I.1 Introduction

Une variable aléatoire modélise *le gain d'une expérience aléatoire*, c'est-à-dire qu'à chaque résultat possible de l'expérience aléatoire, on associe un nombre.

Définition I.1 — Variable aléatoire réelle. Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé.

On appelle variable aléatoire X une fonction définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E quelconque.

On appelle variable aléatoire réelle (VAR) X une fonction définie sur l'univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble des valeurs possibles de X c'est-à-dire l'ensemble image $X(\Omega)$ est appelé **univers image** de la variable aléatoire X.

⋆ **Notation** $X \in B$

Lorsqu'on a une variable aléatoire X, et B une partie de $\mathbb{R}$, on peut calculer la probabilité X soit dans B.

On considère alors l'événement :

$$\left(X \in B\right) = \left\{w \in \Omega \middle| X(w) \in B\right\} \subset \Omega$$

C'est donc l'événement « *le gain X est dans l'ensemble B* ». **Attention :** dans cette écriture $\left(X \in B\right)$ désigne donc un ensemble (plus précisément un événement).

De même, on notera les événements : $X = a, X \leqslant a$, etc qui désignent respectivement « *le gain vaut a* », « *le gain est inférieur ou égal à a*, etc. Cette notation est donc très intuitive.

En particulier, on a $p(X \in B)$ est la probabilité de l'événement « *le gain X est dans l'ensemble B* ». De la même manière, on note $p(X = a)$, $p(X > a)$, $p(X \geqslant B)$, $p(a < X \leqslant B)$.

On gardera en tête qu'on mesure des ensembles de Ω.

■ **Exemple I.1** Soit l'expérience aléatoire de lancer deux dés. L'univers est alors $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. On considère la variable aléatoire X qui a un résultat associe la somme.

$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,6]\!]^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (i,j) & \mapsto & i+j \end{array} \right.$$

L'univers images est alors $[\![2,12]\!]$, c'est l'ensemble des sommes possibles. On peut calculer les valeurs des événements $X=7$, $X>9$ etc. en utilisant la probabilité uniforme sur Ω. ■

✎ Lorsque l'on manipule des variables aléatoires, il est important de se demander quel est l'univers image $X(\Omega)$.
Il arrive parfois que l'on « ajoute » artificiellement des valeurs dans $X(\Omega)$ qui sont de probabilités nulles de manière à avoir un univers image plus simple à exprimer

■ **Exemple I.2** Si on tire n fois dans une urne qui contient N boules, avec N_1 blanches et N_2 noires. On note X le nombre de blanches.

On peut dire que $X(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$. Dans certains cas, toutes les valeurs ne sont pas atteintes. ■

I.2 Loi de probabilités d'une variables aléatoires

Définition I.2 — Loi de probabilité. Soit X une variable aléatoire, on appelle loi de probabilité de X, l'application

$$f_X : \left\{ \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & p(X=x) \end{array} \right. .$$

Déterminer la loi de la variable X c'est donc :

✎ Déterminer l'univers image $X(\Omega)$,

✎ Déterminer pour tout $x \in X(\Omega)$ la valeur de $p(X=x)$. Si il y a peu de valeurs dans l'univers image, on fera un tableau, sinon on donnera une formule donnant $p(X=x)$ en fonction de x.

■ **Exemple I.3** Toujours dans le cas de la somme de deux dés, on a :
- $f_X(2) = \frac{1}{36}$, car c'est la pobabilité du couple $(1,1)$,
- $f_X(3) = \frac{2}{36}$, car c'est la probabilité des couples $(1,2)$ et $(2,1)$,
- $f_X(4) = \frac{3}{36}$, car c'est la probabilité des couples $(1,3)$, $(2,2)$ et $(3,1)$.etc..

On représente souvent la loi sous forme **d'histogramme**. ■

I.3 Système complet associé à une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur un univers fini Ω, alors $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$ (application surjective dans ce cas) , donc on a $card(\Omega) \geqslant card(X(\Omega))$. En particulier $X(\Omega)$ est fini. Cette remarque permet de définir :

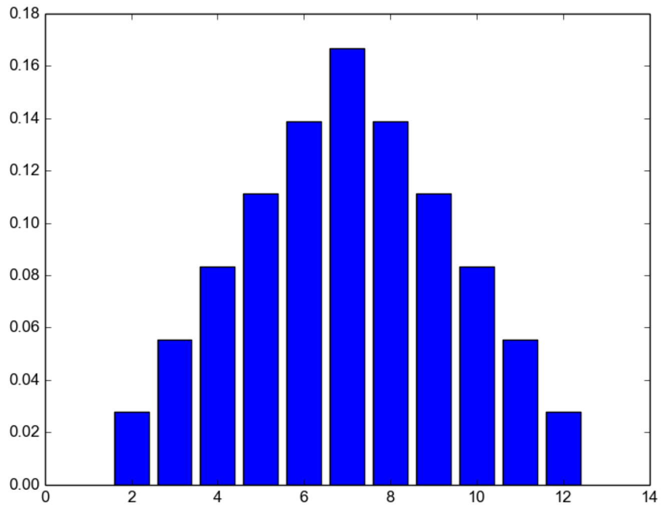


FIGURE 23.1 – histogramme associé à une somme de deux dés

Proposition I.1 Soit une variable aléatoire X sur un univers fini Ω, on pose $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Alors les ensembles $(X = x_k)_{k=1\ldots n}$ sont un système complet d'événements de Ω :

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} (X = x_k)$$

Il s'agit du **système complet d'événement associé** à la variable aléatoire X.

Ce système complet est intéressant car il découpe l'univers Ω en région où X est constante. En fait il découpe Ω selon la valeur de X.

Démonstration. On a clairement $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$, car une éventualité de $(X = x_i) \cap (X = x_j)$ vérifieraient à la fois $X(w) = x_i$ et $X(w) = x_j$. D'un autre côté, soit w un élément de Ω (*i.e.* une éventualité) alors, $X(w)$ est l'un des x_k, en choisissant pour valeur de k celle telle $X(w) = x_k$, on a bien $x \in (X = x_k)$. ■

En conséquence importante, on a :

Proposition I.2 Pour toute VAR, on a la relation :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} p(X = x) = \sum_{k=1}^{x_n} p(X = x_k) = \sum_{k=1}^{x_n} f_X(x_k) = 1,$$

ce qui signifie que **la somme des hauteurs d'un histogramme d'une VAR fait 1**.

Démonstration. La démonstration est évidente en utilisant le système complet d'événement associé à X : on a $p(\Omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} p(X = x)$. ■

Cette relation est particulièrement utile dans le cas où la loi de la VAR X dépend d'un paramètre, l'équation obtenue permet alors de déterminer le paramètre.

Le système complet d'événements associé à une variable aléatoire est très utile. Revoir la formule des probabilités totales.

I.4 Fonction de répartition

Définition I.3 — Fonction de répartition. Soit X une variable aléatoire sur Ω, on appelle fonction de répartition la fonction F_X définie par :

$$F_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & P(X \leqslant x) \end{array} \right.$$

■ **Exemple I.4** La somme de deux dés. blablabla. ■

Déjà il est clair que F_X est croissante (au sens large), car : si $x \leqslant x'$, on a clairement que l'événement $X \leqslant x$ est inclus dans $X \leqslant x'$ donc $F_X(x) \leqslant F_X(x')$. En fait, on montre qu'elle est constante par morceaux avec des saut égaux à $p(X = x_k)$ au points x_k.

Proposition I.3 Si on note de la même manière que précédemment : $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, en ordonnant les x_i par ordre croissant, *i.e.* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
On a alors :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ \sum_{k=1}^{i} p(X = x_i) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[\\ 1 & \text{si } x \geqslant x_n. \end{cases}$$

Démonstration. En effet, si $x < x_1$ il est clair que l'événement $X < x$ est impossible, de même, $x \geqslant x_n$, l'événement $X < x$ est certain. si $x \in [x_i, x_{i+1}[$, alors l'événement $X \leqslant x$, se découpe selon :

$$p(X \leqslant x) = \sum_{k=1}^{n} p\Big((X \leqslant x) \cap (X = x_k)\Big) = \sum_{k=1}^{i} p(X = x_k).$$

■

La démonstration montre l'importance du SCE associé à X.

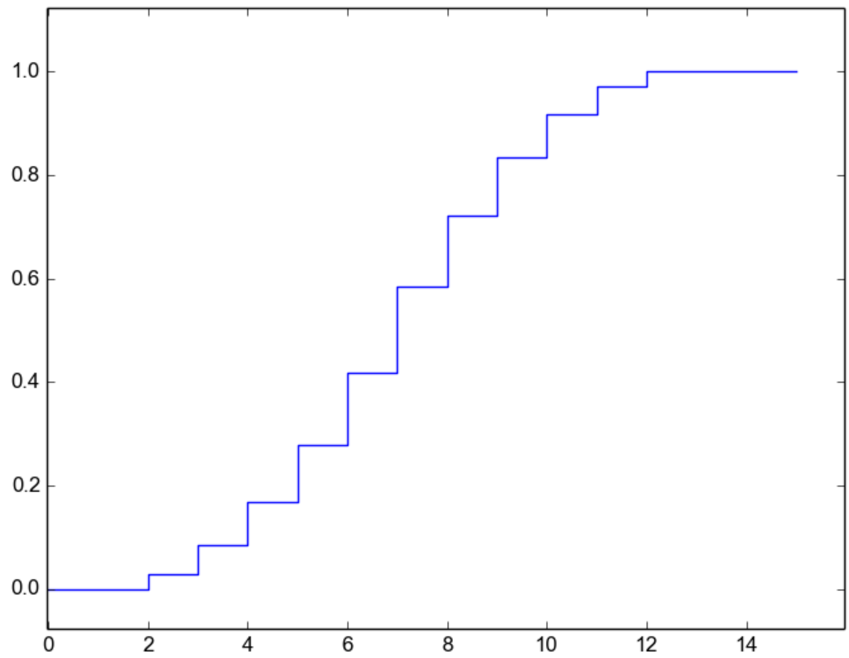


FIGURE 23.2 – Fonction de répartition associéeà une somme de deux dés

> En conséquence importante, on a :
> - la loi de f_X définit la fonction de répartition F_X,
> - la fonction de répartition F_X définit la loi de f_X.

En effet, on a :

$$f_x(x_1) = P(X = x_1) = F_X(x_1), \qquad \forall i \in [\![2,n]\!],\ f_X(x_i) = P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}).$$

Ce qui permet de retrouver la fonction f_X à partir de F_X.

Les fonctions de répartition sont particulièrement utile dans le cadre de loi du maximum : on calcule la fonction répartition, on en déduit la loi.

■ **Exemple I.5** On lance deux dés et on note X le maximum. On a alors $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$.
Et on obtient :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1,6]\!], p(X \leqslant k) =& p(D_1 \leqslant k \cap D_2 \leqslant k)\\ =& p(D_1 \leqslant k)p(D_2 \leqslant k)\\ =& \frac{k^2}{36}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![1,6]\!],\ p(X \leqslant k) =& p(X=k) + p(X \leqslant k-1) \\
\text{donc } \forall k \in [\![1,6]\!],\ p(X = k) =& p(X \leqslant k) - p(X \leqslant k-1) \\
=& \frac{1}{36}\left(k^2 - (k-1)^2\right) \\
=& \frac{1}{36}(2k-1).
\end{aligned}$$

Attention, rigoureusement, le cas $k=1$ doit se traiter à part, puisqu'il faut vérifier que $P(X \leqslant 0) = 0$. ■

R Pour un minimum on utilise $p(X \leqslant k)$.

II Espérance

II.1 Définition

L'espérance est une mesure de la « *valeur moyenne* » d'une variable aléatoire, les valeurs sont pondérés par leur poids, *i.e.* leur probabilité.

Définition II.1 — Espérance. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini Ω, on appelle espérance mathématiques de la v.a.r X, le nombre noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p(X = x).$$

où $X(\Omega) = (x_i)_{i=1\ldots n}$.

On dit que la var X est centrée si $E(X) = 0$.

On appelle cela espérance, car si X représente le gain, alors l'espérance représente le gain moyen. On dit ainsi qu'un jeu est **équilibré** si la variable aléatoire du gain est centrée.

■ **Exemple II.1** Pour le lancer de deux dés, et la var X qui représente la somme des deux dés vérifie :

$$E(X) = 2\times\frac{1}{36} + 3\times\frac{2}{36} 4\times\frac{3}{36} + 5\times\frac{4}{36} + 6\times\frac{5}{36} + 7\times\frac{6}{36} + 8\times\frac{5}{36} + 9\times\frac{4}{36} + 10\times\frac{3}{36} + 11\times\frac{2}{36} + 12\times\frac{1}{36} =$$

■

On peut aussi déterminer si un jeu est équitable.

■ **Exemple II.2** Un joueur lance 2 dés, si il sort 7, il touche 5 euros, sinon il perd un euro. La variable aléatoire associe alors à un couple (i,j) la valeur 5 si $i+j=5$, et la valeur -1 sinon. on espérance est :

$$E(X) = 5\times\frac{6}{36} - 1\frac{30}{36} = 0.$$

Ainsi, le jeu est équilibré. ■

Proposition II.1 Soient X et Y des var, on a alors :
- Si $X \geqslant 0$, c'est-à-dire : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant 0$, alors $E(X) \geqslant 0$.
- Si $X \geqslant a$ (même sens), alors $E(X) \geqslant a$.
- Si $X \geqslant Y$ (même sens), alors $E(X) \geqslant E(Y)$.

On dit que l'espérance est croissante.

II.2 Image d'une variable aléatoire par une fonction

Soit X une var et U une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $U(X) = u \circ X$ est aussi une variable aléatoire notée $Y = U(X)$. Si $X(\Omega) = \left\{w_1, \ldots, w_n\right\}$. Alors $U(X)\ (\Omega) = \left\{U(w_1), \ldots, U(w_n)\right\}$.

Attention, dans cette dernière notation les éléments ne sont pas nécessairement distincts et cet ensemble n'est pas forcément de cardinal n puisqu'il peut exister w_i et w_j tel que $U(w_i) = U(w_j)$.

Notons m son cardinal, et $y_1, \ldots, y_m$ les m valeurs distinctes de l'ensemble

$$Y(\Omega) = \left\{U(w_1), \ldots, U(w_n)\right\} = \left\{y_1, \ldots, y_m\right\}.$$

Soit $j \in [\![1, m]\!]$, pour calculer $p(U(X) = y_j)$, il faut déterminer l'ensemble :

$$I_j = \left\{i \in [\![1, n]\!] \;\middle|\; U(w_i) = y_j\right\}.$$

On a alors : L'événement $(U(x) = y_j)$ est alors la réunion disjointe des événements $(X = w_i)$ pour $i \in I_j$. Ainsi, on a :

$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I_j} P(X = w_i).$$

On peut donc calculer la loi de Y en connaissant celle de X, à condition de déterminer les ensemble I_j.

■ **Exemple II.3** Un joueur lance un Dé et gagne $d - 4$ euros, où d est la valeur de la face obtenue.

On note X le gain. On a alors :

$$X(\Omega) = \{-3, -2, \ldots, 2\},\ \text{et} \qquad \forall x \in X(\Omega), p(X = x) = \frac{1}{6}.$$

On note Y la somme d'argent échangée, ainsi $Y = |X|$. On a alors : $Y(\Omega) = [\![0, 3]\!]$, et

$$\begin{aligned}
p(Y = 0) &= P(X = 4) = \frac{1}{6}, \\
p(Y = 1) &= P(X = 5) + P(X = 3) = \frac{2}{6}, \\
p(Y = 2) &= P(X = 6) + P(X = 2) = \frac{2}{6}, \\
p(Y = 3) &= P(X = 1) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

■

R ce raisonnement est souvent à refaire pour déterminer la loi d'une composée. Le principe à retenir est d'utiliser le système complet d'événements associé à la VAR.

■ **Exemple II.4** On tire un dé, on touche 0 si impair, la moitié si pair. ■

II.3 Espérance d'une composée : théorème de transfert

Proposition II.2 Soit X une var, et U une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a :

$$E(U(X)) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i)p(X = x_i)$$

Démonstration. Ce résultat est admis.

Cette formule se démontre via la loi de Y que l'on a déterminée plus haut. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
E(U(X)) &= \sum_{j=1}^{m} y_j p(Y = y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i \in I_j} p(X = x_i) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in I_j} U(x_i)p(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} U(x_i)p(X = x_i).
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que les (I_j) forment une partition de $[\![1,n]\!]$. ■

Ainsi, à partir de X et de U, on a construit une nouvelle var $U(X)$ de Ω dans $\mathbb{R}$, par composition. On a exprimé l'espérance composée de cette nouvelle var en fonction de l'espérance de X et de U, ce qui est plus simple que de calculer la loi de Y avec ce qui précède.

Un corollaire important est :

Proposition II.3 Si a et b sont réels, et $Y = aX + b$, dans le sens où Y une var définie sur Ω par $Y(w) = aX(w) + b$.

On a dans ce cas : $E(Y) = aE(X) + b$.

En particulier on voit que pour toute var, $X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée.

II.4 Linéarité et croissance de l'espérance

Proposition II.4 Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. On a alors : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

On a aussi pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$.

Ce résultat est admis à ce stade, on le reverra dans la partie sur les couples de VARs.

Proposition II.5 Soit X une variable aléatoire positive, tel que $X \geqslant 0$, au sens où : $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0$.

On a alors : $E(X) \geqslant 0$.

En conséquence, si X et Y sont deux variables aléatoires telles que : $X \leqslant Y$, dans le sens où : $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Démonstration. ADMIS. ■

III Moments et variance

III.1 Moments

Définition III.1 — Moments et moments centrés. Soit $r \in \mathbb{N}$, et X une VAR, Le moment d'ordre r de X, noté $m_r(X)$ est l'espérance mathématique de la var X^r.

D'après le théorème de Transfert, il s'agit donc, avec les notations habituelles de :

$$m_r(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r p(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r p(X = x) = E(X^r).$$

On utilise aussi le moment centré d'ordre r, noté $\mu_r(X)$ qui est l'espérance mathématiques de la var $(X - E(X))^r$:

$$\mu_r(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^r p(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^r p(X = x) = E\left[(X - E(X))^r\right].$$

R Par définition, le moment d'ordre 1 est l'espérance de la variable aléatoire. En pratique, les moments servent peu pour les variables aléatoires finies. Leur définition est à la limite du programme, ils auront surtout un intérêt en deuxième année pour les VAR à univers non finis.

III.2 Variance

Définition III.2 — Variance. Soit X une var sur un univers fini, avec $X(\Omega) = (x_i)_{i=1\dots n}$.

On appelle :

- variance de la var X le réel noté $V(X)$ défini par :

  $$V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) = E([X - E(X)]^2)$$

  Ce nombre est positif comme somme de nombres positifs. C'est donc le moment centré d'ordre 2.
- écart-type le nombre noté $\sigma(X)$ défini par :

  $$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

R L'écart type et X ont même unité.

■ **Exemple III.1** La variance mesure combien une var s'éloigne de sa moyenne : en effet toutes les var prenant deux valeurs a et $-a$ et telles que $p(X=-a)=0.5$ et $p(X=a)=0.5$, sont centrées, mais elles n'ont pas le même comportement : plus a est grand, moins elles sont concentrées en 0. Ici on a : $V(X)=a^2(0.5)+(-a)^2(0.5)=2a^2$.
■

Proposition III.1 Si a et b sont réels, alors :

$$V(aX+b)=a^2V(X) \text{ et } \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X).$$

Démonstration. On a : $E\Big(aX+b\Big)=aE(X)+b$, par linéarité de l'espérance. Puis :

$$\begin{aligned}
V(X) =& E\Big(\big(aX+b-E(aX+b)\big)^2\Big)\\
=& E\Big(\big(aX-aE(X)\big)^2\Big)\\
=& E\Big(\big(a(X-E(X))\big)^2\Big)\\
=& E\Big(a^2(X-E(X))^2\Big)\\
=& a^2V(X)
\end{aligned}$$

■

On dit qu'une var est **réduite si sa variance vaut 1**.
La proposition précédente permet d'introduire la définition :

Définition III.3 — Variable centrée réduite. Si X est une var, on appelle variable centrée réduite la variable aléatoire :

$$Y=\frac{X-E(X)}{\sigma(X)},$$

cette var est de moyenne nulle (centrée), et a une variance de 1 (elle est réduite). Cela permet de faire un changement de variable pour ramener $E(X)$ en 0 et la variance à 1.

III.3 Égalité de Koenig-huygens

Voici un autre moyen de définir la variance, très utilisé en pratique :

Proposition III.2 La variance peut aussi être définie comme :

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X).$$

Cette égalité est dite de Koenig-Huygens.

Démonstration. On a en notant $m = E(X)$:

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p(X = x_i) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i)}_{E(X^2)} - 2m \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)}_{m} + m^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i)}_{=1} \\
&= E(X^2) - m^2 = E(X^2) - (E(X))^2 .
\end{aligned}$$

Autre preuve, en utilisant le résultat (admis) : $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$, si X et Y sont des VAR.

Voici la preuve de l'égalité de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left((X - E(X))^2 \right) \\
&= E\left(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2 \right) \\
&= E\left(X^2\right) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
&= E\left(X^2\right) - E(X)^2 .
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance. ■

III.4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Proposition III.3 Soient X une var sur un univers Ω fini, m sa moyenne, et σ son écart type. Alors pour tout nombre réel strictement positif A, on a :

$$p(|X - m| \geqslant A) \leqslant \frac{\sigma^2}{A^2}$$

Prenons une var centrée réduite pour fixer les idées. Alors cette inégalité s'écrit :

$$p(|X| \geqslant A) \leqslant \frac{1}{A^2}$$

Ainsi, la probabilité de s'éloigner de 0 (la moyenne) de plus de A, décroît comme A^2. Dans le cas général, il faut prendre en compte la variance qui mesure de combien la var peut s'éloigner de la moyenne : plus la variance est grande plus une var peut s'éloigner de sa moyenne.

Une autre manière de voir est de considérer l'événement contraire, et de remplacer A par ε. Dans le cas général, on a

$$p(|X - m| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Ce qui signifie que X est proche de m à epsilon près avec une probabilité $1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ Par exemple, on peut dire qu'il y a plus d'une chance sur 2 que $|X - m|$ soit inférieur à $\sqrt{2}\sigma$.

Démonstration. Étant donné un réel A, on découpe l'univers en deux ensembles ($|X - m| \geqslant A$) et son complémentaire. On rappelle que :

$$p(|X-m| \geqslant A) = \sum_{x \in X(\Omega) \mid |x-m| \geqslant A} p(X = x)$$

On a alors : $\sigma^2 = V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x-m)^2 p(X = x)$. En découpant selon ces deux ensembles, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 =& V(X) \\
=& \sum_{x \in X(\Omega)} (x-m)^2 p(X=x) \\
=& \sum_{x \in X(\Omega) \mid |X-m| \geqslant A} (x-m)^2 p(X=x) + \underbrace{\sum_{x \in X(\Omega) \mid |x-m| < A} (x-m)^2 p(X=x)}_{\geqslant 0} \\
\geqslant& \sum_{x \in X(\Omega) \mid |x-m| \geqslant A} \underbrace{(x-m)^2}_{\geqslant A^2} p(X=x) \\
\geqslant& A^2 \sum_{x \in X(\Omega) \mid |x-m| \geqslant A} p(X=x) \\
\geqslant& A^2 p(|X-m| \geqslant A).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Généralement l'ingalité de Bienyamé-Tchebichez est assez grossière, la majoration obtenue est trop forte, puisque qu'on a négligé toutes les valeurs de X telle que $|X - m| < A$.

■ **Exemple III.2** Considérons un dé pipé, X la variable aléatoire réelle égale au numéro de la face qui vérifie :

x	1	2	3	4	5	6
$p(X = x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

On a alors :

$$\begin{aligned}
E(X) =& 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{10} + 6 \times \frac{1}{10} \\
=& 3,7 \\
E(X^2) =& 1^2 \times \frac{1}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} + 3^2 \times \frac{1}{10} + 4^2 \times \frac{1}{10} + 5^2 \times \frac{1}{10} + 6^2 \times \frac{1}{10} \\
=& 15,7 \\
V(X) =& E(X^2) - (E(X))^2 = 2,01.
\end{aligned}$$

Estimons alors la probabilité d'être éloigné de la moyenne de plus de 2. On a avec l'inégalité de Bienyamé-Tchebichev :

$$p(|X - 3,7|) \leqslant \frac{2,01}{4} \approx \frac{1}{2}.$$

On a donc moins d'une chance sur deux que la variable aléatoire X soit éloigné de sa moyenne de plus de 2.

Calculons maintenant la valeur exacte de cette probabilité :

$$\begin{aligned} p(|X-3,7| \geqslant 2) =& p(X \geqslant 5,7) + p(X \leqslant 3,7) \\ =& p(X=1) + p(X=6) = \frac{2}{10}. \end{aligned}$$

On a en fait seulement 2 chance sur 10 que X soit éloigné de sa moyenne de plus de 2.

En fait l'inégalité de Bienyamé-Tchebichev est très peu précise, mais elle a l'avantage d'être universelle : quelque soit la variable aléatoire, il suffit de connaître son écart-type et sa moyenne pour connaître la probabilité d'une grande déviation à la moyenne. On n'a pas besoin de la loi de X pour pouvoir utiliser l'inégalité de Byenaimé-Tchebichev.

Elle est utilisé pour justifier des passages à la limite en statistique .

Refaisons la démonstration dans ce cas pour comprendre où l'inégalité est trop large. On a :

$$\begin{aligned} V(X) =& E\left((X-E(X))^2\right) \\ =& \sum_{i=1}^{6} (i-3,7)^2 p(X=i) \\ \geqslant& \sum_{i \in \{1,6\}} (i-3,7)^2 p(X=i), \end{aligned}$$

ici on majore la somme sur $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ par la somme sur les éléments loin de la moyenne, c'est-à-dire ceux qui vérifient $|i-3,7| \geqslant 2$, dans le cas présent : $\{1,6\}$.

Pour ces deux éléments, on a $|i-3.7| \geqslant 2$ donc $(i-3.7)^2 \geqslant 4$. Cela donne :

$$\begin{aligned} V(X) \geqslant& 4\left(\sum_{i \in \{1,6\}} p(X=i),\right) \\ \geqslant& 4 \times (p(X=1) + p(X=6)) \\ \geqslant& 4 \times p(|X-3,7| \geqslant 2). \end{aligned}$$

On retrouve en effet ici la probabilité de l'événement $p(|X-3,7| \geqslant 2)$, que l'on a calculé avec sa loi. on obtient au final :

$$p(|X-3,7| \geqslant 2) \leqslant \frac{V(X)}{4}.$$

∎

IV Lois usuelles

IV.1 Loi certaine

La var la plus simple qu'on puisse imaginer est celle qui est constante égale à $a \in \mathbb{R}$.

Définition IV.1 — Loi certaine. On dit qu'une VAR X suit la loi certaine, si $\exists a \in \mathbb{R}$, tel que : $\forall w \in \Omega,\ X(w) = a$. Cette var X vérifie :

$$p(X = x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \\ 1 & \text{si } x = a \end{cases}.$$

On a $E(x) = a$, et $V(X) = 0$.

Proposition IV.1 Si X est une var de variance nulle, alors on a : $\forall x \in X(\Omega)$, si $x \neq m$, $p(X = x) = 0$ et si $P(X = m) = 1$.

On dit que X est presque sûrement constante.

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned} V(X) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{(X-m)^2 p(X=x)}_{\geqslant 0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in X(\Omega),\ (X-m)^2 p(X=x) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in X(\Omega),\ X = m \quad \text{ ou } P(X = x) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $p(X = m) = 1$.

■

Autre démonstration : on a pour tout $\varepsilon > 0$, $p(|X - m| < \varepsilon) = 1$. En faisant tendre ε vers 0, on voit que $p(X \neq m) = 0$.

IV.2 Loi uniforme

Définition IV.2 — Loi uniforme. Soit un univers fini Ω et une var, telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on dit que X suit la loi uniforme si

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

En posant $\mathscr{E} = X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on note alors : $X \hookrightarrow U(E)$.

On a alors : $E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - E^2(X)$.

On voit ici le lien entre espérance et moyenne : si toutes les valeurs sont équiprobables, alors l'espérance est la moyenne de ces valeurs.

Souvent on rencontre le cas où $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, dans ce cas, on note $X \hookrightarrow U([\![1, n]\!])$

$$E(X) = \frac{n+1}{2},\ V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Pour le démontrer, on utilise les formules sur $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

! Attention à garder en tête que ces relations ne sont valables que si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, et ne pas les appliquer si par exemple $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

■ **Exemple IV.1** L'exemple le plus simple est celui qui a un lancer de deux dés associe la valeur du premier lancer.

Les 6 valeurs possibles sont équiprobables. ■

IV.3 Loi de Bernoulli

Définition IV.3 — VAR de Bernoulli. On dit qu'une var X est une var de Bernoulli si elle ne prend que deux valeurs : la valeur 0 (ou échec) avec probabilité p, et la valeur 1 (ou succès) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Notation IV.1. *On écrit $X \hookrightarrow \beta(p)$ ou parfois $X \hookrightarrow \beta(1, p)$.*

■ **Exemple IV.2** L'exemple simple est celui d'un tirage de pièce truquée ou non, avec la var qui vaut 1 si c'est pile 0 sinon.

Un autre type d'exemple est celui de tirage de boule noire ou blanche ou l'on note 1 si blanche. ■

Proposition IV.2 Si $X \hookrightarrow \beta(p)$, alors $E(X) = p$, et $V(X) = pq$.

Démonstration. On montre que $E(X) = p$, et $V(X) = pq$.

On a : $E(X) = 0 \times q + 1 \times p = p$, et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (0 \times q + 1 \times p) - p^2 = p(1-p) = pq$. ■

✎ Les variables aléatoires de Bernoulli sont très utilisées malgré leur apparente simplicité. Par exemple, si on tire m jetons dans une urnes qui contient les jetons de $[\![1, n]\!]$, on peut utiliser les variables aléatoires X_i qui valent 1 si on tire le jeton i. On écrit alors $X_i = 1$ plutôt que J_i ou i.

L'avantage est alors que :

- le nombre de jeton tiré m est alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$,
- la sommes des valeurs des jetons tirés est alors $\sum_{i=1}^{n} iX_i$, etc.

Ces variables simplifient alors les calculs.

On parle de **variables caractéristiques**, car elle caractérise un événement, comme les fonctions indicatrices.

Par exemple, plutôt que noter B_i pour blanche au tirage 1, on considère la variable de Bernouilli, X_i qui vaut 1 si le i-ième tirage donne une blanche, 0 sinon.

IV.4 Schéma de Bernouilli

Définition IV.4 — Schéma de Bernoulli. Lorsqu'une épreuve aléatoire de type Bernouilli est est répétée n fois, dans des conditions identiques. on parle de schéma de Bernoulli de paramètres n (nombre d'épreuve) et p (probabilité de succès).

L'univers associé à un schéma de Bernoulli est du type $\{0,1\}^n$, c'est-à-dire une suite de longueur n constitué de 0 ou 1 (ou de Pile/Face, ou de blanche/noire). Cet ensemble à 2^n éléments.

IV.5 Loi binomiale

On s'intéresse souvent à la variable aléatoire S qui est le nombre de succés (ou de face, ou de boule blanche) au bout de n tirages.

Proposition IV.3 Dans un schéma de Bernoulli de paramètre n et p, si on appelle S la var « *nombre de succès dans les n tirages* », alors on a : $S(\Omega) = [\![0,n]\!]$, avec

$$p(S=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration. Pour k éléments de $[\![1,n]\!]$, notés $i_1, i_2, \dots, i_k$, L'événements : « *succés aux places* $i_1, i_2, \dots, i_k$ *échec ailleurs.* est de probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ (produit des probabilités de chaque tirage par indépendance).

L'événement $S=k$ est constitué de $\binom{n}{k}$ événements élémentaires de ce type. Ainsi, on a $p(S=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. ■

Définition IV.5 — Loi binomiale. On dit que la variable S suit le **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$,

si $S(\Omega) = [\![0,n]\!]$, avec

$$\forall k \in [\![O,n]\!]\,,\ p(S=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Notation IV.2. *On note* $S \hookrightarrow \beta(n,p)$.

Pour utiliser les variables aléatoires qui suivent une loi binomiale, il faut :
- déterminer un schéma de Bernoulli répété n fois,
- ces répétitions se font dans des conditions identiques, avec une probabilité p de réussite,
- c'est alors le nombre de succès X qui suit la loi binomiale.

En particulier, on voit que la variable n'a pas d'indication temporelle : c'est le nombre de succès peut importe à quel moment ils arrivent.

L'expérience aléatoire associé à la loi binomial est de répéter plusieurs fois indépendamment et dans les mêmes conditions une expérience ayant deux issues possibles : succès ou échec et de compter le nombre de succès.

■ **Exemple IV.3**
- on lance 50 fois un dé on compte le nombre de 6,
- on tire avec remise dans une urne contenant une proportion p de boules blanches, on compte le nombre de boules blanches obtenues,
- on lance 100 fois une pièce et on compte le nombre de pile.

■

Proposition IV.4 Si $S \hookrightarrow \beta(n,p)$, alors on a : $E(S) = np$ et $V(S) = npq$.

Démonstration. Pour l'espérance, on dispose de deux démonstrations.

La première utilise les variable $\left(Y_i\right)$ caractéristique de l'évènement « succès au tirage i ». On a alors :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}(1,p).$$

Puisqu'au tirage i, la probabilité de succès est p. Cela donne alors :

$$\text{on a : } S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\text{donc } E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) \quad \text{en utilisant la linéarité de l'espérance} = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

On peut aussi faire un calcul direct pour éviter d'utiliser la proposition admise sur la linéarité de l'espérance.

$$\begin{aligned}
E(S) &= \sum_{k=0}^{n} kp(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kp(X=k) && \text{premier terme nul}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}p^k(1-p)^{n-k} && \text{on retrouve } k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}\\
&= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{(k-1)}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}\\
&= np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{(n-1)-j} && \text{on pose } j=k-1\\
&= np.
\end{aligned}$$

Pour calculer la variance, on a besoin de calculer $E(S^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 p(X=k)$ On va utiliser une technique (à connaître), en remplaçant k^2 par $k(k-1)+k$. On a alors :

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2p(X=k) = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1))p(X=k) + \sum_{k=0}^{n} kp(X=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(k(k-1))p(X=k) + np
\end{aligned}$$

d'après le calcul précédent.

On calcule alors :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(k(k-1))p(X=k)\\
&\qquad=\sum_{k=2}^{n}(k(k-1))p(X=k) && \text{deux premiers termes nuls}\\
&\qquad=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}\\
&\qquad=\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}\\
&\qquad=\sum_{k=2}^{n}n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!}p^{k}(1-p)^{n-k}
\end{aligned}
$$

on retrouve la formule $k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(k(k-1))p(X=k)\\
&\qquad=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{(k-2)}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}\\
&\qquad=n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^{j}(1-p)^{(n-2)-j} && \text{on pose j=k-2}\\
&\qquad=n(n-1)p^2
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a $E(S^2)=n(n-1)p^2+np$, puis

$$V(S)=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np-np^2=np(1-p)=npq$$

■

■ **Exemple IV.4** En conséquence si on lance une pièce 100 fois, en moyenne on a 50 faces. De même si on tire 20 fois avec remise dans une urne contenant une blanche et trois noires, en moyenne on obtient 5 boules blanches. ■

Graphiquement, la loi d'une VAR ressemble à une cloche :

- le pic est en $E(X)$,
- la cloche est plus ou moins large selon la variance.

Voir les figures 23.3.

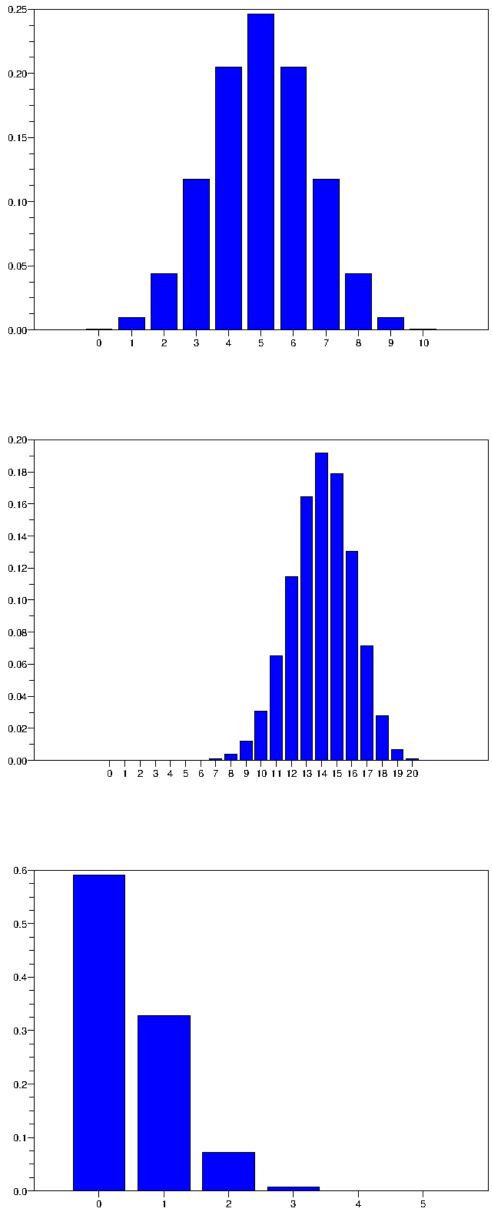


FIGURE 23.3 – Histogramme d'une variable aléatoire binomiale, avec les paramètres : $(p = 0.5, n = 10)$, $(p = 0.7, n = 20)$, puis $(p = 0.1, n = 5)$.

Variables aléatoires

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Rappel de probabilités

Exercice 1 On dispose de deux urnes : A et B. Chacune contient 7 enveloppes. Dans l'urne A les 7 enveloppes sont vides, dans l'urne B, 6 enveloppes sont vides mais la dernière contient 10 euros. On choisit une urne (A ou B), puis on tire 7 enveloppes dans cette urne une à une. Les 6 premières sont vides.

Quelle est la probabilité que la dernière contienne les 10 euros ?

Correction : On note E l'événement : « *les 6 première enveloppes sont vides* ». On cherche $p_E(B)$ (proba d'avoir choisi l'urne B).

On a :

$$p_E(B) = \frac{p(E\cap B)}{p(E)} = \frac{p_B(E)p(B)}{p_B(E)p(B)+p_{\overline{B}}(E)p(\overline{B})}.$$

On a : $p_B(E) = \frac{6!}{7!}$ (7! tirages possibles, dont 6! vérifient la bonne enveloppe est en dernier). D'où :

$$p_E(B) = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{14}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

⋆ Variables aléatoires et paramètres

Exercice 2 Soient $a \in \mathbb{N}^*$et X une variable uniforme sur $[\![0,a]\!]$. On suppose que $E(X) = 6$. Trouver a.

Correction : $a = 12$.

Exercice 3 Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$, et X une variable uniforme à valeurs dans $[\![1,ab]\!]$ telle que $p(X=1) = \frac{1}{a}-\frac{1}{b}$.

1. Quelle relation y a-t-il entre a et b ?
2. On suppose, de plus, que $E(X) = \frac{7}{2}$; quelles sont les valeurs de a et b ?
3. Que vaut $V(X)$?

⋆ Calcul de loi, d'espérance et de variance

Exercice 4 Un dé équilibré a une face « 1 », deux faces « 2 », deux faces « 3 » et une face « 4 ». On lance une fois ce dé et on note X le nombre sorti. Déterminer la loi de X et sa fonction de répartition, donner une représentation graphique. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

Exercice 5 Une urne contient deux boules marquées 1, deux marquées 2 et une marquée 3. On prélève simultanément deux boules au hasard et on appelle X la somme des numéros marqués sur les deux boules. Déterminer la loi de X, son espérance $\overline{X}$ et sa variance $V(X)$.

Exercice 6 Un joueur tire sur une cible de 10 cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1,2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer.

Soit X la var, qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Calculer $E(X)$.
3. La joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 1 euro

s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Correction :

1. On a $p(X=k)=\lambda\mathscr{A}_k$, $\mathscr{A}_k$ l'aire de la couronne k, on trouve : $\mathscr{A}=\pi((11-k)^2-(10-k)^2)=\pi(21-2k)$. On doit déterminer λ, ,pour cela, on calcule
$$\sum_{k=1}^{10} p(X=k)=\lambda\pi\sum_{k=1}^{1}0((11-k)^2-(10-k)^2)=100\lambda\pi=1.$$
On trouve $\lambda\pi=\frac{1}{100}$.
2. On a :
$$E(X)=\sum_{k=1}^{10} kp(X=k)=\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{10}21k-2k^2.$$
Ce qui se calcule.

Exercice 7 On lance simultanément deux dés équilibrés à six faces, on note Y le maximum des deux chiffres obtenus et Z le minimum.

Donner les lois de Y et Z.

Calculer leur espérance et leur variance.

Correction : Il faut utiliser le $p(Y\leqslant k)=p(D_1\leqslant k\cap D_2\leqslant k)=\frac{k^2}{36}$. Et donc : $p(Y=k)=\frac{k^2-(k-1)^2}{36}$.

Exercice 8 Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur qui vient d'être tirée.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la var égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

Déterminer la loi de X_1, puis de X_2, puis de X_n.

Correction :

- $X_1(\Omega)=\{0,1\}$, $p(X_1=0)=\frac{1}{2}$, et $p(X_1=1)=\frac{1}{2}$.
- $X_2(\Omega)=[\![0,2]\!]$, $p(X_2=0)=p(N_1\cap N_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$,
puis $p(X_2=1)=p(B_1\cap N_2)+p(N_1\cap B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.
et $p(X_2=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$. Donc X_2 suit la loi uniforme sur $[\![0,2]\!]$.
- Montrons par récurrence que $X_n\hookrightarrow\mathscr{U}([\![0,n]\!])$. C'est vrai au rang 1 et 2. Supposons donc la propriété au rang n, et $n\geqslant 1$. Déjà, on a $X(\Omega)=[\![0,n+1]\!]$. Soit $k\in[\![0,n+1]\!]$, on a : $p(X_{n+1}=k)=\sum_{j=0}^{n}p(X_n=j\cap X_{n+1}=k)$. Mais :
  - Si $k=0$, $p(X_n=j\cap X_{n+1}=k)$ est nulle si $j\neq 0$ (il faut avoir 0 blanches dans les n premiers tirages), ainsi [HR] :
  $$p(X_{n+1}=k)=p(X_n=0)p_{X_n=0}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}.$$
  - Si $k\in[\![1,n]\!]$, la somme se réduit à $p(X_n=k-1\cap X_{N+1}=k)+p(X_n=k\cap X_{N+1}=k)$. Ce qui s'écrit [HR] :
  $$p(X_{n+1}=k)=p(X_n=k-1\cap B_{n+1})+p(X_n=k\cap N_k)=\frac{1}{n+1}\frac{k}{n+2}+\frac{1}{n+1}\frac{n+1-k}{n+2}=\frac{1}{n+2}$$
  - Si $k=n+1$, on a un seul terme : $p(X_n=n\cap X_{n+1}=n+1)$, qui se calcule :
  $$p(X_{n+1}=n+1)\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+1}$$

Exercice 9 On considère n urnes numérotées de 1 à n. La première contient des boules blanches et noires, avec une proportion p_1 de boules blanches. Les urnes suivantes contiennent chacune a boules blanches et a boules noires.

On effectue n tirages de la manière suivante : on tire une boule de la première urne que l'on place dans la deuxième urne, puis on tire une boule de la deuxième urne que l'on place dans la troisième urne, et ainsi de suite jusqu'au tirage dans la dernière urne.

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on désigne par X_k la var égale à 1 si le k-ième tirage est une boule blanche, et 0 sinon.

1. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et X_2, puis leur espérance et leur variance en fonction de p_1 et a.
2. Démontrer qu'il existe une valeur de p_1, pour laquelle X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité.
   Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose : $p_k = p(X_k = 1)$ et $q_k = p(X_k = 0)$.
3. Démontrer qu'il existe une matrice M dépendant de a, telle que pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, on ait :
$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}$$
4. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de probabilité de X_n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim_{n\to+\infty} q_n$.

Correction : Les X_i sont des variables de Bernoulli.

1. Directement : $p(X_1 = 1) = p_1$, et donc $p(X_1 = 0) = 1 - p_1$. $E(X_1) = p_1$. Tandis que $V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = p_1 - p_1^2 = p_1(1-p_1)$.
   (**NB :** $V(X_1)$ est minimal lorsque $p_1 = \frac{1}{2}$).
   On utilise ensuite les probabilités totales :
$$p(X_2 = 1) = p(X_2 = 1 \cap X_1 = 1) + p(X_2 = 1 \cap X_1 = 0) = p_1 \frac{(a+1)}{2a+1} + (1-p_1)\frac{a}{2a+1} = \frac{a+p_1}{2a} = E(X_2)$$
$$V(X_2) = \frac{(a+p_1)(a+1-p_1)}{(2a+1)^2}.$$
2. L'équation est $p_1 = p_2 = \frac{a+p_1}{2a+1}$. Soit $2ap_1 = a$ et $p_2 = \frac{1}{2}$.
3. On trouve $M = \frac{1}{2a+1}\begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a+1 \end{pmatrix}$, en utilisant les probas totales avec le système complet d'événements : $X_k = 1$ ou $X_k = 0$.
4. On utilise Newton en décomposant $M = I_2 + aU$. Avec U qui ne contient que des 1.

✯ Loi binomiale

Exercice 10 Deux personnes lancent une pièce équilibrée n fois de suite. On note X et Y les var définies par le nombre de faces obtenues par chaque personne.

1. Quelles sont les lois de probabilité de X et de Y ?
2. Calculer les probabilités des événements $(X = Y)$ et $X < Y$.

Correction :

1. $A \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$, idem pour Y.
2.
$$\begin{aligned} p(X=Y) &= \sum_{k=0}^{n} p(X=k \cap X=Y) = \sum_{k=0}^{n} p(X=k)p(Y=k) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$
   Puis on a : $1 = p(X=Y) + p(X>Y) + p(X<Y)$, or par symétrie : $p(X>Y) = p(X<Y)$. On en déduit : $p(X<Y) = \frac{1}{2} - \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n+1}}$.

Exercice 11 Une particule se déplace par sauts successifs et indépendants sur un axe orienté. On suppose qu'au départ cette particule se situe en O et que la probabilité pour que son abcisse augmente de 1 est égale à p (avec $0 < p < 1$) et donc la probabilité que son abcisse diminue de 1 est $q = 1 - p$.

On note X_n l'abcisse de la particule après n sauts successifs. On note D_n le nombre de sauts vers la droite sur les n premiers.

1. Donner la loi de D_n. Donner l'espérance et la variance de D_n.
2. Exprimer X_n en fonction de D_n, en déduire, suivant la parité de n, la valeur de X_n. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Correction :

1. $D_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ (nbr de saut vers la droite), $E(D_n) = np$, $V(D_n) = npq$.
2. $X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$. On a $X(\Omega) = \{-n, -n-2, \dots, n-2, n\} = \{-n + 2k | k \in [\![0,n]\!]\}$. De plus, on a : $(X_n = k) = (D_n = \frac{n+k}{2})$. Ainsi :

   cas n pair on a $p(X_n = k) = 0$ si k impair, et $p(X_n = k) = p(D_n = \frac{n+k}{2}) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$, si k pair.

   cas n impair le contraire.

   On a $E(X_n) = E(2D_n - n) = 2E(D_n) - n = n(p-q)$. Et $V(X_n) = V(2D_n - n) = 4V(D_n) = 4npq$.

✯ Fonction génératrice

Exercice 12 Un cavalier a $n \in \mathbb{N}^*$ haies à sauter numérotées de 1 à n, il s'arrête au premier saut non réussi. On suppose que *s'il se présente devant la k-ième haie*, la probabilité pour qu'il réussisse son saut est $q_k \in]0,1[$. On note X le nombre de sauts réussis, ainsi X prend la valeur 0 s'il échoue à la première haie.

1. Déterminer la loi de X.
2. On suppose que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $q_k = q$ (*i.e.* q_k est constant). Déterminer la loi de X en fonction de q et $p = 1-q$.
3. Pour $t \in]0,1[$, on pose $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k p(X=k)$.
   Justifier que $E(X) = G'_X(1)$. En déduire l'espérance de X ainsi que $\lim_{n \to +\infty} E(X)$.

Correction :

1. On a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$, et $p(X=0) = q_1$, puis $p(X=k) = p(S_1 \cap S_2 \cap S_{k-1} \cap E_k) = p_1 p_2 \dots p_{k-1} q_k$.
2. $p(X=k) = p^{k-1} q$.
3. $t \mapsto G_X(t)$ est un polynôme, donc dérivable, puis :
   $$\begin{aligned} G'_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} k t^{k-1} p(X=k) \qquad \text{donc} \\ G'_X(1) &= \sum_{k=0}^{n} k p(X=k) = E(X). \end{aligned}$$
   On a : $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k p^{k-1} q = qp \sum_{k=0}^{n} (tp)^k = pq \frac{1-(tp)^n}{1-tp}$. (pour $tp \neq 1$), donc en dérivant on obtient le résultat.

✯ Le problème des allumettes de Banach

Exercice 13

Un joueur dispose de deux boîtes d'allumettes, qui contiennent initialement $n \in \mathbb{N}^*$ allumettes. L'une des boîtes est notée P l'autre F. Il dispose aussi d'une pièce de monnaie équilibrée. Il répète l'expérience :

- Lancer la pièce.
- Si il obtient pile il enlève une allumette de la boîte P, sinon de la boîte F.
- Il s'arrête lorsqu'il prend la dernière allumette de l'une des boîtes. On note alors X le nombre d'allumettes qui restent dans l'autre boîte.

1. Déterminer l'univers image de X ?
2. Déterminer la loi de X.
3. On change l'expérience et on suppose qu'il s'arrête non plus lorsqu'il prend la dernière allumette d'une boîte, mais au moment où il doit retirer une allumette d'une boîte vide. Déterminer la loi de X dans ce cas.

Correction :

1. $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
2. Soit $k \in [\![1,n]\!]$, on cherche $p(X=k)$, on a par symétrie $p(X=k)$ est le double de l'événement A : « *la boîte face est vide et la boîte pile contenant k allumettes* »
   Un tel tirage veut dire que l'on a fait : N tirages face et $(N-k)$ pile dans les $2N-k$ tirages.
   On refait la démonstration de la loi binomial : On considère $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{N-1} \leqslant 2N-k-1$ un ensemble de $N-1$ entiers de $[\![1, 2N-k-1]\!]$ classés par ordre croissant, et on calcule la probabilité d'avoir :
   - face au tirage $i_1 < i_2 < \cdots < i_{N-1}$ (aux $N-1$ entiers choisis),

- pile à tous les autre tirages de 1 à $2N-k-1$, soit à $(N-k)$ tirages
- face au tirage $2N-k$.

le probabilité d'avoir un tel tirage s'écrit :

$$p(\underbrace{P_1 \cap P_2 \cap \dots P_{i_1-1}}_{i_1-1 \text{ premiers}} \cap F_{i_1} \cap \dots F_{i_{N-1} \cap P_{i_{N-1}+1}} \cap F_n)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N} \quad \text{par indépendance}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}.$$

D'autre part l'événement A s'écrit comme l'union disjointe des événements précédents sur tous les choix possibles de $i_1 < i_2 < \cdots < i_{N-1}$ (aux $N-1$ entiers choisis), soit $\binom{2N-k-1}{N-1}$ choix. On a donc : $p(A) = \frac{\binom{2N-k-1}{N-1}}{2^{2N-k}}$.

Au final, on obtient(en multipliant par 2) : $p(X=k) = \frac{\binom{2N-k-1}{N-1}}{2^{2N-k}}$.

Autre méthode : on note Y_i le nombre de face dans les i premiers tirages. Il est clair que $Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}(i, \frac{1}{2})$.

D'autre part, l'événement A peut s'écrire : $A = (Y_{2N-k-1} = N-1) \cap F_N$. Donc :

$$p(A) = p(Y_{2N-k-1} = N-1)p_{(Y_{2n-k-1}=N-1)}(F_N) = \binom{2N-k-1}{N-1}\frac{1}{2^{2N-k-1}}\frac{1}{2}.$$

On ainsi :$p(X=k) = \frac{\binom{2N-k-1}{N-1}}{2^{2N-k}}$.

3. Il s'agit cette fois-ci du $2N-k+1$ tirages, en effet, on a pris N dans une boîte et $N-k$ dans l'autre, et on allait tirer dans celle vide.

   On considère donc cette fois-ci $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leqslant 2N-k$ un ensemble de N entiers de $[\![1, 2N-k]\!]$ classés par ordre croissant, et on calcule la probabilité d'avoir :
   - face au tirage $i_1 < i_2 < \cdots < i_N$ (aux N entiers choisis),
   - pile à tous les autre tirages de 1 à $2N-k$, soit à $(N-k)$ tirages.
   - face au $2N-k+1$-ième

   En utilisant la même méthode, on a : $p(T) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1-k}$. Puis, $p(A) = \binom{2N-k}{N}p(T)$, et : $p(X=k) = \frac{\binom{2N-k}{N}}{2^{2N-k}}$.

   Autre méthode : on note Y_i le nombre de face dans les i premiers tirages.

   D'autre part, l'événement A peut s'écrire : $A = (Y_{2N-k} = N) \cap F_N$. Donc :

$$p(A) = p(Y_{2N-k} = N)p_{(Y_{2n-k}=N)}(F_N) = \binom{2N-k}{N}\frac{1}{2^{2N-k}}\frac{1}{2}.$$

   On ainsi :$p(X=k) = \frac{\binom{2N-k}{N}}{2^{2N-k}}$.

✭ Probabilités et génétique

Exercice 14 On regarde quelques aspects des probabilités appliquées à la génétique. On s'intéresse à une paire de gènes particuliers ne pouvant présenter chacun que deux caractères que l'on note A et a. L'ordre n'intervenant pas, il y a donc trois paires de génotypes possibles, désignés par AA, Aa et aa.

On suppose les sexes mâle et femelle équirépartis dans la population, les accouplements aléatoires, et les générations discrètes (meurent et naissent tous en même temps). Dans une filiation, chaque enfant reçoit un gène de chaque géniteur (père et mère) avec équiprobabilité, pour constituer une paire, et les transmissions de gènes sont indépendants.

On note u_0, $2v_0$, et w_0 respectivement les proportions de génotype AA, Aa et aa dans la population initiale. On a alors $u_0 + 2v_0 + w_0 = 1$. On pose de plus :

$$p_0 = u_0 + v_0, \quad \textit{et} \quad q_0 = v_0 + w_0$$

1. (a) Que représentent p_0 et q_0 ?
   (b) i. Vérifier qu'à la première génération, les proportions des génotypes AA, Aa et aa sont respectivement :

$$u_1 = p_0^2, \quad 2v_1 = 2p_0q_0, \text{ et } \quad w_1 = q_0^2$$

   ii. Déterminer plus généralement les proportions u_n, $2v_n$ et w_n des génotypes AA, Aa et aa dans la n-ième génération. Vérifier que les suites u_n, v_n et w_n sont constantes à partir du rang 1.

2. On fait désormais l'hypothèse que les individus de type aa ne peuvent pas se reproduire. On suppose donc un accouplement aléatoire seulement parmi les individus AA ou Aa. On note toujours u_0, $2v_0$ et w_0 respectivement les proportions de génotypes AA, Aa et aa dans la population initiale. On suppose de plus que $w_0 \neq 1$.
   (a) i. Quelle est la proportion de parents possibles dans la population totale initiale ?
      ii. Déterminer en fonction de u_0 et v_0 les proportions de génotypes AA et Aa parmi les parents.
      iii. On pose
$$p_0 = \frac{u_0+v_0}{1-w_0} \quad \text{et } q_0 = \frac{v_0}{1-w_0}.$$
      Montrer qu'alors le proportions des trois génotypes dans la première génération sont encore données par les mêmes formules.
      iv. Peut-on avoir $w_1 = 1$?
   (b) i. On désigne toujours par u_n, $2v_n$ et w_n les proportions des génotypes AA, Aa et aa dans la n-ième génération, et on pose :
$$p_n = \frac{u_n+v_n}{1-w_n} \quad \text{et } q_n = \frac{v_n}{1-w_n}.$$
      Calculer les probabilités u_{n+1}, $2v_{n+1}$ et w_{n+1} en fonction de p_n et q_n.
      ii. Montrer alors les relations de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \frac{1}{1+q_n} \text{ et } q_{n+1} = \frac{q_n}{1+q_n}$$
      iii. En déduire q_n puis w_n en fonction de n et de q_0. (On commencera par déterminer $\frac{1}{q_n}$, quand il est défini).
      iv. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} w_n$. Interpréter.

Correction :

1. (a) p_0 et q_0 représentent le nombre de gènes A et a respectivement dans la population, *i.e.* la probabilité qu'un gène donné soit A et a respectivement.
   (b) i. on a : $u_1 = p(M = a \cap P = a) = p_0^2$ par indépendance, de même pour w_1, puis : $2v_1 = p(M = a \cap P = A) + p(M = A \cap P = a) = 2p_0q_0$.
      ii. On pose alors p_1 la proportion de gène a : $p_1 = u_1 + v_1 = p_0^2 + p_0q_0 = p_0$, de même $q_1 = q_0$. Ainsi, dans la deuxième génération la proportion de gène a et A est égale à celle de la première génération. En recommençant l'expérience on voit que la proportion de gènes a et A va être constante au cours des générations.
2. (a) i. La proportion de parents possibles sont tous sauf les aa, c'est à dire : $1 - w_0 = u_0 + 2v_0$.
      ii. Les proportions sont respectivement $p_0 = \frac{u_0+v_0}{1-w_0}$ et $q_0 = \frac{v_0}{1-w_0}$. Pour trouver ce résultat on a :
$$p_0 = p(A) = p(A|AA)p(AA) + p(A|Aa)p(Aa) + p(A|aa)p(aa) = 1 \times \frac{u_0}{1-w_0} + \frac{1}{2} \times \frac{2v_0}{1-w_0} + 0.$$
      et
$$q_0 = p(a) = p(a|AA)p(AA) + p(a|Aa)p(Aa) + p(a|aa)p(aa) = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{2v_0}{1-w_0} + 0.$$
   (b) Comme précédemment, on a
$$u_1 = p_0^2, \quad 2v_1 = 2p_0q_0, \text{ et } \quad w_1 = q_0^2$$
   (c) $w_1 = 1$ signifie que $q_0 = 1$ soit $v_0 = 1 - w_0 = u_0 + 2v_0$ et on en déduit que $w_0 = 1$, ce qui est impossible.
3. La proportion de parents à la n-ième génération est $1 - w_n$, et que dans cette génération de parents, on a les proportions des gènes :
$$p_n = \frac{u_n+v_n}{u_n+2v_n} = \frac{u_n+v_n}{1-w_n} \qquad q_n = \frac{v_n}{1-w_n}.$$
   et donc on a toujours les formules :
$$u_{n+1} = p_n^2, \quad 2v_{n+1} = 2p_nq_n, \text{ et } \quad w_{n+1} = q_n^2$$

4. En remplaçant par les valeurs et en utilisant $p_n + q_n = 1$, on obtient les formules demandées.
5. On a $q_0 \neq 0$, puis par récurrence on a $q_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a aussi : $\frac{1}{q_{n+1}} = 1 + \frac{1}{q_n}$. Ainsi en notant $u_n = \frac{1}{q_n}$, on voit que u_n est arithmétique de raison 1, et donc $\frac{1}{q_n} = \frac{1}{q_0} + n$. On en déduit que $\lim_{n\infty} q_n = 0$.
6. Puis w_n tends aussi vers 0, donc le génotype a finit par disparaître.

✯ Deux lois usuelles en « cascade »

Exercice 15 On dispose d'un dé et de 6 pièces. On lance le dé, on note D le nombre obtenu. On lance ensuite D pièces et on note X le nombre de faces obtenues. Donner la loi et l'espérance de X.

Correction : Clairement : $D \hookrightarrow \mathscr{U}(6)$, et connaissant la valeur d du dé $X \hookrightarrow \mathscr{B}(d, \frac{1}{2})$. On a donc : $X(\Omega) = [\![0,6]\!]$, et pour tout $k \in [\![0,6]\!]$,

$$p(X=k) = \sum_{d=1}^{6} p(X=k \cap D=d) = \sum_{d=1}^{6} p_{D=d}(X=k)p(D=d) = \frac{1}{6}\sum_{d=1}^{6}\binom{d}{k}\frac{1}{2^d} = \frac{1}{6}(1+\frac{1}{2})^6.$$

24 — Produit scalaire et espaces euclidiens

I Produit scalaire

I.1 Généralités

Définition I.1 — Produit scalaire. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un produit scalaire est une application φ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.

1. pour tout couple (x,y) de E, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (symétrie)
2. pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (bilinéarité).
3. pour $x \in E$, on a $\varphi(x,x) \geqslant 0$ (positivité).
4. pour $x \in E$, on a $\varphi(x,x) = 0 \implies x = 0$ (définie positive).

R Généralement, on ne vérifie que la moitié de la linéarité (puisque c'est symétrique).
On parle aussi de forme symétrique définie positive à la place de produit scalaire.
En fait, pour $x \in E$, on a $\varphi(x,x) = 0 \iff x = 0$, la réciproque étant évidente.

Notation I.1. *On note généralement $< x|y >$, $(x|y)$, $x \cdot y$ le produit scalaire de deux vecteurs.*

■ **Exemple I.1** L'exemple de référence est bien sûr le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Sur $\mathbb{R}^2$, c'est l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x_1y_1 + x_2y_2 \end{array} \right. \quad \text{en notant } x = (x_1,x_2) \text{ et } y = (y_1,y_2)$$

Dans $\mathbb{R}^n$, c'est l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \end{array} \right.$$

On vérifie que ces applications vérifient bien les propriétés. En particulier la relation $< u,u >= 0 \implies u = 0$ fait intervenir la propriété :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \implies \forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ x_i = 0.$$

C'est le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ (on en verra d'autres).

■

■ **Exemple I.2** On peut reprendre le produit scalaire canonique mais en utilisant les coordonnées dans une autre base.

Par exemple, on peut considérer la base $\mathscr{B} = \Big((1,0),(1,1)\Big)$ de $\mathbb{R}^2$.

On pose alors pour $(u,v) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$:

$$\langle u,v\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 \text{ avec } u = (x_1,y_1)_{\mathscr{B}} \text{ et } v = (x_2,y_2)_{\mathscr{B}}.$$

On utilise alors le produit scalaire canonique mais avec les coordonnées dans une autre base.

On a la formule de changement de base :

$$u = (x_1,y_1) = (x_1 - y_1)(1,0) + y_1(1,1) = (x_1 - y_1, y_1)_{\mathscr{B}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle = \langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle &\\ &= \langle (x_1 - y_1, y_1)_{\mathscr{B}}, (x_2 - y_2, y_2)_{\mathscr{B}}\rangle \\ &= (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1x_2 - y_2x_1 + 2y_1y_2\end{aligned}$$

On vérifie facilement, la symétrie et la linéarité.

On voit ensuite que pour $u \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle &= x_1^2 - 2y_1x_1 + 2y_1^2 \\ &= (x_1 - y_1)^2 + y_1^2\end{aligned}$$

On voit alors que $\langle u,u\rangle \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $u = 0$. ■

R Il faut ainsi revoir la forme canonique des polynômes de degrés 2 pour étudier les produits scalaires.

■ **Exemple I.3** On peut aussi pondérer (positivement) des coordonnées (cela revient au même comme on le verra) ■

■ **Exemple I.4** Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$).

Soit E le $\mathbb{R}$-ev des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

On note :

$$< f,g >= \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

On vérifie alors que c'est un produit scalaire. En particulier, pour vérifier qu'il s'agit d'une forme définie positive, on utilise la proposition :

$$\text{si } \int_a^b f(t)dt = 0 \text{ et } f \geqslant 0 \text{ alors } f = 0 \text{ sur } [a,b].$$

■

Les exemples précédents sont les exemples de références.

■ **Exemple I.5** On peut aussi faire :

$$< f,g >= \int_a^b e^x f(x)g(x)dx.$$

Ou utiliser des polynômes. ■

■ **Exemple I.6** Sur l'ensemble des matrices carrées, l'application :

$$\varphi : \ (A,B) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$$

est un produit scalaire (Tr désigne la trace, ie la somme des éléments diagonaux).

On a en effet :

$${}^tAB = {}^t\left({}^tBA\right)$$

et donc :

$$< A,B >= \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^tBA) =< B,A >$$

en utilisant $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}({}^tM) = \mathrm{Tr}(M)$

Si on fixe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et que l'on considère deux matrices B_1 et B_2 et un réel α, on a :

$$\begin{aligned}\langle A,(B_1+\alpha B_2))\rangle &= \mathrm{Tr}\left({}^tA(B_1+\alpha B_2)\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left({}^tAB_1+\alpha\,{}^tAB_2\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left({}^tAB_1\right)+\alpha\mathrm{Tr}\left({}^tAB_2\right)\\ &= \langle A,B_1\rangle+\alpha\langle A,B_2\rangle.\end{aligned}$$

Enfin, pour une matrice A, on vérifie :

$$\langle A,A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ii}^2\right)$$

(somme des éléments au carré) ainsi $\langle A,A\rangle \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $A = 0$.

■

R L'exemple précédent est à connaître.

I.2 Espaces préhilbertien réel, espace euclidien

Définition I.2 On appelle espace préhilbertien réel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie, on parle d'espace vectoriel euclidien.

Ainsi, $\mathbb{R}^n$ est un espace euclidien et $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est un espace préhilbertien.

II Norme associée à un produit scalaire

II.1 Norme et distance

Définition II.1 Soit E un espace préhilbertien réel. On note $< x,y >$ le produit scalaire.

On appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $< .,. >$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{< x,x >} \end{array}$$

On appelle distance euclidienne associée au produit scalaire $< .,. >$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

Par définition :

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= < x,x > \\ &= \varphi(x,x) \text{ avec les notations précédentes.} \end{aligned}$$

Les propriétés du produit scalaire assurent que la norme est bien définie et que $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

On peut donc prolonger le vocabulaire vue en géométrie (orthogonalité, distance, etc) aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, aux polynômes, aux fonctions, aux matrices, etc.

■ **Exemple II.1** Sur les matrices carrées, on peut définir la distance par :

$$d(A,B) = \mathrm{Tr}({}^t(A-B)(A-B))$$

■

Proposition II.1 Soit E un espace préhilbertien et (x,y) deux éléments de E.

On peut alors exprimer la norme au carrée d'une somme à l'aide du produit scalaire :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x,y > + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2 < x,y > + \|y\|^2$$

On peut aussi exprimer le produit scalaire à l'aide de la norme au carrée :

$$\begin{aligned} < x,y > &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|x\|^2\right) \end{aligned}$$

On a aussi l'égalité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Démonstration. Revenir à la définition par le produit scalaire et développer. ■

II.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition II.2 La norme associée au produit scalaire vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |< x,y >| \leqslant \|x\|\|y\|$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ y = \lambda x \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda y \text{ ou}$$

Démonstration. On fixe $(x,y) \in E^2$ avec $x \neq 0$ (sinon la relation est évidente).

On considère alors l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \|x+\lambda y\|^2 = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \end{array} \right.$$

On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) \geqslant 0$$

et :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) = \|x\|^2 + 2\lambda < x,y > + \lambda^2\|y\|^2$$

Ainsi, $f(\lambda)$ est une application polynomiale de degré 2 (puisque $x \neq 0$!). On note Δ son discriminant. On a :

$$\Delta = 4 < x,y >^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = 4\left(< x,y >^2 - \|x\|^2\|y\|^2\right)$$

Or la relation : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) \geqslant 0$ assure que $\Delta \leqslant 0$, ce qui donne :

$$< x,y >^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$$

ou encore :

$$|< x,y >| \leqslant \|x\|\|y\|$$

Pour le cas d'égalité. Supposons : $|< x,y >| = \|x\|\|y\|$ avec $x \neq 0$.

Avec les notations précédentes, cela implique que $\Delta = 0$. Ainsi, la fonction polynomiale f a une racine (double) et donc :

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R},\ f(\lambda) = 0 \text{ ie } \|x + \lambda_0 y\| = 0$$

Puisque le produit scalaire est défini positif, cela implique que $x = -\lambda_0 y$.

■

R En fait, le cas d'égalité peut s'écrire ainsi : soit $x = 0$ (et la propriété est évidente), soit y s'écrit en fonction de x.

Pour $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Pour deux fonctions f et g continues sur $[a,b]$, on a :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est fondamentale !

On voit par exemple que (pour x et y non nul) :

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \in [-1,1]$$

On retrouve de fait la formule :

$$\langle x,y\rangle = \cos(\theta)\|x\|\|y\|$$

Où θ est l'angle entre deux vecteurs.

En fait, on va pouvoir parler d'angles entre vecteurs d'un espace préhilbertien par l'angle vérifiant :

$$\langle x,y\rangle = \cos(\theta)\|x\|\|y\|$$

II.3 Propriétés de la norme

Proposition II.3 La norme euclidienne $\|\ \|$ associée au produit scalaire $<,>$ vérifie les propriétés de séparation et d'homogénéité :

$$\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \implies x = 0$$
$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$$

Elle vérifie aussi l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Enfin, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si : x et y sont positivement liés, ie :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ y = \lambda x \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y.$$

Démonstration. Les premières propriétés proviennent de la définition :

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>}$$

Pour la deuxième, on fixe $(x,y) \in E^2$, et on a :

$$\begin{aligned}\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| &\iff \|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\iff \|x\|^2 + 2 <x,y> + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &\iff <x,y> \leqslant \|x\|\|y\|\end{aligned}$$

Ce qui est vrai puisque :

$$\begin{aligned}<x,y> &\leqslant |<x,y>| \text{ par définition de la valeur absolue} \\ \text{et } |<x,y>| &\leqslant \|x\|\|y\| \text{ par Cauchy-Schwarz.}\end{aligned}$$

Pour le cas d'égalité :

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff <x,y> = \|x\|\|y\|$$

On a donc :

$$<x,y> = |<x,y>| \text{ et } |<x,y>| = \|x\|\|y\| \quad \text{(égalité dans Cauchy-Schwarz)}$$

De l'égalité dans Cauchy-Shwarz, on déduit (si $x \neq 0$) :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda y$$

la realtion $<x,y> = |<x,y>|$ donne

$$\lambda\|y\| = |\lambda\|y\|| \text{ ie } \lambda \geqslant 0.$$

■

Proposition II.4 On a aussi l'**inégalité triangulaire renversée** :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|.$$

Démonstration. On écrit :

$$x = (x-y) + y$$

et donc :

$$\|x\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$$

et donc :

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$$

En inversant le rôle de x et de y, on obtient aussi la relation :

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\|$$

D'où le résultat. ■

II.4 Propriété de la distance

On peut traduire les propriétés de la norme sur la distance entre deux vecteurs :

Proposition II.5 Soit E un espace préhilbertien. On note $d(x,y) = \|x-y\|$ la distance associée au produit scalaire.

On a alors pour (x,y,z) trois éléments de E :

$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$
$$d(x,y) = d(y,x)$$
$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$
$$d(x,z) \geqslant |d(x,y) - d(y,z)|$$

Démonstration. Les deux premières sont évidentes.

Pour la troisième :

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \\ &\leqslant \|x-y\| + \|y-z\| \\ &\leqslant d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x-z\| = \|(x-y)-(z-y)\| \\ &\geqslant \big|\|x-y\| - \|y-z\|\big| = |d(x,y) - d(y,z)| \end{aligned}$$

■

R Pour un triangle ABC, cela se traduit par :

$$|AB - AC| \leqslant BC \leqslant AB + AC$$

ce qui se voit sur le dessin.

III Orthogonalité

Dans la suite E désigne un espace préhilbertien.

III.1 Vecteurs normés et orthogonaux

Définition III.1 — Vecteur unitaire. On dit qu'un vecteur x de E est unitaire ou normé si sa norme est 1

Définition III.2 — Vecteurs orthogonaux. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $< x,y >= 0$.

Notation III.1. *On note $x \perp y$ la propriété x et y sont orthogonaux.*

$x \perp y$ est identique à $y \perp x$. On a de plus : $x \perp 0$ est vrai pour tout vecteur x. Enfin, $x \perp x$ si et seulement si $x = 0$.

■ **Exemple III.1** Si on considère E l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire :

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

Alors les fonctions sin et cos sont unitaires et orthogonaux. ■

III.2 Orthogonal d'un SEV

Définition III.3 — Orthogonal d'une partie. On appelle orthogonal d'une partie A de E l'ensemble :

$$\begin{aligned} A^{\perp} &= \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, < a,x >= 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, a \perp x \right\} \end{aligned}$$

Proposition III.1 Soit F un SEV de E, alors $F^{\perp}$ est aussi un SEV de E

R En fait pour toute partie A, $A^{\perp}$ est un SEV de E !

Démonstration. Clairement $x \in F^{\perp}$.

Considérons x_1 et y_1 deux vecteurs de $F^{\perp}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche à montrer que $(x_1 + \lambda y_1) \in F^{\perp}$, c'est-à-dire :

$$\forall a \in F,\ a \perp (x_1 + \lambda y_1).$$

On considère donc $a \in F$, et cela donne :

$$\langle a, x_1 + \lambda x_2 \rangle = \langle a, x_1 \rangle + \lambda \langle a, x_2 \rangle = 0 + \lambda 0 = 0$$

Ainsi, on a bien $(x_1 + \lambda y_1) \in F^{\perp}$ et donc $F^{\perp}$ est un SEV de E. ■

$\{0\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0\}$.

■ **Exemple III.2** Dans $\mathbb{R}^2$, si $u = (a,b)$ et $D = \text{Vect}(u)$, alors $D^{\perp} = \text{Vect}((-b,a))$.

Dans $\mathbb{R}^3$, si $u = (a,b,c)$ et $D = \text{Vect}(u)$, alors $D^{\perp}$ est le plan vectoriel d'équation $ax + by + cz = 0$. ■

Proposition III.2 Soit A et B deux SEV de E, avec $A \subset B$, on a alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

Démonstration. Si $x \in B^{\perp}$, alors

$$\forall a \in B,\ (a,x) = 0.$$

Comme $A \subset B$, on en déduit :

$$\forall a \in A,\ (a,x) = 0.$$

et donc $x \in A^{\perp}$. ■

R Pour une partie quelconque : $A^{\perp} = (\text{Vect}(A))^{\perp}$. Puisque $A \subset \text{Vect}(A)$, donc $\text{Vect}(A)^{\perp} \subset A^{\perp}$ et la réciproque est facile.
Dans les faits, on utilise donc uniquement les orthogonaux de SEV.

III.3 Famille orthogonale et orthonormale

Définition III.4 Une famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de E est dite orthogonale si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux. C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

Une famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de E est dite orthonormale ou orthonormée si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux et si ils sont unitaires.

C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies u_i \perp u_j$$
$$\text{et } \forall i \in [\![1,n]\!], \|u_i\| = 1.$$

R Pour une famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ orthonormale, on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ < u_i, u_j > = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

■ **Exemple III.3** On reprends E l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et on munit cet espace du produit scalaire :

$$(f,g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

On note alors les fonctions :

$$f_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad f_k : x \mapsto \cos(kx) \qquad eg_k : x \mapsto \sin(kx)$$

La famille :

$$\mathscr{F} = \left\{ f_0, f_1, \dots, f_k, g_0, \dots, g_k \right\}$$

est alors une famille orthonormale.

■

R L'exemple précédent est à savoir ! En particulier pour l'intégration de fonctions de la forme : $\int_a^b \cos(ix)\sin(jx)dx$.

Proposition III.3 Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.
En particulier, toute famille orthonormale de E est libre.

Démonstration. Considérons une famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ orthogonale. On forme l'équation :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p = 0$$

on prends le produit scalaire avec u_1, cela donne avec la linéarité :

$$\alpha_1 < u_1, u_1 > + \alpha_2 < u_1, u_2 > + \dots \alpha_p < u_p, u_1 >= 0$$

et donc $\alpha_1 \|u_1\|^2 = 0$ et donc $\alpha_1 = 0$ puisque $u_1 \neq 0$.
On recommence de même avec les autres termes.

■

III.4 Théorème de Pythagore

Théorème III.4 Deux vecteurs (x, y) de E sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration. La preuve consiste à écrire :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > .$$

Ainsi :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff < x, y >= 0/$$

■

Proposition III.5 Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille orthogonale de E. Alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$$

III.5 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème III.6 Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E.
Il existe une famille orthonormale $\mathscr{G} = (v_1, \dots, v_p)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \; \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i).$$

✎ Au delà du résultat, c'est la méthode qu'il faut retenir (que l'on peut voir comme un algorithme).
Parfois, on se contente d'avoir une famille orthogonale (sans normaliser les vecteurs).
Ce procédé permet de passer d'une famille libre a une famille orthonormale qui a le même espace vectoriel engendré en « redressant » chaque vecteur un par un.
En appliquant à une base de E, on va pouvoir créer une base de E orthonormale.

Démonstration. On décrit le procédé par récurrence.

Pour v_1, on pose simplement :

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1.$$

On a alors v_1 et u_1 sont proportionnels.

On cherche tout d'abords un vecteur x sous la forme :

$$x = u_2 + \alpha v_1$$

tel que $x \perp v_1$. On est alors assuré d'avoir $\text{Vect}(v_1, x) = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

On veut :

$$< x, v_1 >= 0$$

Cela donne :

$$< x, v_1 >=< u_2, v_1 > +\alpha$$

D'où la valeur de α :

$$\alpha = - < u_2, v_1 >$$

On obtient ainsi :

$$x = u_2 - < u_2, v_1 > v_1$$

Pour obtenir un vecteur normalisé, il suffit de diviser par la norme :

$$v_2 = \frac{1}{\|u_2 - < u_2, v_1 > v_1\|} (u_2 - < u_2, v_1 > v_1)$$

On recommence pour v_3 (pou bien comprendre le processus). On cherche x sous la forme :

$$x = u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2 \text{ tel que } < x, v_1 >= 0 \text{ et } < x, v_2 >= 0.$$

Cela donne :

$$0 =< u_3, v_1 > +\alpha \text{ et } 0 =< u_3, v_2 > +\beta$$

On a ainsi :

$$x = u_3 - < u_3, v_1 > v_1 - < u_3, v_2 > v_2$$

Puisqu'on veut un vecteur normalisé proportionnel à x, on pose donc :

$$v_3 = \frac{1}{\|u_3 - < u_3, v_1 > v_1 - < u_3, v_2 > v_2\|} (u_3 - < u_3, v_1 > v_1 - < u_3, v_2 > v_2)$$

On raisonne donc par récurrence en supposant construit les vecteur $(v_1, \ldots, v_i)$.

On cherche un vecteur x sous la forme :

$$x = u_{i+1} + \sum_{k=1}^{i} \alpha_k v_k \text{ tel que } \forall k \in [\![1,i]\!],\ < x, u_k >= 0.$$

On est ainsi assuré que :

$$\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_i,x) = \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_i,u_{i+1}) = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_i,u_{i+1}).$$

On fait alors le produit scalaire avec u_k qui donne :

$$< x, u_k >=< u_{i+1}, v_k > + \alpha_k \text{ d'où } \alpha_k = - < u_{i+1}, v_k >$$

On pose ainsi :

$$x = u_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < u_{i+1}, v_k > v_k$$

Puis pour avoir un vecteur normée, on choisit :

$$v_{i+1} = \frac{1}{\|u_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < u_{i+1}, v_k > v_k\|}\left(u_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < u_{i+1}, v_k > v_k\right)$$

On construit ainsi la famille de proche en proche. On a bien une famille orthonormale.

■

R Il y a unicité de la famille $\mathscr{H}$ à condition d'assurer :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \langle u_i, w_i \rangle \geqslant 0$$

On voit en effet que l'on a deux choix pour le vecteur v_{i+1} : $\frac{x}{\|x\|}$ ou $-\frac{x}{\|x\|}$

Si les premiers vecteurs forment déjà une famille orthonormale, alors ce procédé les conservent. On dit que l'on complète une famille orthonormale en une base orthonormale.

IV Bases orthonormées d'un espace euclidien

On considère maintenant le cas où E est un espace euclidien, donc de dimension finie.

IV.1 Généralités

Définition IV.1 On appelle base orthonormale (ou base orthonormée) de E toute base de E qui est une famille orthonormale.

Notation IV.1. *On abrège généralement base orthonormale par BON. À ne pas utiliser dans une copie.*

Proposition IV.1 Dans un espace euclidien, il existe des bases orthonormales.

Plus précisément, si on considère une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E, alors on peut construire une base orthonormale $\mathscr{C} = (v_1, \dots, v_n)$ vérifiant :

$$\forall p \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{Vect}\left(u_1, \dots, u_p\right) = \mathrm{Vect}\left(v_1, \dots, v_p\right).$$

Démonstration. Ce n'est rien d'autre qu'une redite du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. ■

Proposition IV.2 Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

IV.2 Expression des coordonnées

Proposition IV.3 Soit E un espace euclidien de dimension n, $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormale de E et $x \in E$. On note :

$$x = \left(x_1, \dots, x_n\right) \text{ les coordonnées dans la base } \mathscr{B}.$$

On a alors :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = \langle x, u_i \rangle .$$

On peut donc écrire :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle\, u_i$$

Démonstration. On écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

puis on prends le produit scalaire avec u_j pour un certain $j \in [\![1,n]\!]$, cela donne :

$$\begin{aligned}\langle x, u_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, u_j \right\rangle \\ &= x_j\end{aligned}$$

en utilisant la linéarité et les propriétés d'orthonormalisation de $\mathscr{B}$. ■

✎ On a ainsi un moyen très simple de calculer les coordonnées dans une base orthonormées : simplement en faisant des produits scalaires.

■ **Exemple IV.1** Chercher un exemple avec les séries de Fourier. ■

IV.3 Expression du produit scalaire et de la norme

Proposition IV.4 Soit x, y deux vecteur d'un espace euclidien E et soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée.

On note alors :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n)$$

les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

On a alors :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

et :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned} < x, y >= & \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle \\ = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j < e_i, e_j >= \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

■

Ainsi, le produit scalaire de deux vecteurs se calcule très facilement à condition d'avoir les coordonnées dans une base orthonomée.

⋆ Exemple d'application de Gram-Schmidt sur une base

On prends un premier exemple : on considère la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ et on considère le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

On cherche une base (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est orthonormée.

On a :

$$\|1\| = 1$$

donc le premier vecteur 1 n'a pas besoin d'être changé. On pose donc Ensuite, on cherche un polynôme Q sous la forme $Q = X + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\langle Q, 1 \rangle = 0,$$

cela donné :

$$int_0^1 (x + \alpha)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \alpha x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \alpha = 0$$

D'où $\alpha = -\frac{1}{2}$. On pose donc $Q = X - \frac{1}{2}$, puis $P_1 = \frac{Q}{\|Q\|}$. On calcule donc la norme de Q :

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q^2(x)dx &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{4-6+3}{12} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Ainsi, on pose $P_1 = 12\left(X - \frac{1}{2}\right)$.

On recommence ensuite pour P_2.

On commencer par chercher un polynôme Q de la forme :

$$Q = X^2 + \alpha P_1 + \beta P_0$$

vérifiant :

$$\langle Q, P_0 \rangle = 0 \text{ et } \langle Q, P_1 \rangle = 0$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}\left\langle X^2, P_0 \right\rangle + \beta = 0 \text{donc } \beta &= -\int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{3} \\ \left\langle X^2, P_1 \right\rangle + \alpha = 0 \text{donc } \alpha &= -\int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\end{aligned}$$

V Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

V.1 Supplémentaire orthogonal

Définition V.1 — SEV orthogonaux. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux si :

$$\forall (x,y) \in F \times G, \ <x,y>=0$$

C'est-à-dire si $F \subset G^\perp$ (ce qui est équivalent à $G \subset F^\perp$).

R En particulier F et $F^\perp$ sont orthogonaux.

Proposition V.1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Si F est un SEV de E alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Le SEV $F^\perp$ est le **supplémentaire orthogonal** de F.

Notation V.1. *On note parfois :* $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$ *pour dire que* $F \oplus G = E$ *et que* $G = F^\perp$.

Il y a plusieurs supplémentaires, mais un seul supplémentaire orthogonal.

Démonstration. Puisqu'on ne connaît pas la dimension de $F^{\perp}$, il faut vérifier $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ et : $E = F + F^{\perp}$.

Pour la première, soit $x \in F \cap F^{\perp}$, alors $< x,x >= 0$ et donc $x = 0$.

Pour la deuxième, soit $x \in E$. On considère une base $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de F orthonormale, que l'on complète en une base orthonormale de E notée $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, u_n)$. On peut alors décomposer le vecteur x selon :

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i + \sum_{i=p+1}^{n} x_i u_i$$

On note alors $a = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i$ et $b = \sum_{i=p+1}^{n} x_i u_i$. De manière évidente, $a \in F$.

Vérifions que $b \in F^{\perp}$. Pour cela, on considère un élément quelconque $y \in F$ et on vérifie que $< y,b >= 0$. On écrit les coordonnées de y dans la BON $\mathscr{B}$:

$$y = \sum_{i=1}^{p} y_i u_i \text{ comme } y \in F \text{ il n'y a que des coordonnées selon } (u_1, \dots, u_p).$$

Et on a :

$$< b,y >== \left\langle \sum_{i=1}^{p} y_i u_i, \sum_{i=p+1}^{n} x_i u_i \right\rangle = 0 \text{ en utilisant l'expression du produit scalaire dans une BON.}$$

Ainsi, $b \in F^{\perp}$.

On a donc $x = a + b$, avec $a \in F$ et $b \in F^{\perp}$. On en déduit $E = F + F^{\perp}$.

Et donc : $E = F \oplus F^{\perp}$. ■

Proposition V.2 Soit F un SEV de E (avec E de dimension finie). On a alors :

$$\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$$

et :

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F.$$

Démonstration. L'égalité des dimensions provient directement de $E = F \oplus F^{\perp}$.

Pour l'égalité suivante, on a de manière évidente :

$$F^{\perp^{\perp}} \supset F$$

et l'égalité des dimension ! ■

La proposition suivante est à comparer à la propriété sur les bases et les sommes directes.

Proposition V.3 Soit E un espace euclidien de dimension finie n et $p \in [\![0,n]\!]$.
Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une BON de E, alors on construit :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}(e_1,\dots,e_p) \\ G &= \text{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n) \end{aligned}$$

Alors $G = F^\perp$ et $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$ (somme orthogonale).
Soit F un SEV de E on construit les familles suivantes :

$$\begin{aligned} (e_1,\dots,e_p)&\text{base orthonormale de } F \\ (e_{p+1},\dots,e_n)&\text{base orthonormale de } F^\perp \end{aligned}$$

Alors $(e_1,\dots,e_n)$ est une BON de E.

Démonstration. Pour montrer $G = F^\perp$, on considère $x \in F^\perp$. On écrit alors $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Or $< x, e_1 >= 0$ puisque $e_1 \in F$, donc $x_1 = 0$. On procède de même avec les autres pour obtenir : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $x_i = 0$. Ainsi, $x \in G$.

On peut conclure avec l'égalité des dimension ou vérifier de même que $G^\perp = F$. La propriété $F \oplus G = E$ est une redite de la propriété sur somme directe et bases.

Pour la deuxième partie, on a bien $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E (puisque obtenu en réunissant les bases de deux supplémentaires). De plus, on vérifie facilement, que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ < e_i, e_j >= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

V.2 Projeté orthogonal

Définition V.2 — Projeté orthogonal. Soit F un sous-espace vectoriel de E avec E de dimension finie.

On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

L'image d'un vecteur x de E par cette projection est appelée le projeté orthogonal de x sur F.

Pour calculer le projeté d'un vecteur x avec la définition, il faut trouver la décomposition de x sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$. On a alors $u = P_F(x)$. On va chercher des moyens plus simples de le calculer.

Notation V.2. *Dans ce cours, on note $P_F(x)$ le projeté orthogonal d'un vecteur x*

Proposition V.4 Soit $\mathscr{F} = (u_1,\dots,u_p)$ une BON de F et x un vecteur de E. Alors :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^n < u_i, x > u_i.$$

Démonstration. On complète la BON $\mathscr{F}$ en une base de E, notée

$$\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n).$$

On écrit les coordonnées de x dans cette base avec l'expression des coordonnées dans une BON :

$$x = \sum_{i=1}^{n} < u_i, x > u_i = \sum_{i=1}^{p} < u_i, x > u_i + \sum_{i=p+1}^{n} < u_i, x > u_i$$

Cette dernière décomposition corresponds à la décomposition dans la somme directe $F \oplus F^{\perp} = E$. Ainsi :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < u_i, x > u_i.$$

■

On peut donc très facilement calculer le projeté d'un vecteur sur un SEV de F à condition d'avoir une BON de F et de savoir faire des produits scalaires.

Comme on n'a pas toujours une BON, on peut utiliser la proposition suivante :

Proposition V.5 Soit F un sous-espace vectoriel de E avec E de dimension finie soit $\mathscr{G} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une famille génératrice de F.

Soit $x \in E$.

Alors $P_F(x)$ est l'unique vecteur y vérifiant :

$$\begin{cases} y \in F, & \text{puisque le projeté sur } F \text{ est un vecteur de } F \\ \forall i \in [\![1, n]\!], & < x - y, e_i >= 0 \end{cases}$$

Démonstration. Déjà on peut constater que le vecteur $P_F(x)$ vérifie les conditions. En effet $P_F(x) \in F$. De plus, par définition du projeté $x - P_F(x) \in F^{\perp}$. En particulier, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $< x - y, e_i >= 0$ puisque $e_i \in F$.

Considérons de plus un vecteur y vérifiant la condition. Montrons alors que $(x - y) \in F^{\perp}$. En effet, si $z \in F^{\perp}$, alors z s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{G}$ et donc :

$$z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i.$$

et donc

$$< x - y, z >= \sum_{i=1}^{n} z_i < x - y, e_i >= 0.$$

D'où $(x - y) \in F^{\perp}$ et donc en écrivant $x = y + (x - y)$, on a la décomposition correspondant à la somme directe $F \oplus F^{\perp}$. On en déduit que $y = P_F(x)$. ■

■ **Exemple V.1** Calculer le projeté de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x) Q(x) dx$$

■

V.3 Inégalité de Bessel

Définition V.3 Soit A une partie non vide de E et $x \in E$, on appelle distance de x à A la quantité :

$$d(A,x) = \inf_{a \in A} d(a,x)$$

Cette borne inférieure existe puisqu'il s'agit d'une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$.

Dans le cas général, il est très difficile de calculer la distance d'un point à un ensemble, mais dans le cas d'un SEV d'un espace euclidien, il suffit d'utiliser le projeté :

Proposition V.6 Soit E un espace euclidien et F un SEV de E et soit $x \in E$.

Alors la distance de x à F est atteinte en un unique point de F : le projeté de x sur F. Plus précisément :

$$d(x,F) = d(x, P_F(x)) = \inf_{y \in F} d(x,y)$$

$$\forall y \in F,\ d(x,y) \geqslant d(x, P_F(x)) \text{ avec égalité si et seulement si } y = P_F(x).$$

On a donc un moyen facile de calculer cet distance !

Démonstration. Soit $y \in F$, on écrit alors

$$\begin{aligned} d(x,y)^2 &= \|x-y\|^2 \\ &= \|x-P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)-y\|^2 \text{avec Pythagore} \\ &\geqslant \|x-P_F(x)\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi : $d(x,y) \geqslant \|x - P_F(x)\|$.

De plus, on voit qu'il y a égalité si et seulement si $y = P_F(x)$. ∎

Exemple V.2 Calculer

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \left(x - a\cos x - b\sin x\right)^2 dx$$

C'est la meilleur approximation de x par une fonction du type $a\cos x + b\sin x$.

Produit scalaire et espaces euclidiens

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

✯ Produit scalaire

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour $(P,Q) \in E^2$ on note

$$\langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E

Correction : appliquer la définition.

Bien voir la technique : somme de termes positifs nulles, tous les termes sont nuls ! ainsi que l'argument de degré (plus de racines que le degré = polynôme nul).

Exercice 2 Pour (x,y,z) et (x',y',z') deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on note :

$$\Big\langle (x,y,z),(x',y',z') \Big\rangle = xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}\left(xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z\right)$$

Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire.
On pourra vérifier :

$$\Big\langle (x,y,z),(x,y,z) \Big\rangle = \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{z}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}z^2.$$

Correction : appliquer la définition.

Il est important de remarquer la méthode de factorisation :

$$\begin{aligned}\Big\langle (x,y,z),(x,y,z) \Big\rangle =& x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz \\ =& (x^2 + xy + xz) + y^2 + yz + z^2\end{aligned}$$

On mets d'abords les termes avec x puis ceux qui restent avec y, puis les derniers en z. On traite comme le début d'un carré :

$$x^2 + xy + yz = \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} - \frac{1}{2}yz$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\Big\langle (x,y,z),(x,y,z) \Big\rangle = =& \quad \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + \frac{1}{2}yz + \frac{3z^2}{4} \\ =& \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y^2 + \frac{2}{3}yz\right) + \frac{3z^2}{4}\end{aligned}$$

on traite les termes en y :

$$y^2 + \frac{2}{3}yz = \left(y + \frac{1}{3}z\right)^{-}\frac{1}{9}z^2.$$

En remplaçant on trouve le résultat.

Le « définie positif » se montre avec l'argument : somme de termes positifs nulles tous le termes sot nuls, suivi d'un système linéaire homogène triangulaire supérieur.

Exercice 3 On note E l'ensemble des applications $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1,1]$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(-1) = 0 \text{ et } f^{(n)}(1) = 0$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et que :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

   est un produit scalaire sur E.
2. Vérifier que $T : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme antysimétrique de E, c'est-à-dire :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle T(f), g\rangle = -\langle f, T(g)\rangle$$

Correction :

1. Appliquer la définition, avec l'argument : intégrale d'une fonction positive et continue est nulle, alors la fonction est nulle.
2. Utiliser une intégration par parties, le crochet est nul d'après les hypothèses.

⋆ Isométries

Exercice 4 Soient E et F deux espaces euclidiens et $\varphi : E \to E$ une application qui conserve la norme :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ \|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \|u - v|$$

et vérifiant $\varphi(0) = 0$.

Démontrer que φ est linéaire.

Correction :

⋆ Cauchy-Schwarz

Exercice 5 Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients tous positifs et pour $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a :

$$(P(\sqrt{xy}))^2 \leqslant P(x)P(y)$$

Correction :

On écrit :

$$(P(\sqrt{xy}))^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} (\sqrt{a_k}\sqrt{x}^k)(\sqrt{a_k}\sqrt{y}^k)\right)^2$$

On considère alors, les $n+1$ réels (un vecteur donc) :

$$\left((\sqrt{a_k}\sqrt{x}^k)\right)_{k\in[\![0,n]\!]} \text{ noté } u$$

et l'autre vecteur : $\left((\sqrt{a_k}\sqrt{x}^k)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ noté v.

On a :

$(P(\sqrt{xy}))^2 = (u \cdot v)^2$ pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

On a alors :

$$(u\cdot v)^2 \leqslant \|u\|^2\|v\|^2$$

Or :

$$\|u\|^2 = \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{a_k}\sqrt{x}^k)^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = P(x)$$

(argument $x \geqslant 0$!) de même pour v ce qui donne le résultat.

Exercice 6 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\ R)$.

Montrer que :

$$\left|\int_0^1 tf(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}\int_0^1 f^2(t)dt}$$

Correction : Cauchy-Schwarz sur

$$\int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 g(t)f(t)dt =< f,g >$$

avec $g : t \mapsto t$.

Exercice 7 Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,\pi],\ R)$ telle que $f(0) = 0$.

Montrer que :

$$\forall x \in [0,\pi],\ f^2(x) \leqslant x\int_0^x f'^2(t)dt.$$

Correction : Cauchy-Schwarz sur

$$f^2(x) = \left(\int_0^x 1 f'(t)dt\right)^2 = (\langle u,v\rangle)^2$$

avec $u : t \mapsto f'(t)$ et $v : t \mapsto 1$.

⋆ Base orthonormale

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$$

1. Vérifier que c'est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\varphi(X^i,X^j)$ pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.
3. En déduire une base orthonormale de E

Correction :

- Appliquer la définition et l'argument : 0 racine d'ordre plus grand que le degré, alors le polynôme est nul ! (on peut aussi voir cela comme une conséquence de Taylor)
- on trouve :

$$\varphi(X^i,X^j) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ i!j! \text{ si } i = j \end{cases}$$

- Ainsi, la famille est déjà orthogonale, il suffit de la normer. On obtient la famille :

$$\left(\frac{X^i}{i!}\right)$$

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique on considère le sous-espace vecteoriel

$$F = \text{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$$

où

$$u_1 = (1,1,1,1) \qquad u_2 = (-1,-1,-2,2)$$
$$u_3 = (-1,5,-4,8) \qquad u_4 = (-3,1,-5,3)$$

Déterminer un système d'équations et une base orthonormale de $F^{\perp}$ puis de F.

Exercice 10 Montrer que

$$\langle P,Q\rangle = P(1)Q(1)+P'(1)Q'(1)+P''(1)Q''(1)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 11 On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni de

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

et no note $F = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Déterminer une base orthonormale de F puis la projection orthogonale p sur F .
2. Montrer que

$$d(X^2,F) = \|X^2 - p(X^2)\|$$

et déterminer cette distance.
3. En déduire la valeur de

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2-a-bt)^2 dt$$

Exercice 12 Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\sqrt{t}-at-b)^2 dt$.

25 — Couple et vecteurs de variables aléato

I Couple de deux variables aléatoires finies

I.1 Généralités

Définition I.1 — Couple de VARs. On appelle couple de variables aléatoires réelles deux var X et Y définies sur le même univers Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On construit alors l'application :

$$Z : \left\{ \begin{array}{ccl} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & Z(w) = (X(w), Y(w)), \end{array} \right.$$

qui est donc une application de Ω dans $\mathbb{R}^2$ (une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$).

On note alors l'univers image $Z(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a :

$$\forall (x,y) \in Z(\Omega), \quad \left[Z = (x,y)\right] = \Big[[X = x] \cap [Y = y]\Big].$$

On voit donc qu'une var est une fonction de $\Omega \to \mathbb{R}$, alors qu'un couple de var est une fonction de $\Omega \to \mathbb{R}^2$. On peut aussi dire qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est un couple de variable aléatoire réelle.

Le but de ce chapitre est d'étudier les liens entre ces variables.

Comme dans le cas d'une var l'univers image est très important et on fera attention de bien le déterminer.

Par contre, contrairement au cas d'une var certaines valeurs de l'univers image ne sont l'image d'aucun événements.

■ **Exemple I.1** Par exemple, si on tire des jetons, dans une urne portant des numéros 1 ou 2. on note X_1 le plus petit et X_2 le plus grand, on a alors $Z = (X_1, X_2)$ est une var. L'univers images est alors $Z(\Omega) = [\![1,2]\!]^2$. Néanmoins, le couple $(2,1)$ n'est l'image par Z d'aucune éventualité. Au sens strict, il ne devrait pas faire partie de l'univers image, et on poserait alors

$$Z(\Omega) = \Big\{ (X(w), Y(w)) \Big| w \in \Omega \Big\} \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

Ce n'est pas un problème : puisque les événements qui ne sont pas l'image d'éventualité sont de probabilité nulle. On gardera donc cette convention d'appeler univers image $Z(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$. ■

Dans ce chapitre, on notera

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}.$$

On a de même que pour les var :

Proposition I.1 — Système complet d'événements associé à un couple de VAR. Les $n \times m$ événements $\Big(Z = (x_i, y_j)\Big)_{i \in [\![1,n]\!],\ j \in [\![1,m]\!]}$ forment un système complet d'événements.

Démonstration. La preuve est simple :

Deux événements de ce type sont forcément disjoints, puisque Z ne peut valoir (x_i, y_j) et $(x_{i'}, y_{j'})$ à la fois.

D'autre part, si ω est une éventualité, si on note x_i tel que $X(\omega) = x_i$ et y_j tel que $Y(\omega) = y_j$, alors $\omega \in [Z = (x_i, y_j)]$.

Ainsi ces événements sont disjoints et leur réunion fait Ω. ■

R On voit ici l'intérêt d'utiliser des systèmes complets d'événement et non des partitions : on peut avoir des parties qui sont vides.

■ **Exemple I.2** Si on lance deux dés (discernables), on note X la valeur du premier Y la valeur du second. (X, Y) est alors un couple de VAR. L'univers image est alors $[\![1,6]\!]^2$. ■

■ **Exemple I.3** Dans une urne contenant des boules blanches et noires, on tire une première boule. On note X_1 la variable binaire égale à 1 si la boule est blanche, 0 sinon. Puis on tire une deuxième boule et on note X_2 la variable binaire égale à 1 si la boule est blanche, 0 sinon. (X_1, X_2) est alors un couple de VAR. L'univers images est $\{0,1\}^2$. ■

■ **Exemple I.4** On lance un dé, on note D le nombre obtenu, puis on lance D pièce, on note X le nombre de face obtenu. (D, X) est alors un couple de VAR. L'univers image est alors $[\![1,6]\!] \times [\![0,6]\!]$, mais certains couples sont impossibles comme $(1,6)$. ■

I.2 Loi conjointe

Définition I.2 — Loi conjointe. La loi du couple (X, Y) ou loi conjointe est l'application :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ (x,y) & \mapsto & p\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = p\Big([Z = (x,y)]\Big) \end{array} \right.$$

On note :

$$p_{ij} = p(X = x_i \cap Y = y_i) = p(Z = (x_i, y_j)), \quad p_{i\bullet} = p(X = x_i) \text{ et } p_{\bullet j} = p(Y = y_j).$$

✎ On représente parfois souvent ces nombres sous la forme d'une matrice de taille $n \times m$, l'élément (i, j) étant p_{ij}.

Proposition I.2 On a :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} p\Big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\Big) = 1.$$

Autrement dit, la somme sur des éléments de la matrice qui contient les p_{ij} fait 1.

Démonstration. Conséquence directe du fait que les $n \times m$ événements $\Big[Z = (x_i, y_j)\Big]_{i\in[\![1,n]\!],\ j\in[\![1,m]\!]}$ forment un système complet d'événements :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} p([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} p([Z = (x_i, y_j)]) = 1.$$

■

■ **Exemple I.5** Prenons l'exemple d'une urne contenant des boules numérotées de 1 à 4, et on tire deux boules successivement avec remise on note X_1 et X_2 la valeur de la première et de la deuxième boule, on construit alors le couple de VAR $Z = (X_1, \max(X_1, X_2)$.

On a facilement le tableau :

$X = X_1$ \ $Y = max(X_1, X_2)$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{4}$

■

I.3 lois marginales

Définition I.3 — Lois marginales. Soit $Z = (X, Y)$ une couple de VAR, les VAR X et Y sont appelées **marginale** de Z. La loi de X est apellée **première loi marginale** du couple (X, Y), tandis que la loi de Y est la **seconde loi marginale**.

Le mot marginale signifie donc composante pour les probabilités.

Proposition I.3 Soit (X, Y) un couple de var, on a alors :

- $\forall x \in X(\Omega),\ p(X = x) = \sum_{j=1}^{m} p(X = x \cap Y = y_j),$

- $\forall y \in Y(\Omega),\ p(Y = y) = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i \cap Y = y)$.
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(X = x_i \cap Y = y_j) = 1$.

Cela signifie que :

- On obtient la loi de X en faisant pour chaque ligne la somme sur les colonnes.
- On obtient la loi de Y en faisant pour chaque colonne la somme sur les lignes.

Avec les notations on a : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$, donc la somme sur toutes les cases du tableau fait 1.

Ce qui veut dire qu'on peut retrouver les lois marginales à partir de la loi du couple : pour trouver la loi de X, on fait la somme sur les colonnes et pour la loi de Y, on fait la somme sur les lignes.

■ **Exemple I.6** Toujours dans le même exemple, on obtient :

X \ Y	1	2	3	4	loi de X
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
4	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
loi de Y	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

■

! Attention, le contraire n'est par vrai : connaissant la loi des marginales, on ne peut pas déterminer la loi du couple. Tout simplement parce qu'il y a plus d'information dans le tableau que dans les « côtés » (les lois marginales)

■ **Exemple I.7** Soit une urne contenant trois blanches et quatre rouges. On tire successivement dans l'urne, et on considère les VAR X_1 et X_2 égale à 1 si la boule est rouge, 0 sinon. On construit le couple de VAR (X_1, X_2).

Dans le cas avec remise, on obtient facilement :

X_1 \ X_2	0	1	loi de X_1
0	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{3}{7}$
loi de X_2	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

Dans le cas sans remise, on a :

X_1 \ X_2	0	1	loi de X_1
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
loi de X_2	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

Dans les deux cas, la loi de X et la loi de Y est la même, mais la loi du couple est différente. ■

I.4 Lois conditionnelles

De la même manière que la connaissance d'une réalisation d'un événement change la probabilité des autres événements, savoir qu'une variable aléatoire vaut une certaine valeur donne de l'information sur l'autre variable.

Définition I.4 — Loi conditionnelle. Soit (X,Y) un couple de var on appelle loi conditionnelle de X sachant $Y=y_j$ l'application définie par :

$$\begin{cases} X(\Omega) & \mapsto & [0,1] \\ x_i & \to & p(X=x_i|Y=y_j) = \dfrac{p(Z=(x_i,y_j))}{p(Y=y_j)} = \dfrac{p_{ij}}{p_j}. \end{cases}$$

De la même manière, on appelle, loi conditionnelle de Y sachant $X=x_i$ l'application définie par :

$$\begin{cases} Y(\Omega) & \mapsto & [0,1] \\ y_i & \to & p(Y=y_j|X=x_i) = \dfrac{p(Z=(x_i,y_j))}{p(X=x_i)} = \dfrac{p_{ij}}{p_i}. \end{cases}$$

■ **Exemple I.8** Toujours dans l'exemple soit une urne contenant trois blanches et quatre rouges. On tire successivement et sans remise dans l'urne, et on considère les VAR X_1 et X_2 égale à 1 si la boule est rouge, 0 sinon.

On a :

X_1 \ X_2	0	1	loi de X_1
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
loi de X_2	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

Ainsi, on a les loi conditionnelles :

- Sachant $X_2=0$,

x_1	0	1
$p_{(X_2=0)}(X_1=x_1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- Sachant $X_2=1$,

x_1	0	1
$p_{(X_2=1)}(X_1=x_1)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

- Sachant $X_1=0$,

x_2	0	1
$p_{(X_1=0)}(X_2=x_2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- Sachant $X_1=1$,

x_2	0	1
$p_{(X_1=1)}(X_2=x_2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

■

II Théorème de transfert

Commençons par un exemple :

II.1 Loi de la somme de deux variables aléatoires à valeurs entières positives

■ **Exemple II.1** Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω. On suppose que X et Y sont à valeurs entières et positives. On note $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,m]\!]$

On a alors : $(X+Y)(\Omega) = [\![0,n+m]\!]$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![0,n+m]\!],\ p(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} p(X=i \cap Y=k-i) \\
&= \sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)} p(X=i \cap Y=k-i) \quad \text{en enlevant les valeurs nulles} \\
&= \sum_{j=0}^{m} p(Y=j \cap X=k-j) \\
&= \sum_{j=\max(0,k-n)}^{\min(m,k)} p(Y=j \cap X=k-j) \quad \text{de manière symétriques.}
\end{aligned}$$

■

Démonstration. Considérons $k \in [\![0,n+m]\!]$ On utilise le système complet d'événement associé à X :

$$\begin{aligned}
p(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} p(X=i \cap X+Y=k) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=i \cap Y=k-i).
\end{aligned}$$

La dernière relation s'obtient en remarquant qu'il faut les contraintes :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant k-i \leqslant m \\
\text{et donc } 0 \leqslant i \leqslant n \text{ et } k-m \leqslant i \leqslant k
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple II.2** Deux variables aléatoires uniforme sur $[\![1,n]\!]$, loi de la somme. ■

II.2 Loi de l'image d'un couple de VAR par une fonction

Étant donné un couple de VAR (X,Y), et U une fonction $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on peut définir une VAR par $U(X,Y) = U \circ (X,Y)$. C'est la VAR image de (X,Y) par U.

Proposition II.1 Pour calculer la loi de $U(X,Y)$, il faut, pour chacun des éléments $z \in U(X,Y)(\Omega)$, construire l'ensemble $I_z = \left\{(i,j) | U(x_i,y_j) = z\right\}$.

On a alors :

$$\forall z \in U(X,Y)(\Omega),\ p\Big(U(X,Y) = z\Big) = \sum_{(i,j)\in I_z} p\Big((X = x_i)\cap(Y = y_j)\Big).$$

Comme dans le cas d'une var, les ensembles $\Big(I_z\Big)_{z\in U(X,Y)(\Omega)}$ forment une partition de $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$.

Démonstration. L'événement $U(X,Y) = z$ est la réunion disjointe des événements $(X = x_i)\cap(Y = y_j)$, d'où le premier résultat.

Si $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, on pose $z = U(x_i,y_j)$, et $(i,j) \in I_z$. De plus les (I_z) sont disjoints.

Cette preuve est donc identique au cas d'une seul var.

■

✎ On voit donc qu'il est difficile de calculer la loi d'une composée

II.3 Théorème de transfert

Il est donc difficile de calculer la loi d'une composée à partir de la loi du couple. Néanmoins, il est facile de calculer l'espérance de la composée à partir de la loi du couple : il suffit de pondérer les valeurs possibles de $U(X,Y)$ par leur probabilité.

Proposition II.2 Soit (X,Y) un couple de VAR, et U une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors on peut définir l'espérance de $U(X,Y)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
E\Big(U(X,Y)\Big) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} U(x_i,y_j)p\Big([X = x_i]\cap[Y = y_j]\Big)\\
&= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} U(x,y)p\Big([X = x]\cap[Y = y]\Big)
\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
E(U(X,Y)) &= \sum_{z\in U(X,Y)(\Omega)} zP\Big(U(X,Y) = z\Big)\\
&= \sum_{z\in U(X,Y)(\Omega)} z\sum_{I_z} p\big((X = x_i)\cap(Y = y_j)\big)\\
&= \sum_{z\in U(X,Y)(\Omega)} \sum_{I_z} p\big((X = x_i)\cap(Y = y_j)\big)U(x_i,y_i)\\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} p\big((X = x_i)\cap(Y = y_j)\big)U(x_i,y_i)
\end{aligned}$$

Ici aussi, cette preuve est donc identique au cas d'une seul var. ■

■ **Exemple II.3** Espérance de la somme de deux variables aléatoires uniforme sur $[\![1,n]\!]$. (suite de l'exemple précédent). ■

II.4 Cas particulier d'une combinaison linéaire de var

Proposition II.3 — Linéarité de l'espérance. Soit (X,Y) deux var, λ et μ deux réels quelconques, alors on a :

$$E(\lambda X+\mu Y)=\lambda E(X)+\mu E(Y)$$

R On a déjà utilisé cette propriété dans la démonstration de l'égalité de Koenig-Huygens.

Démonstration.

$$\begin{aligned}E(\lambda X+\mu Y)=&\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}(\lambda x+\mu y)p(X=x\cap Y=y)\\=&\lambda\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}xp(X=x\cap Y=y)+\mu\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}yp(X=x\cap Y=y)\end{aligned}$$

Puis si on regarde le premier terme, on voit :

$$\begin{aligned}\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}xp(X=x\cap Y=y)=&\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)}xp(X=x\cap Y=y)\\=&\sum_{x\in X(\Omega)}x\sum_{y\in Y(\Omega)}p(X=x\cap Y=y)\\=&\sum_{x\in X(\Omega)}xp(X=x)\\=&E(X)\end{aligned}$$

De même pour le second terme, d'où :

$$E(\lambda X+\mu Y)=\lambda E(X)+\mu E(Y).$$

■

On dit que l'espérance est linéaire.

■ **Exemple II.4** On tire deux jetons avec remise dans une urne contenant des jetons numérotés de 1 à n, la moyenne de la somme des deux nombres obtenus. ■

III Indépendance de deux variables aléatoires

III.1 Généralités

Maintenant qu'on a définit la loi conditionnelle, on définit la notion d'indépendance : deux variables aléatoires sont indépendantes lorsque la connaissance de la valeur de l'une ne donne aucune information sur la valeur de l'autre.

Définition III.1 — Indépendance de deux VARs. Soit X, Y deux var, on dit que X et Y sont indépendantes si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, m]\!],\ p\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = p(X = x_i)p(Y = y_j).$$

Remarquons que dans ce cas :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_{(Y=y_j)}\Big(X = x_i\Big) = p(X = x_i).$$

Cela signifie que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, l'événement $(X = x_i)$ est indépendant de l'événement $(Y = Y_j)$.

III.2 Espérance du produit de variable aléatoires indépendantes

Proposition III.1 Si les var X et Y sont indépendantes, on a :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyp((X = x) \cap (Y = y)) \\
&= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyp(X = x)p(Y = y) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} xp(X = x) \sum_{y\in Y(\Omega)} yp(Y = y) \\
&= E(X)E(Y).
\end{aligned}$$

■

Il sert souvent à démontrer que deux variables X et Y ne sont pas indépendantes. Attention, on peut avoir $E(XY) = E(X)E(Y)$ sans que les var soient indépendantes (voir la partie sur la covariance et l'exercice de td).

■ **Exemple III.1** Si on tire une boule dans une urne contenant autant de noires que de blanches, on note X la var égale à 1 si la boule est blanche et 0 sinon et $Y = 1 - X$, alors $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$, tandis que $E(XY) = 0$.

Les var X et Y ne sont pas indépendantes, ce dont on pouvait se douter. ■

III.3 Indépendance de fonctions de var indépendantes

Proposition III.2 Soient (X, Y) deux var indépendantes, et f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou plus généralement de $X(\Omega)$ (respectivement $Y(\Omega)$) dans $\mathbb{R}$). Alors on a $(f(X), g(Y))$ sont des var indépendantes.

Démonstration. Admis (conformément au programme).

Néanmoins une démonstration est simple : on constate facilement que si A et B sont des parties de $\mathbb{R}$ et (X,Y) des vars indépendantes, on a

$$p\big((X\in A)\cap(Y\in B)\big)=p\big(X\in A\big)p\big(Y\in B\big).$$

Pour cela, il suffit de découper la partie $A\times B$ en événements élémentaires (x_i,y_j).

Puis :

$$\begin{aligned}p\big((f(X),g(Y))=(z_1,z_2)\big)=&p\big(X\in f^{-1}(z_1)\cap Y\in g^{-1}(z_2)\big)\\=&p\big(X\in f^{-1}(z_1)\big)p\big(Y\in g^{-1}(z_2)\big)\\=&p\big(f(X)=z_1\big)p\big(g(Y)=z_2\big)\end{aligned}$$

■

■ **Exemple III.2** Si (X,Y) sont indépendantes, alors (X,Y^2) aussi, de même pour $(\sin(X),\cos(Y))$ etc. ■

IV Covariance

La covariance est au programme de PC et de PSI. On la décrit donc ici rapidement.

IV.1 Définition

Définition IV.1 — Covariance. Soient (X,Y) un couple de var, on appelle covariance le nombre :

$$Cov(X,Y)=E\Big([X-E(X)][Y-E(Y)]\Big)$$

Ce nombre est aussi égal à :

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

Démonstration. La démonstration est la même que celle de l'égalité de Koenig-Huygens (que l'on retrouve dans le cas $X=Y$) :

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)=&E\Big([X-E(X)][Y-E(Y)]\Big)\\=&E\Big(XY-E(X)Y-E(Y)X+E(X)E(Y)\Big)\\=&E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y))\\=&E(XY)-E(X)E(Y).\end{aligned}$$

■

On a les propriétés suivantes pour la covariance :

Proposition IV.1 On voit :

- $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$,
- $Cov(\lambda X+X',Y)=\lambda Cov(X,Y)+Cov(X',Y)$, on a donc linéarité par rapport à X,
- $Cov(X,Y+\mu Y')=Cov(X,Y)+\mu Cov(X,Y')$, de même pour Y

- $cov(X,X) = V(X) \geqslant 0$.
- $V(X+Y) = V(X) + 2Cov(X,Y) + V(Y)$.
- Si deux var sont indépendantes, la covariance est nulle.

Démonstration. Le premier point est évident.

Pour montrer la linéarité, on a :

$$\begin{aligned}Cov(\lambda X + X', Y) =& E\Big((\lambda X + X')Y\Big) - E\Big(\lambda X + X'\Big)E(Y)\\ =& E\Big(\lambda XY + X'Y\Big) - \lambda E(X)E(Y) + E(X')E(Y)\\ =& \lambda E\Big(XY\Big) + E\Big(X'Y\Big) - \lambda E(X)E(Y) + E(X')E(Y)\\ =& \lambda Cov(X,Y) + Cov(X',Y).\end{aligned}$$

Puis $Cov(X,X) = E(X^2) - (E(X))^2 = V(X)$.

Ensuite :

$$\begin{aligned}V(X+Y) =& E((X+Y)^2) - \Big(E(X+Y)\Big)^2\\ =& E(X^2 + 2XY + Y^2) - \Big(E(X) + E(Y)\Big)^2\\ =& E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - \Big((E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2\Big)\\ =& E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2\Big(E(XY) - E(X)E(Y)\Big)\\ =& V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)\end{aligned}$$

Pour deux var indépendantes, on a vu que $E(XY) = E(X)E(Y)$, donc la covariance est nulle.

■

! La covariance de deux var indépendantes est nulle, mais la réciproque n'est pas vraie.

■ **Exemple IV.1** Soit une var X dont la loi est :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On a clairement $E(X) = 0$ Considérons ensuite $Y = X^2$. La loi de Y est :

y_i	0	1	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

On a alors $E(Y) = \frac{11}{6}$.

La loi conjointe est alors :

X / Y	-2	-1	0	1	2	loi de Y
0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
loi de X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1

On voit que X et Y ne sont pas indépendants, car par exemple :

$$p\big((X=1)\cap(Y=4)\big)=0, \text{ mais } p\big((X=1)\big)p\big((Y=4)\big)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$$

Pourtant l'espérance de XY vérifie :

$$E(XY)=-2\times 4\times\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+0++\frac{1}{4}+2\times 4\times 16=0=E(X)E(Y).$$

■

IV.2 Coefficient de régression linéaire

Proposition IV.2 — Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les couples de VARs. Soit (X,Y) un couple de var sur Ω d'écart type non nul(*i.e.* non certaine), on a alors :

$$|Cov(X,Y)|\leqslant\sigma(X)\sigma(Y).$$

Ainsi, la covariance de deux variables aléatoires est bornée par le produit de leur écart type. L'égalité a lieu si et seulement si $\exists(a,b)\in\mathbb{R},\ Y=aX+b$. (sauf pour des valeurs de probabilités nulles).

Démonstration. Soit X et Y deux variables aléatoires, d'écart type non nul. Et soit $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ V(\lambda X+Y)\geqslant 0$$

Ce qui s'écrit :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda^2V(X)+2\lambda Cov(X,Y)+V(Y)\geqslant 0$$

ou encore : $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ P(\lambda)\geqslant 0$.

Où $P(\lambda)$ est le polynôme : $\lambda^2V(X)+2\lambda Cov(X,Y)+V(Y)$, de degré 2, car $V(X)\neq 0$.

On a donc :$\Delta\leqslant 0$ ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
&4Cov(X,Y)^2-4V(X)V(Y)\leqslant 0\\
&\text{soit } Cov(X,Y)^2\leqslant V(X)V(Y)\\
&\text{au final :}|Cov(X,Y)|\leqslant\sigma(X)\sigma(Y).
\end{aligned}$$

Ce qui est bien l'inégalité à laquelle on voulait arriver.

Regardons maintenant le cas d'égalité :

$$\begin{aligned}
|Cov(X,Y)|=\sigma(X)\sigma(Y) &\iff \Delta=0\\
&\iff \exists\lambda_0\in\mathbb{R},\ P(\lambda_0)=0\\
&\iff \exists\lambda_0\in\mathbb{R},\ V(\lambda_0X+Y)=0\\
&\iff \exists\lambda_0\in\mathbb{R},\ \lambda_0X+Y \text{ est une var quasi certaine}\\
&\iff \exists\lambda_0\in\mathbb{R},\exists\mu\in\mathbb{R},p(\lambda_0X+Y=\mu)=1.\\
&\iff \exists(a,b)\in\mathbb{R},\ Y=aX+b.
\end{aligned}$$

Les deux dernières équivalence sont à comprendre dans le sens sauf sur un ensemble de probabilité nulle.

■

✎ Par exemple cela permet de montrer que si X est proche d'une constante (écart-type petit), alors quelque soit Y, X et Y ont tendance à être décoréllée, comme si X et Y étaient indépendante.

Définition IV.2 — VAR corrélées VAR décorélées. Soient (X,Y) deux var, on dit que X et Y sont corrélées si $Cov(X,Y) \neq 0$, dans le cas contraire elles sont dite décoréllées (ou non corrélées).

On appelle coefficient de corrélation, le nombre :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

! $\rho(X,Y)$ n'est défini que si X et Y sont d'écart type non nul.

✎ $\rho(X,Y)$ exprime la dépendance des deux variables, ramené à leur écart type. C'est un nombre compris entre -1 et 1, qui vaut 0 si les var sont indépendante (minimum de dépendance), et qui vaut 1 ou -1 ssi $\exists a,b,\ X = aY + b$, autrement dit dans le cas d'un maximum de dépendance.

V Généralisation au cas de n variables aléatoires

V.1 Généralités

Définition V.1 — Vecteur aléatoire. On considère $(X_1,\dots X_n)$, n var sur un même univers Ω. On dit alors que $(X_1,\dots X_n)$ est un vecteur aléatoire sur Ω).

Sa loi conjointe est donné par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,\dots,x_n) & \mapsto & p\Big((X_1=x_1)\cap(X_2=x_2)\cap(X_3=x_3)\cdots\cap(X_n=x_n)\Big) \end{array}\right.$$

On appelle lois marginales les lois de $X_1,\dots,X_n$.

■ **Exemple V.1**
- On tire dans une urne et on note X_i la var qui est égale à 0 si la boule est noire 1 sinon.
- De même on tire plusieurs fois un dé et on note D_i le nombre obtenu au i-ième lancer.

■

V.2 Espérance de la somme de n variables aléatoires

Proposition V.1 — Espérance de la somme. On considère un vecteur aléatoire

$(X_1,\dots X_n)$, on a alors :

$$E(X_1+X_2+\dots X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\dots+E(X_n)$$

Démonstration. Par récurrence, le cas $n=2$ a été déjà fait, et a récurrence est immédiate en utilisant le cas $n=2$. ■

R D'une manière générale, l'espérance est linéaire, ainsi si (λ_i) sont des réels, on a :

$$E\Big(\sum_i \lambda_i X_i\Big)=\sum_i \lambda_i E(X_i)$$

■ **Exemple V.2** On tire n fois avec remise dans une urne qui contient N boules dont pN dont blanches $(1-p)N$ sont noires.

On note X_i la var égale à 1 si on obtient une blanche au tirage i 0 sinon, et, soit Y le nombre de blanche. On sait alors que $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p,n)$, mais $Y=X_1+\dots+X_n$.

On retrouve le fait que $E(Y)=\sum_{i=1}^n E(X_i)=np$.

Si les tirages se font sans remise, on a le même résultat. ■

V.3 Indépendance mutuelle

Définition V.2 Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un vecteur aléatoire. On dit que les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x_1,x_2\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times \dots X_n(\Omega),$$
$$p\Big((X_1=x_1)\cap(X_2=x_2)\cap\dots\cap(X_n=x_n)\Big)=p(X_1=x_1)p(X_2=x_2)\dots p(X_n=x_n)$$

R Dans ce cas, on peut déduire la loi conjointe à partir des lois marginales.

Proposition V.2 Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables mutuellement indépendantes. Alors :

- Soit $i_1,\dots,i_p\in [\![1,n]\!]$, alors les var $(X_{i_1},\dots,X_{i_p})$ sont indépendantes, *i.e. lorsqu'on choisit des variables aléatoires dans un vecteur de var indépendantes alors les var obtenues sont indépendantes*
- Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur :

$$X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\dots X_p(\Omega),\quad \text{et}\quad X_{p+1}(\Omega)\times X_{p+2}(\Omega)\times\dots X_n(\Omega),$$

  alors $f(X_1,X_2\dots,X_p)$ et $g(X_{p+1},X_{p+2},\dots X_n)$ sont deux var indépendantes, ainsi *si on crée une var composée avec les premières var et une autre var composé avec les dernières composantes, alors on obtient deux var indépendantes*
- Si $f_1,\dots f_p$ sont des fonctions définies sur $X_i(\Omega)$, alors on a :

$$f_1(X_i),\ f_2(X_2),\dots,f_p(X_p)\ \text{sont indépendantes.}$$

Démonstration. Conformément aux programmes, les deux dernières propriétés sont admises.

Pour la première, commençons par un exemple : Soit (X,Y,Z,T) un vecteur aléatoire de variable indépendante. Montrons que (X,Y) sont alors indépendantes.

Soit $x \in X(\Omega)$, et $y \in Y(\Omega)$, on doit montrer que $p(X=x \cap Y=y) = p(X=x)p(Y=y)$. On a :

$$\begin{aligned}
p(X=x\cap Y=y) &= \sum_{z\in Z(\Omega)} p(X=x\cap Y=y\cap Z=z) \\
&= \sum_{t\in T(\Omega)}\sum_{z\in Z(\Omega)} p(X=x\cap Y=y\cap Z=z\cap T=t) \\
&= \sum_{t\in T(\Omega)}\sum_{z\in Z(\Omega)} p(X=x)p(Y=y)p(Z=z)p(T=t) \\
&= p(X=x)p(Y=y)\underbrace{\sum_{t\in T(\Omega)} p(T=t)}_{=1}\underbrace{\sum_{z\in Z(\Omega)} p(Z=z)}_{=1} \\
&= p(X=x)p(Y=y)
\end{aligned}$$

■

✎ On obtient en particulier que si des var sont mutuellement indépendantes, elles sont indépendantes deux à deux.

✎ Lorsqu'on utilise la propriété sur les fonctions des VAR, il est important de dire (par exemple) :
- f est une fonction des VAR X_1 et X_3
- g est une fonction des VAR X_2, X_4 et X_5.
- on a $\{1,3\} \cap \{2,4,5\} = \emptyset$.

donc $f(X_1,X_3)$ et $g(X_2,X_4,X_5)$ sont indépendantes. **Attention :** ce n'est plus vrai si il y a des variables « communes » aux deux fonctions.

V.4 Variance d'une somme de n variables aléatoires indépendantes

Proposition V.3 — Variance de la somme cas de VAR indépendantes. Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables mutuellement indépendantes. alors :

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$$

Démonstration. Par récurrence sur n (nombre de variables). Pour $n=1$ c'est évident. Pour $n=2$, c'est :

$$\begin{aligned}
V(X_1+X_2) &= V(X_1) + 2\underbrace{cov(X_1,X_2)}_{=0} + V(X_2) \\
&= V(X_1)+V(X_2)
\end{aligned}$$

Pour l'hérédité, on a :

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n+X_{n+1}) = V(\sum_{k=1}^{n} X_k) + 2cov(\sum_{k=1}^{n} X_k, X_{n+1}) + V(X_{n+1})$$

Or, la variable $\sum_{k=1}^{n} X_k$ est une fonction de $(X_1,\dots,X_n)$ et pas de X_{n+1}. Les variables $\sum_{k=1}^{n} X_k$ et X_{n+1} sont donc indépendantes. En conséquence, $cov(\sum_{k=1}^{n} X_k, X_{n+1}) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} V(X_1+X_2+\cdots+X_n+X_{n+1}) &= V(\sum_{k=1}^{n} X_k)+V(X_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} V(X_k) && \text{en utilisant HR.} \end{aligned}$$

D'où l'hérédité et la conclusion.

■

V.5 Variance d'une somme de n variables dans le cas général

Proposition V.4 — Variance de la somme cas général. Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires réelles. On a alors :

$$\begin{aligned} V(X_1+X_2) &= V(X_1)+2cov(X_1,X_2)+V(X_2) \\ V(X_1+X_2+X_3) &= V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+2cov(X_1,X_2)+2cov(X_1,X_3)+2cov(X_2,X_3) \\ V(X_1+\cdots+X_n) &= V(X_i)+V(X_2)+\dots V(X_n)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Cov(X_i,X_j) \\ &= V(X_i)+V(X_2)+\dots V(X_n)+\sum_{i\neq j} Cov(X_i,X_j) \\ &= \sum_{(i,j)} Cov(X_i,X_j) \end{aligned}$$

■ **Exemple V.3**

- Cette formule signifie que pour calculer la variance d'une somme, il faut faire la somme des variance, et de tous les « *double produit* » de la forme $Cov(X_i,X_j)$ possible.
- À priori, il y a de $\frac{n(n-1)}{2}$ termes dans la somme.
- En pratique, on a souvent un des cas particuliers :
  - beaucoup de termes sont nuls.
  - $Cov(X_i,X_j)$ indépendant de i et de j, le tirage i agit de la même manière sur tous les tirages suivants. La somme devenant alors le nombre de termes multipliés par la valeur.
  - $Cov(X_i,X_j)$ est nul si j est « loin « de i, (par exemple si $j \neq i+1$). C'est le cas où le tirage i n'influe que sur le tirage suivant.

■

Démonstration. La démonstration est exactement la même que dans le cas de deux variables.

On se sert de la formule :

$$\left(\sum x_i\right)^2 = \sum x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = \sum_{(i,j)} x_i x_j$$

$$
\begin{aligned}
V(X_1,\dots X_n) =& E\Big((\sum X_i)^2\Big) - \Big(E(\sum X_i\Big)^2 \\
=& E\Big(\sum X_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_iX_j\Big) - \Big(\sum E(X_i)\Big)^2 \\
=& \sum E(X_i^2) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} E(X_iX_j) - \sum(E(X_i))^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} E(X_i)E(Y_j) \\
=& \sum E(X_i^2) - (E(X_i))^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} E(X_iX_j) - E(X_i)E(Y_j) \\
=& \sum V(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Cov(X_iX_j)
\end{aligned}
$$

■

■ **Exemple V.4** On reprends l'exemple précédent. Dans le cas sans remise, les covariances étant nulle, on obtient : $V(Y) = \sum V(X_i) = npq$. On obtient ainsi la variance d'une loi binomiale. ■

Couples de variables aléatoires

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

✯ Généralités sur les couples de variables aléatoires finies

Exercice 1 Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $T = U_1 - U_2$ et $V = U_1 + U_2$.

1. Déterminer la loi du couple (T, V).
2. T et V sont-elles indépendantes ?

Correction :

1.

T \ V	0	1	2	T
-1	0	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$
0	$(1-p)^2$	0	p^2	$(1-p)^2+p^2$
1	0	0	$p(1-p)$	$p(1-p)$
V	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2	1

2. Elles ne sont pas indépendantes car $p(T=-1 \cap V=0) = 0 \neq p(1-p)^3$.

✯ Étude de couples de VAR

Exercice 2 On a n personnes à répartir dans trois hôtels H_1, H_2 et H_3. Pour chaque personne les trois hôtels sont équiprobables et chaque personne choisit indépendamment des autres. Soit, pour $i \in [\![1,3]\!]$, X_i le nombre de personnes dans l'hôtel H_i.

1. Déterminer la loi de X_i.
2. Calculer la loi puis la variance de X_1+X_2. En déduire $Cov(X_1, X_2)$.
3. En déduire alors $Cov(X_1, X_3)$, et $Cov(X_2, X_3)$.

Correction :

1. $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{3})$.
2. $p(X_1+X_2=k) = p(X_3 = n-k)$, donc $X_1+X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{2}{3})$ (on peut aussi dire que c'est le nombre de personne qui ne choisisse pas l'hôtel 3). On déduit $V(X_1+X_2) = \frac{2n}{9}$, puis $Cov(X_1, X_2) = -\frac{n}{9}$.
3. Par symétrie, ou en utilisant $X_1+X_2+X_3 = n$, on retrouve les mêmes covariances.

Exercice 3 Maximum et minimum dans un tirage sans remise

On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons de l'urne ($n < N$) et on note X_n le plus petit des numéros tirés et Y_n le plus grand.

1. Déterminer les lois de X_n et Y_n.
2. Déterminer la loi conjointe de (X_n, Y_n).
3. Déterminer la loi de $Z_n = Y_n - X_n$.

Correction :

1. Déjà, $X_n(\Omega) = [\![1, N-n+1]\!]$ et $Y_n(\Omega) = [\![n, N]\!]$. Il y a plusieurs méthodes :
   - Par loi uniforme sur Ω, on a
   $$p(X_n = k) = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}} \text{ et } p(Y_n = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$
   - Par les fonctions de répartitions, on a :
   $$p(X_n \geqslant k) = \frac{\binom{N-k}{n}}{\binom{N}{n}} \text{ probabilités que tous les nombres soient } \geqslant k.$$

On en déduit :

$$p(X_n = k) = p(X_n \geqslant k) - p(X_n \geqslant k+1) = \frac{1}{\binom{N}{n}}\left[\binom{N-k}{n} - \binom{N-k-1}{n}\right] = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

2. Toujours par le même argument de loi uniforme :

$$p(X_n = i \cap Y_n = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i+n-1 \\ \dfrac{\dbinom{j-i-1}{n-2}}{\dbinom{N}{n}} & \end{cases}.$$

3. On utilise le système complet d'événements associés à une X_n :

$$\begin{aligned} p(Z_n = k) &= \sum_{i=1}^{N-k} p(X_n = i \cap Y_n = k+i) \qquad \text{attention aux indices} \\ &= (N-k)\frac{\binom{k-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}. \end{aligned}$$

On peut aussi raisonner par dénombrements, un événement tel que $Z_n = k$ est déterminé par :
- $(N-k)$ possibilités pour placer le minimum, le maximum est alors automatiquement placé.
- $n-2$ éléments entre le min et le max soit parmi $k-1$ boules.

Exercice 4 Premier et deuxième succès dans un schéma de Bernoulli

Soit une pièce telle que $p(P) = p \in]0,1[$. On effectue n lancers indépendants. On note X la var égale au lancer où on obtient le premier *pile* et à 0 si on n'obtient pas de *pile*. De même, on note Y la var égale au lancer où on obtient le second *pile* et à 0 si il n'y en a pas.

1. Montrer que :

$$\forall q \in]0,1[, \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}$$

2. Donner la loi de X ainsi que son espérance.
3. Donner la loi du couple (X,Y), puis la loi de Y.

Correction :

1. Dérivation de $\sum_{k=0}^{n} q^k$
2. $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$. $p(X=k) = (1-p^{k-1})q$. $E(X) = \frac{1-(np+1)(1-p)^n}{p}$, en utilisant la formule précédente.
3. $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$, et $Y(\Omega) = [\![0,n]\!] \setminus \{1\}$. On a :
   - $p(X=0 \cap Y=0) = (1-p)^n$,
   - $p(X=i \cap Y=0) = (1-p)^{n-1}p$,
   - si $i \in [\![1,n-1]\!]$, et $j \geqslant i+1$, $p(X=i \cap Y=j) = (1-p)^{j-2}p^2$.
   - autre cas 0.

   On en déduit :

$$\begin{aligned} p(Y=j) &= \sum_{i=0}^{n} p(X=i \cap Y=j) \\ &= \begin{cases} (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} & \text{si } j=0 \\ p^2\sum_{i=1}^{j-1}(1-p)^{j-2} = p^2(j-1)(1-p)^{j-2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 5 On considère deux urnes A et B qui contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires.

1. On tire une boule dans chacune des urnes et on les échange. Soit X le nombre de boules blanches dans A après échange. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ?
2. On procède à un second échange. Soit Y le nombre de boules blanches dans A après le nouvel échange. Quelle est la

loi de Y ? Son espérance ?

Correction :

1. $X(\Omega) = [\![4,6]\!]$. On a :

$$p(X=4) = p(B_A \cap N_B) = \frac{1}{4}.$$

De même :

$$p(X=5) = p(B_A \cap B_B) + p(N_A + N_B) = \frac{1}{2} \text{ et } p(X=6) = \frac{1}{4}.$$

$E(X) = 5$.

2. $Y(\Omega) = [\![3,7]\!]$. On a :

$$\begin{array}{rcl} p(Y=3) & = & p(Y=3 \cap X=4) + p(Y=3 \cap X=5) + p(Y=3 \cap X=6) \\ & = & p(X=4)p_{X=4}(Y=3) \\ & = & \frac{1}{4} \times p_{X=4}(B_A^2 \cap N_B^2) \\ & = & \frac{1}{4}\frac{4}{10} \times \frac{4}{10}. \end{array}$$

Par symétrie $p(Y=7)$ est la même.
Puis :

$$\begin{array}{rcl} p(Y=4) & = & p(X=4)p_{X=4}(Y=4) + p(X=5)p_{X=5}(Y=4) \\ & = & \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{4}{10}\frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{10}\frac{5}{10} = \frac{49}{200}. \end{array}$$

Par symétrie c'est aussi $p(Y=6)$.
De même on calcule $p(Y=5)$. Puis l'espérance $E(Y) = 5$.

✯ Calcul de l'espérance d'une VAR sans connaître la loi

Exercice 6 Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On tire une poignée aléatoire de jetons de cette urne. On note N la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés et S la somme des numéros obtenus. On suppose que N suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

1. Préciser $S(\Omega)$.
2. Soit X_k la var égale à 1 si le jeton k est pris, 0 sinon. Montrer que X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
3. Calculer $E(S)$.

Correction :

1. $S(\Omega) = \left[\!\!\left[0, \frac{n(n+1)}{2}\right]\!\!\right]$.
2. On a $X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p_k)$, puis $p_k = p$ car tous les jetons sont identiques.

$$E(N) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) \text{ d'où } \frac{n}{2} = pn.$$

(attention à N qui est uniforme sur $[\![0,n]\!]$).
Autre méthode, par probabilité uniforme :

$$\begin{array}{rcl} p(X_k=1) & = & \sum_{j=0}^{n} p(X_k = 1 \cap N = j) \\ & = & \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+1} p_{N=j}(X_k=1). \end{array}$$

Sachant $N=j$ on tire j jetons dans l'urne simultanément, il y a donc $\binom{n}{j}$ tirages possibles, et $\binom{n-1}{j-1}$ tirage tel que $X_k = 1$. On en déduit $p_{N=j}(X_k=1) = \frac{\binom{n-1}{j-1}}{\binom{n}{j}} = \frac{j}{n}$. Ainsi :

$$p(X_k=1) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=0}^{n} j = \frac{1}{2}$$

3. par linéarité :

$$E(S)=\sum_{k=1}^{n} kE(X_k)=\frac{n(n+1)}{4}.$$

✯ Loi d'une composée

Exercice 7 Soit X une var de loi $\mathscr{B}(2n+1;\frac{1}{2})$. On définit la var Y de la manière suivante :

$$\forall \omega\in\Omega,\quad Y(\omega)=\begin{cases}0 & \text{si } X(\omega) \text{ est impair}\\ \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair}\end{cases}$$

Déterminer la loi de Y.

Correction :
$Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$. On a :

$$p(Y=0)=\sum_{k=0}^{n} p(X=2k+1)+p(X=0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2n+1}}$$

Ce qui se calcule en prenant la somme et la différence avec la même somme sur les pairs.

D'autre part,

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\, p(Y=k)=p(X=2k)=\binom{2n+1}{2k}\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

✯ Calcul de loi

Exercice 8 Soit $n\in\mathbb{N}$. Dans une urne qui contient initialement n boules numérotées de 1 à n, on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si l'on note k le numéro de la boule au premier tirage, on la remet dans l'urne, puis on ajoute k boules supplémentaires portant toutes le numéro k et l'on effectue un second tirage.

On note X_1 et X_2 les var égales aux numéros respectifs des boules tirées aux premier et second tirages.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Montrer que l'espérance de X_2 est donnée par :

$$E(X_2)=\frac{1-n}{2}+\frac{3n+1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

4. Donner un équivalent de $E(X_2)$ lorsque $n\to\infty$ (on utilisera les sommes de Riemman).

Correction :
1. $X_1\hookrightarrow\mathscr{U}(n)$.
2. On a $X_2(\Omega)=[\![1,n]\!]$, puis :

$$\begin{aligned}p(X_2=k) &= \sum_{j=1}^{n} p(X_1=j\cap X_2=k)\\ &= \sum_{j=1}^{n} p(X_1=j)p_{X_1=j}X_2=k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j\neq k}\frac{1}{n+j}+\frac{1}{n}\frac{k+1}{n+k}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}+\frac{k}{n(n+k)}\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
E(X_2) &= \sum_{k=1}^{n} kp(X_2=k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} \\
&= \frac{n+1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n+k)-kn}{n(n+k)} \\
&= \frac{n+1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k} \\
&= \frac{n+1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} + \frac{(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+n)}{n+k} + n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \frac{3n+1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} + \frac{(1-n)}{2}
\end{aligned}$$

4. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x} = \ln(2).$$

Et donc l'équivalent : $\underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{3}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\right) n$.

Exercice 9 Maximum d'un échantillon d'une loi uniforme

Soient $n \in \mathbb{N}$, et $(Y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des variables indépendantes de même loi uniforme sur $[\![0,20]\!]$. On note $X_n = \max_{i=1\dots n} Y_i$.

1. Soit $k \in [\![0,20]\!]$, calculer la probabilité de $\bigcap_{i=1}^{n}(Y_i \leqslant k)$.
2. Calculer $p(X_n < k | X_n \leqslant k)$.
3. En déduire $p(X_n = k | X_n \leqslant k)$.
4. Calculer $p(X_n = k)$ et déterminer sa limite quand $n \to +\infty$. Interpréter.
5. Montrer que

$$E(X_n) = 20 - \sum_{k=0}^{19} \left(\frac{k+1}{21}\right)^n$$

En déduire un équivalent de $20 - E(X_n)$.

Correction :

1. Par indépendance :

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n}(Y_i \leqslant k)\right) = \left(\frac{k+1}{21}\right)^n = p(X_n \leqslant k)$$

2. On obtient :

$$p(X_n < k | X_n \leqslant k) = \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$$

3. Complémentaire :

$$p(X_n = k | X_n \leqslant k) = 1 - p(X_n < k | X_n \leqslant k) = 1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$$

4. D'où :

$$p(X_n = k) = p(X_n \leqslant k) p(X_n = k | X_n \leqslant k) = \frac{1}{21^n}\left((k+1)^n - k^n\right)$$

tends vers 0 sauf pour $k = 20$.

5. Calcul de somme :

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{20} kp(X_n = k) = \frac{1}{21^n}\left(\sum_{k=1}^{20} k\left((k+1)^n - k^{n+1}\right)\right)$$

On écrit : $k = k+1-1$, et donc :

$$\sum_{k=1}^{20} (k+1)^{n+1} - k^{n+1} - (k+1)^n = 21^{n+1} - 1 - \sum_{k=1}^{20} (k+1)^n$$

D'où le résultat. $20 - E(X_n) \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{20}{21}\right)^n$.

Probabilités : exercices de synthèse

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Étude de suites de variables aléatoires

Exercice 1 Soit (X_n) une suite de variable aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ indépendantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Y_n = X_n X_{n+1}, \qquad \text{et } T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conjointe de (Y_n, Y_{n+1}) et $Cov(Y_n, Y_{n+1})$.
3. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout entier $k \geqslant 2$, la loi conjointe de (Y_n, Y_{n+k}). Les variables Y_n et Y_{n+k} sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $E(T_n)$ et $V(T_n)$.

Correction :

1. $Y_n(\Omega) = \{0,1\}$, et $Y_n = 1$ si $X_n = 1$ et $X_{n+1} = 1$, donc $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p^2)$. $E(Y_n) = p^2$, $V(Y_n) = p^2(1-p^2)$.
2. On a $(Y_n, Y_{n+1})(\Omega) = \{0,1\}^2$.
   - $p(Y_n = 1 \cap Y_{n+1} = 1) = p(X_n = 1 \cap X_{n+1} = 1 \cap X_{n+2} = 1) = p^3$,
   - $p(Y_n = 0 \cap Y_{n+1} = 1) = p(X_n = 0 \cap X_{n+1} = 1 \cap X_{n+2} = 1) = p^2(1-p)$,
   - $p(Y_n = 1 \cap Y_{n+1} = 0) = p(X_n = 0 \cap X_{n+1} = 1 \cap X_{n+2} = 1) = p^2(1-p)$,
   - et $p(Y_n = 0 \cap Y_{n+1} = 0) = 1 - p^3 - 2p^2(1-p)$.

   (à mettre dans un tableau)

   On a : $Cov(Y_n, Y_{n+1}) = E(Y_n Y_{n+1}) - E(Y_n)E(Y_{n+1}) = p^3 - p^4$.
3. pour $k \geqslant 2$, Y_n et Y_{n+k} sont indépendante, car Y_n est fonction de X_n et X_{n+1}, tandis que Y_{n+k} est fonction de X_{n+1} et X_{n+2}. On peut aussi exprimer les événement $p(Y_n = 1 \cap Y_{n+k} = 1)$ en fonction des X.
4. $E(T_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = np^2$.

$$\begin{aligned} V(T_n) &= \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} Cov(Y_i, Y_j) \\ &= np^2(1-p^2) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} Cov(Y_i, Y_{i+1}) \\ &= np^2(1-p^2) + (n-1)p^3(1-p). \end{aligned}$$

Exercice 2 On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise. On définit la suite de var $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- X_1 est la variable certaine égale à 1,
- pour $p \geqslant 2$, X_p est égal à 1 si le numéro obtenu au p-ième tirage n'a pas été obtenu au cours des tirages précédents, $X_p = 0$ dans le cas contraire.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Montrer que X_p suit la loi de Bernouilli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.
3. (a) Montrer que :

   $$\forall i < j,\ p([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

   (b) En déduire la loi du produit $X_i X_j$.

   (c) Calculer la covariance de (X_i, X_j). Conclusion ?
4. Soit $N \geqslant 2$, on note Z_N la var égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction des (X_k) et en déduire son espérance puis sa variance.

Correction :

1. X_2 est une variable de Bernouilli. L'événement $X_2 = 1$ signifie que la boule 2 est la même que la boule 1, ainsi, $p(X_2 = 1) = \frac{1}{n+1}$.
2. X_p est une variable de Bernouilli. En notant Y_p la var égale au numéro de la boule tirée au tirage p, on a :

$$(X_p = 1) = \bigcup_{i=0}^{n}(X_p = 1)\cap(Y_p = i) = \bigcup_{i=0}^{n}\Big((Y_1 \neq i)\cap(Y_2 \neq i)\cdots\cap(Y_{p-1} \neq i)\cap(Y_p = i)\Big)$$

Cette union étant disjointe, on a donc :

$$p(X_p = 1) = \sum_{i=0}^{n} p\Big((Y_1 \neq i)\cap(Y_2 \neq i)\cdots\cap(Y_{p-1} \neq i)\cap(Y_p = i)\Big)$$

Or pour i fixé, on a :

$$p\Big((Y_1 \neq i)\cap(Y_2 \neq i)\cdots\cap(Y_{p-1} \neq i)\cap(Y_p = i)\Big) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}\frac{1}{n}.$$

D'où le résultat.

3. (a) Soit $i < j$, l'événement $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ apparaît si le nombre tiré au tirage i n'est pas apparu avant et de même au tirage j. On a :

$$\begin{aligned} p([X_i = 1]\cap[X_j = 1]) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} p(X_i = 1 \cap Y_i = k \cap X_j = 1 \cap Y_j = l) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{n} p(Y_1 \neq k \cap Y_1 \neq l \cap Y_2 \neq k \cap Y_2 \neq l \ldots Y_i = k \cap Y_{i+k} \neq l \ldots Y_j = l). \end{aligned}$$

Pour k et l fixé, l'événement $Y_1 \neq k \cap Y_1 \neq l \cap Y_2 \neq k \cap Y_2 \neq l \ldots Y_i = k \cap Y_{i+k} \neq l \ldots Y_j = l$ signifie :
   - tous les tirages avant i sont différents de l et k,
   - le tirage i est k,
   - les suivants sont différents de l,
   - le tirage j vaut l.

   Chacun des ses événements est de probabilités :

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{i-1}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{j-i-1}\frac{1}{n+1} = \frac{n^{j-i-1}(n-1)^{i-1}}{(n+1)^j}$$

   Ainsi, la somme sur k et l fait le nombre de terme $n+1\times n$ multiplié par ce nombre, soit :

$$p([X_i = 1]\cap[X_j = 1]) = \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

   (b) le produit X_iX_j est une variable de Bernoulli de paramètre : $\frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.

   (c) Si $i < j$ on a :

$$cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i+j-2}.$$

   elles ne sont donc pas indépendantes.

4. On a :

$$Z_N = \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

En particulier, $E(Z_N) = \sum_{k=1}^{N} E(X_k) = (n+1)\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^N\right)$. (somme géométrique).

Pour la variance :

$$\begin{aligned} V(Z_n) &= V(\sum_{k=1}^{N} X_k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} V(X_k) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1} + 2\ldots \end{aligned}$$

✫ Autour des lois binomiales

Exercice 3 Soient $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$ deux variables binomiales indépendantes.

1. Montrer que $X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$.
2. Pour $r \in [\![0, n+m]\!]$ déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X+Y=r$.

Correction : classiquement, il faut faire le système complet d'événement associé à X.

Exercice 4 Soient a et n dans $\mathbb{N}^*$. On considère n boutiques et na clients. Chaque client rentre dans une boutique et une seule au hasard indépendamment des autres.

1. Soit Y la var égale au nombre de boutiques qui n'ont pas eu de client. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$. On pourra noter Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ième boutique n'a pas de client.
2. Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, soit X_i la var égale au nombre de clients dans la i-ième boutique.
   (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i.
   (b) Soient i et j tels que $i \neq j$ calculer la $Cov(X_i, X_j)$. *Indications :* calculer la variance de la somme des X_k.

Correction :

1. On note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ième boutique n'a pas de client. C'est donc une var de bernouilli de paramètre $p(Y_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}$. Par linéarité, on a :
$$E(Y) = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}.$$
Puis :
$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2\sum_{i<j} cov(Y_i, Y_j).$$
Il reste à calculer $cov(Y_i, Y_j) = E(Y_iY_j) - E(Y_i)E(Y_j)$. Il reste $E(Y_iY_j) = p(Y_i = 1 \cap Y_j = 1)$ soit la probabilité que deux boutiques soient vides, *i.e.* $(\frac{n-2}{n})^{na}$ (par indépendance). On obtient : $cov(Y_i, Y_j) = (\frac{n-2}{n})^{na} - (\frac{n-1}{n})^{2na}$. Au final :
$$\begin{aligned} V(Y) &= n\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}\right) + n(n-1)\left((\frac{n-2}{n})^{na} - (\frac{n-1}{n})^{2na}\right) \\ &= n(\frac{n-1}{n})^{na} + n(n-1)(\frac{n-2}{n})^{na} - n^2 n(\frac{n-1}{n})^{2na} \end{aligned}$$
2. (a) $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(na, \frac{1}{n})$, et donc $E(X_i) = a$, $V(X_i) = a(1-\frac{1}{n})$.
   (b) On a :
   $$X_1 + X_2 + \ldots X_n = na.$$
   Et donc $V(X_1 + \ldots X_n) = 0$, et donc :
   $$\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j) = 0.$$
   Comme toutes les boutiques sont identiques, on a $cov(X_i, X_j)$ ne dépend pas de i et j. appelons λ ce réel, on a :
   $$n(n-1)\lambda = -n^2 a(1 - \frac{1}{n}) \text{ soit } \lambda = -\frac{a}{n}.$$

✫ Fonction génératrice et applications

Exercice 5 **Évolution d'une population de bactéries**

Une bactérie (idéale) se divise en deux toutes les heures (exactement une heure). Entre deux divisions, la probabilité pour qu'elle ne meure pas est $p \in]0,1[$. On suppose qu'entre chaque division, la survie de chaque bactérie est indépendante de la survie des autres. On désigne par X_n l'effectif, juste après la n-ième heure, d'une population issue d'une bactérie.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $G_n(t) = \sum_{k=0}^{2^n} t^k p(X_n = k)$.

1. Déterminer l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs possibles de X_n. En déduire une autre écriture de $G_n(t)$
2. Donner la loi de X_1 et son espérance. Donner la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = 2$. En déduire la loi de X_2 et son espérance.
3. Calculer $G_1(t)$ et $G_2(t)$, et vérifier que $G_2(t) = G_1(G_1(t))$.
4. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $X_n = 2k$.
5. Montrer en utilisant d) que $G_{n+1}(t) = G_n(G_1(t))$. En déduire que $G_n(t) = G_1 \circ G_1 \circ \cdots \circ G_1(t)$ (composée n fois).
6. Que représente $X_n = 0$? Vérifier que $p(X_n = 0) = G_n(0)$. Montrer que la suite de terme général $p(X_n = 0)$ converge et déterminer, en fonction de p, sa limite en $+\infty$.
7. On désigne par $E(X_n)$ l'espérance de X_n. Montrer que $E(X_n) = G_n'(1)$. Déterminer $E(X_n)$ et sa limite en $+\infty$.

Correction

1. On constate $X_n(\Omega) \subset [\![0, 2^n]\!]$ puis est un nombre pair, finalement :

$$X_n(\Omega) = \left\{ 2k \middle| k \in [\![0,2]\!]^{n-1} \right\}.$$

Finalement : $G_n(t) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}} t^{2k} p(X_n = 2k)$.

2. On a $X_1(\Omega) = \{0, 2\}$, avec $p(X_1 = 0) = (1-p)$ et $p(X_1 = 2) = p$.
3. Sachant $X_1 = 2$, on a $X_2(\Omega) = \{0, 2, 4\}$, puis :

$$p_{X_1=2}(X_2 = 0) = (1-p)^2 \qquad p_{X_1=2}(X_2 = 2) = (1-p)p \qquad p_{X_1=2}(X_2 = 4) = p^2.$$

D'autre part, il est clair que sachant que $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ est certain.
D'où la loi de X_2 (par proba totale)

$$p(X_2 = 0) = p(1-p)^2 + (1-p) \qquad p(X_2 = 2) = 2p^2(1-p) \qquad p(X_2 = 4) = p^3.$$

(à mettre dans un tableau). On obtient en particulier : $E(X_2) = 2p^2(1-p) + p^3 = 2p^2$.

4. $G_1(t) = (1-p) + pt^2$, et $G_2(t) = p(1-p)^2 + (1-p) + 2p^2(1-p)t^2 + p^3t^4$. On vérifie que $G_1(G_1(t)) = G_2(t)$.
5. Sachant $X_n = 2k$, il faut regarder combien des $2k$ bactéries survivent et donc se reproduisent.
En posant alors succès le fait qu'une bactérie survive et donc se reproduise, et échec sinon, on voit que par indépendance, le nombre de bactérie qui survive suit un loi binomiale de paramètre p et $2k$. Ainsi :

$$p_{X_n=2k}(X_{n+1} = 2j) = \begin{cases} \binom{2k}{j} p^j (1-p)^{2k-j} & \text{si } 2k \geqslant j \\ & \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. On a alors :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \sum_{j=0}^{2^{n+1}} t^j p(X_{n+1}=j) = \sum_{j=0}^{2^n} t^{2j} p(X_{n+1}=2j) \\
&= \sum_{j=0}^{2^n} t^{2j} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} p(X_{n+1}=2j \cap X_n = 2k) \\
&= \sum_{j=0}^{2^n} t^{2j} \sum_{\substack{k=0 \\ 2k\geqslant j}}^{2^{n-1}} p(X_n=2k) p_{X_n=2k}(X_{n+1}=2j) \\
&= \sum_{j=0}^{2^n} t^{2j} \sum_{\substack{k=0 \\ 2k\geqslant j}}^{2^{n-1}} p(X_n=2k) \binom{2k}{j} p^j (1-p)^{2k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{2^n} \sum_{\substack{k=0 \\ 2k\geqslant j}}^{2^{n-1}} p(X_n=2k) t^{2j} \binom{2k}{j} p^j (1-p)^{2k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}} p(X_n=2k) \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (t^2p)^j (1-p)^{2k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}} p(X_n=2k) \underbrace{(1-p+pt^2)}_{G_1(t)}{}^{2k} \\
&= G_n(G_1(t)).
\end{aligned}$$

On obtient alors le résultat par récurrence.

7. $X_n = 0$ signifie que la population de bactérie a disparu. En posant $t=0$, on vérifie que $G_n(0) = p(X_n=0)$ (tous les termes sont nuls sauf le premier). On pose $u_n = p(X_n = 0)$. On a :

$$u_{n+1} = G_1 \circ \underbrace{G_1 \cdots \circ G_1(0)}_{n \text{ fois}} = G_1 \circ G_n(0) = G_1(u_n) = (1-p) + pu_n^2.$$

On tombe donc sur une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = (1-p)+px^2$. Déjà on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ c'est une probabilité ou par récurrence.

D'autre part $X_n = 0 \subset X_{n+1} = 0$, donc u_n est croissante, donc elle converge, vers l qui vérifie : $l = G_1(l)$, donc $l=1$ ou $l = \frac{1-p}{p}$. On vérifie que :
   - si $p < \frac{1}{2}$ la seule valeur possible est 1.
   - si $p = \frac{1}{2}$, idem.
   - sinon on voit que u_n est majoré par $\frac{1-p}{p} < 1$ et donc finit par converger vers $\frac{1-p}{p}$.

8. En dérivant et en posant $t=1$, on obtient que $E(X_n) = G_n'(1)$. On cherche donc la même méthode, on a : $G_{n+1}'(t) = G_n'(G_1(t)) \times 2p$ Donc $G_{n+1}'(1) = E(X_{n+1}) = G_n'(G_1(1)) \times 2p$, On $G_1(1) = 1$. D'où : $E(X_{n+1}) = 2pE(X_n)$, et $E(X_n) = (2p)^n$.

Révisions probabilités

Pelletier Sylvain PC, Lycée Descartes

⋆ Dénombrements

Dénombrer l'ensemble E c'est : compter UNE et UNE SEULE FOIS tous les éléments de E.

Pour cela : on construit des bijections entre E et un ensemble dont on connaît le cardinal. Cette bijection est un processus de construction de tous les éléments de E.

- Ne pas mélanger probabilités et dénombrements.
- L'avantage des dénombrements est que pour dénombrer les issues possibles d'une expérience aléatoire, on est pas obligé de suivre l'ordre chronologique de l'expérience.
- Souvent l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire dépends de comment on la modélise.
  Exemple : si on tire des boules B/N, on peut toujours supposer les boules discernables (elles ont un numéros en plus d'une couleur).
  Exemple : si on tire simultanément, et que l'on regarde le résultat final, on peut toujours supposer que l'on fait les tirages sans remise

⋆ Les ensembles dont on connaît le cardinal

Description	**Cardinal**	**Utilisation**
Entiers de $[\![a,b]\!]$	$b-a+1$	1 tirage
Listes de longueurs n de $[\![1,p]\!]$	p^n	n tirages avec remise, rangement de n objets dans p tiroirs.
Listes sans répétitions de longueurs n de $[\![1,p]\!]$ n-arrangement de $[\![1,p]\!]$	$A_p^n = \dfrac{p!}{(p-n)!}$	n tirages sans remise rangement de n objets dans p tiroirs, avec au plus un objet par tiroir
Permutations $[\![1,p]\!]$	$p!$	tirage sans remise jusqu'à avoir toutes les boules, mélange.
Parties de $[\![1,n]\!]$	2^n	tirage simultanés d'un nombre quelconque de boule, contenu possible d'un tiroir
Parties de $[\![1,n]\!]$ à k éléments Combinaisons de k éléments de $[\![1,n]\!]$	$\dbinom{n}{k}$	tirage « en tas » de k boules, places de k blanches dans n tirages N/B Suites strictement croissante de k éléments de $[\![1,n]\!]$

⋆ Technique de dénombrements

Procéder par complémentaire $\text{Card}(\overline{E}) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(E)$.

Union disjointe on écrit l'ensemble E sous la forme $E = A \cup B$, avec une union disjointe. On a alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
Cela corresponds à une partition de l'ensemble E : on construit d'abords une partie des éléments de E, puis une autre.

Choix successifs On décompose le processus de construction en plusieurs étapes. Le nombre d'éléments construit est alors le produit du nombre de choix à chaque étape.
Cela revient à un produit cartésien.

On a aussi la formule :

$$Card(E \cup F) = CardE + CardF - Card(E \cap F).$$

⋆ Espace probabilisé

Une probabilité p sur l'ensemble Ω est une application $p : P(\Omega) \to [0,1]$, qui vérifie :

$$p(\emptyset) = 0 \qquad p(\Omega) = 1 \qquad \text{si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } p(A \cup B) = P(A) + p(B).$$

On a en conséquence :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) \qquad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Les événements sont les éléments de $p(\Omega)$, *i.e.* les parties de Ω.
Un système complet d'événements C'est une liste d'événements qui forment une partition de Ω :

$$\left(A_i\right)_{i=1\dots n} \text{ est un SCE si} \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ union disjointe}$$

En particulier :

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1.$$

Deux cas usuels :
- pour une expérience aléatoire en deux étapes, on utilise le système complet d'événements associés à la première étape,
- si (X,Y) est un couple de VAR, on utilise le système complet d'événements associé à X pour déterminer la loi de Y.

Une probabilité p est entièrement déterminé par les $\mathrm{Card}(\Omega)$ valeurs donnant la probabilité des singletons $p\left(\left\{w_i\right\}\right)$ pour $w_i \in \Omega$. On a de plus :

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(\left\{w_i\right\}\right) = 1 \text{ avec } n = \mathrm{Card}(\Omega).$$

C'est particulièrement utile lorsque la probabilité dépends d'un paramètre à déterminer.

⋆ Probabilité uniforme

La probabilité uniforme s'applique quand tous les tirages sont équiprobables. On ramène alors le calcul des probabilités au calcul de dénombrements. On a :

$$\forall A \subset \Omega,\ p(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

- Surtout utile pour ne pas prendre en compte l'aspect temporel de l'expérience aléatoire.
- Souvent la probabilité uniforme est une conséquence de l'énoncé.

⋆ Probabilités conditionnelles, probabilités composées

La probabilité de B sachant A est

$$p(B|A) = p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \text{ avec } p(A) \neq 0.$$

On peut écrire :

$$p(A \cap B) = p(A)p_A(B).$$

La probabilité conditionnelle sachant A est une probabilité et vérifie donc toutes les propriétés d'une probabilité.
Utilisation Souvent A est chronologiquement avant B
Formule des probabilités composées (A_i) une suite quelconque d'événements

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1)p_{A_1}(A_2)p_{A_1 \cap A_2}(A_3)\dots p_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Souvent A_i concerne chronologiquement l'étape i.
Utile pour considérer la probabilités d'une suite de tirage.

⋆ Probabilités totales

Formule des probabilités totales Soit B un événements, et $\left(A_i\right)$ un SCE. On a alors :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{m} p(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i).$$

Sans doute la formule la plus utile du cours de probabilité

Interprétation On découpe l'événement B selon le SCE $\left(A_i\right)$.

Souvent B concerne la deuxième étape, et (A_i) est l'ensemble des résultats possibles d'une première étape.

Pour un couple (X,Y), si on veut déterminer la loi de Y à partir de la loi du couple (X,Y), on écrit :

$$\forall j \in Y(\Omega), \qquad p(Y=j) = \sum_{k=1}^{n} p(Y=j \cap X=k).$$

Pour avoir la loi d'une somme $S = X+Y$, on utilise aussi le SCE associé à X :

$$\forall k \in S(\Omega), \qquad p(X+Y=k) = \sum_{j=1}^{n} p(X+Y=k \cap X=j).$$

✯ Formule de Bayes

Formule de Bayes dans le cas général : Soit (A_i) un système complet d'événements et B un autre événement, alors :

$$\forall j \in [\![1,m]\!],\ p_B(A_j) = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{p(B)} = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{\sum_{i=1}^{m} p_{A_i}(B)p(A_i)}$$

Cas particulier du SCE $(A,\overline{A})$ En particulier soit A un événement avec $0 < p(A) < 1$, alors

$$p_B(A) = \frac{p_A(B)p(A)}{p(B)} = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\overline{A}}(B)p(\overline{A})}$$

Interprétation Formule des causes : on constate l'événement B de la deuxième étape et on se demande quel est la probabilité que la première étape ait donné A.

✯ Variable aléatoire

Définition une VAR est une fonction $X\Omega \to \mathbb{R}$. L'univers image $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs possibles de X. La famille d'événements $\Big((X=k)\Big)_{k\in X(\Omega)}$ forme un SCE.

Loi de X c'est l'application

$$f_X : \left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & p(X=x) \end{array} \right. .$$

Donner la loi de X signifie donc déterminer $X(\Omega)$ et la valeur de $p(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

Fonction de répartition c'est l'application

$$F_X : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \longmapsto & P(X \leqslant x) \end{array} \right.$$

La fonction de répartition détermine la loi, ce qui est utile pour un maximum. (pour un minimum, considérer $p(X \geqslant x)$).

Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X=x_i) = \sum_{x\in X(\Omega)} xp(X=x).$$

L'espérance est linéaire :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ E(aX+b) = aE(X)+b \text{ et } E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

Théorème de transfert Soit U une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$E(U(X)) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i)p(X=x_i)$$

Utile pour avoir l'espérance d'une composée sans calculer sa loi.

Variance On a deux définitions :

$$V(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big) = E(X^2) - (E(X))^2$$

L'**écart-type** est :$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
L'espérance n'est pas linéaire :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 V(aX+b) = a^2 V(X) \text{ et } \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$

et :

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y).$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall A \in \mathbb{R},\ p(|X-m| \geqslant A) \leqslant \frac{\sigma^2}{A^2}$$

donne la probabilité qu'une variable s'éloigne de sa moyenne.

⋆ Lois usuelles

Variables	**Univers images**	**Loi**	**Modèle**	**Espérance**	**Variance**
Certaine	$\{A\}$	$P(X=a)=1$	issue certaine	a	0
$\mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ Uniforme sur $\llbracket 1,n \rrbracket$	$\llbracket 1,n \rrbracket$	$P(X=k)=\frac{1}{n}$	issues équiprobables, lancer de dé	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$ (*)
$\mathscr{B}(1,p)$ Bernoulli	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$, $P(X=0)=q=1-p$	Choix binaires, succés ou échec	p	pq
$\mathscr{B}(n,p)$ Binomial	$\llbracket 0,n \rrbracket$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$	Nombre de succés dans un schéma de Bernouilli, tirage avec remise	np	npq

⋆ Couples de VAR

Couple de VARs C'est simplement la donnée de deux VAR (X,Y). L'univers image est $(X,Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Loi conjointe C'est l'application :

$$\begin{cases} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ (x,y) & \mapsto & p\Big([X=x] \cap [Y=y]\Big) = p\Big([Z=(x,y)]\Big) \end{cases}$$

Toujours commencer par chercher les valeurs tels que $p(X=x \cap Y=y) = 0$.
Lois marginales C'est les lois de X et de Y. La loi du couple détermine les lois marginales : elles sont obtenues en écrivant la formule des probabilités totales.
Théorème de transfert Soit U une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} E\Big(U(X,Y)\Big) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} U(x_i,y_j)p\Big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\Big) \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} U(x,y)p\Big([X=x]\cap[Y=y]\Big) \end{aligned}$$

On peut ainsi calculer l'espérance de la composée sans connaître la loi.
Covariance On a :

$$Cov(X,Y) = E\Big([X-E(X)][Y-E(Y)]\Big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

La covariance vérifie :
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$,
- $Cov(\lambda X + X', Y) = \lambda Cov(X,Y) + Cov(X',Y)$, on a donc linéarité par rapport à X,
- $Cov(X, Y + \mu Y') = Cov(X,Y) + \mu Cov(X,Y')$, de même pour Y
- $cov(X,X) = V(X) \geqslant 0$.
- $V(X+Y) = V(X) + 2Cov(X,Y) + V(Y)$.

⋆ Vecteurs de variables aléatoires

Un vecteur aléatoire est n VARs : $(X_1,\dots,X_n)$.
Espérance de la somme $E(X_1+X_2+\dots X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\dots+E(X_n)$
Variance de la somme : Si les VARs $\Big(X_i\Big)$ sont indépendantes :

$$V(X_1+X_2+\dots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\dots+V(X_n)$$

Sinon, on obtient la variance de la somme en écrivant :

$$\begin{aligned}V\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i) =& cov\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n}V(x_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}cov(X_i,X_j)\\ &=\sum_{i=1}^{n}V(x_i)+\sum_{i\neq<j}cov(X_i,X_j)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}cov(X_i,X_j).\end{aligned}$$

C'est une somme double. Très souvent, il y a beaucoup de termes nuls ou constants.
On peut voir cela comme la somme sur la matrice des covariances $cov(X_i,X_j)$.

⋆ Indépendance

Couple d'événements indépendants A et B sont deux événements indépendants si :

$$p(A\cap B)=p(A)p(B).$$

Famille d'événements indépendants $\Big(A_i\Big)_{i\in[\![0,n]\!]}$ sont des événements mutuellement indépendants si :

$$\forall j\subset[\![0,n]\!],\qquad p\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}p(A_i)$$

couple de VARs indépendantes (X,Y) sont indépendantes si :

$$\forall x\in X(\Omega),\forall y\in Y(\Omega),\qquad p(X=x\cap Y=y)=p(X=x)p(Y=y).$$

Les lois marginales déterminent alors la loi du couple. On a alors $E(XY)=E(X)E(Y)$.
vecteurs de VARs indépendantes Les VARs $(X_1,\dots,X_n)$ sont indépendantes si :

$$\begin{aligned}&\forall(x_1,x_2\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\dots X_n(\Omega),\\ &\qquad p\Big((X_1=x_1)\cap(X_2=x_2)\cap\dots\cap(X_n=x_n)\Big)=p(X_1=x_1)p(X_2=x_2)\dots p(X_n=x_n)\end{aligned}$$