

Cahier de texte

Mathématiques PSI

Classe de PSI 2024 - 2025

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

Lundi 2 septembre

Cours 1h30

Prise de contact avec la classe. Présentation de l'enseignement des mathématiques et de l'informatique en classe de PSI.

Rappels de dénombrements (cours avec vidéo-projecteur).

Distribution des feuilles d'exercices « Rappels de dénombrements », « Rappels de probabilités », « Rappels sur les variables aléatoires »,

Mardi 3 septembre

Cours 2h

Rappels de dénombrements (cours avec vidéo-projecteur).

Rappels de dénombrements (cours avec vidéo-projecteur).

Mercredi 4 septembre

cours 3h

Rappels de dénombrements (cours avec vidéo-projecteur). Rappels sur le calcul des probabilités (cours avec vidéo-projecteur).

Exercices.

Vendredi 6 septembre

Cours 3h

Rappels sur le calcul des probabilités (cours avec vidéo-projecteur).

Lundi 9 septembre

TD 2h

Exercices du td rappels de dénombrements.

Mardi 10 septembre

Cours 2h et td 1h

Rappels sur le calcul des probabilités (cours avec vidéo-projecteur). Exercices du td rappels de probabilités.

Mercredi 11 septembre

Cours 1h

Rappels sur le calcul des probabilités (cours avec vidéo-projecteur).

Vendredi 13 septembre

Cours 3h

Rappels sur le calcul des probabilités (cours avec vidéo-projecteur).

Rang de la i -ième boule blanche dans un tirage sans remise.

Chapitre 1 Espaces probabilisés

I Un peu de théorie des ensembles I.1 Rappel sur la notion de famille I.2 Rappel sur les symboles union et intersection

I.3 Ensembles dénombrables

Lundi 16 septembre

td 2h

Exercices : calculs des probabilités, variables aléatoires discrètes (version 1er année).

Mardi 17 septembre

Cours 2h

★Retour sur le symbole somme I.4 Tribus

II Probabilités II.1 Définition

Mercredi 18 septembre

Cours 2h

II.2 Propriétés des probabilités II.3 Construction d'une probabilité sur un univers dénombrable

Vendredi 20 septembre

Cours 3h

III Conditionnement et indépendance III.1 Probabilité conditionnelle III.2 Formule des probabilités composées III.3 Formule des probabilités totales III.4 Formule de Bayes III.5 Indépendance \star Cas de deux événements \star Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements

Exercices du td rappels de probabilités.

Rappels sur les séries. Généralités. Séries géométriques et télescopiques.

Lundi 23 septembre

td 2h

Exercices (espaces probabilisés).

Mardi 24 septembre

Cours 1h30

Rappels sur les séries. Comparaison à une intégrale. Séries de Riemann.
horaire perturbé (visite de général Vidal).

Mercredi 25 septembre

Cours 2h

Rappels sur les séries. critère de d'Alembert. Rappels sur les séries sommables. Série absolument convergente.

Vendredi 27 septembre

Cours 3h

Rappels sur les séries. Séries alternées. produit de Cauchy.
Exercices.

Lundi 30 septembre

td 2h

Exercices. rappels sur les séries numériques.

Mardi 1 octobre

Cours 2h et td 1h

Chapitre 2 Variables aléatoires discrètes

I Variables aléatoires I.1 Généralités I.2 Loi de probabilités I.3 Système complet d'événements associé I.4 Fonction de répartition

II Espérance II.1 Définition II.2 Expression à partir de la fonction de répartition II.3 Théorème de transfert II.4 Linéarité, positivité et croissance

Exercices. rappels sur les séries numériques.

Mercredi 2 octobre

Cours 2h

III Variance III.1 Définitions III.2 Propriétés III.3 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Thebychev \star Inégalité de Markov \star Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

IV Lois usuelles IV.1 Loi géométrique \star Loi géométrique sur \mathbb{N} IV.2 Loi de Poisson

Vendredi 4 octobre

Cours 3h

V Couples et suites de variables aléatoires V.1 Généralités V.2 Variables aléatoires discrètes indépendantes \star Cas de deux variables \star Somme de deux variables de Poissons indépendantes \star Cas de n variables \star Cas d'une suite de variables

V.3 Espérance V.4 Covariance \star Coefficient de régression linéaire \star Variance d'une somme

Exercices. (espaces probabilisés).

Lundi 7 octobre

td 2h

Exercices. (variables aléatoires réelles discrètes).

Mardi 8 octobre

Cours 2h et td 1h

VI Résultats asymptotiques VI.1 Convergence de la loi binomiale vers une loi de Poisson \star Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares VI.2 Loi faible des grands nombres

Exercices. (variables aléatoires réelles discrètes).

Mercredi 9 octobre

Cours 2h

Chapitre 3 Suites et séries de fonctions

refsection0

I Convergence d'une suite de fonctions refsection0I.1 Mode de convergence d'une suite de fonctions refsection0 \star Convergence simple refsection0 \star Convergence uniforme refsection0 \star La convergence uniforme entraîne la convergence simple refsection0 \star Norme de la convergence uniforme refsection0**Vendredi 11 octobre**

cours 3h

 \star Convergence uniforme sur tout segment refsection0I.2 Régularité de la limite d'une suite de fonctions refsection0 \star Continuité de la limite d'une suite de fonctions refsection0 \star Théorème de la double limite refsection0 \star Intégration sur un segment refsection0 \star Dérivation d'une limite refsection0 \star Dérivations successives refsection0**Lundi 14 octobre**

td 2h

Exercices : suites de fonctions.

Mardi 15 octobre

Cours 2h et td 1h

II Convergence d'une série de fonctions II.1 Mode de convergence d'une série de fonctions \star Convergence simple et uniforme \star Convergence normale \star La convergence normale entraîne la convergence uniforme \star Extension à la convergence sur tout segment II.2 Régularité de la somme d'une série de fonctions \star Continuité de la somme d'une série de fonctions \star Théorème de la double limite

Exercices suites de fonctions.

Mercredi 16 octobre

Cours annulé

Cross du lycée.

Vendredi 18 octobre

Cours 3h

 \star Intégration sur un segment \star Dérivation terme à terme \star Dérivations successives Exercices.**Vacances d'automne****Lundi 4 novembre**

cours 2h et td 2h

Rappel sur la formule de Taylor et les développements limités

Exercices : séries de fonctions.

(edt modifié)

Mardi 5 novembre

Cours 30min et td 1h

Rappel sur la formule de Taylor et les développements limités

Exercices : séries de fonctions.

(reste du cours consacré à l'informatique).

Mercredi 6 novembre

Cours 2h

Rappel sur la formule de Taylor et les développements limités

Vendredi 8 novembre

Rappel sur la formule de Taylor et les développements limités
Exercices : séries de fonctions.

Mardi 12 novembre

Cours 1h30 + td 1h

Chapitre 4 Séries entières

I Lemme d'Abel et rayon de convergence I.1 Définitions I.2 Lemme d'Abel
Exercices.

Mercredi 13 novembre

Cours 2h

I.3 Calculs de rayon de convergence \star Invariance
 \star Comparaison des coefficients \star Dérivation et primitivation terme à terme \star Règle de d'Alembert \star Somme de deux séries \star Produit de Cauchy de deux séries entières

Vendredi 15 novembre

Cours 2h

II Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle \star Convergence normale sur tout segment de l'intervalle de convergence \star Continuité \star Primitivation d'une série entière \star Dérivation d'une série entière
III Développement en série entière III.1 Fonctions développables en série entière
Exercices.

Lundi 18 novembre

td 2h

Exercices sur les séries entières

Mardi 19 novembre

Cours 2h et td 1h

III.2 Développements en série entière des fonctions usuelles \star Série géométrique \star Logarithme \star Arctangente
 \star Exponentielle, cosinus et sinus hyperbolique \star Cosinus et sinus \star Fonction puissance
Exercices sur les séries entières

Mercredi 20 novembre

Cours 2h

Révision d'algèbre linéaire.
Espaces vectoriels. sous-espaces vectoriels.

Vendredi 22 novembre

Cours 3h

Révision d'algèbre linéaire.
Produit de SEV. Somme et somme directe de sous-espace vectoriel. Espaces vectoriels supplémentaires. Somme et somme directe de sous-espace vectoriel. Espaces vectoriels supplémentaires. Somme et somme directe de sous-espace vectoriel.
Exercices sur les séries entières

Lundi 25 novembre

td 2h

Exercices sur les séries entières Lien entre fonction séries entières et équations différentielles.

Mardi 26 novembre

Cours 2h et td 1h

Révision d'algèbre linéaire. Famille libre. Famille libre, famille génératrice. Bases. Changement de bases.
Exercices sur les séries entières

Mercredi 27 novembre

DS info cours annulé

Vendredi 29 novembre

Révision d'algèbre linéaire. Matrices semblables. Calcul matriciel. Utilisation de Newton pour calculer A^n . Trace

(d'une matrice, d'un endomorphisme).
Image et noyau d'une application linéaire.
Exercices.

Lundi 2 décembre

td 2h

Exercices (séries entières et algèbre linéaire).

Mardi 3 décembre

Cours 2h

Révision d'algèbre linéaire.
Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'une matrice.

Mercredi 4 décembre

Cours 2h

Projecteurs et symétries. Équation linéaire.

Vendredi 6 décembre

Cours 3h

Sous-espaces stables.
Hyperplan.
Fonctions génératrices d'une variable aléatoire réelle à valeurs dans \mathbb{N} . La fiche a été complétée en cours.
Exercices (algèbre linéaire).

Lundi 9 décembre

td 2h

Exercices (algèbre linéaire et fonctions génératrices)

Mardi 10 décembre

cours 2h et td 1h

Chapitre 5 Réduction des endomorphismes
I Éléments propres ★*Rappels I.1 Valeurs et vecteurs propres I.2 Sous-espace propre*

Mercredi 11 décembre

Cours 2h

★*Exemples* ★*Propriétés des sous-espaces propres*

Vendredi 13 décembre

Cours 3h

I.3 Valeurs propres et polynôme d'endomorphisme
II Polynôme caractéristique *II.1 Définition II.2 Lien avec les valeurs propres* ★*Cas d'une matrice triangulaire par bloc II.3 Coefficients Exercices* (fonctions génératrices)

Lundi 16 décembre

td 2h

Exercices (fonctions génératrices et algèbre linéaire)

Mardi 17 décembre

Cours 2h et td 1h

II.4 Multiplicité d'une valeur propre section III Diagonalisation en dimension finie 682 *III.1 Définitions*
Exercices (fonctions génératrices et algèbre linéaire)

Mercredi 18 décembre

Cours 2h

★*Théorème spectral* subsection III.2 Lien avec la dimension des sous-espaces propres 685 *III.3 Lien avec le polynôme caractéristique* subsection III.4 Calcul effectif de la diagonalisation 688

Vendredi 20 décembre

Cours 3h

Rappels sur les déterminants : Définition, propriétés, développement selon une ligne ou une colonne.

Déterminant de Van Der Monde et lien avec les polynômes de Lagrange.
Éléments de correction du DS.

Vacances de fin d'année

Lundi 6 janvier

td 2h

Exercices. (Réduction et déterminants)

Mardi 7 janvier

Cours 2h et td 2h

IV Diagonalisation et polynômes annulateurs IV.1 Théorème de Cayley-Hamilton IV.2 Condition de diagonalisation et polynôme annulateur IV.3 Application aux endomorphisme induit

Mercredi 8 janvier

Cours 2h

V Trigonalisation V.1 Définitions V.2 Lien avec le polynôme caractéristique V.3 Exemple de réalisation de la trigonalisation

Calcul du polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.

Vendredi 10 janvier

Cours 3h

Rappels sur les équations différentielles. 1er ordre. Exercices. (réduction)

Lundi 13 janvier

Cours 2h (exceptionnel) et td 2h

Rappels sur les équations différentielles. 2nd ordre.

Exercices. (réduction et équations différentielles)

Mardi 14 janvier

Cours 3h et td 2h (exceptionnel)

Chapitre 6 Intégration sur un intervalle

I Fonctions continues par morceaux I.1 Fonctions continues par morceaux sur un segment I.2 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

II Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment II.1 Fonctions en escalier et intégrale d'une fonction en escalier II.2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux II.3 Lien avec les primitives

III Intégrales généralisées III.1 Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$ III.2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Exercices. (réduction et équations différentielles)

Mercredi 15 janvier

Cours 2h

III.3 Intégrale généralisée de référence III.4 Propriété III.5 Manipulation ★ Changement de variables

Vendredi 17 janvier

Cours 3h

★ Intégration par parties

IV Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables IV.1 Définitions IV.2 Manipulation et propriété ★ Intégrabilité en une borne Exercices. (équations différentielles).

Lundi 20 janvier

td 2h

Exercices. (équations différentielles et intégrales généralisées).

Mardi 21 janvier

Cours 2h et td 1h

Rappels sur les espaces euclidiens et préhilbertiens

Mercredi 22 janvier

Cours 2h

*Rappels sur les espaces euclidiens et préhilbertiens***Vendredi 24 janvier**

Cours 3h

*Rappels sur les espaces euclidiens et préhilbertiens***Chapitre 7 Espaces euclidiens**I Hyperplan et produit scalaire *★Projeté et distance à un hyperplan*II Isométries vectorielles *II.1 Définition et caractérisation***Lundi 27 janvier**

td 2h

*Exercices : espaces euclidiens et intégrales généralisées.***Mardi 28 janvier**

Cours 2h et td 1h

*II.2 Propriétés II.3 Groupe orthogonal*III Matrices orthogonales *III.1 Définition et caractérisation III.2 Propriétés*IV Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3 *IV.1 Orientation ★Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3 IV.2 Produit mixte**Exercices : espaces euclidiens.***Mercredi 29 janvier**

Cours 2h

*IV.3 Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 IV.4 Interprétation géométrique*V Isométries vectorielles du plan euclidien *V.1 Matrice de $O_2(\mathbb{R})$ V.2 Interprétation géométrique***Vendredi 31 janvier**

Cours 3h

VI Isométries vectorielles de l'espace euclidien *VI.1 Matrice de $O_3(E)$ VI.2 Intreprétation géométrique*VII Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles *VII.1 Définition ★Caractérisation des projecteurs orthogonaux VII.2 Matrices symétriques VII.3 Théorème spectral VII.4 Endomorphisme autoadjoint positif***Lundi 3 février**

Td 2h

*Espaces euclidiens.***Mardi 4 février**

Cours 2h et td 2h

fin du chapitre sur le espaces euclidiens.

Applications de la réduction en analyse. La fiche a été complétée en cours (partie équations différentielles).

Mercredi 5 février

Cours 2h

Applications de la réduction en analyse (applications aux suites récurrentes linéaires).

Chapitre 8 Interversión de symbolesI Rappels *I.1 Limite de la dérivée I.2 Continuité de la limite / somme d'une suite de fonctions I.3 Interversión limite et intégrale I.4 Interversión dérivation / limite ou somme*

II Convergence dominée pour une suite de fonctions

Vendredi 7 février

III Intégration terme à terme sur un intervalle

IV Continuité sous le signe intégrale *★Version avec des hypothèses plus faibles ★Théorème de convergence dominée à paramètre continu*V Dérivation sous le signe intégrale *★Version avec des hypothèses plus faibles*

Lundi 10 février td 2h

Exercices. (espace euclidien, application de la réduction en analyse, interversion de symboles).

Mardi 11 février cours 2h

★Généralisation aux fonctions de classe \mathcal{C}^k

Mercredi 12 février Cours 2h

Chapitre 9 Espaces vectoriels normés

I Normes et distances I.1 Définition ★Cas d'un produit scalaire associé I.2 Normes usuelles sur \mathbb{K}^n ★Autres normes usuelles I.3 Propriétés I.4 Distance I.5 Boules et sphères I.6 Partie convexe I.7 Partie bornée, suite bornée et fonction bornée

Vacances d'hiver

Lundi 3 mars td 2h

Exercices (interversion de symboles et espaces vectoriels normés)

Mardi 4 mars cours 2h et td 1h

II Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie II.1 Convergence II.2 Propriétés ★Cas de la dimension finie II.3 Convergence des suites de coordonnées

III Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie ★Équivalence topologique avec \mathbb{K}^n III.1 Parties ouvertes *Exercices* (espaces vectoriels normés)

Mercredi 5 mars Cours 2h

III.2 Partie fermée III.3 Propriétés

Vendredi 7 mars Concours blanc

Devoir surveillé de 4h

Lundi 10 mars td 2h

Exercices (espaces vectoriels normés).

Mardi 11 mars cours 2h

III.4 Frontière

IV Limite et continuité en un point IV.1 Définition IV.2 Caractérisation

Exercices (espaces vectoriels normés).

Mercredi 12 mars Cours 2h

IV.3 Limites et opérations IV.4 Continuité en un point

V Continuité sur une partie V.1 Définition et propriétés

Vendredi 14 mars Cours 3h

V.2 Fonctions continues sur un fermé borné V.3 Fonctions lipschitziennes V.4 Continuité des applications linéaires ★Norme d'application V.5 Continuité des applications multi-linéaires

Lundi 17 mars td 2h

Exercices (espaces vectoriels normés).

Mardi 18 mars

Cours 2h et td 1h

Chapitre 10 Calcul différentiel

I Équations différentielles linéaires scalaires *★Écriture sous la forme d'un système d'ordre 1* I.1 Structure de l'ensemble des solutions I.2 Cas des coefficients constants *★Équation homogène* *★Cas d'un second membre* I.3 Exemples
II Dérivabilité des fonctions vectorielles II.1 Interprétation d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n comme courbe paramétrée *★Définitions* *★Tangente aux points réguliers*
Exercices.

Mercredi 19 mars

cours 2h

II.2 Dérivabilité en un point *★Rappel sur les limites des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n* II.3 Dérivabilité sur un intervalle
II.4 Dérivabilité et composition *★Cas d'une application linéaire* *★Cas d'une application bilinéaire / multilinéaire*
★Composée à droite par une fonction réelle

Vendredi 21 mars

Cours 3h

II.5 Fonctions de classe \mathcal{C}^k
III Fonctions de plusieurs variables *★Représentation d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}* III.1 Fonctions de classe \mathcal{C}^1
★Dérivées selon un vecteur *★Fonctions de classe \mathcal{C}^1* *★Cas des fonctions vectorielles* III.2 Propriétés III.3 Développement limité à l'ordre 1 et différentielle III.4 Règle de la chaîne *★Cas général* *★Applications aux fonctions constantes sur un ouvert convexe* *★Applications aux changements de variables*

Lundi 24 mars

td 2h

Exercices (calcul différentiel).

Mardi 25 mars

cours 2h et td 1h

★Cas particulier des coordonnées en polaire
IV Applications géométriques IV.1 Gradient IV.2 Ligne de niveau *★Rappel de géométrie* IV.3 Surface de niveau
★Rappels de géométrie *★Courbe tracée sur une surface*
V Fonction de classe \mathcal{C}^2 Exercices (calcul différentiel).

Mercredi 26 mars

cours 2h

VI Extremums d'une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}

Vendredi 27 mars

DS informatique