

Table des matières

| | | |
|------------|---|-----------|
| | Déterminant de Vandermonde, polynôme caractéristique d'une matrice compagnon | 5 |
| | Liens entre opérations élémentaires et matrices | 11 |
| | Polynômes d'endomorphisme et de matrices | 25 |
| | Quelques compléments sur la réduction | 35 |
| | Déterminants | 45 |
| | Applications de la réduction à l'analyse | 49 |
| | Rappels équations différentielles linéaires | 67 |
| | Quelques rappels de géométrie | 79 |
| 6 | Intégration sur un intervalle | 87 |
| I | Fonctions continues par morceaux | 87 |
| I.1 | Fonctions continues par morceaux sur un segment | 87 |
| I.2 | Fonctions continues par morceaux sur un intervalle | 88 |
| II | Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment 89 | |
| II.1 | Fonctions en escalier et intégrale d'une fonction en escalier | 89 |
| II.2 | Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux .. | 90 |
| II.3 | Lien avec les primitives | 93 |
| III | Intégrales généralisées | 94 |
| III.1 | Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$ | 94 |
| III.2 | Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque | 95 |
| III.3 | Intégrale généralisée de référence | 98 |
| III.4 | Propriété | 100 |

| | | |
|------------|--|------------|
| III.5 | Manipulation | 100 |
| IV | Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables | 106 |
| IV.1 | Définitions | 106 |
| IV.2 | Manipulation et propriété | 108 |
| | Exercices | 111 |
| 7 | Espaces euclidiens | 131 |
| I | Hyperplan et produit scalaire | 131 |
| II | Isométries vectorielles | 134 |
| II.1 | Définition et caractérisation | 134 |
| II.2 | Propriétés | 136 |
| II.3 | Groupe orthogonal | 138 |
| III | Matrices orthogonales | 138 |
| III.1 | Définition et caractérisation | 138 |
| III.2 | Propriétés | 141 |
| IV | Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3 | 142 |
| IV.1 | Orientation | 142 |
| IV.2 | Produit mixte | 143 |
| IV.3 | Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 | 144 |
| IV.4 | Interprétation géométrique | 146 |
| V | Isométries vectorielles du plan euclidien | 146 |
| V.1 | Matrice de $O_2(\mathbb{R})$ | 146 |
| V.2 | Interprétation géométrique | 148 |
| VI | Isométries vectorielles de l'espace euclidien | 148 |
| VI.1 | Matrice de $O_3(E)$ | 149 |
| VI.2 | Interprétation géométrique | 150 |
| VII | Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles | 151 |
| VII.1 | Définition | 151 |
| VII.2 | Matrices symétriques | 152 |
| VII.3 | Théorème spectral | 153 |
| VII.4 | Endomorphisme autoadjoint positif | 154 |
| | Exercices | 157 |
| | Procédé de normalisation de Gram-Schmidt et applications | 177 |
| | Caractéristiques géométriques d'un endomorphisme de \mathbb{R}^3 | 187 |
| 8 | Interversion de symboles | 191 |
| I | Rappels | 191 |
| I.1 | Limite de la dérivée | 191 |
| I.2 | Continuité de la limite / somme d'une suite de fonctions | 193 |
| I.3 | Interversion limite et intégrale | 194 |

| | | |
|------------|--|------------|
| I.4 | Interversion dérivation / limite ou somme | 196 |
| II | Convergence dominée pour une suite de fonctions | 197 |
| III | Intégration terme à terme sur un intervalle | 200 |
| IV | Continuité sous le signe intégrale | 203 |
| V | Dérivation sous le signe intégrale | 207 |
| | Exercices | 215 |

Déterminant de Vandermonde, polynôme caractéristique d'une matrice compagnon

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

★ Matrice et déterminant de Vandermonde

Définition .1 Soit $n \geq 2$ et $(x_i)_{i \in [1, n]}$ des scalaires.

La matrice de Vandermonde est la matrice de taille $n \times n$:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de Vandermonde est le déterminant de cette matrice :

$$v(x_1, \dots, x_n) = \det(V)$$

Si on considère l'application qui a un polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ associé ses évaluations aux points $(x_i)_{i \in [1, n]}$:

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \rightarrow \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{cases}$$

alors on constate que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est en fait la transposée de $V(x_1, \dots, x_n)$.

En effet, la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est :

$$(1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$$

Et on a :

$$\varphi(1) = (1, \dots, 1)$$

$$\varphi(X) = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\varphi(X^2) = (x_1^2, \dots, x_n^2)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\varphi(X^{n-1}) = (x_1^{n-1}, \dots, x_n^{n-1})$$

Si les n scalaires (x_i) sont tous distincts, alors φ est injective, puisqu'un polynôme P de son noyau vérifie à la fois $\deg(P) \leq n-1$ et P a n racines distinctes, donc P est nul. Ainsi, dans ce cas, φ est bijective puisque les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont identiques.

On calcule le déterminant de Vandermonde par récurrence.

On note donc :

$$\mathcal{P}(n) : "v(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i), \text{ pour tout choix de } (x_1, \dots, x_n)"$$

Pour l'initialisation, pour $n = 2$, on a la matrice :

$$V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

On a bien :

$$v(x_1, x_2) = x_2 - x_1$$

D'où l'initialisation.

Pour l'hérédité, on part de la matrice $V(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ de taille $n+1 \times n+1$:

$$V(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

On utilise alors les opérations suivantes dans cet ordre :

$$\begin{aligned} & L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - x_{n+1}L_n \\ \text{puis} & L_n \leftarrow L_n - x_{n+1}L_{n-1} \\ & \dots \\ \text{puis} & L_i \leftarrow L_i - x_{n+1}L_{i-1} \\ & \dots \\ \text{puis} & L_2 \leftarrow L_2 - x_{n+1}L_1 \end{aligned}$$

La ligne 1 est inchangée.

⚠ Attention, cela dépend de l'ordre ici, il faut bien l'indiquer.

On obtient :

$$v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & x_3 - x_{n+1} & \dots & x_n - x_{n+1} & 0 \\ (x_1 - x_{n+1})x_1 & (x_2 - x_{n+1})x_2 & (x_3 - x_{n+1})x_3 & \dots & (x_n - x_{n+1})x_n & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ (x_1 - x_{n+1})x_1^{n-2} & (x_2 - x_{n+1})x_2^{n-2} & (x_3 - x_{n+1})x_3^{n-2} & \dots & (x_n - x_{n+1})x_n^{n-2} & 0 \\ (x_1 - x_{n+1})x_1^{n-1} & (x_2 - x_{n+1})x_2^{n-1} & (x_3 - x_{n+1})x_3^{n-1} & \dots & (x_n - x_{n+1})x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

On développe alors selon la dernière colonne :

$$v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 1(-1)^{n+2} \begin{vmatrix} x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & x_3 - x_{n+1} & \dots & x_n - x_{n+1} \\ (x_1 - x_{n+1})x_1 & (x_2 - x_{n+1})x_2 & (x_3 - x_{n+1})x_3 & \dots & (x_n - x_{n+1})x_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x_1 - x_{n+1})x_1^{n-2} & (x_2 - x_{n+1})x_2^{n-2} & (x_3 - x_{n+1})x_3^{n-2} & \dots & (x_n - x_{n+1})x_n^{n-2} \\ (x_1 - x_{n+1})x_1^{n-1} & (x_2 - x_{n+1})x_2^{n-1} & (x_3 - x_{n+1})x_3^{n-1} & \dots & (x_n - x_{n+1})x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On factorise chacune des colonnes : la colonne C_j est factorisée par $(x_j - x_{n+1})$, cela donne :

$$v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (-1)^n (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1}) \dots (x_n - x_{n+1}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui donne :

$$\begin{aligned} v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= (x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n) v(x_1, \dots, x_n) \\ &= (x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

D'où l'hérédité.

On en déduit donc la conclusion :

Proposition .1 Soit $n \geq 2$ et $(x_i)_{i \in [1, n]}$ des scalaires. Alors le déterminant de la matrice de Vandermonde est :

$$v(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Autrement dit :

$$v(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_n - x_{n-1}) & (x_n - x_{n-2}) & (x_n - x_{n-3}) & \dots & (x_n - x_1) \\ & (x_{n-1} - x_{n-2}) & (x_{n-1} - x_{n-3}) & \dots & (x_{n-1} - x_1) \\ & & (x_{n-2} - x_{n-3}) & \dots & (x_{n-2} - x_1) \\ & & & (x_3 - x_2) & (x_3 - x_1) \\ & & & & (x_2 - x_1) \end{pmatrix}$$

En particulier, le déterminant est non nul (ie la matrice est inversible) si et seulement si les n scalaires $(x_i)_{i \in [1, n]}$ sont distincts deux à deux,

Ainsi, dans le cas où les n scalaires $(x_i)_{i \in [1, n]}$ sont distincts deux à deux, on retrouve le fait que l'application φ est bijective.

Ainsi pour tout (y_1, \dots, y_n) , il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$, tel que

$$\forall i \in [1, n], P(x_i) = y_i.$$

C'est le polynôme d'interpolation de Lagrange : le seuls polynôme de degré inférieur ou égal à $(n - 1)$ donc la courbe représentative passe par les n points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

D'après l'étude des polynômes de Lagrange, on sait que ce polynôme a pour expression :

$$P = \sum_{i=1}^n y_i L_i \quad \text{où} \quad L_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(X - x_j)}{(x_j - x_i)}$$

En fait, on peut voir que L_i est l'antécédent par φ du i -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{K}^n . En effet :

$$\forall j \in [1, n], L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

★ Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon

Définition .2 Soit a_0, \dots, a_{n-1} , n scalaires.

On définit la matrice compagnon associée au polynôme $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ comme

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, à un polynôme unitaire de degré n correspond une matrice compagnon de taille $n \times n$.

On a alors le résultat suivant :

Proposition .2 Soit a_0, \dots, a_{n-1} , n scalaires, $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ et $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ la matrice compagnon de ce polynôme.

On a alors : $\chi_C = P$.

Autrement dit, le polynôme caractéristique de la matrice compagnon du polynôme P est le polynôme P .

En conséquence, tout polynôme unitaire de degré n est le polynôme caractéristique d'une matrice de taille $n \times n$.

Démonstration. On construit χ_C . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

On réalise alors l'opération suivante :

$$l_1 \rightarrow l_1 + \lambda l_2 + \lambda^2 l_3 + \dots + \lambda^{n-1} l_n$$

Ce qui donne :

$$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda^{n-1} a_{n-1} + \lambda^n \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

On développe selon la première ligne, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) &= P(\lambda)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= P(\lambda)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = P(\lambda) \end{aligned}$$

Ainsi $\chi_C = P$.

Ainsi, si P est un polynôme unitaire, on construit la matrice compagnon associée C et on a : P est le polynôme caractéristique de C . ■

Proposition .3 Soit a_0, \dots, a_{n-1} , n scalaires, $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ et $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ la matrice compagnon de ce polynôme.

La matrice C est diagonalisable si et seulement si le polynôme P est scindé à racines simples.

Plus précisément, dans ce cas, on note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les n racines de P et on a :

$$C^T = V^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} V$$

avec V la matrice de Vandermonde associée à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

R Comme les racines sont distinctes, la matrice de Vandermonde est inversible.

Attention, selon les conventions sur la matrice de Vandermonde et la matrice compagnon, la relation peut être différente.

Avec les conventions adoptés ici, c'est la réduction de C^T qui est donnée.

Démonstration. On suppose que P est scindé à racines simples, alors comme $\chi_C = P$, on en déduit que C a n valeurs propres distinctes notées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc C est diagonalisable. La matrice $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ notée V est alors inversible.

Écrivons la matrice C^T :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et notons λ une des valeurs propres (ie l'un des λ_i).

En utilisant la relation :

$$\lambda^n = -a_0 - a_1\lambda + \dots - a_{n-1}\lambda^{n-1}$$

on voit que l'on a la relation sur les colonnes de C^T :

$$C_1 + \lambda C_2 + \lambda^2 C_3 + \dots + \lambda^{n-1} C_n = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ \lambda^n \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$C^T \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

(on peut aussi travailler avec les colonnes de $C^T - \lambda I_n$). On en déduit que le vecteur

$$(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$$

est une base de $E_\lambda(C^T)$ (qui est de dimension 1).

En appliquant sur chacune des n valeurs propres, on en déduit la relation :

$$C^T = V^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} V$$

avec :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On a donc démontré que si P est scindé à racines simples, alors C^T (donc C) est diagonalisable et que la relation est vraie.

Supposons maintenant que C est diagonalisable.

Considérons un vecteur propre $x = (x_1, \dots, x_n)$ de C^T et λ la valeur propre associée. Déjà λ est nécessairement une racine de P puisque P est le polynôme caractéristique.

On a alors :

$$C^T x = \lambda x$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 + \cdots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Les premières relations donnent directement :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \lambda^i x_1$$

La dernière relation est bien vérifiée puisqu'en remplaçant on a :

$$\begin{aligned} \text{d'un côté : } & -a_0 x_1 - a_1 x_2 + \cdots - a_{n-1} x_n = (-a_0 - a_1 \lambda + \cdots - a_{n-1} \lambda^{n-1}) x_1 \\ \text{de l'autre : } & \lambda x_n = \lambda^n x_1 \end{aligned}$$

Or λ étant racine de P , on a :

$$-a_0 - a_1 \lambda - \cdots - a_{n-1} \lambda^{n-1} = \lambda^n$$

on a donc bien l'égalité et la dernière relation.

On a donc montré qu'un vecteur propre (x_1, \dots, x_n) associé à λ s'écrit nécessairement sous la forme :

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$$

et que la réciproque est vraie. Ainsi, on peut écrire :

$$E_\lambda (C^T) = \text{Vect}((1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}))$$

En particulier, les espaces propres sont tous de dimension 1 pour toutes les valeurs du spectre.

Comme C est diagonalisable, la somme des ordres géométriques fait la dimension de l'espace. Il faut donc n valeurs dans le spectre et donc P a n racines distinctes. Ainsi, P est scindé à racines simples. ■

Liens entre opérations élémentaires et matrices

Dans cette fiche, on explique le lien entre opérations élémentaires et multiplication matricielle et les conséquences pour le calcul du rang, du déterminant, etc.

Matrices des opérations élémentaires

Multiplication à droite et à gauche par des vecteurs de la base canonique

Définition .3 On appelle e_i le vecteur colonne de taille n tel que $(e_i)_j$ (l'élément j de ce i -ième vecteur) est nul si $i \neq j$, vaut 1 sinon. Ainsi :

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } i$$

La famille (e_i) est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ie de \mathbb{R}^n).

Proposition .4 Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors Ae_i est la colonne i de A . tandis que ${}^t e_i A$ est la ligne i de A .

Démonstration. Le plus simple est de le démontrer avec une matrice générique, en faisant le produit à la main :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Sinon on peut voir :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (Ae_i)_j = \sum_{k=1}^n A_{jk}(e_i)_k = A_{ji}.$$

Ce qui signifie que la j -ième coordonnée du vecteur (colonne) (Ae_i) est l'élément (j, i) de A , ce qui signifie bien que (Ae_i) est la colonne i de A . ■

Proposition .5 Soient A et B deux matrices carrées de taille n , on note C_1, \dots, C_n les colonnes de B , et L_1, \dots, L_n les lignes de B on a alors :

- AB est formé des n vecteurs colonnes AC_1, AC_2, \dots, AC_n .
- BA est formé des n vecteurs lignes L_1A, \dots, L_nA .

Démonstration. Cela se voit en écrivant :

$$AB = A \begin{pmatrix} \left| \right. & \left| \right. & \left| \right. \\ C_1 & C_2 & C_n \\ \left| \right. & \left| \right. & \left| \right. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \right. & \left| \right. & \left| \right. \\ AC_1 & AC_2 & AC_n \\ \left| \right. & \left| \right. & \left| \right. \end{pmatrix}$$

D'une manière générale, la colonne j de (AB) ne dépend que de la colonne j de B , et de la ligne i de A , puisque

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n \underbrace{A_{ik}}_{\text{ligne } i \text{ de } A} \underbrace{B_{kj}}_{\text{colonne } j \text{ de } B}$$

■ **Exemple .1** Cela permet de faire facilement des calculs matriciels ou de les vérifier :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 4 & * & * \\ 6 & * & * \end{pmatrix}$$

En effet, on recopie la colonne 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & * & * \\ 6 & * & * \\ 11 & * & * \end{pmatrix}$$

en effet, on fait $C_1 + C_2$.

De la même manière :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

car on recopie la ligne 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

car on fait $l_2 + l_3$. ■

■ **Exemple .2** D'une relation sur les colonnes d'une matrice, on déduit un vecteur dans le noyau.

Exemple : si les colonnes de $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifient $C_1 + C_3 = 0$, alors le vecteur $(1, 0, 1)$ est dans le noyau. C'est particulièrement utile pour résoudre des systèmes homogènes de taille n sans les poser (ex : calcul de valeurs propres d'une matrice de taille n). ■

■ **Exemple .3** Si une matrice A vérifie : la somme sur les colonnes (ie le long de chaque ligne) est constante, alors on peut écrire :

$$C_1 + \dots + C_n = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, α est valeur propre et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à α .

De même, si une matrice A matrice A vérifie : la somme sur les lignes (ie le long de chaque colonne) est constante, alors on peut écrire :

$$L_1 + \dots + L_n = (\alpha \quad \dots \quad \alpha)$$

ou encore :

$$(1 \quad \dots \quad 1)A = \alpha(1 \quad \dots \quad 1)$$

Exercice 1 Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ie une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}) telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer que φ est proportionnelle à la trace.

Correction : Si $i \neq j$:

$$\varphi(E_{ij}) = \varphi(E_{ik}E_{kj}) = \varphi(E_{kj}E_{ik}) = \varphi(0) = 0 \text{ en choisissant } k \text{ quelconque}$$

et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{ik}E_{ki}) = \varphi(E_{ki}E_{ki}) = \varphi(E_{kk})$$

On note donc $\lambda = \varphi(E_{11})$ et on a donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(E_{ii}) = \lambda$$

tandis que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \implies \varphi(E_{ij}) = 0$$

ainsi :

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varphi(E_{i,j}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda \text{tr}(A)$$

Échanger des lignes (permutation)

Définition .4 Soit $1 \leq k < l \leq n$, on appelle **matrice de permutation** des lignes k, l , la matrice P_{kl} de taille n égale à l'identité sauf que sur la colonne k le 1 est sur la ligne l et sur la colonne l , le 1 est sur la ligne k .

Par exemple, si $n = 7, k = 2$ et $l = 5$, on a :

$$P_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow l_k \\ \\ \\ \leftarrow l_l \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ c_k & c_l \end{array}$$

Cette définition provient de :

Proposition .6 Soit A une matrice de taille n , alors $P_{k,l}A$ est la matrice de taille n égale à A sauf qu'on a échangé la ligne k et l .

De même $AP_{k,l}$ est la matrice de taille n sauf que l'on a échangé la colonne l et k .

Démonstration. sur un exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix}$$

Autre démonstration : Si $i \neq k$ et $i \neq l$, la ligne i de P_{kl} est ${}^t e_i$ donc la ligne k de $P_{kl}A$ est l_i . La ligne k de P_{kl} est ${}^t e_l$ donc la ligne k de $P_{kl}A$ est l_l , et idem pour la ligne k . ■

R Retrouver la matrice P_{kl} on applique l'opération associée à l'identité, car : $P_{kl} = P_{kl}I_n$.

Proposition .7 Les matrices P_{kl} sont inversibles et leurs inverses sont elles mêmes.
En conséquence, $\det(P_{kl}) = -1$.

Démonstration. En effet, l'opération inverse d'échanger les lignes k et l est de les échanger à nouveau, donc $P_{kl} = P_{kl}^{-1}$. ■

Multiplier une ligne par un scalaire β (dilatation)

Définition .5 On appelle matrice $M_i(\beta)$, où β est un nombre réel, une matrice de taille n égale à l'identité, sauf que l'élément i, i est remplacé par β . Ces matrices sont appelées **matrices de multiplication** de la ligne i par β .

Par exemple si $n = 8$, $M_4(\beta)$ est :

$$M_4(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \beta & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow l_i$$

Cette définition provient de

Proposition .8 Soit A une matrice de taille n , alors $M_i(\beta)A$ est la matrice obtenue en multipliant la ligne i de A par β , tandis que $AM_i(\beta)$ est la matrice obtenue en multipliant la colonne i de A par β .

Démonstration. C'est un cas particulier de multiplication par une matrice diagonale. On rappelle que si D est une matrice diagonale avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale, alors DM s'obtient à partir de M en effectuant les opérations : $l_i \leftarrow \lambda_i l_i$ pour toutes les lignes i . Et bien sûr, MD s'obtient à partir de M en effectuant les opérations : $C_i \leftarrow \lambda_i C_i$ pour toutes les colonnes i . ■

R La matrice $M_i(\beta)$ est la matrice identité à qui on a appliqué l'opération correspondante.

Proposition .9 Si β est non nul, alors $M_i(\beta)$ est inversible d'inverse $M_i\left(\frac{1}{\beta}\right)$.

Le déterminant d'une matrice $M_i(\beta)$ est β .

Démonstration. C'est un cas particulier de l'inverse d'une matrice diagonale. On peut aussi dire que l'inverse de l'opération « multiplier la ligne i par β » est « diviser la ligne i par β ». ■

Transvection

Définition .6 Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $k \neq i$ on appelle matrice $L_{i,k}(\alpha)$ une matrice égale à l'identité, sauf sur la colonne i , où on a mis un coefficient α ligne k .

Exemple :

$$L_{36}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \alpha & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow l_i \\ \\ \\ \leftarrow l_k \\ \\ \\ \end{matrix}$$

\uparrow
 c_i

Ces matrices sont appelées **matrices de transvection**.

Cette définition provient de

Proposition .10 Soit A une matrice de taille n , alors $L_{i,k}(\alpha)A$ est la matrice obtenue en faisant l'opération : $l_k \leftarrow l_k + \alpha l_i$.

Démonstration. Sur un exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} + \alpha a_{31} & a_{62} + \alpha a_{32} & a_{63} + \alpha a_{33} & a_{64} + \alpha a_{34} & a_{65} + \alpha a_{35} & a_{66} + \alpha a_{36} & a_{67} + \alpha a_{37} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix}$$

Si on voit que pour $k \leq i$, la ligne k de L_i est ${}^t e_k$, donc la ligne k de $L_i A$ est celle de A , tandis que pour $k > i$, la ligne k de L_i est ${}^t e_k + \alpha {}^t e_i$, donc la ligne k de $L_i A$ est égale à $l_k + \alpha l_i$. ■

R Encore une fois, L_{ik} est la matrice identité à qui on a appliqué l'opération correspondante.

Proposition .11 La matrice $L_{ik}(\alpha)$ est inversible et $(L_{ik}(\alpha))^{-1}$ est $L_{ik}(-\alpha)$.
Son déterminant est 1.

Démonstration. Pour inverser l'opération $l_k \leftarrow l_k + \alpha l_i$, il faut faire : $l_k \leftarrow l_k - \alpha l_i$.
Pour le déterminant, elle est triangulaire supérieure. ■

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, faire les opérations :

$$\forall k \neq i, l_k \leftarrow l_k - \alpha l_i \text{ avec } l_i \text{ inchangée}$$

sur la matrice A , revient à multiplier à gauche A par :

$$L_{i1}(\alpha_1)L_{i2}(\alpha_2)\dots L_{i(i-1)}(\alpha_{i-1})L_{i(i+1)}(\alpha_{i+1})\dots L_{in}(\alpha_n)$$

puisqu'on peut faire d'abord l'opération $l_1 \leftarrow l_1 - \alpha_1 l_i$, puis modifier la ligne 2, etc.

Ainsi, ces opérations s'écrivent comme des opérations élémentaires. On peut procéder de même sur les colonnes.

R On voit que l'ordre de ces opérations n'a pas d'importance, ce qui montre que les matrices $(L_{ik}(\alpha_k))_{k \neq i}$ commutent.
Par contre, la ligne i doit être inchangée.

Opérations élémentaires en Python

En python, on peut réaliser toutes les opérations élémentaires facilement. une ligne d'une matrice s'obtient en utilisant le *slicing* : on extrait la ligne i avec $A[i, :]$ qui est alors un array.

Les opérations s'écrivent alors :

Échange de ligne (permutation) La technique consiste à utiliser l'affectation simultanée

$$A[i, :], A[j, :] = A[j, :], A[i, :]$$

On peut aussi passer par une variable temporaire :

```
tmp = A[i, :] # enregistre la ligne i
A[i, :] = A[j, :]
A[j, :] = tmp
```

Multiplier une ligne par un scalaire (dilatation) On utilise l'opération `float * array`

$$A[i, :] = \text{beta} * A[i, :]$$

Transvection On utilise l'addition de array :

$$A[k, :] = A[k, :] + \alpha * A[i, :]$$

ou encore :

$$A[k, :] += \alpha * A[i, :]$$

Réductions de Gauss

La réduction de Gauss consiste à utiliser des opérations élémentaires sur les lignes pour rendre la matrice plus simples.

Opérations élémentaires

Définition .7 On considérera comme opération élémentaire sur les lignes :

- **La permutation** de deux lignes j et k , $l_j \leftrightarrow l_k$
- **La multiplication** d'une ligne par un scalaire β non nul, $l_i \leftarrow \beta l_i$ (appelée **dilatation**).
- **La transvection** : Ajouter la ligne i multipliée par un coefficient α à la ligne k : $l_k \leftarrow l_k + \alpha l_i$ la ligne i restant inchangée.

Les mêmes opérations existent sur les colonnes.

On peut combiner ces opérations élémentaires, pour faire par exemple :

$$\forall k \neq i, l_k \leftarrow l_k + \alpha_k l_i$$

Ces opérations sont inversibles quelque soit les coefficient α_k choisis (mais la ligne i doit rester inchangée).

On utilisera aussi des opérations du type : $l_k \leftarrow \beta l_k + \alpha l_i$, qui sont inversibles si $\beta \neq 0$.

Chacune de ces opérations élémentaires correspond, comme on l'a vu, à multiplier la matrice A à gauche par une matrice inversible. On multiplie à gauche pour faire des opérations sur les lignes et à droite pour des opérations sur les colonnes. L'expression de cette matrice est obtenue en appliquant l'opération sur l'identité.

Lorsqu'on utilise les opérations élémentaires pour réduire une matrice les points les plus importants sont :

- Indiquer quelles sont les opérations faites ,
- vérifier que ces opérations ont un sens (ne pas diviser par 0), en particulier dans le cas d'un paramètre,
- vérifier que les opérations faites sur les matrices sont inversibles,
- indiquer l'ordre dans lequel on fait ces opérations, si celui-ci a de l'importance.

Réduction à une matrice triangulaire par la méthode de Gauss

Proposition .12 Soit A une matrice de taille (n, p) , il existe une matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$, produit de matrices d'opérations élémentaires, telle que la matrice MA soit échelonnée.

Autrement dit, en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A , on peut la rendre échelonnée.

De même : il existe une matrice $M \in GL_p(\mathbb{K})$, produit de matrice d'opérations élémentaires, telle que AM soit échelonnée. Autrement dit, en effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice A , on peut la rendre échelonnée.

Algorithme de réduction de Gauss. On démontre dans le cas des lignes, le cas des colonnes étant symétrique.

La démonstration se fait en déterminant un algorithme permettant de calculer U . On procède colonne par colonne. Considérons tout d'abord la première colonne : si elle ne contient que des zéros alors on passe à la suivante.

Si non,

- on regarde le premier élément non nul de la première colonne, supposons que ce soit l'élément ligne k ,
- on fait l'opération : $l_1 \leftrightarrow l_k$, de cette manière l'élément a_{11} est non nul,
- on fait les opérations

$$\forall k > 1, l_k \leftarrow l_k + \alpha_{k1} l_1,$$

avec $\alpha_{k1} = -\frac{a_{k1}}{a_{11}}$. De cette manière, on met des éléments non nuls sur la première colonne des lignes 2 à n . On peut dire que l'on utilise la ligne 1, pour obtenir des termes nul en dessous, plus précisément, on utilise le terme non nul a_{11} pour obtenir : $\forall j > 1, a_{j1} = 0$.

La matrice ainsi obtenue est alors de la forme :

$$\begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * & * & * \\ & & & & * & * & * & * & * \\ & & & & & * & * & * & * \\ & & & & & & * & * & * \\ & & & & & & & * & * \\ & & & & & & & & * \end{bmatrix}$$

Cette matrice est obtenue en multipliant la matrice A à gauche par un produit de matrice d'opérations élémentaires, puisque l'on a fait que des opérations élémentaires.

On applique alors le même procédé à la sous matrice de taille $(n-1, p-1)$, constituée des lignes de 2 à n et des colonnes de 2 à p :

- Si cette partie ne contient que des zéros, on ne fait rien,
- sinon on échange deux lignes de manière à avoir $a_{22} \neq 0$,
- on utilise cette valeur non nulle, pour éliminer les valeurs situées en dessous.

En appliquant le même procédé, on obtient une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & \square & * & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * & * & * \\ & & & & * & * & * & * & * \\ & & & & & * & * & * & * \\ & & & & & & * & * & * \\ & & & & & & & * & * \\ & & & & & & & & * \end{bmatrix}.$$

En continuant ainsi le procédé, on obtient une matrice échelonnée, on note U cette matrice.

De plus, on voit que l'on n'a fait que des opérations élémentaires, *i.e.* on a multiplié à gauche la matrice A par des matrices d'opérations élémentaires. La matrice U obtenue à la fin s'écrit donc : $U = \underbrace{M_p M_{p-1} \dots M_1}_M A$, où les matrices M_i correspondent à chaque opérations élémentaires faites sur la matrice A pour traiter la colonne p .

On obtient donc le résultat en posant $M = M_p M_{p-1} \dots M_1$. ■

On peut prolonger cet algorithme :

Proposition .13 Soit A une matrice de taille (n, p) , il existe une matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$, produit de matrices d'opérations élémentaires, telle que la matrice MA ne contiennent que des 0 et des 1. Précisément, au plus un seul 1 pour chaque ligne et chaque colonne.

Autrement dit : en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A , on peut la réduire pour n'avoir que des 1 sur les pivots, des 0 partout ailleurs. On aura alors autant de 1 que le rang de A .

En particulier, si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors on peut la transformer en l'identité par des opérations élémentaires sur les lignes.

La même propriété existe pour les colonnes.

Démonstration. On reprend le processus précédent : par des opérations de dilatation, on remplace les \square par des 1, puis on utilise ces pivots pour « effacer » les $*$ situées au dessus. ■

Calcul de l'inverse par méthode de Gauss-Jordan

Proposition .14 Soit A une matrice inversible, on considère la suite d'opérations élémentaires sur les lignes nécessaires pour réduire la matrice A en la matrice identité.

Alors si on fait la même suite d'opérations élémentaires (dans le même ordre) sur les lignes de la matrice identité, on obtient A^{-1} .

Démonstration. Considérons la matrice M correspondant à la suite d'opérations permettant de transformer la matrice A en l'identité, on a $MA = I_n$, donc $M = A^{-1}$.

Pour calculer M , il suffit de l'interpréter comme une suite d'opérations élémentaire : comme $M = MI_n$, on calcule M en faisant ces opérations élémentaires sur la matrice I_n . ■

En pratique, on écrit les deux matrices A et I_n l'une à côté de l'autre, et on fait les opérations en parallèle.

C'est la méthode la plus simple pour savoir si la matrice A est inversible et calculer son inverse : si le calcul aboutit, c'est que la matrice est inversible. Sinon elle n'est pas de rang plein et donc elle n'est pas inversible.

R La même démonstration permet de montrer que si on part du vecteur colonne B et que l'on fait les mêmes opérations élémentaires, on obtient le vecteur $MB = A^{-1}B$, i.e. la solution de $AX = B$. C'est le principe des « matrices augmentées » : on ajoute le second membre comme une colonne de la matrice.

Ainsi, si on doit résoudre un système avec deux seconds membres B et B' , on peut obtenir les solutions en faisant les opérations élémentaires parallèlement sur A et sur une matrice à n lignes et deux colonnes $[BB']$. Les deux solutions X et X' se lisent alors sur chacune des colonnes, après les opérations élémentaires.

Invariance par opérations élémentaires

Cas des systèmes

Pour les systèmes, on garde l'équivalence en multipliant à gauche :

Proposition .15 Si M est une matrice inversible, alors le système

$$(S) \iff AX = B \iff MAX = MB$$

donc on **garde l'équivalence du système $AX = B$ en multipliant (à gauche) la matrice A par une matrice inversible.**

Démonstration. En effet, si $AX = B$, alors $MAX = MB$, et si $MAX = MB$, alors en multipliant par M^{-1} , on obtient $AX = B$. ■

Corollaire .16 On garde l'équivalence des système par opérations élémentaires sur les lignes.

On obtient donc la proposition :

Proposition .17 En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'un système (coefficients et seconds membres), on conserve l'équivalence entre les systèmes.

On peut donc réduire un système $AX = B$ en un système échelonné (qui se résout par remontée) en utilisant des opérations sur les lignes (et les lignes uniquement).

Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes du système revient à effectuer ces opérations sur la matrice augmentée. Il est ainsi plus simple d'écrire le système sous forme matricielle. On peut écrire la matrice augmentée ou écrire le système sous la forme $AX = B$ en détaillant A et B .

★ Algorithme de réduction de Gauss

Dans cette partie, on écrit l'algorithme de réduction de Gauss. Conformément au programme, on se contente d'un cas simple : La matrice A est carrée et inversible. Le système est alors de Cramer.

On réduit le système $AX = B$ et $UX = C$ avec U échelonnée.

```
1 def gauss(A, b) :
2     """
3     entree: A = array
4             = matrice carrée inversible de taille nxn
5             b = array
6             = vecteur second membre.
7     sortie: A = array
8             = matrice triangulaire supérieure
9             b = array
10            = vecteur second membre.
11    le système AX=b initial est équivalent au système final
12    (qui se résout par remontée)
13    """
14    n, m = shape(A)
15    for j in range(n):
16        #on traite la colonne j
17
18        #étape 1: on échange les lignes
```

```

19  if A[j,j] != 0:
20      # on cherche le premier terme non nul
21      # dans la colonne j en dessous de ajj:
22      # comme A est inversible, on est sûr de trouver.
23      k = chNonNul(A,j)
24      # on échange lk et lj
25      A[k,:], A[j,:] = A[j,:], A[k,:]
26      b[k], b[j] = b[j], b[k]
27
28      # arrivé ici, A[j,j] != 0
29
30      #étape 2: on modifie toutes les lignes en dessous
31      for k in range(j+1,n) :
32          alpha = A[k,j] / A[j,j]
33          A[k,:] += -alpha*A[j,:]
34          b[k] += -alpha*b[j]
35  return(A,b)

```

Avec comme fonction chNonNul :

```

def chNonNul :
2  """
3  entrée: A = array
4          = matrice carrée inversible de taille nxn
5          j = entier
6          = indice de ligne
7  sortie: k = indice de ligne
8  on cherche k >= j tel que A[k,j] !=0
9  """
10 n, m = shape(A)
11 for k in range(j,n) :
12     if A[k,j] != 0 :
13         return(k)
14 # normalement la suite est du code mort
15 # car A est inversible
16 print("ERREUR matrice non inversible")
17 return()

```


Il est plus efficace de chercher non pas le premier terme nul mais le terme le plus grand (en module), c'est le **pivot max**, cela permet de limiter les erreurs numériques.

Invariance du noyau

Proposition .18 Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice, et M une matrice inversible, alors les solutions du système homogène $AX = 0$ sont les mêmes que le système $MAX = 0$.

En conséquence, on ne change pas le noyau en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.

Démonstration. C'est un cas particulier des systèmes. ■

 Dans ce cas pas besoin d'effectuer les opérations sur le second membre.

Invariance du rang

Proposition .19 Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice, alors on ne change pas le rang en multipliant à gauche ou à droite par une matrice inversible.

En conséquence, on ne change pas le rang en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Pour calculer le rang d'une matrice, on peut donc la réduire par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, jusqu'à obtenir une matrice dont le rang est évident.

Démonstration. C'est la traduction du résultat : Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini, alors :

- Si u est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(v)$.
- Si v est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(u)$.

Corollaire .20 Le rang d'une matrice est le rang de sa transposée.

Démonstration. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice, alors en faisant des opérations sur les lignes, on peut la réduire en une matrice échelonnée E avec que des 0 et des 1. (un 1 au plus sur chaque ligne).

On constate qu'en faisant les mêmes opérations sur ${}^T A$, on réduit la matrice en ${}^T E$.

On s'est donc ramené à montrer qu'une matrices échelonnée avec que des 0 et des 1 a le même rang que sa transposée, ce qui est évident. ■

★ **Extraire une base d'un espace image ou d'un espace engendré**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et f l'endomorphisme canoniquement associé. On suppose que l'on ne cherche pas que le rang mais aussi une base de $\text{Im}(f)$, ie quelles sont les colonnes de A qui engendrent l'espace image,

Dans ce cas particulier, on peut réduire la matrice A en n'utilisant que des opérations sur les lignes. On obtient alors une matrice échelonnée, dans laquelle le nombre de pivot est le rang. Dans cette matrice échelonnée, on regarde quelles sont les colonnes qui contiennent un pivot : ce sont les colonnes de A qui engendrent l'espace image.

■ **Exemple .4** Si on considère l'application linéaire :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (2x+3y-z, -x+2y, 7y-z). \end{cases}$$

La matrice associée est : $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

On calcule son rang avec la méthode de Gauss (en n'effectuant que des opérations sur les lignes) :

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{7} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2l_2 + l_1 \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{7} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ l_3 - l_2 \end{matrix} .$$

Le rang est donc 2, donc le noyau a pour dimension 1. L'application n'est **ni injective ni surjective**.

Les deux vecteurs $(f(e_1), f(e_2))$ dont on lit les coordonnées dans les deux premières colonnes de la matrice A forment une famille libre de l'espace image. En effet, si on avait pris que les deux premières colonnes de A , on aurait obtenu une famille de rang 2 : les calculs ont montré que

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

Ainsi, une base de $\text{Im}(f)$ est :

$$\left((2, -1, 0), (3, 2, 7) \right).$$

On peut aussi choisir $(f(e_1), f(e_3))$, mais on ne sait rien sur $(f(e_2), f(e_3))$. ■

Cette technique est aussi utilisée aussi pour une famille de vecteur.

Si on considère une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$, dont on connaît les coefficients sur une base, pour savoir si cette famille est libre ou génératrice, le plus simple est de mettre leurs coordonnées dans une matrice M de manière à calculer le rang par opérations élémentaires. Pour calculer le rang, on peut effectuer des opérations sur les lignes ou les colonnes, mais si on veut en plus une base du sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{F} , alors il peut être utile de ne faire que des opérations sur les lignes.

■ **Exemple .5** On considère la famille de 5 vecteurs de \mathbb{R}^4 donnés par :

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 2, -1, 1) & u_2 &= (2, 4, -2, 2) \\ u_3 &= (-3, -7, 0, -4) & u_4 &= (5, 12, 1, 7) & u_5 &= (-1, 3, 9, 10). \end{aligned}$$

On note $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$.

On calcule le rang de la matrice associée avec la réduction de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -7 & 12 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ l_2 - 2l_1 \\ l_3 + l_1 \\ l_4 - l_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ l_3 - 3l_2 \\ l_4 - l_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 7l_4 + 6l_3 \end{array}$$

Considérons les vecteurs (u_1, u_3, u_5) (les colonnes qui contiennent des pivots), la matrice de cette famille correspond aux colonnes 1,3 et 5 :

$$\text{Mat}(u_1, u_3, u_5) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \\ -1 & 0 & 9 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

En refaisant les mêmes calculs, on voit que cette matrice se réduit matrice en :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est donc de rang 3, ce qui signifie que (u_1, u_3, u_5) est une famille libre de E , donc une base de E . On peut donc dire qu'une base de E est

$$\left((1, 2, -1, 1), (-3, -7, 0, -4), (-1, 3, 9, 10) \right).$$

■

! **Attention :** on utilise les coordonnées dans la matrice originale, et non dans la matrice réduite. De plus, on ne peut faire dans ce cas que des opérations sur les lignes pour cette technique.

★ **Recherche de vecteurs dans le noyau**

Considérons A une matrice de taille n et de rang $r < n$. Par des opérations élémentaires inversibles sur les colonnes (et les colonnes uniquement), on peut utiliser la réduction de Gauss sur les colonnes et la réduire en faisant apparaître r colonnes de 0.

Ces opérations reviennent à multiplier A par une matrice P inversible. On peut donc écrire :

$$AP = \begin{pmatrix} | & \dots & | & 0 & \dots & 0 \\ | & \dots & | & \vdots & \dots & \vdots \\ \square & \dots & \square & \vdots & \dots & \vdots \\ | & \dots & | & \vdots & \dots & \vdots \\ | & \dots & | & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} | \\ | \\ | \\ \square \\ | \\ | \end{pmatrix}$ désigne une colonne non nulle, et $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ désigne une colonne nulle. Plus précisément, AP a r colonne non nulle et $n - r$ colonne nulle.

Si on décompose P en colonne :

$$P = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | & | \\ C_1 & C_2 & \dots & C_{n-1} & C_n \\ | & | & \dots & | & | \end{pmatrix}$$

et on sait alors que :

$$AP = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | & | \\ AC_1 & AC_2 & \dots & AC_{n-1} & AC_n \\ | & | & \dots & | & | \end{pmatrix}$$

or les $n - r$ dernières colonnes de AP sont nulles, ainsi, les $n - r$ dernières colonnes de P sont les coordonnées de vecteurs du noyau. On a donc trouvé des vecteurs dans le noyau. Pour trouver les colonnes de P , on ne garde pas en mémoire les différentes matrices correspondantes : on applique les mêmes changements à A et à la matrice identité dans le même ordre.

En conséquence, on en déduit une méthode pour déterminer des vecteurs du noyau : On procède comme pour l'algorithme de Gauss-Jordan : on effectue les opérations en parallèle sur A et sur l'identité. On réduit A pour faire apparaître des colonnes nulles. Les colonnes correspondantes dans l'identité sont donc les vecteurs du noyau.

! Il ne faut faire que des opérations sur les colonnes dans ce contexte.

■ **Exemple .6** Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

On voit bien que le rang de A est 2 mais il n'est pas facile de déterminer une relation sur les colonnes. On peut donc utiliser la technique précédente :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \text{ et } C_3 \leftarrow 2C_3 - 5C_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C_3 \leftarrow 2C_3 + 2C_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $(-7, 2, 2)$ est dans le noyau. ■

Invariance du déterminant

Proposition .21 Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice carrée et $P \in GL_n$ une matrice inversible, alors $\det(PA) = \det(AP) = \det(P) \det(A)$.

En conséquence, lorsqu'on effectue une opération élémentaire inversible sur les lignes ou les colonnes de A , on change le déterminant en le multipliant par le déterminant de la matrice correspondant à l'opération élémentaire.

Ainsi :

- permuter deux lignes ou deux colonnes multiplie le déterminant par -1 .
- effectuer l'opération $l_k \leftarrow l_k + \alpha l_i$ avec $i \neq k$ ne change pas le déterminant.
- effectuer l'opération $l_i \leftarrow \beta l_i$ multiplie le déterminant par β .

Idem pour les colonnes.

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée, on peut faire des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes (ou les deux), de manière à réduire la matrice en une matrice dont le déterminant est clair, en prenant garde aux opérations qui modifient le déterminant.

Attention en particulier à l'opération $l_k \leftarrow \beta l_k + \alpha l_i$ avec $i \neq k$ qui multiplie le déterminant par β .

Conclusion

- Pour le calcul de l'inverse de A , on effectue des opérations sur les lignes et les lignes uniquement en effectuant les mêmes opérations (dans le même ordre) sur la matrice identité.
- Pour résoudre un système linéaire $AX = B$, on peut le réduire par des opérations sur les lignes en un système échelonné. Dans ce contexte, on ne peut utiliser que des opérations sur les lignes, et il faut effectuer les mêmes opérations sur le second membre.
- Pour déterminer le noyau d'une matrice (ie résoudre le système homogène), on peut réduire la matrice par des opérations sur les lignes et uniquement les lignes.
- Pour calculer le rang, on peut réduire la matrice (à une matrice échelonnée) avec des opérations sur les lignes ou les colonnes (indifféremment). Dans le cas où on ne veut pas que le rang mais aussi une base de l'espace image ou de l'espace vectoriel engendré, il est plus pratique de n'utiliser que des opérations sur les lignes, puis d'extraire la base comme les colonnes sur lesquels la matrice échelonnée a un pivot.
- Pour calculer le déterminant, on peut réduire la matrice avec des opérations sur les lignes ou les colonnes (indifféremment), en faisant attention à certaines opérations qui modifient le déterminant :
 - échanger deux ligne (ou deux colonnes), multiplie le déterminant par -1 ,
 - effectuer $l_i \leftarrow \beta l_i + \alpha l_k$ (ou l'équivalent sur les colonnes) multiplie le déterminant par β

Polynômes d'endomorphisme et de matrices

★ Définition et généralités


Définition .8 Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, E un \mathbb{K} espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

On définit alors $P(u)$ comme l'endomorphisme de E par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$$

De même, pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n \mathbb{K}$, on définit $P(A)$ par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k$$

 On applique donc un polynôme à une matrice ou à un endomorphisme. C'est un des intérêt de parler de polynôme formel et non de fonctions polynomiales.

■ **Exemple .7** si $P = X^3 + 3X^2 + 2X + 1$, alors :

$$P(A) = A^3 + 3A^2 + 2A + I_n$$

$$P(u) = u^3 + 3u^2 + 2u + Id$$

Attention en particulier au 1 qui devient I_n ou Id . ■

 On peut rappeler quelques résultats :


- u et $P(u)$ commutent.
- Si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ , alors :

$$P(u)(x) = P(\lambda)x$$

et donc x est encore vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$

- Si A et B sont deux matrices semblables et que $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $Q(A)$ et $Q(B)$ sont encore semblables. En effet, si on note $A = PBP^{-1}$, alors $A^2 = PB^2P^{-1}$, et d'une manière générale, pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$, donc :

$$\begin{aligned} Q(A) &= \sum_{k=0}^n b_k A^k && \text{en notant } Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^n b_k P B^k P^{-1} = P \left(\sum_{k=0}^n b_k B^k \right) P^{-1} \\ &= P Q(B) P^{-1} \end{aligned}$$


 Pour $u = 0$ (application nulle), on a $P(0) = a_0 Id$ Pour $u = Id$, on a : $P(Id) = P(1)Id$. D'une manière générale : $P(\lambda Id) = P(\lambda)Id$.

Proposition .22 Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors :

$$(P + \lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u)$$

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$$

$$(P(Q))(u) = P(Q(u))$$

 On considère souvent l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto P(u) \end{cases}$$

C'est un morphisme d'algèbre.

Son noyau est l'ensemble des polynômes annulateurs de u , son image est l'ensemble des endomorphismes de E qui sont polynômes en u .

Démonstration. En notant $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ (quitte à rajouter des termes nuls si ils ne sont pas du même degré). On a :

$$\begin{aligned}
 P + \lambda Q &= \sum_{k=0}^n (a_k + \lambda b_k) X^k \\
 (P + \lambda Q)(u) &= \sum_{k=0}^n (a_k + \lambda b_k) u^k \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k u^k + \lambda \sum_{k=0}^n b_k u^k \\
 &= P(u) + \lambda Q(u)
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 (PQ) &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k \\
 (PQ)(u) &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) u^k \\
 \text{et } P(u) \circ Q(u) &= \left(\sum_{k=0}^n a_k u^k \right) \circ \left(\sum_{k=0}^n b_k u^k \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) u^k
 \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
 P(Q) &= \sum_{k=0}^n a_k Q^k \\
 P(Q)(u) &= \sum_{k=0}^n a_k Q^k(u) \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k (Q(u))^k && \text{avec ce que l'on a vu avant} \\
 &= P(Q(u))
 \end{aligned}$$



En particulier, on voit que

$$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$$

Ainsi, deux endomorphismes qui sont polynômes en u commutent.

★ **Lemme des noyaux**

Ce théorème est hors-programme, néanmoins sa démonstration constitue un exercice classique.

Proposition .23 Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux, alors :

$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$$

Plus généralement, si P_1, \dots, P_r sont r polynômes premiers entre eux deux à deux, alors :

$$\ker \left(\prod_{k=1}^r P_k(u) \right) = \bigoplus_{k=1}^r \ker (P_k(u))$$

Démonstration. Pour deux polynômes P et Q premiers entre eux. Alors déjà $\ker(P(u))$ et $\ker(Q(u))$ sont des SEV de $\ker((PQ)(u))$.

On part de la relation de bezout :

$$\exists(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2, AP + BQ = 1$$

On applique à u :

$$(AP)(u) + (BQ)(u) = Id$$

Ainsi, pour x dans E , on a la décomposition :

$$(AP)(u)(x) + (BQ)(u)(x) = x$$

Montrons avec cette relation que $\ker(P(u))$ et $\ker(Q(u))$ sont en somme directe. Pour cela, soit $x \in \ker(P(u)) \cap \ker(Q(u))$, alors

$$\begin{aligned} x &= (A(u) \circ P(u))(x) + (B(u) \circ Q(u))(x) \\ &= A(u) \left(\underbrace{P(u)(x)}_{=0} \right) + B(u) \left(\underbrace{Q(u)(x)}_{=0} \right) \\ &= A(u)(0) + B(u)(0) = 0 \end{aligned}$$

Considérons maintenant un x dans $\ker((PQ)(u))$, on reprend la décomposition :

$$(AP)(u)(x) + (BQ)(u)(x) = x$$

Montrons que cela permet de décomposer x dans $\ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$.

En effet :

$$\begin{aligned} Q((AP)(u)(x)) &= (QAP)(u)(x) = (APQ)(u)(x) = (A(PQ))(u)(x) \\ &= A(u) \circ (PQ)(u)(x) \\ &= A(u)((PQ)(u)(x)) = A(u)(0) = 0 \end{aligned}$$

donc :

$$(A(u) \circ P(u))(x) \in \ker(Q(u))$$

On montre de même que $(BQ)(u)(x) \in \ker(P(u))$.

Ainsi, pour tout $x \in \ker((PQ)(u))$, on a la décomposition :

$$x = \underbrace{(AP)(u)(x)}_{\in \ker(Q(u))} + \underbrace{(BQ)(u)(x)}_{\in \ker(P(u))}$$

et cette décomposition est unique. On a donc bien :

$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$$

Pour le cas général, on procède par récurrence sur le nombre de polynôme r . Le cas $r = 2$ a été traité. Considérons un $r \geq 2$ et $i P_1, \dots, P_r, P_{r+1}$ des polynômes premiers entre eux. L'hypothèse de récurrence est alors :

$$\ker \left(\prod_{k=1}^r P_k(u) \right) = \bigoplus_{k=1}^r \ker (P_k(u))$$


Mais, $\prod_{k=1}^r P_k(u)$ et P_{r+1} sont premiers entre eux, donc en appliquant le cas $r = 2$, on a :


$$\ker \left(\prod_{k=1}^r P_k(u) \times P_{r+1}(u) \right) = \ker \left(\prod_{k=1}^r P_k(u) \right) \oplus \ker(P_{r+1}(u))$$

en remplaçant, on obtient bien :

$$\ker \left(\prod_{k=1}^{r+1} P_k(u) \right) = \bigoplus_{k=1}^{r+1} \ker(P_k(u))$$

On a donc l'hérédité ce qui permet de montrer la propriété. ■

 On peut remarquer que les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en u . Par exemple, le projecteur sur $\ker(P(u))$ parallèlement à $\ker(Q(u))$ est : $(BQ)(u)$.

 On retrouve le cas que les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe puisque si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont p valeurs distinctes, alors les polynômes $(X - \lambda_i)_{i \in [1, p]}$ sont premiers entre eux, donc :


$$\ker \left(\prod_{i \in [1, p]} (u - \lambda_i Id) \right) = \bigoplus_{i \in [1, p]} \ker(u - \lambda_i Id)$$

cad :


$$\ker \left(\prod_{i \in [1, p]} (u - \lambda_i Id) \right) = \bigoplus_{i \in [1, p]} E_{\lambda_i}(u)$$

★ Polynômes annulateurs et polynôme minimal

Définition .9 Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit annulateur de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ lorsque $P(u) = 0$. De même, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit annulateur de la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $P(A) = 0$.

 Dans la définition, le 0 désigne l'endomorphisme nul ou la matrice nulle.

L'ensemble des polynômes annulateurs de u est donc le noyau de l'application $\varphi : P \mapsto P(u)$.


 En dimension finie, un endomorphisme admet toujours un polynôme annulateur. En effet, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie alors que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Plus précisément, si on note n la dimension de l'espace E , alors la famille $(u^k)_{k \in [0, n^2]}$ qui contient $n^2 + 1$ vecteurs est nécessairement liée dans $\mathcal{L}(E)$. et donc il existe (a_0, \dots, a_{n^2}) tel que :

$$a_0 Id + a_1 u + \dots + a_{n^2} u^{n^2} = 0$$

ainsi, u admet un polynôme annulateur de degré n^2 .

Le théorème de Cayley-Hamilton permet en fait de montrer qu'il en admet un de degré n .

 La remarque précédente montre qu'il existe un polynôme annulateur de degré d si et seulement si $(u^k)_{k \in [0, d]}$ est liée. En effet, $(u^k)_{k \in [0, d]}$ est liée s'écrit :

$$\exists (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{K}^d, a_0 Id + \dots + a_d u^d = 0$$

$$\text{cad : } \exists (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{K}^d, a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d \text{ est annulateur.}$$

En particulier, pour une matrice A , connaître un polynôme annulateur P de degré d assure que l'on peut calculer A^k pour $k \geq d$ en fonction de (I_n, A, \dots, A^{d-1}) .


En effet, on peut faire la division euclidienne de X^k par P pour $k \geq d$:


$$X^k = QP + R \text{ avec } \deg(R) \leq d - 1$$

donc :

$$A^k = Q(A) \underbrace{P(A)}_{=0} + R(A) = R(A) \in \text{Vect} \left(I_n, A, \dots, A^{d-1} \right)$$

On obtient ainsi une technique de calcul de A^k .

 On parle d'un polynôme annulateur. Il n'est pas unique. En fait, on peut voir que si P est annulateur de u , alors pour tout polynôme Q , QP est encore annulateur de u .

 On peut rappeler le résultat : si P est annulateur de u , alors les valeurs propres de u sont racines de P .
On peut aussi rappeler la technique pour calculer l'inverse par polynôme annulateur : si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$ est annulateur de A avec $a_0 \neq 0$, alors :

$$a_0I_n + a_1A + \dots + a_dA^d = 0.$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{a_1}{a_0}A + \dots + \frac{a_d}{a_0}A^d \\ &= A \left(-\frac{a_1}{a_0}I_n - \dots - \frac{a_d}{a_0}A^{d-1} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, A inversible et $A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0}I_n - \dots - \frac{a_d}{a_0}A^{d-1}$.

La notion de polynôme minimal est hors-programme, ce qui suit est donc un exercice classique.

Proposition .24 Pour un endomorphisme u , qui admet un polynôme annulateur non nul.

Il existe un unique polynôme Π_u annulateur de u qui est unitaire et tel que :


$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0 \iff \Pi_u | P$$

(autrement dit Π_u qui divise tout polynôme annulateur de u).

C'est le polynôme minimal de u .

On définit de même le polynôme minimal d'une matrice A noté Π_A .

Notation .1. On note Π_u le polynôme minimal d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, et Π_A le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

 Si E est de dimension finie, alors il existe toujours un polynôme minimal. En particulier, le polynôme minimal d'une matrice existe toujours.

Démonstration. On peut commencer par l'unicité : supposons qu'il y ait deux polynôme minimal P et Q . On a alors $P|Q$ (car Q annule u et P est minimal) et $Q|P$. Comme P et Q sont unitaires, on en déduit que $Q = P$.

Considérons :

$$\mathcal{D} = \left\{ \deg(P) \mid P \text{ non nul et annule } u \right\}$$


il s'agit d'un ensemble non vide (puisque par hypothèse, u a un polynôme annulateur non nul) de \mathbb{N} , qui possède donc un plus petit élément. On note donc d ce minimum. On a déjà $d \geq 1$ car un polynôme constant ne peut pas annuler u . Considérons un polynôme Π de degré d qui annule u . Un tel polynôme existe.

Considérons un polynôme P annulateur de u . On fait la division euclidienne de P par Π : il existe donc $(A, R) \in \mathbb{K}[X]$, tel que : $P = A\Pi + R$ avec $\deg(R) < \deg(\Pi)$. En appliquant à u , on obtient :

$$P(u) = (A\Pi)(u) + R(u)$$

mais $P(u) = 0$ et $(A\Pi)(u) = A(u) \circ \Pi(u) = 0$, donc $R(u) = 0$. Le polynôme R est donc annulateur de u et vérifie : $\deg(R) < \deg(\Pi) = d$, donc par définition du minimum de \mathcal{D} , R ne peut pas être non nul.

Ainsi, $R = 0$, et $\Pi|P$. ■

 Le polynôme minimal est donc unique : Le polynôme minimal de l'endomorphisme u est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule u .

Si on note toujours d son degré, alors la famille $(u^k)_{k \in [0, d]}$ est donc liée, tandis que la famille $(u^k)_{k \in [0, d-1]}$ est libre.

Proposition .25 On suppose E de dimension finie.

Soit Π le polynôme minimal d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ un scalaire.

On a alors : α est une racine de Π si et seulement si α est valeur propre de u .

On a le même résultat pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En particulier, si le polynôme minimal Π_u est scindé (ce qui est le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), alors il s'écrit sous la forme :

$$\Pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$$

avec n_λ l'ordre de λ comme racine de Π_u .

Démonstration. Le polynôme minimal étant annulateur de u , on a vu que si α est valeur propre de u alors α est racine de Π .
Considérons maintenant α une racine de Π , On écrit alors : $\Pi = (X - \alpha)Q$ On a donc :

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= (u - \alpha Id) \circ Q(u) \\ &= 0 \text{ car } \Pi \text{ est polynôme annulateur} \end{aligned}$$

Or $Q(u) \neq 0$, car son degré est strictement inférieur à celui du polynôme minimal Π . Donc $u - \alpha Id$ n'est pas inversible. Donc α est valeur propre.

Ainsi les racines de Π sont précisément les valeurs propres. ■



Le polynôme caractéristique d'une matrice s'écrit donc sur \mathbb{C} sous la forme :

$$\chi_A = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda} \text{ l'ordre dans le polynôme caractéristique}$$

tandis que son polynôme minimal s'écrit :

$$\Pi_A = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)^{n_\lambda} \text{ l'ordre dans le polynôme minimal}$$

Attention les ordres ne sont pas égaux. Par exemple pour l'identité : $\chi = (X - 1)^n$ tandis que $\Pi = X - 1$.

Le théorème de Cayley-Hamilton prouve que χ_A annule A et donc que Π_A divise χ_A et donc que $n_\lambda \leq m_\lambda$ pour tout les $\lambda \in Sp(A)$.

★ Application à la diagonalisation

On se place dans un espace E de dimension finie.

Proposition .26 L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé sur \mathbb{K} et à racines simples.

Démonstration. Supposons u diagonalisable. On note $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ avec $(\lambda_i)_{i \in [1, p]}$ les valeurs propres distinctes.

Le polynôme minimal Π a pour racines $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ il est donc divisible par $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$. Montrons qu'en fait le polynôme minimal est ce polynôme.

Comme u est diagonalisable, on sait que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \lambda_i Id) = \bigoplus_{i=1}^p \ker((X - \lambda_i)(u))$$

Avec le lemme des noyaux, cela donne :

$$E = \ker \left(\left(\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i) \right) (u) \right)$$


et donc $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ est annulateur de u . Donc Π divise $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$

Or il est aussi divisible par ce polynôme et ils sont tous les deux unitaires par suite : $\Pi = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ donc Π est scindé à racines simples.

Supposons maintenant Π scindé à racines simples. Ces racines sont alors les valeurs propres et elles sont simples donc nécessairement $\Pi = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ et donc $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ annule u . et donc

$$\begin{aligned} E &= \ker \left(\left(\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i) \right) (u) \right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \lambda_i Id) && \text{lemme des noyaux} \\ &= \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) \end{aligned}$$

ce qui implique que u est diagonalisable. ■

 On retrouve les résultats au programme : u est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme scindé à racines simples si et seulement si il annule $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$.

★ **Application à la trigonalisation**

Proposition .27 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur \mathbb{K} .
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est donc trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur \mathbb{K} .

Démonstration. Si u est trigonalisable, alors il existe une base \mathcal{B} dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Les valeurs propres se lisent alors sur la diagonale.

On peut donc en déduire que $\chi_u = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i u)$ où λ_i est le i -ème coefficient diagonal. Donc χ_u est scindé sur \mathbb{K} .

Supposons maintenant que χ_u est scindé sur \mathbb{K} . On écrit :

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_p)^{m_p}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les p valeurs propres disjointes, et les (m_i) les ordres algébriques.

Comme les polynômes $(X - \lambda_1)^{m_1}, \dots, (X - \lambda_p)^{m_p}$ sont premiers entre eux, et que le théorème de Cayley-Hamilton assure que $\chi_u(u) = 0$, on peut écrire :

$$E = \ker(\chi_u(u)) = \ker((u - \lambda_1 Id)^{m_1}) \oplus \dots \oplus \ker((u - \lambda_p Id)^{m_p})$$

On note alors $F_i = \ker((u - \lambda_i Id)^{m_i})$, on a alors F_i est stable par u et $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Déjà en prenant une base \mathcal{B} adaptée à cette décomposition, on obtient que la matrice de u dans cette base est diagonale par blocs.

Prenons maintenant $i = 1$, on note \tilde{u} l'endomorphisme induit par u sur F_1 et regardons comment construire une base de $F_1 = \ker((u - \lambda_1 Id)^{m_1})$ tel que la matrice de \tilde{u} dans cette base soit triangulaire supérieure. Cela provient de l'étude des endomorphismes nilpotents.

On note $g = \tilde{u} - \lambda_1 Id$, on a donc $g^{m_1} = 0$ ie g nilpotent. On sait alors qu'il existe $k \in \llbracket 1, m_1 \rrbracket$, tel que $g^k = 0$ et $g^{k-1} \neq 0$, c'est l'indice de nilpotence.

On considère alors $x \in F_1$ tel que $g^{k-1}(x) = 0$. Un exercice classique consiste alors à montrer que :

$$(x, g(x), \dots, g^{k-1}(x)) \text{ est libre.}$$

Pour cela, on regarde l'équation :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 g(x) + \dots + \alpha_{k-1} g^{k-1}(x) = 0$$

On compose par g^{k-1} pour obtenir $\alpha_0 g^{k-1}(x) = 0$, donc $\alpha_0 = 0$. On remplace et on compose par g^{k-2} pour obtenir $\alpha_1 g^{k-1}(x) = 0$, donc $\alpha_1 = 0$. On recommence ainsi, jusqu'à montrer que tous les (α_i) sont nuls.

On a donc le début d'une base, on complète pour obtenir une base de F_1 :

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n_1-k}, x, g(x), \dots, g^{k-1}(x)) \text{ en notant } n_1 = \dim(F_1).$$

★ **Démonstration 1 du théorème de Cayley-Hamilton**

Il existe plusieurs démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton, on en présent ici une qui a l'intérêt d'utiliser des arguments de densité, l'autre fait appel aux matrices compagnon.

Cas où A est diagonale

On commence par le cas où A est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$$

Il y a plusieurs manières de voir pourquoi $\chi_A(A) = 0$:

- soit par un calcul direct, par exemple en taille 3 :

$$\chi_A(A) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ & \lambda_3 - \lambda_1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & & \\ & 0 & \\ & & \lambda_3 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & & \\ & \lambda_2 - \lambda_3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne la matrice nulle par calcul direct.

- En considérant l'endomorphisme u canoniquement associé et la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. on a $u(e_1) = \lambda_1 e_1$, donc $(u - \lambda_1)(e_1) = 0$, ce qui s'écrit : $(X - \lambda_1 Id)(u)(e_1) = 0$, et donc :

$$(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)(u)(e_1) = (u - \lambda_2 Id) \circ \dots \circ (u - \lambda_n Id)(u(e_1) - \lambda_1 e_1) = 0.$$

donc $\chi_u(u)(e_1) = 0$. on procède de même pour montrer que $\chi_u(u)(e_2) = 0$. On obtient que $\chi_u(u)$ est nul sur tous les vecteurs de la base (e_1, e_2, \dots, e_n) , ainsi $\chi_u(u)$ est l'endomorphisme nul. Ainsi, $\chi_u(u) = 0$.

On voit donc que le théorème est vrai si A est diagonale.

Cas où A est diagonalisable

On suppose maintenant que A est diagonalisable. On écrit alors $A = PDP^{-1}$. On rappelle alors que : $\chi_A = \chi_D$ puisque deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Donc : $\chi_A(A) = \chi_D(A)$ mais on utilise : $A = PDP^{-1}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= \chi_D(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P D^k P^{-1} && \text{en notant } \chi_D = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \\ &= P \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k D^k \right) P^{-1} = P \underbrace{\chi_D(D)}_{=0} P^{-1} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\chi_A(A) = 0$. On voit donc que le théorème est vrai si A est diagonalisable.

Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

On va montrer que les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, autrement dit que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Pour cela, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on la trigonalise (on peut le faire dans \mathbb{C} puisque χ_A est toujours scindé). On écrit donc : $A = PUP^{-1}$, avec U triangulaire supérieure. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs de la diagonale de U qui sont donc les valeurs propres. Ces valeurs ne sont pas nécessairement distinctes. On considère ensuite :

$$A_p = P \left(U + \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \ddots \\ & & & n \end{pmatrix} \right) P^{-1}$$

On a clairement A_p est une suite de matrices convergeant vers la matrice A . De plus, les valeurs propres de A_p sont :

$$\left\{ \lambda_1 + \frac{1}{p}, \lambda_2 + \frac{2}{p}, \dots, \lambda_n + \frac{n}{p} \right\}$$

On voit que ces valeurs propres sont distinctes à partir d'un certain rang. En effet, si une valeur propre de A λ_i est égale à une autre valeur propre λ_j de A avec $i \neq j$, alors $\lambda_i + \frac{i}{p} \neq \lambda_j + \frac{j}{p}$. Il peut y avoir qu'un nombre fini de valeurs de p où on aurait des relations du type $\lambda_i + \frac{i}{p} = \lambda_j + \frac{j}{p}$ avec $i \neq j$. (Ce point technique est démontré plus loin).

Donc A_p est alors diagonalisable (puisqu'elle a n valeurs propres distinctes). On a bien construit une suite de matrices (A_p) toutes diagonalisables, qui convergent vers A .

Montrons que les valeurs propres de A_p sont distinctes à partir d'un certain rang. Pour cela, on considère ε le plus petit écart entre deux valeurs propres distinctes de A :

$$\varepsilon = \min \left\{ |\lambda_i - \lambda_j| \mid i \neq j \text{ et } \lambda_i \neq \lambda_j \right\}$$

Si les valeurs propres sont toutes identiques, il n'y a rien à faire les valeurs propres de A_p déjà sont toutes distinctes comme vu plus haut. On considère donc que $\varepsilon > 0$.

On note maintenant P tel que : $\frac{2n}{P} < \varepsilon$, et considérons $p \geq P$. Supposons par l'absurde qu'il existe $i \neq j$ tel que :

$$\lambda_i + \frac{i}{p} = \lambda_j + \frac{j}{p}$$

on a alors $\lambda_i \neq \lambda_j$ et :

$$|\lambda_i - \lambda_j| = \frac{|i-j|}{p} \leq \frac{i+j}{P} \leq \frac{2n}{P} < \varepsilon$$

ce qui est une contradiction avec la définition du minimum.

Cas général

Soit donc maintenant A une matrice quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on va utiliser un argument de densité.

On sait qu'il existe une suite de matrice notée (A_p) diagonalisable qui converge vers A .

On note alors :

$$\chi_{A_p} = \alpha_n^p X^n + \dots + \alpha_1^p X + \alpha_0^p$$

Ainsi, α_i^p est le coefficient de degré i dans le polynôme χ_{A_p} . On a donc n suites de coefficients $(\alpha_0^p)_{p \in \mathbb{N}}$, $(\alpha_1^p)_{p \in \mathbb{N}}$, ..., $(\alpha_n^p)_{p \in \mathbb{N}}$.

On note aussi :

$$\chi_A = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $p \in \mathbb{N}$, le coefficient α_i^p est obtenu par somme et produits des coefficients de la matrice A_p . On peut donc dire que la valeur α_i^p est une fonction continue des coefficients de la matrice A_p . Or la matrice A_p converge vers A , on en déduit que : $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_i^p = a_i$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\chi_{A_p}(A_p) = \alpha_n^p A_p^n + \dots + \alpha_1^p A_p + \alpha_0^p I_n$$

donc puisque $\lim_{p \rightarrow \infty} A_p = A$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_i^p = a_i$, on obtient par somme et produit :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \chi_{A_p}(A_p) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I_n = \chi_A(A)$$

or pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\chi_{A_p}(A_p) = 0$ puisque A_p est diagonalisable. On en déduit que $\chi_A(A) = 0$.

★ Démonstration 2 du théorème de Cayley-Hamilton

Considérons u un endomorphisme et χ_u son polynôme caractéristique. On va montrer que $\chi_u(u)(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Si $x = 0$, c'est évident, on considère donc $x \neq 0$.

On a alors l'existence d'un $p \leq n$, tel que :

$$(x, u(x), \dots, u^p(x)) \text{ est liée}$$

$$\mathcal{F} = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)) \text{ est libre}$$

on note alors : (a_0, \dots, a_{p-1}) les coefficients tels que :

$$u^p(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{p-1} u^{p-1}(x)$$

et on note P le polynôme : $P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_1X - a_0$. Notons que $P(u)(x) = 0$.

On complète alors la famille $\mathcal{F} = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ qui est libre en une base noté \mathcal{B} . Notons aussi que l'espace vectoriel engendré par la famille \mathcal{F} est stable par u .

La matrice de u dans cette base a donc la forme suivante :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

un calcul simple montre que C est la matrice carrée de taille p compagnon du polynôme P :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & & a_1 \\ & 1 & \ddots & & & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & a_{p-2} \\ & & & & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

On a alors χ_u peut se calculer comme le polynôme caractéristique de la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(u)$. On a donc : $\chi_u = \chi_C \chi_A$. Ainsi, $\chi_u(u) = \chi_A(u) \circ \chi_C(u)$ et donc en appliquant à x :

$$\begin{aligned} \chi_u(u)(x) &= \chi_A(u)(\chi_C(u)(x)) \\ &= \chi_A(u)(P(u)(x)) && \text{car } \chi_C = P \text{ puisque c'est la matrice compagnon} \\ &= \chi_A(u)(0) && \text{car } P(u)(x) = 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\chi_u(u)(x) = 0$. Or x est quelconque, donc $\chi_u(u)$ est l'endomorphisme nul, ie $\chi_u(u) = 0$.

On a donc bien montré le théorème de Cayley-Hamilton.

Quelques compléments sur la réduction

Cette fiche propose quelques compléments sur la réduction qui ne sont pas explicitement au programme sans en être très loin.

★ Réduction et transposée

Proposition .28 Pour une matrice A , le spectre de A est le spectre de la transposée de A .

Le polynôme caractéristique de A est le polynôme caractéristique de sa transposée. En particulier, A et sa transposée ont le même spectre et pour toute valeur propre λ la multiplicité algébrique de λ comme valeur propre de A est égale à la multiplicité algébrique de λ comme valeur propre de A^T .

Pour toute valeur propre λ , la dimension du sous-espace propre de λ comme valeur propre de A est égale à la dimension du sous-espace propre de λ comme valeur propre de A^T . Autrement dit, on a égalité des ordres géométriques.

Démonstration. Le scalaire λ est valeur propre de la matrice A si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas de rang n .

Or le rang d'une matrice est le rang de sa transposée. En conséquence :

$$\text{Rg}(A - \lambda I_n) = \text{Rg}\left((A - \lambda I_n)^T\right) = \text{Rg}(A^T - \lambda I_n)$$

et donc λ est valeur propre de A si et seulement si λ est valeur propre de A^T .

En particulier avec le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(E_\lambda(A)) &= n - \text{Rg}(A - \lambda I_n) \\ &= n - \text{Rg}(A^T - \lambda I_n) = \dim(E_\lambda(A^T)) \end{aligned}$$

et donc les ordres géométriques de λ comme valeurs propres de A et de A^T sont les mêmes.

R Les sous-espaces propres ne sont pas identiques, seules leurs dimensions sont égales.

Pour l'égalité des polynôme caractéristique c'est le même principe : le déterminant de la matrice $\lambda I_n - A$ est égal à celui de sa transposée qui est $\lambda I_n - A^T$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - A^T) = \chi_{A^T}(\lambda)$$

On retrouve que A et A^T ont même valeurs propres, de plus l'ordre algébrique est le même. ■

Pour la réduction on a :

Corollaire .29 La matrice A est diagonalisable si et seulement si sa transposée est diagonalisable.

La matrice A est trigonalisable si et seulement si sa transposée est trigonalisable.

Démonstration. La matrice A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et les ordres algébriques et géométriques sont égaux pour toutes les valeurs propres.

Comme A et A^T ont même valeurs propres, même ordre algébrique et même ordre géométrique (pour chacune des valeurs propres), l'équivalence est donc claire.

La matrice A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Or ce polynôme caractéristique est le même que celui de sa transposée, l'équivalence est donc évidente. ■

On a aussi la propriété suivante pour les polynômes annulateurs :

Proposition .30 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, alors P annule A si et seulement si P annule A^T .

Démonstration. Pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ quelconque, on a :

$$P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k$$

donc :

$$\begin{aligned} P(A^T) &= \sum_{k=0}^n a_k (A^T)^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (A^k)^T \\ &= \left(\sum_{k=0}^n a_k A^k \right)^T = (P(A))^T \end{aligned}$$

D'où $P(A) = 0 \iff P(A^T) = 0$. ■

On retrouve en particulier A diagonalisable si et seulement si sa transposée est diagonalisable en utilisant la caractérisation : « annule un polynôme scindé à racine simple ».

★ Réduction et matrice semblable

Proposition .31 Soit A et B semblables, alors :

- elles ont le même rang,
- elles ont la même trace, le même déterminant,
- elles ont le même polynôme caractéristique, donc le même spectre et pour chaque valeur propre λ le même ordre algébrique,
- Pour chaque valeur propre, l'ordre géométrique est le même.

On a aussi A diagonalisable si et seulement si B l'est et dans ce cas, elles se réduisent à la même matrice diagonale (à l'ordre près des éléments diagonaux).

Démonstration. On écrit $A = PBP^{-1}$.

Comme multiplier à gauche et à droite par des matrices inversibles ne change pas le rang, on a $rg(A) = rg(B)$.

On a :

$$tr(A) = Tr(P(BP^{-1})) = Tr(BP^{-1}P) = Tr(B)$$

la même démonstration est valable pour le déterminant.

On a pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$A - \lambda I_n = PBP^{-1} - \lambda I_n = P(B - \lambda I_n)P^{-1}$$

donc $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont semblables. En particulier :

$$\det(A - \lambda I_n) = \det(B - \lambda I_n) \text{ et donc } \chi_A = \chi_B$$

ce qui montre que A et B ont même spectre et que pour chaque valeur propre l'ordre algébrique est le même.

Mais aussi :

$$rg(A - \lambda I_n) = rg(B - \lambda I_n)$$

donc avec le théorème du rang :

$$\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda(B))$$

et donc les ordres géométriques de λ comme valeur propre de A et de B sont les mêmes.

Le dernier point est juste une conséquence de la transitivité de la relation d'équivalence « être semblable ». Si A est semblable à une matrice diagonale, alors B l'est aussi. De plus, la matrice diagonale est déterminé par le polynôme caractéristique. ■

R Autrement dit deux matrices diagonales sont semblables si et seulement si elles sont égales à l'ordre près des colonnes.

Pour montrer que deux matrices sont semblables, la seule technique explicitement au programme est :

Proposition .32 Soit A et B deux matrices.

On suppose que A est diagonalisable, alors A et B sont semblables si et seulement si B est aussi diagonalisable et se réduit à la même matrice diagonale.

Démonstration. On a déjà fait l'implication si A et B sont semblable alors B l'est aussi et se réduit à la même matrice diagonale. La réciproque est évidente. ■

C'est le seul résultat que l'on déduit directement du programme, mais il faut avoir en tête que la réduction permet de simplifier les matrices et donc de montrer qu'elles sont semblables. La réduction permet de construire le changement de base explicitement.

Exercice 1 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Correction :

On peut écrire :

$$B = I_4 + N \quad \text{et} \quad A = I_4 + 2N + 3N^2 + 4N^3 = I_4 + C$$

où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^3 \neq 0$ et $N^4 = 0$.

En notant $C = 2N + 3N^2 + 4N^3$, on constate que $C^3 \neq 0$ et $C^4 = 0$.

Les matrices C et N sont donc nilpotentes toutes les deux d'ordre 4. On va voir que cela permet de montrer qu'elles sont semblables.

On note u endomorphisme associé C et en choisissant x un vecteur tel que $u^3(x) \neq 0$. on constate que $(u^3(x), u^2(x), u(x), x)$ est une base de \mathbb{R}^4 .

Pour cela, on montre que cette famille est libre en considérant l'équation :

$$\alpha x + \beta u(x) + \gamma u^2(x) + \delta u^3(x) = 0$$

On compose par u^3 , pour avoir $\alpha = 0$, puis par u^2 pour avoir $\beta = 0$, puis par u pour avoir $\gamma = 0$ avant d'obtenir que $\delta = 0$.

Ainsi, $(u^3(x), u^2(x), u(x), x)$ est une base de \mathbb{R}^4 .

On constate que la matrice de u dans cette base est N . Ainsi, N est semblable à C , et donc il existe $P \in GL_4(\mathbb{R})$, telle que $N = P^{-1}CP$. Ainsi :

$$P^{-1}AP = P^{-1}(I_4 + C)P = I_4 + P^{-1}CP = I_4 + N = B.$$

★ Sous-espace propre et endomorphismes qui commutent

On rappelle les deux résultats suivants du cours :

Proposition .33 Soit u et v deux endomorphismes qui commutent.

Soit λ une valeur propre de u et $E_\lambda(u)$ espace propre associé à λ .

On a alors $E_\lambda(u)$ est stable par v .

Autrement dit : si deux endomorphismes commutent, alors **les sous-espace propres de l'un sont stables par l'autre.**

Ce résultat est particulièrement utile si l'un des endomorphismes est diagonalisable.

Supposons u diagonalisable alors l'espace E se décompose comme une somme directe de sous-espace propre :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) \quad \text{avec} \quad Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \text{ distinctes.}$$

Puisque u et v commutent, chacun des sous-espaces propres de u sont stables $E_{\lambda_i}(u)$ par v , donc la matrice de v peut être rendue diagonale par bloc.

Plus précisément, si on considère une base \mathcal{B} de E constitué de vecteur propres de u . On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et on suppose que les e_i sont classés par la valeur propre associée (les premiers sont vecteurs propres de λ_1 , les suivants de λ_2 , etc.), ce qui est naturel. Si bien que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale avec les valeurs propres rangées dans la diagonale :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

Alors dans la base \mathcal{B} la matrice de v est diagonale par blocs et la taille des blocs est celle des sous-espaces propres :

$$Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & M_p \end{pmatrix} \text{ où } M_i \text{ est un bloc de taille } m_{\lambda_i} \text{ l'ordre de la valeur propre } \lambda_i$$

Le même résultat est bien sûr valable pour les matrices.

■ **Exemple .8** On suppose que la matrice A est diagonalisable et s'écrit $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & & & & \\ & \alpha & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \beta & \\ & & & & \beta \\ & & & & & \gamma \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ distincts.}$$

A a donc 3 valeurs propres distinctes, α de multiplicité 3, β de multiplicité 2 et γ de multiplicité 1.

Soit B qui commute avec A . On a alors $B = P^{-1}\Delta P$ avec Δ qui est diagonale par bloc :

$$\Delta = \begin{pmatrix} * & * & * & & & \\ * & * & * & & & \\ * & * & * & & & \\ & & & * & * & \\ & & & * & * & \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

■

Il faut bien noter que c'est la même matrice inversible P (ie la même base) qui réduit les deux matrices.

On utilise souvent le résultat suivant en complément :

Proposition .34 La droite $D = \text{Vect}(x)$ de E est stable par l'endomorphisme u si et seulement si le vecteur x est vecteur propre de u .

En effet, dans le cas où le sous-espace propre $E_{\lambda}(u)$ de u est de dimension 1 (c'est une droite vectorielle), et que u et v commutent, alors $E_{\lambda}(u)$ est stable par v et donc le vecteur qui engendre cette espace propre est vecteur propre de v (pour une valeur propre qui peut être différente).

Sur l'exemple, c'est le cas du dernier vecteur de la base.

Cela permet par exemple de démontrer le résultat suivant (qui est un exercice classique) :

Proposition .35 Soit u et v deux endomorphismes qui commutent. On suppose que les sous-espaces propres de u sont tous de dimension 1. Alors il existe une base qui diagonalise u et v .

Démonstration. L'endomorphisme u est diagonalisable car tous les sous-espaces propres sont de dimension 1 (autant de valeurs propres que la dimension). Donc les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont des droites on note donc $E_{\lambda_i}(u) = \text{Vect}(e_i)$ (pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$). La base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ diagonalise u .

Mais $E_{\lambda_i}(u)$ est une droite stable par v donc e_i est aussi vecteur propre de v (pour une valeur propre qui peut être différente). Ainsi, la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ diagonalise aussi v . ■

Plus difficile mais dans la même idée, on peut combiner ce résultat avec la proposition :

Proposition .36 L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Cela permet par exemple de faire l'exercice suivant :

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisables tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que f et g sont diagonalisables dans une même base.
2. Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable dans cette base.

1. On décompose E comme la somme des sous-espaces propres de f :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f) \text{ où } Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \text{ valeurs propres distinctes.}$$

On construit ensuite une base \mathcal{B} de E constituée de vecteur propre de f :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix} \text{ où } m_i \text{ est l'ordre de } \lambda_i \text{ comme valeur propre de } f$$

On sait déjà que chacun des E_{λ_i} est stable par f , donc que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ va être diagonale par blocs :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_p \end{pmatrix} \text{ où } M_i \text{ bloc de taille } m_i$$

En fait, M_i est la matrice de l'endomorphisme induit par g sur l'espaces $E_{\lambda_i}(f)$ qui est stable par g .

Mais dans notre cas, on sait aussi que g est diagonalisable. Donc l'endomorphisme induit de g par restriction sur chacun des espaces $E_{\lambda_i}(f)$ est diagonalisable.

Autrement dit chacune des matrices M_i est diagonalisable. Donc dans chaque espace $E_{\lambda_i}(f)$ on peut construire une base constituée de vecteurs propres de g .

On construit alors une base de E ainsi :

- On prend une base de $E_{\lambda_1}(f)$ constituée de vecteurs propres de g . Ces vecteurs sont aussi des vecteurs propres de f associés à λ_1 . Par contre, on ne connaît pas la valeur propre associée pour g .
- On complète avec une base de $E_{\lambda_2}(f)$,
- on procède de même pour $E_{\lambda_3}(f) \dots E_{\lambda_p}(f)$.

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$ On a ainsi construit une base de E constituée de vecteurs propres de f et de g . Dans cette base, la matrice de f et la matrice de g sont diagonales. Notons que dans la matrice de f les valeurs propres sont « rangées » : λ_1 est écrite m_1 fois, puis λ_2 etc. par contre dans la matrice de g elles sont dans un ordre quelconque.

2. Dans cette base la matrice de $f \circ g$ est le produit des matrices de f et g donc produit de matrices diagonales donc diagonale.

★ Polynôme annulateur

Soit u un endomorphisme. Connaître un polynôme P annulateur de u est utile pour :

- connaître les valeurs propres : les valeurs propres de u sont racines de P , mais il peut y avoir d'autres racines de P qui ne sont pas valeur propre de u ;

- savoir si u est diagonalisable. Si P est scindé à racine simple, alors u est diagonalisable. Sinon, il suffit d'extraire les valeurs propres de u des racines de P , notées $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ (distinctes) et de regarder si u annule $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$,
- Calculer l'inverse de u : si P a un terme constant non nul, on ré-écrit $P(u) = 0$ sous la forme $u \circ Q(u) = Id$, où u est un polynôme l'inverse de u est alors $Q(u)$.
- Calculer u^n : si $\deg(P) = n$, alors u^n s'exprime en fonction de $(Id, u, u^2, \dots, u^{n-1})$. On montre ensuite que u^{n+1} s'exprime aussi en fonction de la même famille. On montre alors par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_0^k, \dots, \alpha_{n-1}^k) \in \mathbb{K}^n, u^k = \alpha_0^k Id + \alpha_1^k u + \alpha_2^k u^2 + \dots + \alpha_{n-1}^k u^{n-1}$$

Les suites $(\alpha_0^k, \dots, \alpha_{n-1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont k suites récurrentes linéaires (couplées), on peut alors trouver leurs expressions. La proposition suivante est un exercice classique :

Proposition .37 Soit A une matrice inversible, alors A^{-1} est un polynôme en A .

Démonstration. On utilise Cayley-Hamilton : on écrit $\chi_A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n$ et comme on sait que A est inversible, 0 n'est pas valeur propre donc $a_0 \neq 0$. On utilise alors la technique classique de calcul d'inverse par polynôme annulateur :

$$-A^n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^k = a_0 I_n$$

et donc :

$$A \left(\frac{1}{a_0} \left(-A^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1} \right) \right) = I_n$$

D'où l'expression de l'inverse de A comme un polynôme en A :

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0} \left(-A^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1} \right)$$

★ Calcul de valeurs et de vecteurs propres

Étant donné une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ d'une matrice A , il y a deux techniques pour déterminer des vecteurs propres :

- Chercher des vecteurs dans le noyau de $(A - \lambda I_n)$. La plupart du temps, on passe par chercher des relations sur les colonnes de $(A - \lambda I_n)$.
- On peut aussi résoudre le système $AX = \lambda X$ sans le ramener à un système homogène.

Mathématiquement, c'est bien sûr équivalent, mais au niveau des calculs (si $\lambda \neq 0$), la deuxième technique est plus intéressante si A est de rang faible. En effet, $AX = \lambda X$ (avec $\neq 0$) implique que $X = A \left(\frac{1}{\lambda} X \right) \in \text{Im}(A)$. Si $\text{Im}(A)$ est de dimension petite, alors cette équation va être relativement facile à calculer.

■ **Exemple .9** L'exemple le plus simple est si A est de rang 1, dans ce cas, on écrit : $\text{Im}(A) = \text{Vect}(x)$ et si il y a une valeur propre non nulle, alors nécessairement, x est vecteur propre. On peut aussi voir cela, en écrivant : $A = CL$, où C est un vecteur colonne (c'est le vecteur qui engendre toutes les colonnes), et L est une ligne. Si $AX = \lambda X$ avec X non nul c'est nécessairement que X est proportionnel à C (et donc que $\lambda = LC = \text{Tr}(A)$). ■

Cela sert aussi parfois pour des matrices de rang 2.

Pour trouver les valeurs propres, on peut utiliser le résultat suivant :

Proposition .38 Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé, alors pour tout polynôme P , $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$ et un vecteur propre associé est X .

On peut donc écrire en notant : $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$

$$Sp(P(A)) \supset \{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p)\}$$

Dans le cas général, il peut y avoir d'autres valeurs propres pour $P(A)$.

Si maintenant A est trigonalisable (ie χ_A est scindé), en particulier si \mathbb{K} est le corps des complexes. Alors

$$Sp(P(A)) = \{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p)\}$$

En particulier, pour $k \in \mathbb{N}^*$

- dans le cas général :

$$Sp(A^k) \supset \{\lambda_1^k, \dots, \lambda_p^k\}$$

- dans le cas où A est trigonalisable (en particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :

$$Sp(A^k) = \{\lambda_1^k, \dots, \lambda_p^k\}$$

Ce résultat s'écrit de la même manière pour un endomorphisme.

R Prenons une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi_A = X^2 + 1 \quad Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset \quad Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$$

alors son spectre réel est vide mais

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \chi_A = (X + 1)^2 \quad Sp_{\mathbb{R}}(A) = Sp_{\mathbb{C}}(A) = -1$$

Démonstration. On considère une valeur propre λ et X non nul tel que $AX = \lambda X$

Alors on sait que $P(A)X = P(\lambda)X$, donc $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$ associée à X .

Supposons maintenant que A soit trigonalisable, on écrit alors : $A = QUQ^{-1}$ avec Q inversible. On sait alors que :

$$P(A) = QP(U)Q^{-1}$$

mais comme U est triangulaire supérieure, on sait calculer les valeurs sur la diagonale à la puissance n :

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et donc } \forall k \in \mathbb{N}, U^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & * & * \\ & \lambda_2^k & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$\text{par combinaison linéaire : } P(U) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & * & * & * \\ & P(\lambda_2) & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

donc les valeurs propres de $P(A)$ sont $\{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p)\}$ ■

R Ici encore la situation est plus simple dans \mathbb{C} : la matrice a n valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité algébrique), elle est trigonalisable et les valeurs propres de A^k sont celles de A mise à la puissance k . On travaille ainsi souvent dans \mathbb{C} même pour une matrice à coefficients réels.

Corollaire 39 Si on note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ les valeurs propres complexes d'une matrice ou d'un endomorphisme (non nécessairement distinctes). Alors, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, tr(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$$

Exercice 3 Déterminer les éléments propres de la matrice carrée d'ordre $n \geq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication : calculer A^2 .

Correction : La matrice A est de rang 2, on a donc 0 qui est valeur propre d'ordre géométrique $n - 2$, et donc en utilisant la trace :

$$\chi_A = X^{n-2} (X^2 - 2X + \beta)$$

On note $Sp(A) = \{0, \lambda, \mu\}$ le spectre dans \mathbb{C} (non nécessairement distinctes).

On calcule donc A^2 comme suggéré par l'énoncé :

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & 2 & \dots & 2 & n \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & 2 & & 2 & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & n \end{pmatrix}$$

La matrice A^2 est alors aussi de rang 2, donc 0 est valeur propre de A^2 d'ordre géométrique $n - 2$ d'autre part, on sait que λ^2 et μ^2 sont aussi valeurs propres. Dans \mathbb{C} , il n'y a pas d'autres valeurs propres. Ainsi, $Sp(A^2) = \{0, \lambda^2, \mu^2\}$.

On peut alors utiliser la trace :

$$Tr(A) = \lambda + \mu = 2$$

$$Tr(A^2) = \lambda^2 + \mu^2 = 4n - 4$$

On cherche alors λ et μ :

$$4 = (\lambda + \mu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu = 4n - 4 + 2\lambda\mu$$

Si bien que : $\lambda\mu = 4 - 2n$. Les valeurs (λ, μ) sont donc solutions du problème :

$$\begin{cases} \lambda\mu = 4 - 2n \\ \lambda + \mu = 2 \end{cases} \quad \text{ce qui donne } \{\lambda, \mu\} = \{1 + \sqrt{2n-3}, 1 - \sqrt{2n-3}\}$$

On a donc trouvé toutes les valeurs propres :

$$Sp(A) = \{0, 1 + \sqrt{2n-3}, 1 - \sqrt{2n-3}\}$$

Comme $1 + \sqrt{2n-3} \neq 0$, la matrice A est diagonalisable.

La valeur propre 0 est d'ordre (algébrique et géométrique) $n - 2$, $\lambda = 1 + \sqrt{2n-3}$ est d'ordre 1 et $\mu = 1 - \sqrt{2n-3}$ est d'ordre 1.

Il reste à trouver les vecteurs propres.

Pour 0, on a des relations sur les colonnes :

$$C_1 - C_n = 0$$

$$C_2 - C_3 = 0$$

\vdots

$$C_2 - C_{n-1} = 0$$

et donc :

$$E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Pour λ et μ , comme A est de rang faible, on va plutôt chercher à résoudre $AX = \lambda X$ sans le passer sous forme d'un système homogène.

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = \lambda x_1 \\ x_1 + x_n = \lambda x_2 \\ x_1 + x_n = \lambda x_3 \\ \dots \\ x_1 + x_n = \lambda x_{n-1} \\ \sum_{i=1}^n x_i = \lambda x_n \end{cases}$$

On considère maintenant X solution et on obtient alors :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i \\ x_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i = x_1 \\ x_2 = \frac{2}{\lambda} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{2}{\lambda} x_1 \end{cases}$$

On obtient donc la forme de X :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{2}{\lambda} x_1 \\ \dots \\ \frac{2}{\lambda} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{2}{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$E_\lambda(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{2}{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Le même calcul est vrai pour μ .

On voit ici que le calcul est plus simple que de chercher le noyau de $A - \lambda I_n$, même si c'est mathématiquement équivalent.

En effet, la relation :

$$C_1 + \frac{2}{\lambda} C_2 + \dots + \frac{2}{\lambda} C_{n-1} + C_n = 0$$

n'est pas facile à trouver. En fait, une bonne méthode consiste à voir que :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

donc un vecteur propre pour une valeur propre non nulle s'écrit nécessairement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

on doit donc juste calculer α et β . Ce que l'on a retrouvé ici.

Déterminants

★ **Calcul simple de déterminants**

Exercice 1 Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & -c & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Correction : Pour le premier : $l_1 \leftarrow l_1 - l_2$ et $l_3 \leftarrow l_3 - l_4$, puis dvlp C4. Cela donne $D = -acb(a+b+c)$.

Pour le deuxième : $D = (a+b)[(a-b)a+c(b-c)]$. Ce qui s'écrit aussi : $D = (a-c)(a+b)(a-b+c)$

Pour le dernier (avec Sarus directement) :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3(abc)^3$$

Exercice 2 Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a & e & f & a \\ b & d & d & c \\ c & d & d & b \\ a & f & e & a \end{vmatrix}$$

Correction : $l_3 \leftarrow l_3 - l_2$ et $l_4 \leftarrow l_4 - l_1$.

$$(c-b)(f-e) \begin{vmatrix} a & e & f & a \\ b & d & d & c \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

puis $c_2 \leftarrow c_2 + c_3$ et $c_1 \leftarrow c_1 + c_4$:

$$(c-b)(f-e) \begin{vmatrix} 2a & e+f & f & a \\ b-c & 2d & d & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

triangulaire supérieure par bloc d'où :

$$(c-b)(f-e)(4ad - (b-c)(e+f))(-1)$$

★ **Calcul de déterminant de taille n**

Méthode : ne pas hésiter à travailler d'abord sur une matrice de petite taille (3 ou 4) pour trouver la méthode.

Exercice 3 Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

(les termes vides sont nuls)

Correction :

Pour le premier $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_i \leftarrow C_i - C_1$ puis mat triangulaire d'où $D_n = (-1)^{n-1} n!$.

Pour le deuxième : facto dernière colonne par a_n puis :

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, C_j \leftarrow C_j - a_j C_n$$

dvlpt ligne 1. Au final :

$$D_n = a_n(a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}).$$

Pour le troisième : $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - \dots - C_n$ puis dvlpt C_1 au final $D_n = -n + 2$

Exercice 4 Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & \ddots & b & b \\ \vdots & b & b & \ddots & b \\ b & \dots & b & b & a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a & \dots & \dots & a \\ b & a & a & \dots & a \\ b & b & \ddots & a & a \\ \vdots & b & b & \ddots & a \\ b & \dots & b & b & a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a & \dots & \dots & a \\ 0 & a & a & \dots & a \\ 0 & 0 & \ddots & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a & b & \dots & b \\ 0 & 0 & \ddots & b & b \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & b \\ c & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Correction : Faire en taille 4 pour deviner la méthode.

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$$

On fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, cela donne :

$$(a+3b) \begin{pmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{pmatrix}$$

Puis $C_2 \leftarrow C_2 - bC_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - bC_1$, $C_4 \leftarrow C_4 - bC_1$, ce qui donne :

$$(a+3b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} = (a+3b)(a-b)^3$$

dans le cas général : $(a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$, avec la même technique.

Pour le deuxième, on fait $l_i \leftarrow l_i - l_1$ pour $i > 1$ puis dvlpt dernière colonne. On obtient $(-1)^{n+1} a(b-a)^{n-1}$.

Pour le troisième : dvlpt C_1 on a alors une matrice triangulaire supérieure, et une matrice avec les deux premières lignes égales. D'où a^n .

Pour le dernier : dvlpt C_1 on obtient une partie triang sup : a^n et une parti où il faut faire : $l_i \leftarrow l_i - l_1$ pour $i > 1$ puis dvlpt C_n . Au final : $a^n - bc(a-b)^{n-2}$.

Exercice 5 Soit k et n deux entiers avec $n \geq 1$ et $0 < k < n$, a et b deux réels.

On considère l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto aP + bP(1)X^k \end{cases}$$

Calculer $\det(f)$

À quelle condition sur a, b, k l'application f est-elle bijective ?

Correction : déjà il faut écrire la matrice de l'endomorphisme f dans une base quelconque.
 Dans la base canonique, c 'est : une diagonale de a , la k -ième ligne remplie de b , à l'intersection $a + b$.
 On trouve alors le déterminant, soit c 'est un déterminant traigulaire par bloc, soit dvlp Ck.
 D'où :

$$\det(f) = a^n(a + b)$$

L'application est alors bijective si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq -b$.

Exercice 6 Calculer à l'aide d'une relation de récurrence :

$$\begin{vmatrix} a+b & b & & & & & \\ a & a+b & b & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & 0 & a & a+b & b & \\ 0 & & & 0 & a & a+b & \end{vmatrix}$$

Correction : Dvlp C1 suivi d'un dvlp l1 donne :

$$D_n = (a + b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

On a donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

CAS 1 : Si $a \neq b$, on a :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = \alpha a^{n-1} + \beta b^{n-1}$$

On a $D_1 = a + b$ et $D_2 = (a + b)^2 - ab = a^2 + b^2 + ab$. Cela donne le système :

$$\alpha + \beta = a + b$$

$$\alpha a + \beta b = a^2 + b^2 + ab$$

En faisant $l_2 \leftarrow l_2 - al_1$, on a :

$$\beta(b - a) = b^2 \text{ donc } \beta = \frac{b^2}{b - a}$$

ensuite, on fait : $l_2 \leftarrow l_2 - bl_1$, ce qui donne :

$$\alpha(a - b) = a^2 \text{ donc } \alpha = \frac{a^2}{a - b}$$

Au final :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = \frac{1}{a - b} (a^{n+1} - b^{n+1})$$

CAS 2 : $a = b$, on a alors :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = (\alpha + \beta n) a^{n-1}$$

Avec $D_1 = 2a$ et $D_2 = 3a^2$. Cela s'écrit :

$$\alpha + \beta = 2a$$

$$\alpha a + 2\beta a = 3a^2$$

En faisant $l_2 \leftarrow l_2 - al_1$ on a $\beta a = a^2$ d'où $\beta = a$ et donc $\alpha = a$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = (1 + n) a^n$$

★ **Déterminants par blocs**

Exercice 7 Soient A, B, C et D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $CD = DC$ et D inversible.

On pose la matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ définie par blocs par : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$
2. En déduire $\det(M)$.

Correction :

1. Facilement : $\begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$
2. D'où $\det(M) = \det(AD - BC)$

Exercice 8

Cet exercice utilise le résultat de l'exercice précédent.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec d et c non nuls et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que la matrice $P \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par $P = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$ est le produit de deux matrices, la seconde étant diagonale par blocs.
2. En déduire le déterminant de P .

Correction :

1.

$$\begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

2. D'où :

$$\det(P) = \begin{vmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{vmatrix} (\det(M))^2$$

On peut ensuite au choix utiliser l'exercice précédent, où effectuer les opérations

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, l_{n+k} \leftarrow al_{n+k} - cl_k$$

et donc :

$$a^n \begin{vmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aI_n & bI_n \\ 0 & (da - bc)I_n \end{vmatrix} = a^n (da - bc)^n$$

d'où :

$$\det(P) = (\det(A))^n (\det(M))^2$$

★ **Vandermonde**

Exercice 9 Soit $n \geq 2$ et $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des complexes deux à deux distincts. On suppose $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n \lambda_j^k = 0$.

Montrer que l'un au moins des λ_j est nul.

Correction : Par l'absurde, on suppose tous les (λ_j) non nuls. La matrice de Vandermonde associée à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0)$ est alors inversible.

La relation donne alors $l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} - nl_1 = 0$. La matrice n'est donc pas inversible, contradiction. donc l'un des λ_j est nul.

Applications de la réduction à l'analyse

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

Dans cette fiche, on voit deux applications de la réduction :

- la résolution de systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants,
- les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

Applications aux équations différentielles linéaires

Généralités

Définition .10 Un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants est une équation de la forme :

$$(H) \quad X' = AX$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice.

Une application $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une solution de (H) sur \mathbb{R} si et seulement si X est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall t \in I, X'(t) = AX(t)$$

En identifiant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}^n , on peut dire que l'inconnue est une fonction à valeurs dans \mathbb{K}^n .

Généralement, on écrit le système sous la forme :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ la matrice du système}$$

et l'application :

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ est l'inconnue}$$

Méthode de résolution

Considérons le système différentiel $X' = AX$, où A est une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On doit alors connaître les cas particulier suivants :

- Si A est diagonale : $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors le système s'écrit :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x'_i = \alpha_i x_i$$

On a alors facilement, les solutions :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i : t \mapsto C_i e^{\alpha_i t} \quad \text{avec } C_i \in \mathbb{K}.$$

Dans ce cas, chaque équation se résout indépendamment.

- Si A n'est pas diagonale mais si A est diagonalisable, on effectue la réduction en écrivant : $A = PDP^{-1}$. On effectue le changement d'inconnue (en fait de coordonnées) : $Y = P^{-1}X$, ie $X = PY$.

Comme Y est une combinaison linéaire de X et réciproquement, on a X dérivable si et seulement si Y est dérivable.

De plus, $Y' = P^{-1}X'$. Et on a :

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff Y' = DY$$

On résout alors l'équation $Y' = DY$ (la matrice est diagonale), et on obtient les valeurs de X en posant $X = PY$. Dans ce cas, on se ramène à un système diagonal.

- Dans le cas d'une matrice trigonalisable mais non diagonalisable, on effectue la trigonalisation.

Conformément au programme, cela ne peut être fait que sur des matrices de petites tailles et aucun résultat général n'est à connaître.

On se ramène au cas d'un système différentiel homogène à coefficients constant avec une matrice triangulaire supérieure. Pour cela, on écrit :

$$AP = PU \quad \text{ie } A = PUP^{-1}$$

où U est triangulaire supérieure.

On effectue le changement de variable : $Y = P^{-1}X$, pour obtenir :

$$X' = AX \iff P^{-1}X' = UP^{-1}X \iff Y' = UY$$

Un tel système différentiel avec une matrice triangulaire supérieure se résout par « remontée » : la dernière équation est de la forme $y'_n = \alpha_n y_n$, puis on détermine y_{n-1} , etc.

Il faut avoir l'initiative du changement de variable pour se ramener à un système triangulaire.

Exemples

- **Exemple .10** On veut résoudre

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 3z \\ y' = 2y \\ z' = x \end{cases}$$

Il existe une méthode alternative : on trouve la valeur de y , puis on injecte cette valeur en écrivant : $x' = 2x + \lambda e^{2t} + 3z$ puis calculer z'' en fonction de z' , z et λ .

Il s'agit d'un système homogène à coefficient constant : $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On réduit la matrice A par un calcul du polynôme caractéristique, puis des valeurs propres.

Clairement, 2 est valeur propre. En cherchant un peu on voit aussi -1 . On trouve la dernière par la trace : c'est 3. Sinon on calcule χ_A en développant par rapport à la ligne 2.

La matrice A est donc diagonalisable car de taille 3 et a 3 valeurs propres distinctes.

On cherche les vecteurs propres :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

on voit donc que : $2C_1 - 3C_2 + C_3 = 0$, donc $((2, -3, 1))$ est base du sous-espace propre $E_2(A)$.

De même :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $(-1, 0, 1)$ est base du sous-espace propre $E_{-1}(A)$.

Enfin :

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $(3, 0, 1)$ est base de $E_3(A)$.

On obtient :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On considère ensuite X solution, on pose alors : $Y = P^{-1}X$, ie $X = PY$. Comme P ne dépend pas du temps, on a $X' = PY'$
On remplace dans le système :

$$X' = PY' \text{ et } X' = PDP^{-1}X = PDY$$

D'où en simplifiant par P (qui est inversible) : $Y' = DY$.

Ainsi, en notant : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, où (y_1, y_2, y_3) sont des fonctions, on a le système :

$$y_1' = -y_1$$

$$y_2' = 2y_2$$

$$y_3' = 3y_3$$

On voit donc que les trois équations se résolvent séparément. Cela donne l'existence de 3 réels (C_1, C_2, C_3) , tels que :

$$y_1 : t \mapsto C_1 e^{-t}$$

$$y_2 : t \mapsto C_2 e^{2t}$$

$$y_3 : t \mapsto C_3 e^{3t}$$

On calcule ensuite $X = PY$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, X(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix} \\ &= C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On écrit alors :

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect} \left(\left(t \mapsto e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \left(t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \left(t \mapsto e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

R Il faut s'habituer à résoudre ces systèmes rapidement : la base de \mathcal{S}_H est obtenue en mettant les valeurs propres « dans les exponentiels », « multipliées » par les colonnes de P .

■ **Exemple .11** On veut résoudre :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

Méthode alternative : on démontre que x est deux fois dérivable et on calcule x'' en fonction de x et x' .

C'est un système homogène à coefficients constants. $X' = AX$ avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

On réduit la matrice.

Comme on est en taille 2, on a directement $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$. Puisque $A \neq 2I_2$, on a que A n'est pas diagonalisable, mais est trigonalisable.

On sait que la matrice A est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & \square \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ où \square désigne un terme non nul.

Pour trouver le premier vecteur de la base qui trigonalise A , on regarde :

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'espace propre est $E_2(A) = \text{Vect}((1, 1))$. On prend donc $(1, 1)$ comme premier vecteur.

Ensuite, on peut prendre n'importe quel vecteur colinéaire pour avoir une base, par exemple $(1, 0)$. En calculant :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on constate que le \square sera égal à -1 .

Une autre idée est de chercher (a, b) , tel que :

$$(A - 2I_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c'est-à-dire de se débrouiller pour que le \square vaille 1). Cela donne :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on constate que $(0, 1)$ est une solution.

On obtient donc par exemple :

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose donc $Y = P^{-1}X$, et on a facilement $Y' = TY$.

En notant $Y = (a, b)$, on obtient :

$$\begin{cases} a' = 2a - b \\ b' = 2b \end{cases}$$

D'où il existe $C \in \mathbb{R}$, tel que : $b : t \mapsto Ce^{2t}$.

On injecte dans la première équation (comme pour la méthode de remontée).

$$a' = 2a - Ce^{2t}$$

On a ici une équation différentielle linéaire avec second membre, la fonction réelle a étant l'inconnue. L'équation homogène est :

$$a' = 2a \quad \text{de solution générale } t \mapsto Ke^{2t}, K \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière sous la forme $a : t \mapsto Kte^{2t}$.

R Il y a donc résonance dans ce cas.

Le calcul est alors :

$$\begin{aligned} a(t) &= Kte^{2t} \\ a'(t) &= K(1 + 2t)e^{2t} \end{aligned}$$

$$a'(t) - 2a(t) = -Ke^{2t}$$

et donc $K = -C$.

D'où la forme de a :

$$\exists K \in \mathbb{R}, a : t \mapsto Ke^{2t} - Cte^{2t}$$

Au final, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ X : t \mapsto \begin{pmatrix} e^{2t}(-Ct + K + C) \\ e^{2t}(K - Ct) \end{pmatrix} \mid (K, C) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

NB : K et C sont quelconques ! On a bien un SEV de dimension 2.

★ **Cas d'un second membre**

En exercice, on peut rencontrer des systèmes linéaires à coefficients constants mais avec un second membre. Il n'y a aucun résultat du cours sur ce point. Par contre, vous devez avoir l'initiative de résoudre le système homogène puis de chercher une solution particulière (éventuellement en utilisant le principe de superposition des solutions). Pour la solution particulière, une indication sera donnée ou sinon il faut chercher la même forme que le second membre.

■ **Exemple .12** On veut résoudre :

$$(E) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - y + e^{-t} \end{cases}$$

C'est un système à coefficients constants mais avec un second membre.

L'énoncé donne une indication : on cherchera une solution particulière sous la forme

$$t \mapsto e^{-t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On résout donc le système homogène.

$$(E) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie : $\chi_A = X^2 + X - 2 = (X - 1)(X + 2)$, elle a donc deux valeurs propres (1 et -2) et est diagonalisable. De plus :

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } (1, 1) \text{ est base de } E_1(A)$$

$$A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } (1, -2) \text{ est base de } E_{-2}(A)$$

On obtient donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cela donne l'ensemble des solutions du système homogène :

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect} \left(\left(t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \left(t \mapsto e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \right)$$

On cherche maintenant une solution particulière sous la forme proposée. Cela donne le système :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} -ae^{-t} = be^{-t} \\ -be^{-t} = (2a - b + 1)e^{-t} \end{cases}$$

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} -a = b \\ -b = 2a - b + 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire : } \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 1 = 0 \end{cases}$$

On obtient $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la solution générale de (E) est :

$$t \mapsto e^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

■

Exercices

Exercice 1 Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -3x + 5y - 5z \\ y' = -4x + 6y - 5z \\ z' = -4x + 4y - 3z \end{cases}$$

Correction : On écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -4 & 6 & -5 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Il faut alors réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -4 & 6 & -5 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Pour cela, on voit déjà que $A - I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -5 \\ -4 & 5 & -5 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ Cette matrice est de rang 2, donc 1 est valeur propre avec $\dim(E_1) = 1$.

De plus : $(0, 1, 1)$ est base de E_1 .

On voit aussi que $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 \\ -4 & 4 & -5 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ Cette matrice est de rang 2, donc 2 est valeur propre avec $\dim(E_2) = 1$. De

plus $(1, 1, 0)$ est base de E_2 .

La somme des valeurs propres est 0, donc -3 est aussi valeur propre et on a :

$$A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -4 & 9 & -5 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que $\dim(E_3) = 1$, de base $(1, 1, 1)$.

si bien que :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système $X' = AX$, on change de variable en posant $Y = P^{-1}X$, et on obtient que Y est solution de $Y' = DY$. En écrivant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, cela donne :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = -3y_3 \end{cases} \quad \text{d'où } y_1 : t \mapsto \lambda_1 e^t \quad y_2 : t \mapsto \lambda_2 e^{2t} \quad y_3 : t \mapsto \lambda_3 e^{-3t}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

En écrivant $X = PY$, on obtient la forme de X :

$$X : t \mapsto \lambda_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\left\{ t \mapsto \lambda_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Exercice 2 Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A et B sont semblables.
2. Résoudre le système différentiel : $X' = AX$.
3. Soit $X : t \mapsto X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une solution. Montrer que X est courbe plane, ie qu'il existe un plan Π de \mathbb{R}^3 , tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) \in \Pi$

Correction :

1. **REM :** On peut commencer par calculer $\chi_A = X^2(X - 8)$, on constate alors que A n'est pas diagonalisable car $\dim(E_0) = 1$ (A est de rang 2), mais que A est trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé. Il s'agit de démontrer que la matrice A peut se réduire en la matrice B . Comme on l'a vu dans le chapitre réduction, il n'y a aucun résultat du cours pour le calcul de la trigonalisation. On se sert de la réduction mais il faut construire la base « à la main ».

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A . Il faut trouver 3 vecteurs (u, v, w) formant une base de \mathbb{R}^3 et vérifiant :

$$\begin{aligned} f(u) &= 0 & \text{ie } Au &= 0 \text{ ou encore } u \in E_0 \\ f(v) &= u & \text{ie } Av &= u \\ f(w) &= 8w & \text{ie } Aw &= 8w \text{ ou encore } w \in E_8 \end{aligned}$$

On peut éventuellement s'aider d'une calculatrice pour résoudre. Sinon dans A , on a la relation : $C_1 - C_2 + C_3 = 0$, ainsi $(1, -1, 1) \in E_0$ et donc on peut prendre $u = (1, -1, 1)$.

On calcule ensuite :

$$A - 8I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 8 & -5 & -5 \\ -2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

La relation n'est pas facile à trouver (là encore une calculatrice est utile) mais on constate que $-5C_1 - 11C_2 + 3C_3 = 0$. Ainsi, $(-5, -11, 3) \in E_8$, et on peut donc prendre $w = (-5, -11, 3)$.

Il reste à trouver v vérifiant :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On résout le système (la matrice est de rang 2), et on constate que l'on peut prendre : $v = (1, -3, 0)$ (il y a d'autre solution, on prend la plus simple).

Il faut ensuite vérifier que (u, v, w) forment une base. On peut calculer le déterminant de cette famille, ou résoudre le système :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

en appliquant f , cela donne :

$$\beta u + 8\gamma w = 0$$

or (v, w) est libre (car $v \in E_0$ et $w \in E_8$). et donc $\beta = 0$ et $\gamma = 0$ d'où $\alpha = 0$.

Enfin, la matrice de l'application f dans la base (u, v, w) est la matrice B .

Précisément, on a trouvé :

$$A = PBP^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On effectue classiquement le changement de variable $Y = P^{-1}X$.

La nouvelle inconnue Y vérifie : $Y' = BY$. Cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

On résout par remontée : $y_3' = 8y_3$, donc y_3 s'écrit $y_3 : t \mapsto \lambda_3 e^{8t}$, pour $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Ensuite $y_2' = 0$ donc y_2 est constant on note donc $y_2 : t \mapsto \lambda_2$, pour $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Enfin, $y_1' = y_2 = \lambda_2$, d'où y_1 s'écrit : $y_1 : t \mapsto \lambda_2 t + \lambda_1$.

Au final :

$$Y = \begin{pmatrix} \lambda_2 t + \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 e^{8t} \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$$

On utilise ensuite $X = PY$, ce qui donne pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 t + \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 e^{8t} \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_2 t + \lambda_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 e^{8t} \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\left\{ t \mapsto (\lambda_2 t + \lambda_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 e^{8t} \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

3. Soit donc X une solution.

Il s'agit de trouver un point $A \in \mathbb{R}^3$ et deux vecteurs \vec{i} et \vec{j} de \mathbb{R}^3 , et deux fonctions φ, ϕ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = A + \varphi(t) \vec{i} + \phi(t) \vec{j}$$

Cela montre que X est une courbe du plan Π passant par A et engendré par \vec{i} et \vec{j} .

Une fois le problème posé ainsi, la solution est simple : on sait que X s'écrit sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = (\lambda_2 t + \lambda_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 e^{8t} \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

on écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \underbrace{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\varphi(t) \vec{i}} + \underbrace{\lambda_3 e^{8t} \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\phi(t) \vec{j}}$$

Exercice 3 Soit le système différentiel :

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = -x(t) - y(t) + t^2 + 2t + 3 \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - t^2 - 2t - 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la solution générale du système linéaire homogène (H) associé à (E) .
2. Trouver une solution particulière de (E) en cherchant x et y sous la forme de polynômes de degrés 1 et 2 respectivement.
3. Déterminer la solution générale du système.

1. Question assez longue car A ne peut être réduite. On note :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \chi_A = X^2 + 1$$

Technique 1 : on fait la réduction dans \mathbb{C} :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

On fait la résolution classique pour obtenir l'ensemble des solutions à valeurs complexes :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{it} + C_2 e^{-it} \\ (-1-i)C_1 e^{it} + (-1+i)C_2 e^{-it} \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

On cherche ensuite les solutions réelles, vérifiant donc $\overline{x(t)} = x(t)$, cela donne $C_1 = \overline{C_2}$. On obtient alors facilement :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) \\ \sqrt{2}\alpha \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\beta \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Technique 2 : lorsque A ne peut être réduite, on peut penser considérer (x, y) solution, vérifier qu'elles sont \mathcal{C}^2 et dériver deux fois. On obtient alors facilement :

$$x''(t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y''(t) = -y(t)$$

Ainsi, il existe (A, B, C, D) tels que :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos(t) + B \sin(t) \\ C \cos(t) + D \sin(t) \end{pmatrix}$$

Réciproquement, il est clair qu'il y a des conditions sur (A, B, C, D) .

On considère donc x et y de la forme :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos(t) + B \sin(t) \\ C \cos(t) + D \sin(t) \end{pmatrix}$$

On dérive :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cos(t) - A \sin(t) \\ D \cos(t) - C \sin(t) \end{pmatrix}$$

on doit donc avoir :

$$\begin{pmatrix} B \cos(t) - A \sin(t) \\ D \cos(t) - C \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t) - y(t) \\ 2x(t) + y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \cos(t) - B \sin(t) - C \cos(t) - D \sin(t) \\ 2A \cos(t) + 2B \sin(t) + C \cos(t) + D \sin(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (B + A + C) \cos(t) + (-A + B + D) \sin(t) &= 0 \\ (D - 2A - C) \cos(t) + (-C - 2B - D) \sin(t) &= 0 \end{aligned}$$

Comme ces deux relations doivent être vraies pour tout $t \in \mathbb{R}$, cela donne :

$$\begin{cases} -A + B + D = 0 \\ A + B + C = 0 \\ 2B + C + D = 0 \\ 2A + C - D = 0 \end{cases}$$

On écrit donc les équations pour obtenir un système de la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On résout avec des opérations sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 + l_1 \\ l_3 \\ l_4 + 2l_1 \end{matrix}$$

On obtient ainsi un système de rang 2 (on pouvait s'y attendre car \mathcal{S}_H est de dimension 2). Qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \text{ ou encore : } \begin{cases} -A + B + D = 0 \\ 2B + C + D = 0 \end{cases}$$

On exprime en fonction de (A, B) :

$$D = A - B$$

$$C = -2B - D = -A - B$$

Au final :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : t \mapsto \begin{pmatrix} A \cos(t) + B \sin(t) \\ (-A - B) \cos(t) + (A - B) \sin(t) \end{pmatrix} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

R Ce n'est pas la même expression mais c'est le même ensemble.

2. On écrit $x(t) = at + b$ et $y(t) = ct^2 + dt + e$. On dérive et on obtient le système :

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + d = 2 \\ b + e + a = 3 \\ -c = -1 \\ -d + 2c - 2a = -2 \\ -2b + d - e = -1 \end{cases}$$

qui donne :

$$x(t) = 2t \quad \text{et} \quad y(t) = t^2 + 1$$

3. On écrit alors l'ensemble des solutions.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \cos(t) + B \sin(t) \\ (-A - B) \cos(t) + (A - B) \sin(t) \end{pmatrix} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 4 Soit le système différentiel $X' = AX + B(t)$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 4t - 6t^2 \\ -2t - 12t^2 \\ 1 + 6t^2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1} .
2. À l'aide du changement de fonction inconnue $X = PY$, écrire le système différentiel d'inconnue Y équivalent à (E) . Le résoudre et en déduire les solutions de (E) .

Correction :

1. On trouve :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. On regarde donc la solution l'équation homogène : $Y' = DY$ qui s'écrit donc :

$$\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = 0 \\ y_3' = 6y_3 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions de cette équation est les fonctions de la forme :

$$Y : t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 e^{6t} \end{pmatrix}$$

On trouve :

$$P^{-1}B = \begin{pmatrix} 4t+1 \\ -2t \\ -6t^2 \end{pmatrix} \text{ noté } C(t)$$

et on cherche une solution particulière de : $Y' = DY + C(t)$ sous la forme :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} at^2 + bt \\ ct^2 + dt \\ et^2 + ft + g \end{pmatrix}$$

REM : pas besoin de terme constant pour les deux premières composantes, car cela revient à ajouter une solution de l'équation homogène. Cela donne :

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \begin{pmatrix} 2at + b \\ 2ct + d \\ 2et^2 + f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at^2 + bt \\ ct^2 + dt \\ et^2 + ft + g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t+1 \\ -2t \\ -6t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4t+1 \\ -2t \\ et^2 + ft + g - 6t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne facilement :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 + t + \lambda_1 \\ -t^2 + \lambda_2 \\ t^2 + \frac{t}{3} + \frac{1}{18} + \lambda_3 e^{6t} \end{pmatrix}$$

On en déduit X par $X(t) = PY(t)$.

Relation de récurrence linéaire à coefficients constants

Généralités

On considère l'ensemble des suites qui vérifient une relation (R) de la forme :

$$(R) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} + a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n = 0$$

On considère alors le polynôme caractéristique $P = X^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$ et l'équation caractéristique $P(r) = 0$.

On considère aussi :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto (u_{n+p} + a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

L'application φ est un endomorphisme de l'ensemble des suites.

Si on note $\Delta : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'application « décalage », alors on voit que pour une suite réelle (u_n) :

$$\begin{aligned} \Delta^2((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) &= (u_{n+2})_{n \in \mathbb{N}} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \Delta^k((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) &= (u_{n+k})_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

et donc : $\varphi = P(\Delta)$.

On se place dans le cas le plus simple, où P a p racines distinctes notées r_1, \dots, r_p

Résolution de la relation de récurrence

Dans le programme, il existe deux méthodes pour traiter ce type de suite : par équation linéaire et par réduction.

★ Technique par équation linéaire

On considère toutes les suites qui vérifient (R) , noté E :

$$E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} + a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n = 0 \right\}$$

On remarque que $E = \ker(\varphi)$.

On voit que E est de dimension p , car une suite de E est entièrement déterminée par ses p premiers termes. Pour le prouver, on considère donc l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \rightarrow E \\ (u_0, \dots, u_{p-1}) & \mapsto \text{l'unique suite vérifiant } (R) \text{ de premiers termes } (u_0, \dots, u_{p-1}) \end{cases}$$

On constate tout d'abord que f est bien définie puisqu'une suite de (E) est entièrement déterminée par ses premiers termes. De plus, on montre que f est un isomorphisme (linéaire et bijective).

- La linéarité est un peu longue à vérifier mais sans difficulté : on considère : $(u_0, \dots, u_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ et $(v_0, \dots, v_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ ainsi qu'un $\alpha \in \mathbb{K}$.

On note $(u_n) = f(u_0, \dots, u_{p-1})$, ie la suite de (E) de premier terme (u_0, \dots, u_{p-1}) , $(v_n) = f(v_0, \dots, v_{p-1})$ et $(w_n) = f(u_0 + \alpha v_0, \dots, u_{p-1} + \alpha v_{p-1})$.

Il s'agit de vérifier l'égalité de suites : $(w_n) = (u_n) + \alpha(v_n)$. On constate qu'il s'agit de deux suites de (E) , donc les p premiers termes sont les mêmes (égaux à $(u_0 + \alpha v_0, \dots, u_{p-1} + \alpha v_{p-1})$). Ces deux suites sont donc égales.

- L'injectivité se montre en vérifiant que l'unique suite de (E) dont les p premiers termes sont nuls est la suite nulle.
- La surjectivité se montre en prenant une suite (u_n) quelconque de (E) et en écrivant que cette suite est l'image par f de ces premiers termes.

On vérifie ensuite que si r est une racine quelconque de P , alors la suite (r^n) est un élément de (E) , car :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, r_{n+p} + a_{p-1}r_{n+p-1} + \dots + a_1r_{n+1} + a_0r_n &= r^n(r^p + a_{p-1}r^{p-1} + \dots + a_1r + a_0) \\ &= r^n P(r) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, les suites $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (r_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de E .

On a déjà montré que lorsque r_1, \dots, r_p sont distincts, alors la famille :

$$\left((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (r_p^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$$

est libre dans l'ensemble des suites scalaires car : $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est vecteurs propres de l'application Δ associées à la valeur propre r_1 . On a donc des vecteurs appartenant à des sous-espaces propres de valeurs propres distinctes.

Cette famille est donc une base de E . Ce qui signifie que toute suite (u_n) de E vérifie :

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha_1 r_1^n + \dots + \alpha_p r_p^n$$

- Si dans la relation on a un second membre, alors, on a une équation linéaire : on cherche une solution particulière et les suites qui vérifient (E) sont de la forme solution particulière plus solution de l'équation homogène.

★ **Technique par réduction**

On note :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ \dots \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \text{ où } (u_n) \text{ est une suite de } E$$

On a alors la relation :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+p} \\ u_{n+p-1} \\ \dots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{p-1} & -a_{p-2} & \dots & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ \dots \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AX_n$$

Par une récurrence immédiate, on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

Il faut donc calculer A^n pour obtenir u_n en fonction des premiers termes.

Pour cela, on va réduire la matrice A . On calcule d'abord χ_A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X + a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & \dots & a_0 \\ -1 & X & \dots & \dots & \\ 0 & -1 & X & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & -1 & X \end{vmatrix}$$

Il faut faire l'opération :

$$C_p \leftarrow C_p + XC_{p-1} + X^2C_{p-2} + \dots + X^{p-1}C_1$$

pour faire apparaître des 0 sur la dernière colonne : ce qui donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X + a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & \dots & P(X) \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & X & & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe ensuite selon la dernière colonne :

$$\chi_A(X) = (-1)^{1+p} P(X) \begin{vmatrix} -1 & X & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & X \\ & & & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+p} P(X) (-1)^{p-1} = P(X)$$

R Il faut savoir refaire rapidement ce calcul : la matrice A est appelée la matrice compagnon du polynôme P et $\chi_A = P$.

Puisque $\chi_A = P$ et que P admet p racines distinctes, alors la matrice A est diagonalisable.

On calcule alors P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$, cela donne : $X_n = PD^n P^{-1} X_0$.

R On peut aussi utiliser Newton pour calculer A^n si c'est plus facile.

En fait seul nous intéresse la première ligne de A^n puisque l'on cherche à calculer u_n donc le premier terme de X_n .

Cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} r_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & r_p^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_{p-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix}$$

En développant la dernière ligne, on retrouve le résultat déjà vu :

$$\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha_1 r_1^n + \dots + \alpha_p r_p^n$$

La technique de réduction permet d'obtenir directement le terme u_n en fonction des premiers termes, alors que la technique d'équation linéaire demande de résoudre un système.

Exemples

■ **Exemple .13** On cherche les suites vérifiant :

$$(R) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

On pose donc :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on a $X_{n+1} = AX_n$.

On cherche à diagonaliser la matrice A .

On reconnaît une matrice compagnon :

$$\chi_A(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X + 1)(X - 1)(X - 2)$$

la matrice A est donc diagonalisable.

On cherche une base des sous-espace propre, chaque sous-espace propre est de dimension 1.

$$E_1(A) = \ker \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

$$E_{-1}(A) = \ker \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}((1, -1, 1))$$

$$E_2(A) = \ker \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}((4, 2, 1))$$

Ainsi, on pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on a :

$$A = PDP^{-1}$$

Il reste à calculer P^{-1} (par gauss-Jordan), cela donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$$

après quelques calculs :

$$A^n = \begin{pmatrix} -3 + (-1)^n + 2^{n+3} & 3 - (-1)^n & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+3} \\ -3 - (-1)^n + 2^{n+2} & 3 + (-1)^n & 6 - 2(-1)^n - 2^{n+2} \\ -3 + (-1)^n + 2^{n+1} & 3 - (-1)^n & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{6} ((-3 + (-1)^n + 2^{n+1})u_2 + (3 - (-1)^n)u_1 + (6 + 2(-1)^n - 2^{n+1})u_0)$$

■ **Exemple .14** L'exemple très classique de la suite de Fibonacci :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

On a facilement :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

On note donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on calcule le polynôme caractéristique :

$$\chi_A = X^2 - X - 1 = (X - \varphi) \left(X + \frac{1}{\varphi} \right)$$

où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

C'est l'occasion de revoir quelques propriétés du nombre d'or : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vérifie : $\varphi^2 = \varphi + 1$, et donc : $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.

La matrice A est donc diagonalisable (car elle a deux valeurs propres distinctes). On détermine le sous-espace propre associé à φ .

On cherche ensuite une solution à :

$$AX = \varphi X \text{ c'est-à-dire à } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ou encore : $\begin{pmatrix} -\varphi & 1 \\ 1 & 1 - \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Comme on sait que $1 + \varphi = \varphi^2$, on constate que $\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix}$ est solution.

On détermine le sous-espace propre associé à $-\frac{1}{\varphi}$. On cherche ensuite une solution à : $AX = -\frac{1}{\varphi}X$, ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi} & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore en multipliant par φ pour simplifier :

$$\begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ \varphi & \varphi + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On constate (toujours en utilisant $1 + \varphi = \varphi^2$), que $\begin{pmatrix} -\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution. On obtient donc :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi \\ \varphi & 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à calculer P^{-1} , le plus simple est d'utiliser la méthode d'inversion des matrices 2×2 :

$$P^{-1} = \frac{1}{1 + \varphi^2} \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}$$

Cela donne :

$$A^n = \frac{1}{1 + \varphi^2} \begin{pmatrix} 1 & -\varphi \\ \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{\varphi^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$X_n = A^n X_0$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{1 + \varphi^2} \begin{pmatrix} 1 & -\varphi \\ \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{\varphi^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + \varphi^2} \begin{pmatrix} 1 & -\varphi \\ \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{\varphi^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \varphi \\ 1 - \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + \varphi^2} \begin{pmatrix} 1 & -\varphi \\ \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{\varphi^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^2 \\ -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + \varphi^2} \begin{pmatrix} 1 & -\varphi \\ \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{n+2} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{n+1}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On trouve la valeur de u_n :

$$u_n = \frac{1}{1 + \varphi^2} \left(\varphi^{n+2} + (-1)^n \frac{1}{\varphi^n} \right)$$

Exercices

Exercice 5 Calculer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Correction : On écrit $X_{n+1} = AX_n$ avec $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. on réduit A :

$$\chi_A = (X - 3)(X - 2) \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -43^n + 52^n.$$

Exercice 6 Déterminer, en fonction de v_1 et v_0 , toutes les suites complexes (v_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} - 2v_{n+1} + 2v_n = 0$$

Même question pour les suites réelles (v_n) .

Correction : en posant $X_n = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}$ on a :

$$X_{n+1} = AX_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$\chi = X^2 - 2X + 2$$

on cherche les racines dans \mathbb{C} :

$$x_1 = 1 - i \quad x_2 = 1 + i$$

dans \mathbb{C} la matrice A est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$A^n = P \begin{pmatrix} (1+i)^n & 0 \\ 0 & (1-i)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Il reste à calculer P^{-1} (en utilisant la formule sur l'inverse d'une matrice 2×2) :

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ i & 1-i \end{pmatrix}$$

REM : En python :

```
P = array([[1+1j, 1-1j], [1, 1]])
inv(P)
```

On continue le calcul :

$$\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ V_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+i)^n & 0 \\ 0 & (1-i)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ i & 1-i \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$V_n = \frac{1}{2} \left((i(1-i)^n - (1+i)^n) V_1 + ((1+i)^{n+1} + (1-i)^{n+1}) V_0 \right)$$

Il reste à écrire :

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

$$(1-i)^n = (\sqrt{2})^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

$$(1-i)^n - (1+i)^n = (\sqrt{2})^n (-2i) \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

et de même :

$$(1+i)^{n+1} + (1-i)^{n+1} = (\sqrt{2})^n (2) \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Ce qui donne :

$$V_n = (\sqrt{2})^n \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) V_1 + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) V_0 \right)$$

Rappels équations différentielles linéaires

★ Premier ordre

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

$$y' + y = t^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$2ty' + y = \frac{1}{t} \quad \text{sur }]0, +\infty[$$

$$ty' - y = t \ln t \quad \text{sur }]0, +\infty[$$

Correction : Avec la recherche de solution polynomiale, on trouve :

$$y : t \mapsto t^2 - 2t + 2 + \lambda e^{-t} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y : t \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y : t \mapsto \lambda t + \frac{t}{2} (\ln(t))^2 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 Problème du recollement de solutions

On considère l'équation :

$$(E) \quad ty' + 2y = \frac{t}{t^2 + 1}$$

- Déterminer la solution générale de (E) sur tout intervalle sur \mathbb{R}_*^+ et \mathbb{R}_*^- .
- Soit f solution de (E) sur \mathbb{R} .
 - Donner l'expression de la restriction de f à \mathbb{R}_*^+ et à \mathbb{R}_*^- .
 - À quelle condition f est-elle continue en 0 ?
 - Les fonctions obtenues sont-elles dérivable en 0 ?
- Donner les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Correction :

- On trouve dans les deux cas :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \frac{1}{t^2} (t - \arctan t + \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(dans le premier cas, il s'agit de fonctions de \mathbb{R}_*^+ dans \mathbb{R} et dans le deuxième de fonctions de \mathbb{R}_*^- dans \mathbb{R} , bien marquer la différence)

- (a) La fonction f s'écrit nécessairement sous la forme :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2} (x - \arctan x + \lambda) & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{x^2} (x - \arctan x + \mu) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

car elle est solution sur \mathbb{R}_*^+ et \mathbb{R}_*^- .

- (b) Pour que f soit continue en 0, il faut que $\lambda = \mu = 0$.

Il faut ensuite vérifier que cela suffit. Pour cela, on écrit :

$$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$$

et donc On a bien f continue en 0. Finalement, f s'écrit donc nécessairement sous la forme :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t^2}(t - \arctan t) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(c) Il y a trois idées :

- le taux d'accroissement,
- le théorème de la limite de la dérivée,
- l'utilisation de développement en série entière.

Le plus simple est le taux d'accroissement, qui donne directement :

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{1}{t^3}(t - \arctan t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3}$$

Ainsi, f est dérivable en 0

3. Au final, on a une seule fonction solution :

$$\mathcal{S} = \left\{ f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t^2}(t - \arctan t) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \right\}$$

★ Second ordre

Exercice 3 Résoudre :

$$y'' + y' + y = t^2 + e^t \quad y'' + 2y' + y = e^{-t} \quad y'' + 4y' + y = e^{-t} \cos t$$

Correction 1 : en cherchant une solution sous la même forme que le second membre :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto t^2 - 2t + \frac{1}{3}e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Correction 2 : On a une résonance d'ordre 2 :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \left(\frac{1}{2}t^2 + \beta t + \alpha \right) e^{-t} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Correction 3 méthode 1 : Pour l'équation homogène, on a la solution générale :

$$t \mapsto \alpha e^{-2+\sqrt{3}t} + \beta e^{-2-\sqrt{3}t} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

On peut ensuite passer en complexe et résoudre :

$$y'' + 4y' + y = e^{(-1+i)t}$$

On cherche une solution sous la forme $y_{\mathbb{C}} : t \mapsto C e^{(-1+i)t}$ avec $C \in \mathbb{C}$. On trouve alors $C = \frac{1}{2i-3} = \frac{-3}{13} - i\frac{2}{13}$. On trouve alors une solution particulière de E en prenant la partie réelle de $y_{\mathbb{C}}$:

$$y_0 : t \mapsto e^{-t} \left(\frac{-3}{13} \cos(t) + \frac{2}{13} \sin(t) \right)$$

Correction 3 méthode 2 : On cherche une solution sous la forme $e^{-t} (\alpha \cos(t) + \beta \sin(t))$. On trouve alors le système :

$$\begin{cases} -3\alpha + 2\beta = 1 \\ -2\alpha - 3\beta = 0 \end{cases}$$

On obtient la même solution particulière.

★ Changement de variables

Exercice 4 Une équation non linéaire

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ telle que :

$$(R) \quad \forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad x^2 y'' + y = 0 \text{ sur }]0, +\infty[$$

3. Résoudre l'équation (E) en utilisant le changement de variable : $x = \exp(t)$.
4. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $]0, +\infty[$ vérifiant (R)

Correction :

1. $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est \mathcal{C}^1 par composition (à détailler) donc f' est \mathcal{C}^1 donc f est \mathcal{C}^2 .
(en fait, on peut montrer par récurrence que f est de classe \mathcal{C}^∞ .)
2. Simple calcul en utilisant $f(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. On utilise la même technique en considérant f solution et en posant $z : t \mapsto f(e^t)$.
Les calculs donnent :

$$z'' - z' + z = 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

Ainsi, z s'écrit sous la forme :

$$z : t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \left(\alpha \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}t\right) \right)$$

et donc :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \left(\alpha \cos\left(\frac{3}{2} \ln(x)\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2} \ln(x)\right) \right)$$

Il reste ensuite à vérifier que ces fonctions sont bien solution de $x^2 y'' + y = 0$ pour toute valeur de (α, β) .

4. Soit f vérifiant (R) . Comme on l'a vu f s'écrit :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \left(\alpha \cos\left(\frac{3}{2} \ln(x)\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2} \ln(x)\right) \right)$$

On calcule alors $f'(x)$ et on compare à $f\left(\frac{1}{x}\right)$. On constate que f est solution si et seulement si $\alpha = \sqrt{3}\beta$

Exercice 5 On considère l'équation

$$(E) : \quad y'' - xy' + y = 0.$$

Soit y une solution de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

1. Montrer que si y est solution de E sur \mathbb{R} alors y est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} et $y''' - xy'' = 0$.
2. Résoudre E .

Correction :

1. Soit donc y solution sur \mathbb{R} , on a alors :

$$y'' = xy' - y$$

donc y'' est \mathcal{C}^1 , puis y est \mathcal{C}^3 et on peut dériver :

$$y''' - y' - xy'' + y' = 0 \text{ ie } y''' - xy'' = 0$$

2. Ainsi, y'' est solution d'une équation linéaire du premier ordre. On en déduit $y'' : x \mapsto C_1 e^{\frac{x^2}{2}}$, puis :

Exercice 6 Changement de variables puis problème de recollement

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad t^2 y'' + 4ty' + 2y = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

1. Trouver une solution constante solution de l'équation.
2. En posant $z : x \mapsto y(e^x)$ déterminer une solution de (H) sur $]0, +\infty[$.
En déduire l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Correction :

1. On trouve $y : t \mapsto \frac{1}{2}$.
2. Bien penser à raisonner par analyse / synthèse, c'est le plus simple et à peine plus long que par équivalence.
On considère y solution de (H) sur \mathbb{R}_*^+ et on note z la fonction définie sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, z(x) = y(e^x)$$

$$\forall t > 0, y(t) = z(\ln t)$$

On dérive alors l'une des deux relations (il faut savoir faire les deux) : ce qui donne que z est solution de :

$$z'' + 3z' + 2z = 0$$

On sait alors que z s'écrit sous la forme :

$$z : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

ce qui donne que y s'écrit :

$$y : t \mapsto \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2}$$

Il reste à vérifier que toute fonction y sous cette forme est bien solution de (H)

3. L'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est :

$$\left\{ y : t \mapsto \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{1}{2} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On constate que sur $] -\infty, 0[$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}$ est solution particulière, et les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ forment un système fondamental de solution de l'équation homogène. On peut donc dire que l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R}_*^- est :

$$\left\{ y : t \mapsto \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{1}{2} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On cherche maintenant des solutions sur \mathbb{R} . Considérons donc y solution sur \mathbb{R} , alors y est aussi solution de (E) sur \mathbb{R}_*^+ et \mathbb{R}_*^- . ainsi :

$$\exists (A, B, A', B') \in \mathbb{R}^4, \forall t \neq 0, y(t) = \begin{cases} \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{1}{2} & \text{si } t > 0 \\ \frac{A'}{t} + \frac{B'}{t^2} + \frac{1}{2} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

de plus $y(0) = \frac{1}{2}$.

Comme on veut y continue en 0, on doit avoir $A = A' = 0$ et $B = B' = 0$. Ainsi, y est la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$. Cette fonction est bien solution, donc l'unique solution est $t \mapsto \frac{1}{2}$.

NB : le thm de Cauchy n'est pas valable.

Exercice 7 On considère l'équation différentielle :

$$(H) : \quad 4ty'' + 2y' - y = 0$$

1. Déterminer la solution générale de (H) sur $]0, +\infty[$ à l'aide du changement de variable : $z(x) = y(x^2)$.
2. Déterminer la solution générale de (H) sur $] -\infty, 0[$.

Correction :

1. **Analyse :** On considère donc y solution de (H) sur $]0, +\infty[$ et on pose $z : x \mapsto y(x^2)$, ie $y : t \mapsto z(\sqrt{t})$. On dérive :

$$z(x) = y(x^2)$$

$$z'(x) = 2xy(x^2)$$

$$z''(x) = 2y'(x^2) + 4x^2y''(x^2)$$

Comme y est solution de (H) , z est solution de :

$$z'' - z = 0$$

Ainsi :

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, z : x \mapsto A \operatorname{ch}(x) + B \operatorname{sh}(x)$$

(On peut aussi laisser les solutions sous la forme $Ae^x + Be^{-x}$). Ainsi, on obtient la forme de y :

$$y : t \mapsto A \operatorname{ch}(\sqrt{t}) + B \operatorname{sh}(\sqrt{t})$$

Synthèse : on peut raisonner sur la dimension ou vérifier que $t \mapsto \operatorname{ch}(\sqrt{t})$ et $t \mapsto \operatorname{sh}(\sqrt{t})$ sont solutions. On obtient :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : t \mapsto A \operatorname{ch}(\sqrt{t}) + B \operatorname{sh}(\sqrt{t}) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. On procède de même en considérant y solution et en posant $z : x \mapsto y(-x^2)$. On vérifie alors que $-z'' - z = 0$. Donc :

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, z : x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x)$$

Ainsi, on obtient la forme de y :

$$y : t \mapsto A \cos(\sqrt{-t}) + B \sin(\sqrt{-t})$$

On procède de même pour la synthèse.

On obtient :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : t \mapsto A \cos(\sqrt{-t}) + B \sin(\sqrt{-t}) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

R On pourrait chercher une solution valable sur \mathbb{R} .

Exercice 8 On considère l'équation différentielle sur $I =]0, +\infty[$:

$$(E) \quad t^2 y'' - t y' + y = 1 - \ln t$$

On note (H) l'équation homogène associée.

1. Chercher une solution y_0 de (H) sous la forme $t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Chercher la solution générale sur I de (E) en posant $y = y_0 z$ avec z une fonction deux fois dérivables sur I .
3. Déterminer l'unique solution f de l'équation (E) vérifiant $f(1) = f'(1) = 0$

Correction :

1. On cherche α , on a :

$$y(t) = t^\alpha$$

$$y'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$$

$$y''(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

cela donne :

$$(\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1)t^\alpha = 0$$

soit $(\alpha-1)^2 = 0$. On trouve donc $\alpha = 1$.

2. On considère y solution de (E) qui s'écrit sous la forme $y(t) = tz(t)$ pour $t > 0$. Cela donne :

$$\begin{aligned}y(t) &= tz(t) \\y'(t) &= z(t) + tz'(t) \\y''(t) &= 2z'(t) + tz''(t)\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$1 - \ln(t) = t^3 z''(t) + t^2 z'(t)$$

ainsi, z' vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$(e) \quad \frac{1 - \ln(t)}{t^3} = y' + \frac{1}{t}y$$

On résout cette équation linéaire de degré 1. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto \frac{1}{t}$.

On cherche une solution sous la forme $y(t) = \frac{\lambda(t)}{t}$, cela donne :

$$\lambda'(t) = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

Ce qui se calcule avec une IPP :

$$\lambda(t) = \frac{\ln(t)}{t}$$

puis les solutions de (e) sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2} + \frac{\lambda}{t} \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}$$

on intègre (on sait qu'une primitive de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ est $t \mapsto -\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t}$), ainsi z s'écrit sous la forme :

$$z : t \mapsto \lambda_1 \ln(t) - \frac{\ln(t) + 1}{t} + \lambda_2 \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit les solutions :

$$y : t \mapsto \lambda_1 t \ln(t) - \ln(t) - 1 + \lambda_2 t \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Il reste à vérifier que l'on a bien toutes les solutions (il pourrait y en avoir qui ne s'écrivent pas sous la forme ci-dessus).

Il y a plusieurs raisonnements possibles, on peut par exemple dire que si y est solution, on note $z : t \mapsto \frac{y(t)}{t}$ et reprendre le raisonnement ci-dessus. Le plus simple est de vérifier rapidement que $t \mapsto -\ln(t) - 1$ est solution particulière et que $t \mapsto t$ et $t \mapsto t \ln(t)$ forment un système fondamental de solutions de (H) .

On a bien alors l'ensemble des solutions.

3. On trouve $f : t \mapsto -\ln(t) - 1 + t$

Exercice 9 Résoudre

$$(E) \quad (1 + e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x + 1)y = xe^x$$

en posant $z(x) = (1 + e^x)y(x)$.

Correction : Soit y solution, on pose donc z comme dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}z(x) &= (1 + e^x)y(x) \\z'(x) &= (1 + e^x)y'(x) + e^xy(x) \\z''(x) &= (1 + e^x)y''(x) + 2e^xy'(x) + e^xy(x)\end{aligned}$$

On voit que z est solution de :

$$(E2) : \quad z'' + z = xe^x$$

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$z(x) = (ax + b)e^x$$

$$z'(x) = (ax + b + a)e^x$$

$$z''(x) = (ax + b + 2a)e^x$$

cela donne :

$$2a = 1 \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{et } b = -\frac{1}{2}$$

D'où :

$$\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, z(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + \frac{1}{2}(x-1)e^x$$

On en déduit l'expression de y .

Il faut ensuite faire la réciproque rapidement.

Exercice 10 Résoudre $(x+1)y'' - (x+2)y' + y = 0$ en posant $z = y - y'$.

Donner les solutions sur \mathbb{R} de cette équation.

Correction :

On considère donc y solution sur $] -1, +\infty[$, et on pose $z = y - y'$.

On a alors :

$$z = y - y'z' = y' - y''$$

Ce qui donne :

$$-l_2(x+1) + l_1 : \quad -(x+1)z' + z = (x+1)y'' - (x+2)y' + y = 0$$

Ainsi, z est solution de :

$$-(x+1)z' + z$$

On en déduit que z s'écrit sous la forme :

$$z : x \mapsto \lambda(x+1)$$

et donc que y vérifie $y - y' = \lambda(x+1)$. On résout cette équation :

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect}(x \mapsto e^x)$$

solution particulière sous la forme $y = ax + b$, $y' = a$ donc $ax + b - a = \lambda(x+1)$ $a = \lambda$ et $b = 2\lambda$. d'où la forme de y :

$$y : x > -1 \mapsto Ce^x + \lambda(x+2), \quad (C, \lambda) \in \mathbb{R}^2$$

On procède de même sur $] -\infty, -1[$, on constate que les calculs sont les mêmes :

$$y : x < -1 \mapsto C'e^x + \lambda'(x+2), \quad (C', \lambda') \in \mathbb{R}^2$$

Soit maintenant y solution sur \mathbb{R} entier, alors y s'écrit :

$$y : x \mapsto \begin{cases} Ce^x + \lambda(x+2) & \text{si } t > -1 \\ C'e^x + \lambda'(x+2) & \text{si } t < -1 \end{cases}$$

Pour la continuité en -1 , cela donne :

$$Ce^{-1} + \lambda = C'e^{-1} + \lambda'$$

Pour la continuité de la dérivée en -1 , cela donne :

$$Ce^{-1} + \lambda = C'e^{-1} + \lambda'$$

Pour la continuité de la dérivée seconde en -1 , cela donne :

$$Ce^{-1} = C'e^{-1}$$

D'où $C = C'$ et $\lambda = \lambda'$. Il reste à vérifier que l'équation est bien vérifiée en -1 , ce qui est bon car $y(-1) = y'(-1)$. Ainsi, les solutions sont :

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^x + \lambda(x+2)\}$$

★ **Systèmes différentiels**

Exercice 11 On considère l'équation

$$(E) \quad y'' - 4y' + 3y = te^{2t}$$

1. Écrire l'équation (E) sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 : $X' = AX + B(t)$.
2. Résoudre le système homogène $X' = AX$.

En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène : $y'' - 4y' + 3y = 0$

3. Soit z l'unique solution de (H) vérifiant $z(1) = e$ et $z(0) = 1$.

On pose $y = kz$ où k est une fonction réelle de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

Montrer que y est solution de (E) si et seulement si k' est solution de :

$$(E') \quad x' - 2x = te^t$$

4. Résoudre (E') et en déduire l'ensemble des solutions de (E).
5. Retrouver ce résultat en cherchant une solution particulière de (E) sous la forme : $t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{2t}$

Correction :

1. Il suffit d'écrire :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

2. Classiquement, on réduit la matrice A qui est diagonalisable.

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{3t} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. C'est en fait la méthode de variation de la constante qui est proposée.

On pose donc $y = ke^t$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} y &= ke^t \\ y' &= (k + k')e^t \\ y'' &= (k'' + 2k' + k)e^t \\ y'' - 4y' + 3y &= e^t(k'' - 2k') \end{aligned}$$

Ainsi, en raisonnant par équivalence, on voit que y est solution de (E) si et seulement si k' est solution de (E').

4. On résout alors (E').

$$\mathcal{S}_{H'} = \left\{ x : t \mapsto \lambda e^{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour solution particulière, on cherche sous la forme :

$$x : t \mapsto (\alpha t + \beta)e^t$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} x(t) &= (\alpha t + \beta)e^t \\ x'(t) &= (\alpha t + \beta + \alpha)e^t \\ x'(t) - 2x(t) &= (-\alpha t + \alpha - \beta)e^t \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha = -1$ et $\beta = -1$. On en déduit les solutions de (E') :

$$\mathcal{S}_{E'} = \left\{ x : t \mapsto \lambda e^{2t} - (t + 1)e^t \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Soit y solution de (E) , alors y peut s'écrire sous la forme $y : t \mapsto k(t)e^t$ avec k de classe \mathcal{C}^2 . Ce point est essentiel et doit apparaître. D'après ce qui précède, k' est alors solution de (E') . Ainsi, on peut écrire :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, k'(t) = \lambda e^{2t} - (t+1)e^t$$

On cherche alors une primitive de te^t par IPP :

$$\begin{aligned} \int_0^t ue^u du &= [ue^u]_0^t - \int_0^t e^u du \\ &= te^t - e^t + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de $t \mapsto te^t$ est $t \mapsto (t-1)e^t$ et donc une primitive de $t \mapsto (t+1)e^t$ est $t \mapsto te^t$. On peut alors intégrer :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, k(t) = \frac{\lambda}{2}e^{2t} - te^t + C$$

On en déduit la forme de $y = ke^t$ (en changeant les notations) :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, y : t \mapsto Ae^{3t} - te^{2t} + Be^t$$

Réciproquement, on vérifie que toute fonction de cette forme est solution dans une analyse.

5. On cherche donc une solution particulière de la forme :

$$y : t \mapsto (\alpha t + \beta) e^{2t}$$

Cela donne pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= (\alpha t + \beta) e^{2t} \\ y'(t) &= (\alpha + 2\alpha t + 2\beta) e^{2t} \\ &= (2\alpha t + (\alpha + 2\beta)) e^{2t} \\ y''(t) &= (2\alpha + 4\alpha t + 2(\alpha + 2\beta)) e^{2t} \\ &= (4\alpha t + 4\alpha + 4\beta) e^{2t} \end{aligned}$$

En faisant $l_3 - 4l_2 + 3l_1$, on obtient :

$$te^{2t} = (-\alpha t - \beta) e^{2t}$$

d'où on peut prendre $\alpha = -1$ et $\beta = 0$, et donc la fonction $t \mapsto -te^{2t}$ est solution particulière.

On retrouve le résultat en ajoutant les solutions de l'équation homogène.

★ Équations différentielles et développements en série entière

Exercice 12 Chercher les solutions DSE de l'équation différentielle :

$$2xy'' + y' - y = 0$$

puis les exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Correction :

On considère f solution DSE de l'équation sur $] -r, r[$. On écrit :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}$$

$$\begin{aligned} 2x f''(x) + f'(x) - f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n(n+1) a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} - a_n) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)(2n+1) a_{n+1} - a_n) x^n \end{aligned}$$

D'où la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)(2n+1) a_{n+1} - a_n = 0$$

ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(2n+1)}$$

et donc : $a_1 = a_0$, et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2^n}{(2n)!} a_0$$

On calcule le rayon par d'Alembert. On obtient un rayon ∞ .

Pour $x \geq 0$, on obtient :

$$f(x) = a_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2x})$$

Pour $x \leq 0$, on obtient :

$$f(x) = a_0 \cos(\sqrt{-2x})$$

Exercice 13 On considère l'équation différentielle suivante pour $t \in]-1, 1[$:

$$(H) : (1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$$

1. Déterminer les solutions développables en séries entières de l'équation différentielle (H).
2. Après avoir calculé les rayons de convergence des séries entières correspondantes, exprimer ces solutions à l'aide de fonctions élémentaires.
3. A-t-on toutes les solutions de (H) sur $] -1, 1[$?

Correction :

1. Soit f développable en série entière sur $] -r, r[$ avec $r > 0$ et solution de (H). On a alors en dérivant :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

An faisant $(1-t^2)l_3 - 2tl_2 + 2l_1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\
 &= (2a_2 + 2a_0) + (6a_3 - 2a_1 + 2a_1)t + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + 2a_n)t^n
 \end{aligned}$$

Ainsi par unicité du DSE :

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -a_0, & a_3 &= 0, \\
 \forall n \geq 2, & (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + 2a_n &= 0
 \end{aligned}$$

La dernière ligne s'écrit :

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} (n^2 + n - 2) a_n \\
 &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} (n+2)(n-1)a_n \\
 &= \frac{(n-1)}{(n+1)} a_n
 \end{aligned}$$

on en déduit : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p+1} = 0$. **NB** : il faut bien remarquer qu'il n'y a pas de condition sur a_1 (les fonctions de la forme $t \mapsto a_1 t$ sont solutions !).

On calcule ensuite les termes pairs en fonction de a_0 :

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -a_0 \\
 a_4 &= \frac{1}{3} a_2 = -\frac{1}{3} a_0 \\
 a_6 &= \frac{3}{5} a_4 = -\frac{1}{5} a_0 \\
 a_8 &= \frac{5}{7} a_6 = -\frac{1}{7} a_0
 \end{aligned}$$

on doit donc démontrer par récurrence la relation :

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = -\frac{1}{2p-1} a_0$$

C'est vrai pour $p = 0$ (et $p = 1$ aussi au passage). Si c'est vrai pour un p fixé, alors :

$$a_{2p+2} = \frac{2p-1}{2p+1} a_{2p} = -\frac{1}{2p+1} a_0 \text{ avec HR}$$

On obtient au final l'écriture de f :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + a_1 t - a_0 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p-1} t^{2p} = a_1 t - a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p-1} t^{2p}$$

a_0 et a_1 étant quelconque dans \mathbb{R} .

2. Le rayon de convergence de $t \mapsto a_1 t$ est infini (c'est un polynôme). Le rayon de convergence de $t \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p-1} t^{2p}$ est

1. On sait de plus :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-u} &= \sum_{k=0}^{+\infty} u^k \\ -\ln(1-u) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} u^{k+1} \\ \ln(1-u) &= - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} u^{k+1} \\ \ln(1+u) &= - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} (-1)^{k+1} u^{k+1} \\ \ln(1-u) - \ln(1+u) &= -2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{k+1} u^{k+1} \\ &= -2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} t^{2p+1}\end{aligned}$$

3. On a trouvé deux solutions qui forment une famille libre :

$$t \mapsto t \text{ et } t \mapsto$$

(ie un système fondamental de solutions).

Comme \mathcal{S}_H est de dimension 2, on sait que toute solution est combinaison linéaire de ces deux solutions.

Quelques rappels de géométrie

Géométrie du plan affine

Définition .11 Le plan affine P est défini formellement comme un ensemble caractérisé par l'existence d'une application

$$\begin{cases} P \times P & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (A, B) & \mapsto \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

qui vérifie :

- Pour tout point O du plan P et pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique point M de P tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, ie une fois choisi une origine l'application $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ est bijective de P dans \mathbb{R}^2 , donc P s'identifie à \mathbb{R}^2 une fois choisie l'origine.
- Quels que soit les points A, B et C du plan P , on a la **relation de chasles** :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$$

Les éléments de P sont appelés des **points**.

Ainsi, dans le plan, la seule opération possible est de combiner deux points pour faire un vecteur : si A et B sont deux points, on peut créer le vecteur \overrightarrow{AB} . On peut ensuite agir sur ce vecteur. On a par exemple :

$$\forall (A, B) \in P, A = B \iff \overrightarrow{AB} = 0$$

On définit l'opération « point plus vecteur » par :

$$\forall M \in P, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, M + \vec{u} \text{ est l'unique point } P \text{ tel que } \overrightarrow{MP} = \vec{u}$$

★ Distance

En utilisant la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 , on peut poser une structure d'espace métrique sur le plan affine.

On définit la distance entre deux points A et B comme la norme euclidienne du vecteur \overrightarrow{AB} . Cela permet de munir le plan affine d'une structure d'espace métrique.

Notation .2. On note AB la distance entre les points A et B .

★ Angle, angle orienté

On peut aussi une fois que l'on a orienté l'espace, mesurer l'angle entre deux vecteurs dans \mathbb{R}^2 et donc l'angle entre trois points.

Définition .12 On munit \mathbb{R}^2 d'une base orthonormale \mathcal{B} directe.

Soit (A, B, C) trois points du plan affine P , on définit une mesure de l'angle orienté \hat{ABC} comme le réel θ vérifiant :

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle &= AB \cdot AC \cdot \cos(\theta) \\ \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= AB \cdot AC \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

R On rappelle que $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ne dépend pas du choix de \mathcal{B} (à condition que \mathcal{B} soit orthonormée directe).

★ Équation d'une droite

Définition .13 Une droite D est une partie non vide du plan tel qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, non nuls, et un point A tel que :

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.}$$

On parle de la droite passant par A et de **vecteur directeur** \vec{u} .

On remarque que par deux points distincts A et B passe une unique droite : c'est celle passant par A et dirigé par le vecteur \vec{AB} .

Il n'y a bien évidemment pas unicité du vecteur directeur, en effet, on peut remplacer \vec{u} par un autre vecteur colinéaire non nul.

Pour une droite passant par un point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et dirigé selon un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\iff \vec{AM} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{AM} = \lambda \vec{v} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \lambda v_x \\ y = y_A + \lambda v_y \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient l'**équation paramétrique d'une droite** passant par $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et dirigé par un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} x_A + \lambda v_x \\ y_A + \lambda v_y \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour déterminer l'équation paramétrique d'une droite passant par deux points A et B , on applique ce qui précède au point A et au vecteur directeur \vec{BA} .

■ **Exemple .15** Pour le cas de $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ deux points du plan et le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite passant par A et dirigé par \vec{v} est :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}.$$

Une représentation paramétrique de la droite passant par A et B est :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - 4\lambda \end{cases}.$$

★ Équation cartésienne d'une droite

Pour déterminer l'**équation cartésienne** de la droite D , passant par le point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, on utilise le déterminant, en effet :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\iff \vec{AM} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_A & v_x \\ y - y_A & v_y \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff v_y(x - x_A) - v_x(y - y_A) = 0 \\ &\iff v_y x - v_x y - v_y x_A + v_x y_A = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid v_y x - v_x y - v_y x_A + v_x y_A = 0 \right\}$$

Ainsi, toutes les droites du plan admettent une équation cartésienne du type :

$$ax + by + c = 0.$$

(avec $(a, b) \neq (0, 0)$).

Un vecteur directeur est : $v = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

Il n'y a pas d'unicité de l'équation cartésienne. puisque $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \lambda(ax + by + c) = 0$.

En particulier, on peut utiliser deux normalisations :

- Si $a \neq 0$, on peut supposer que $a = 1$, sinon, on a $a = 0$ et $b = 1$.
- On suppose que $a^2 + b^2 = 1$, i.e. le vecteur directeur est de norme 1.

Pour se souvenir rapidement de comment obtenir un vecteur directeur à partir de l'équation cartésienne, il faut se souvenir que si un point $M(x, y) \in P$, alors le point $(x + v_x, x + v_y)$ doit aussi appartenir à P , donc il faut $a(x + v_x) + b(y + v_w) + c = 0$, ce qui donne en développant : $av_x + bv_w = 0$. Tous les vecteurs directeurs de la droite D satisfont cette équation. En effet, elle est équivalente à

$$\begin{vmatrix} v_x & -b \\ v_y & a \end{vmatrix} = 0,$$

C'est-à-dire à $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

On n'a pas besoin de considérer à part les cas d'une droite verticale (cas où $a = 0$), ou horizontale (cas $b = 0$). Pour déterminer l'équation de la droite qui passe par les deux points A et B , on applique ce résultat au point A et au vecteur \overrightarrow{AB} .

■ **Exemple .16** Soient $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ deux points du plan et le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La droite passant par A et dirigé par \vec{v} est déterminé en utilisant :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff -(x-1) - (y-2) = 0 \\ &\iff -x - y + 3 = 0 \end{aligned}$$

Et la droite (AB) par :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 4(x-1) - (y-2) = 0 \\ &\iff 4x - y - 2 = 0. \end{aligned}$$

★ Vecteur normal à une droite

Définition .14 Soit \mathcal{D} une droite du plan P d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, et soit \vec{N} le vecteur (a, b) . Enfin soit A un point quelconque de \mathcal{D} . Alors :

$$\mathcal{D} = \left\{ M \in P \mid \overrightarrow{AM} \perp \vec{N} \right\}.$$

Réciproquement, si A est un point quelconque de P et \vec{N} un vecteur (a, b) non nul, alors l'ensemble des points M tel que $AM \perp \vec{N}$ est une droite passant par A et qui admet pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Avec des notations évidentes, on a :

$$ax_A + by_A + c = 0 \text{ donc } c = -ax_A - by_A.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\iff ax + by + c = 0 \\
 &\iff ax + by - ax_1 - by_A = 0 \\
 &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\
 &\iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \\
 &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{N} = 0 \\
 &\iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{N}
 \end{aligned}$$

Sur l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, on peut lire directement :

- un vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$,
- un vecteur normal : $\vec{N} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,
- dans le cas général, deux points de la droite :

$$M_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix} \text{ (intersection avec l'axe horizontal) } \quad \text{et} \quad M_2 \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(intersection avec l'axe vertical)

R À retenir : si (a, b) est un vecteur, alors $(-b, a)$ est un vecteur orthogonal, de même norme (en plus dans le sens direct).

★ Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Proposition .40 — Définition du projeté orthogonal. Soit M un point du plan et \mathcal{D} une droite, alors il existe un unique point H , tel que \overrightarrow{MH} est colinéaire au vecteur \vec{N} (normal à \mathcal{D}).

C'est le **projeté orthogonal** du point M sur la droite \mathcal{D} .

Démonstration. On choisit un point A quelconque, un vecteur directeur \vec{u} de \mathcal{D} , et \vec{N} un vecteur normal.

La famille (\vec{u}, \vec{N}) est une base de \mathbb{R}^2 , donc il existe α et β , tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{N}$.

Le point H défini par $H = A + \alpha \vec{u}$ vérifie alors les propriétés demandées.

Bien entendu, H est le point de \mathcal{D} , le plus proche (au sens de la distance euclidienne) de M . Puisque si A est un autre point de \mathcal{D} , alors :

$$\begin{aligned}
 (AM)^2 &= \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\|^2 \\
 &= \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2 \\
 &\geq \|\overrightarrow{HM}\|^2 = (HM)^2
 \end{aligned}$$

Définition .15 Soit M un point du plan et \mathcal{D} une droite, on note H le projeté de M sur \mathcal{D} .

La distance du point M à la droite \mathcal{D} est alors la longueur du vecteur \overrightarrow{MH} .

Proposition .41 — Expression de la distance. Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et \mathcal{D} une droite d'équation $ax + by + c = 0$, alors la distance du point M à la droite \mathcal{D} est :

$$d(M(x, y), \mathcal{D}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Démonstration. Avec les notations précédentes, on a : $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{N}$. et donc

$$d(M(x,y), \mathcal{D}) = |\beta| \|\overrightarrow{N}\|$$

or puisque $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{N}$, on a :

$$\langle \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{N} \rangle = \beta \|\overrightarrow{N}\|^2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} d(M(x,y), \mathcal{D}) &= \frac{1}{\|\overrightarrow{N}\|} |\langle \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{N} \rangle| \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} |\langle \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{N} \rangle| \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer :

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{N} \rangle &= a(x - x_a) + b(y - y_a) \\ &= ax + by - ax_a - by_a \end{aligned}$$

or comme $A \in \mathcal{D}$, on a : $ax_a + by_a + c = 0$, ainsi :

$$\langle \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{N} \rangle = ax + by + c$$

d'où le résultat. ■

★ Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon

Définition .16 Le cercle \mathcal{C} de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tel que : $\Omega M = R$.

On a donc :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} &\iff \Omega M = R \\ &\iff \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \\ &\iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \end{aligned}$$

C'est l'équation cartésienne d'un cercle.

On peut donc facilement passer du centre et du rayon d'un cercle à une équation cartésienne.

Réciproquement, si on considère une équation du type : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, alors il existe un seul cercle \mathcal{C} tel que :

$$C_l = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \right\}.$$

Pour calculer le centre et le rayon, on développe comme le début d'un carré :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 &\iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 0 \\ &\iff \Omega M = R \end{aligned}$$

Avec Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, et $R^2 = -c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$. Dans le cas, où cette quantité est négative (et donc R n'existe pas) le cercle est vide, si $R = 0$ le cercle est réduit au centre, sinon c'est un vrai cercle.

■ **Exemple .17** Soit le cercle d'équation : $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$, on a : $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = (x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 3 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 16$. C'est donc le cercle de centre $\Omega(-2, 3)$ et de rayon 4. ■

Pour trouver l'équation cartésienne d'un cercle dont le diamètre $[A, B]$ est donné, on utilise le fait que :

$$M \in \mathcal{C} \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

Démonstration. En effet, si on note I le milieu du segment $[AB]$, et r tel que $AB = 2r$, soit alors

$$\begin{aligned}\vec{AM} \cdot \vec{BM} &= (\vec{AI} + \vec{IM}) \cdot (\vec{BI} + \vec{IM}) \\ &= \|\vec{IM}\|^2 + \vec{AI} \cdot \vec{BI} + \vec{IM} \cdot \underbrace{\vec{AI} + \vec{BI}}_{=0} \\ &= \|\vec{IM}\|^2 - \frac{\|\vec{AB}\|^2}{4} \\ &= \|\vec{IM}\|^2 - r^2.\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points qui vérifient $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ est l'ensemble des points qui vérifient $|\vec{IM}| = r$. ■

★ Équation paramétrique d'un cercle

Soit \mathcal{C} un cercle de rayon R et de centre Ω , on a alors :

$$\begin{aligned}M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} &\iff \Omega M = R \\ &\iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \vec{\Omega M} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix} \\ &\iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + R \cos \theta \\ y = y_0 + R \sin \theta \end{cases}\end{aligned}$$

D'où l'équation paramétrique du cercle \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(\theta) = x_0 + R \cos \theta \\ y(\theta) = y_0 + R \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Droites et plans de l'espace

On définit l'espace affine de la même manière que le plan affine : c'est \mathbb{R}^3 avec un choix de l'origine.

★ Vecteur directeur d'une droite, représentation paramétrique

Définition .17 Soit A un point de l'espace E et \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^3 . On définit alors **la droite \mathcal{D} passant par A et de vecteur directeur \vec{u}** par :

$$M \in \mathcal{D} \iff \vec{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.}$$

En adaptant la démonstration faite dans le cas du plan, on obtient la **représentation paramétrique** d'une droite de l'espace :

$$\mathcal{D} = \left\{ M \begin{pmatrix} x_A + \lambda u_x \\ y_A + \lambda u_y \\ z_A + \lambda u_z \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

★ Base d'un plan, représentation paramétrique d'un plan

Définition .18 Soit A un point de l'espace E , \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^3 non nuls et non colinéaires. On définit alors **le plan Π contenant A et de base \vec{u} et \vec{v}** par :

$$\Pi = \left\{ M \begin{pmatrix} x_A + \lambda u_x + \mu v_x \\ y_A + \lambda u_y + \mu v_y \\ z_A + \lambda u_z + \mu v_z \end{pmatrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

★ Vecteur normal à un plan, équation cartésienne d'un plan obtenue à l'aide d'un vecteur normal

Proposition .42 Soit Π un plan et A un point de Π , alors il existe un vecteur noté \vec{N} de \mathbb{R}^3 , tel que :

$$M \in \Pi \iff \vec{AM} \perp \vec{N}$$

Le vecteur \vec{N} est alors un **vecteur normal au plan**.

De plus, si on note $\vec{N} = (a, b, c)$ les coordonnées de \vec{N} , alors Π admet une équation de la forme :

$$\Pi = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid ax + by + cz + d = 0. \right\}$$

C'est une **équation cartésienne du plan** Π .

Réciproquement, si $\vec{N} = (a, b, c)$ est un vecteur non nul de \mathbb{R}^3 , et A un point quelconque de l'espace, alors l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \perp \vec{N}$ est un plan passant par A et qui admet une équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$, pour un certain $d \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On considère \vec{u} et \vec{v} une base du plan Π et on note $\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Ainsi, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{N})$ est une base de \mathbb{R}^3 .

tout vecteur \vec{x} de \mathbb{R}^3 s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \frac{\vec{N} \cdot \vec{x}}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \vec{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \\ &\iff \vec{AM} \cdot \vec{N} = 0 \iff \vec{AM} \perp \vec{N}. \end{aligned}$$

En utilisant les coordonnées, on obtient l'équation cartésienne :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi &\iff \vec{AM} \perp \vec{N} \\ &\iff \vec{AM} \cdot \vec{N} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\iff ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0 \\ &\iff ax + by + cz + d = 0 \end{aligned}$$

en notant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Réciproquement, soit \vec{N} est un vecteur non nul de \mathbb{R}^3 , on a admis que l'on peut trouver \vec{u} et \vec{v} tels que

$$\vec{u} \perp \vec{N} \quad \vec{v} \perp \vec{N} \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non colinéaires.}$$

Considérons alors un point M de E de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a alors

$$\vec{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma = \frac{\vec{N} \cdot \vec{AM}}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N} \text{ pour un certain couple } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \vec{AM} \perp \vec{N} &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \vec{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \\ &\iff M \in \Pi \text{ le plan passant par } A \text{ et de base } (\vec{u}, \vec{v}). \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \vec{AM} \perp \vec{N} &\iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0 \end{aligned}$$

On a donc démontré qu'une équation du plan Π est : $ax + by + cz + d$ pour un certain $d \in \mathbb{R}$.



6 — Intégration sur un intervalle

Dans ce chapitre, on considère une fonction f de la variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I Fonctions continues par morceaux

I.1 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition I.1 — Fonction continue par morceaux sur un segment. Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} . On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, si il existe une subdivision finie de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

telle que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f \text{ est continue sur }]x_k, x_{k+1}[$$

et admet une limite finie à droite en x_k et une limite finie à gauche en x_{k+1} .

Notation I.1. On note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} .

La subdivision σ est notée $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$



Dire que f est continue par morceaux sur un segment, c'est dire qu'elle a un nombre fini de discontinuités et qu'en chacun points de discontinuité (en chaque « saut »), elle est prolongeable par continuité à droite et à gauche.

On peut aussi dire que pour toute valeur de $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ est continue et peut être prolongée en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Une subdivision σ qui vérifie la propriété de la définition est dire **adaptée** à la fonction f . Toute subdivision **plus fine** (ie constituée au moins des mêmes intervalles)

vérifie aussi la définition. Donc lorsqu'on considère deux fonctions f et g , continues par morceaux sur $[a, b]$, on peut trouver une subdivision adaptée aux deux.

On obtient ainsi :

Proposition 1.1 L'ensemble $\mathcal{C.M.}([a, b], \mathbb{R})$ (ou \mathbb{C}) des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est un SEV des fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}).

On a aussi deux résultats intéressants :

Proposition 1.2 Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

Démonstration. On considère une subdivision σ adaptée. Sur chaque $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction de la fonction de la fonction f à l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$. Ce prolongement étant continue sur un segment il est borné, et donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \exists M_k \in \mathbb{R}, \forall x \in]x_k, x_{k+1}[, |f(x)| \leq M_k$$

On note alors :

$$M = \max(M_0, \dots, M_{n-1}, f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))$$

(ne pas oublier les valeurs aux points de discontinuités, c'est le maximum sur un nombre fini de valeurs).

On obtient alors :

$$\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M.$$

Pour une fonction complexe, on travaille avec le module. ■

Proposition 1.3 Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors $|f|$ est aussi continue par morceaux.

Démonstration. Si σ est une subdivision adaptée à f , alors elle est aussi adaptée à $|f|$. ■

1.2 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 1.2 — Fonction continue par morceaux sur un intervalle. Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) est continue par morceaux sur l'intervalle I lorsque pour tout segment $[a, b]$ inclus dans cet intervalle ma restriction de f à $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

■ **Exemple 1.1** La partie entière : dès que l'on prend un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} , il y a un nombre fini de saut dans le segment $[a, b]$. ■

■ **Exemple 1.2** Exemple plus compliqué :

$$f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right[, f(x) = k.$$

Cette fonction est continue par morceaux sur l'intervalle $]0, 1]$, mais pas sur le segment $[0, 1]$. ■



Une fonction continue est évidemment continue par morceaux.



Une fonction continue par morceaux sur un intervalle n'est pas nécessairement bornée sur cet intervalle (ex : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}^{+*}). Elle peut avoir une infinité de points de discontinuité (ex : la partie entière). Mais si on la restreint à un segment $[a, b]$, alors elle est continue par morceaux sur ce segment (donc avec un nombre fini de points de discontinuités sur ce segment et bornée).

II Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

II.1 Fonctions en escalier et intégrale d'une fonction en escalier

Définition II.1 Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) est dite en escalier sur le segment $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision finie $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

telle qu'il existe n scalaires $(\lambda_k)_{k \in [0, n-1]}$ vérifiant :

$$\forall k \in [0, n-1], \forall x \in]x_k, x_{k+1}[, f(x) = \lambda_k$$

Autrement dit : la fonction f est constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$.

On appelle alors intégrale de f sur $[a, b]$ le scalaire :

$$\int_{[a, b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k$$



Les fonctions en escalier sont bien sûr un cas particulier de fonction continue par morceaux. La valeur de l'intégrale sur $[a, b]$ est indépendante de la subdivision choisie du moment que celle-ci est adaptée à la fonction f .

La proposition suivante montre que si on change la fonction f sur un nombre fini de points de $[a, b]$, alors on ne change pas l'intégrale.

Proposition II.1 Deux fonctions en escalier qui coïncident sur $[a, b]$ sauf sur un nombre fini de points ont la même intégrale.

Démonstration. Il suffit de mettre dans la subdivision les points où les fonctions ne sont pas égales. ■

Cette simple définition de l'intégrale a déjà les bonnes propriétés que l'on souhaite obtenir :

Proposition II.2 L'ensemble des fonctions en escalier est un SEV de l'ensemble des fonctions continues par morceaux.

De plus, l'application intégrale est une forme linéaire sur cet ensemble. Autrement dit, si f et g sont deux fonctions en escalier et α un scalaire, alors :

$$\int_{[a,b]} (f + \alpha g) = \int_{[a,b]} f + \alpha \int_{[a,b]} g$$

Démonstration. Déjà, on peut remarquer qu'en prenant une subdivision adaptée à f et une subdivision adaptée à g et en les « rassemblant » (en prenant la réunion) on obtient une subdivision adaptée à f et g .

Une fois cela écrit, on considère les suite (λ_k) et (μ_k) telle que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in]x_k, x_{k+1}[, f(x) = \lambda_k \text{ et } g(x) = \mu_k$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f + \alpha g &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) (\lambda_k + \alpha \mu_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k + \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \mu_k \\ &= \int_{[a,b]} f + \alpha \int_{[a,b]} g \end{aligned}$$

■

Proposition II.3 — Positivité de l'intégrale. Soit f en escalier vérifiant : $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.

On peut aussi remplacer l'hypothèse de positivité sur $[a, b]$ par : $f \geq 0$ sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$.

Démonstration. Avec les notations précédentes :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k \text{ est une somme de termes positifs}$$

■

Corollaire II.4 — Croissance de l'intégrale. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ vérifiant $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$. On a alors :

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$$

Démonstration. En utilisant la linéarité et la positivité : $f - g \leq 0$ donc $\int_{[a,b]} (f - g) \leq 0$ ce qui donne le résultat. ■

II.2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

On a donc obtenu une définition de l'intégrale qui vérifie les propriétés de linéarité, de positivité et de croissance. C'est cette notion que l'on va étendre aux fonctions continues par morceaux.

Conformément au programme, aucune construction n'est exigible, il s'agit juste de décrire le procédé qui permet d'étendre cette définition aux fonctions continues par morceaux en conservant ces propriétés.

On considère f une fonction continue par morceaux à valeurs réelles.

On définit alors les ensembles suivants :

$$A = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \text{ en escalier et } \varphi \leq f \right\}$$

$$B = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \text{ en escalier et } \psi \geq f \right\}$$

Il s'agit de parties de \mathbb{R} . On va appliquer l'axiome de la borne supérieure.

Comme on sait que f est bornée sur $[a, b]$ (car continue par morceaux), on sait qu'il existe m et M tels que :

$$\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$$

On considère alors les fonctions constantes (donc en escalier) $\varphi = m$ et $\psi = M$, et on a $\varphi \leq f$ donc : $\int_{[a,b]} \varphi \in A$ et de même $\int_{[a,b]} \psi \in B$. On en déduit que A et B sont non vides.

Soit $a \in A$ et $b \in B$, on sait alors qu'il existe φ et ψ tel que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \int_{[a,b]} \varphi = a \text{ et } \int_{[a,b]} \psi = b$$

Comme $\varphi \leq \psi$, on a

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$$

et donc au final, $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$. En particulier, A est majoré et B est minoré.

On peut donc considérer $\sup A$ et $\inf B$ par l'axiome de la borne supérieure.

On admet que $\sup A = \inf B$. Conformément au programme, on ne détaille pas ce point ainsi que la plupart des démonstrations techniques de ce chapitre.

Ce qui amène à la définition suivante :

Définition II.2 Soit f une fonction continue par morceaux à valeurs réelles, avec les notations précédentes, on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme le scalaire :

$$\int_{[a,b]} f = \sup A \text{ ou de manière équivalente : } \int_{[a,b]} f = \inf B$$



On a donc directement l'interprétation en termes d'aire sous la courbe. En appliquant ce que l'on a vu sur les fonctions en escalier, on obtient alors les mêmes propriétés :

- On ne change pas la valeur de l'intégrale en changeant un nombre fini de valeurs de f ,
- la linéarité
- la positivité
- la croissance

On a aussi la propriété d'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

qui s'obtient en intégrant les inégalités :

$$\forall x \in [a, b], -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$



Cette définition est bien évidemment théorique et ne permet aucun calcul effectif de l'intégrale. En pratique, dès que f est continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, alors on sait que $\int_a^b f$ existe.

Par contre, cette construction montre l'importance de comparer des intégrales à des rectangles.

Il faut donc maintenant passer au cas où $b < a$.

Définition II.3 Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} et $(a, b) \in I^2$. L'intégrale de f entre a et b noté $\int_a^b f(t)dt$ est :

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ -\int_{[a,b]} f & \text{si } a > b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

On dispose alors de la relation de Chasles

Proposition II.5 Soit f continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} et $(a, b, c) \in I^3$, on a alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

On a aussi les propriétés de croissance et de positivité dans le cas où $a < b$.



Les propriétés de croissance et de positivité ne sont valables que dans le cas où on intègre dans le sens naturel, ie $a < b$!

Pour une fonction complexe, on se ramène au cas réel avec :

Définition II.4 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe continue par morceaux et soit

a et b deux réels, on définit alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt$$

II.3 Lien avec les primitives

Conformément au programme, il s'agit ici encore d'une rapide extension des propriétés vues en première année.

Rappelons la définition suivante que l'on étends aux fonctions continues par morceaux :

Définition II.5 — Primitives d'une fonction continue par morceaux. Soit f une application continues par morceaux sur I . On note $(x_i)_{i \in I}$ les points de discontinuités de f .

Une primitive de f est une fonction F définie et continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{x_i | i \in I\}$ telle que :

$$\forall x \in I \setminus \{x_i \in I\}, F'(x) = f(x).$$



Les points de discontinuité de f sont alors les points où la fonction F n'est pas dérivable. Mais la fonction F est continue en ces points.

Tout se passe comme si on prenait la primitive de la fonction f sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ et que l'on réglait les constantes pour avoir une fonction continue.

■ **Exemple II.1** Pour la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Une primitive est :

$$F : x \mapsto |x|$$

Par contre :

$$G : x \mapsto \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x + 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

n'est pas une primitive car elle n'est pas continue en 0 ■

L'exemple précédent montre bien ce qui se passe : on prends une primitive sur \mathbb{R}_*^- on a donc un choix de constante pour cette primitive, mais ensuite la continuité donne un unique choix pour la primitive sur \mathbb{R}_*^+ .

On obtient ainsi le résultat suivant (qui est admis) :

Proposition II.6 Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I admettant une primitive F . Une application G est une autre primitive de f sur I si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que $G = F + k$.

Autrement dit deux primitive de f diffèrent d'une constante.

On obtient aussi le théorème fondamental suivant :

Théorème II.7 Si f est une application continue par morceaux sur un intervalle I et si a est un point de I , alors :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ est l'unique primitive de } f \text{ qui s'annule en } a.$$

Et pour toute primitive G de f sur I , on a :

$$\forall (a, x) \in I^2, \quad \int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a)$$

On manipule donc les intégrales et les primitives de fonctions continues par morceaux de la même manière que pour les fonctions continues.

III Intégrales généralisées

III.1 Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

La lettre a désigne un réel.

Définition III.1 Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs réelles ou complexes, On dit que l'intégrale généralisée (ou intégrale impropre)

$\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si

$$\int_a^x f(t) dt \text{ admet une limite finie lorsque } x \text{ tends vers } +\infty$$

On note alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ la valeur de cette limite.

Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.



Si l'intégrale est divergente, on peut avoir :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = +\infty \text{ ou ne converge pas.}$$

■ **Exemple III.1** On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$$

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

■

■ **Exemple III.2** $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale divergente, car :

$$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

■ **Exemple III.3** $\int_0^{+\infty} \cos(t)dt$ est une intégrale divergente, car :

$$\int_0^x \cos(t)dt = \sin(x) \text{ n'a pas de limite lorsque } x \text{ tends vers } +\infty.$$



Comme on l'a vu sur les exemples précédents, dans le cas (assez rare en pratique) où l'on connaît une primitive F de f , alors pour prouver que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe, il suffit de regarder la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Comme pour les séries, un cas très important est celui où la fonction est positive dans ce cas l'existence de la limite de F en $+\infty$ est équivalent à dire que la fonction est bornée.

Proposition III.1 Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives.

L'intégrale généralisé $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est majorée}$$

Démonstration. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante car f est positive. Elle admet donc une limite en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée. ■

III.2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Les définitions suivantes sont naturelles et purement technique : il s'agit de prolonger ce qui a été fait pour l'intervalle $[a, +\infty[$ aux différents cas possibles.

Les lettres a et b désignent des réels

Définition III.2 Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I avec :

$$\begin{aligned} I =]-\infty, a] \quad \text{ou } I =]-\infty, a[\quad \text{ou } I =]a, +\infty[\quad \text{ou } I = [a, +\infty[\quad \text{ou } I =]-\infty, +\infty[\\ I =]a, b] \quad \text{ou }]a, b[\quad \text{ou } [a, b[\end{aligned}$$

alors l'intégrale

$$\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt \text{ est dite généralisée.}$$

■ **Exemple III.4** Par exemple :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\ln(t)} \quad \int_0^{+\infty} \ln(t) dt \quad \int_{-\infty}^0 e^t dt$$

■

On commence par le cas d'un intervalle semi-ouvert à droite :

Définition III.3 Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ on dit que l'intégrale généralisée : $\int_a^b f(t) dt$ converge lorsque :

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ admet une limite lorsque } x \text{ tends vers } b$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

En remplaçant b par $+\infty$ on obtient la définition de la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ (que l'on a déjà détaillé).

De même, pour une fonction f continue par morceaux sur $]a, b]$ on dit que l'intégrale généralisée : $\int_a^b f(t) dt$ converge lorsque :

$$x \mapsto \int_x^b f(t) dt \text{ admet une limite lorsque } x \text{ tends vers } a$$

et on définit de même la convergence de $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ en remplaçant a par $-\infty$.



Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors la convergence de $\int_a^b f(t) dt$ ne dépend que du comportement en b . En effet, si il existe $c \in [a, b[$, tel que $\int_c^b f(t) dt$ converge, alors, l'écriture :

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_c^x f(t) dt + \int_a^c f(t) dt$$

montre que $\int_a^b f(t) dt$ converge. Idem pour la divergence.

En particulier, on voit que en cas de convergence, on a la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

La remarque précédente permet de traiter le cas des intégrales « doublement généralisée » : on prends un point quelconque dans $]a, b[$ et on étudie les deux intégrales généralisées.

Définition III.4 Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est dite convergente si et seulement si il existe un réel

$c \in]a, b[$, tel que :

$$\int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt \text{ convergent}$$

On pose alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

En remplaçant a par $-\infty$ et b par $+\infty$, on obtient les définitions de la convergence des intégrales :

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt \quad \int_a^{+\infty} f(t)dt \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

R Si le point c existe alors n'importe qu'elle autre point de $]a, b[$ convient.

■ **Exemple III.5** Pour étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{dt}{\ln t}$, on se ramène aux deux intégrales :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\ln t} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\ln t}$$

■

! Pour étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$, on ne peut pas étudier la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t)dt.$$

il faut étudier l'existence des deux limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^0 f(t)dt.$$

Pour le cas d'une fonction complexe, on peut étudier les parties réelles et imaginaires séparément.

Proposition III.2 Soit f une fonction complexe continue par morceaux sur un intervalle I . Alors l'intégrale généralisée : $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt$ converge si et seulement si

$$\int_{\inf I}^{\sup I} \operatorname{Re}(f(t))dt \quad \text{et} \quad \int_{\inf I}^{\sup I} \operatorname{Im}(f(t))dt \quad \text{convergent}$$

dans ce cas on a :

$$\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt = \int_{\inf I}^{\sup I} \operatorname{Re}(f(t))dt + i \int_{\inf I}^{\sup I} \operatorname{Im}(f(t))dt$$

Dans le cas des fonctions positives, on a le résultat suivant :

Proposition III.3 Si f est continue par morceaux et à valeurs positives sur un intervalle I , alors l'intégrale généralisée $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt$ converge si et seulement si il existe un réel positif M tel que :

$$\forall (a, b) \in I^2 \text{ avec } a < b, \int_a^b f(t)dt \leq M$$

Démonstration. C'est une redite de ce qui a été fait dans le cas de $[a, b]$.

Par exemple, dans le cas d'une intégrale généralisée sur $] -\infty, b]$. On suppose :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x < b, \int_x^b f(t)dt \leq M$$

On considère alors la fonction $F : x \mapsto \int_x^b f(t)dt$, on constate facilement que F est décroissante, soit en dérivant, avec $F' = -f \leq 0$, soit tout simplement parce que plus x est petit plus on intègre sur un grand intervalle, donc l'aire sous la courbe augmente lorsque x diminue.

La fonction F est donc décroissante et majorée, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ existe (dessiner un tableau de variations).

Réciproquement, supposons que la fonction F admette une limite finie en $-\infty$, alors comme elle est décroissante elle va être majorée par cette limite. ■



Le même résultat existe avec f négative en remplaçant \leq par \geq dans l'hypothèse.



Pour une fonction f continue par morceaux sur $]a, b]$, mais prolongeable par continuité en a . Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

En fait, on définit :

$$\int_a^b f(t)dt \text{ par } \int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

où \tilde{f} est le prolongement par continuité de f à $[a, b]$

Ce cas a été vu en première année.

III.3 Intégrale généralisée de référence

Proposition III.4 L'intégrale dite intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Dans ce cas, sa valeur est $\frac{1}{\alpha-1}$.

L'intégrale (dite aussi de Riemann) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Dans ce cas, sa valeur est $\frac{1}{1-\alpha}$.

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$\forall A > 1, \int_1^A \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1 \right)$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Le cas $\alpha = 1$ se traite à part :

$$\forall A > 1, \int_1^A \frac{dt}{t} = \ln(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$$

Idem pour $]0, 1]$. ■



Bien sûr, on peut faire un lien avec les séries et la vitesse de décroissance vers 0. Cette analogie est utile (certains résultats se ressemblent), mais il y a plusieurs différences : en particulier, une fonction positive peut ne pas être bornée et telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Pour cela, il suffit de faire un « triangle » sur chaque valeur $n \in \mathbb{N}$, de hauteur n et tel que aire du « triangle » soit $\frac{1}{2^n}$.

Proposition III.5 L'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$ est convergente est égale à -1

Démonstration. On écrit :

$$\forall A \in]0, 1[, \int_A^1 \ln(t) dt = [t(\ln t) - t + 1]_A^1 = -A(\ln A) + A - 1 \xrightarrow{A \rightarrow +0} -1$$

■

Proposition III.6 L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$. Dans ce cas, elle vaut $\frac{1}{\alpha}$.

Démonstration. On a pour $\alpha \neq 0$:

$$\forall A > 0, \int_0^A e^{-\alpha t} dt = \left[\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^A$$

$$= \frac{1}{-\alpha} (e^{-\alpha A} - 1)$$

Si $\alpha > 0$, on voit que la limite est $\frac{1}{\alpha}$. Si $\alpha < 0$, on voit que la limite est $+\infty$.

Le cas $\alpha = 0$ se traite à part (la fonction est constante égale à 1). ■

III.4 Propriété

Par passage à la limite, on admet que l'on retrouve les mêmes bonnes propriétés pour l'intégrale généralisée.

Proposition III.7 — Linéarité. L'ensemble des applications f continues par morceaux sur un intervalle I telles que l'intégrale généralisée $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt$ converge est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications continues par morceaux sur I .

De plus, si f et g sont dans cet ensemble :

$$\int_{\inf I}^{\sup I} (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt + \lambda \int_{\inf I}^{\sup I} g(t)dt$$

- ❗ Bien lire la propriété : il faut que $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt$ et $\int_{\inf I}^{\sup I} g(t)dt$ convergent pour que $\int_{\inf I}^{\sup I} (f(t) + \lambda g(t)) dt$ converge et qu'il y ait égalité. C'est le même problème que pour les séries.

Proposition III.8 — Positivité et Croissance. Soit f et g deux applications réelles continues par morceaux sur un intervalle I telles que :

$$\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt \text{ et } \int_{\inf I}^{\sup I} g(t)dt \text{ convergent}$$

On a alors :

- Si f est positive, alors $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt \geq 0$.
- Si $f \leq g$, alors $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt \leq \int_{\inf I}^{\sup I} g(t)dt$.

Proposition III.9 — Relation de Chasles. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I telle que $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt$ converge.

On a alors pour toute valeur de $a \in I$:

$$\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt = \int_{\inf I}^a f(t)dt + \int_a^{\sup I} f(t)dt$$

III.5 Manipulation

★ Changement de variables

Les lettres (α, β, a, b) désignent des réels ou l'infini.

Proposition III.10 — Changement de variables. Si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe \mathcal{C}^1 et si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) est continue

par morceaux, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du \text{ est convergente}$$

si et seulement si :

$$\int_a^b f(t) dt \text{ est convergente}$$

Dans ce cas, on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du = \int_a^b f(t) dt$$

Démonstration. ADMIS ■



On a plus d'hypothèse que dans le cas d'une intégrale non généralisée (il faut la monotonie).

En pratique c'était déjà le cas. On le vérifie souvent avec la dérivée : $\forall x \in]\alpha, \beta[, \varphi'(x) \neq 0$ assure la monotonie.

Le même résultat est aussi valable avec une fonction φ strictement décroissante, en remplaçant $\int_a^b f(t) dt$ par $\int_b^a f(t) dt$.

Il arrive que l'on lise les résultats de gauche à droite : on sait que $\int_a^b f(t) dt$ converge donc : $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$. Le théorème donne en effet l'existence de l'intégrale généralisée.

Méthode : pour rédiger un changement de variable :

- On donne la nouvelle variable (notée ici t) en fonction de l'ancienne (notée ici u) : on écrit donc $t = \dots$ (en fonction de u) dans le théorème c'est $t = \varphi(u)$.
- Facultatif mais très conseillé : on donne l'ancienne variable en fonction de la nouvelle en écrivant $u = \dots$
- On indique l'intervalle de variation :

u varie de α à β

t varie de a à b

Notons que si le changement de variable est décroissant, il peut arriver que l'on ait $b < a$.

- On indique que $u \mapsto \varphi(u)$ (expression de t en fonction de u donnée au premier point). est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle où varie u et bijective (ie strictement monotone).
- On donne dt en fonction de du , en dérivant t comme une fonction de u , cela s'écrit : $dt = \varphi'(u) du$ avec les notations du théorème.

Cela permet de faire le changement de variable.

Il faut aussi bien comprendre le résultat : on a les deux intégrales de même

nature, donc si l'une existe, alors l'autre aussi et on a égalité. On peut donc avoir plusieurs cas d'utilisation :

- On sait que l'intégrale de départ : $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$ converge, on fait alors le changement de variable et on sait déjà que l'intégrale : $\int_a^b f(t) dt$ va converger. Le changement de variable sert ici à calculer la valeur.
- On ne sait pas que l'intégrale de départ converge. On écrit alors : « sous réserve d'existence, on a » :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du = \int_a^b f(t) dt$$

On prouve ensuite que $\int_a^b f(t) dt$ converge, on sait alors que

$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$ converge et que l'on a égalité. Le changement de variable sert ici à prouver la convergence d'une intégrale.

Enfin, on peut toujours faire une intégrale sur un segment puis faire tendre l'une des bornes (ou les deux l'une après l'autre) vers la valeur problématique.

■ **Exemple III.6** Pour étudier $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}$ qui est généralisée en a , on pose $u = t - a$. Sous réserve d'existence, on a :

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} = \int_0^{b-a} \frac{du}{u^{\alpha}}$$

Or on sait que $\int_0^{b-a} \frac{du}{u^{\alpha}}$ converge si $\alpha < 1$, On en déduit que $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}$ converge si $\alpha < 1$. De plus, on sait que :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} &= \int_0^{b-a} \frac{du}{u^{\alpha}} \\ &= \int_0^{b-a} u^{-\alpha} du \\ &= \left[\frac{1}{-\alpha+1} u^{-\alpha+1} \right]_0^{b-a} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{-\alpha+1} \end{aligned}$$

■ **Exemple III.7** Considérons $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x^2}$ est \mathcal{CM} sur $[1, +\infty[$, l'intégrale est donc généralisée en $+\infty$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ converge.

On effectue le changement de variables :

$$t = \frac{1}{x}$$

t varie de 1 à 0

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, +\infty[$ et bijective

$$dt = -\frac{dx}{x^2}$$

$$x = \frac{1}{t}$$

x varie de 1 à $+\infty$

On en déduit que :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{t} dt \text{ converge et vaut } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

■

■ **Exemple III.8** Soit l'intégrale généralisée :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

comme $f : x \mapsto \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est $\mathcal{C.M}$ sur $] -1, 1[$, on voit que cette intégrale est doublement généralisée.

On fait un changement de variable :

$$x = \sin(t)$$

x varie de -1 à 1

t varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$

$x \mapsto \arcsin(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 et bijective sur $] -1, 1[$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$t = \arcsin(x)$$

Sous réserve d'existence, on a donc :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(2-\sin^2(t))} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos^2(t)}$$

Cette intégrale est bien convergente (car $t \mapsto \frac{1}{1+\cos^2(t)}$ est bien $\mathcal{C.M}$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, l'intégrale n'est pas généralisée).

On en déduit que l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est aussi convergente et que le calcul fait au-dessus est bien valide.

On fait un autre changement de variable cette fois pour calculer la valeur :

$$t = \arctan u$$

$$u = \tan t$$

t varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$

u varie de $-\infty$ à $+\infty$

$t \mapsto \tan t$ est de classe \mathcal{C}^1 et bijective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$dt = \frac{1}{1+u^2} du$$

(notons que l'on a transformé une intégrale non généralisée en intégrale généralisée ici). avant de faire le changement de variable, on écrit :

$$\frac{1}{1 + \cos^2(t)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \tan^2(t)}} = \frac{1 + \tan^2(t)}{2 + \tan^2(t)}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos^2(t)} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan^2(t)}{2 + \tan^2(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2 + u^2} du \end{aligned}$$

Plus précisément, on en a déduit que l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2 + u^2} du$ converge et que l'on a égalité.

Il ne reste plus qu'à écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2 + u^2} du = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Ainsi, on a démontré :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

★ Intégration par parties

Proposition III.11 — Intégration par parties. Soit f et g deux applications de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$. On suppose :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x) \text{ existent et sont finies}$$

alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)g'(t)dt \text{ sont de même nature}$$

et en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

ou le symbole : $[f(t)g(t)]_a^b$ désigne :

$$[f(t)g(t)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x)$$

Démonstration. ADMIS

Méthode : Pour faire une intégration par partie :

- on indique les fonctions f , f' , g et g' , en indiquant que les fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 .
- on commence par calculer à part le crochet : $[f(t)g(t)]_a^b$. Il faut que le crochet converge pour être assuré que les deux intégrales aient la même nature.
- Soit on sait que l'intégrale de départ : $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ converge, et on sait alors que $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ converge. Cela permet le calcul de l'intégrale. Soit on veut démontrer que l'intégrale de départ converge, on écrit alors « sous réserve d'existence, on a », Puis on démontre que $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ converge et on en déduit alors que l'intégrale de départ : $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ converge et que le calcul fait au-dessus a bien un sens.

Parfois, on fait l'intégration par parties sur un segment (ex : $[0, A]$) puis on fait tendre l'une des bornes (ex $A \rightarrow +\infty$). Surtout que, parfois, le crochet ne converge pas, mais la partie $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ vient « compenser » le crochet (voir en exercice).

D'une manière générale : on dérive les polynôme, on dérive les fonctions logarithmes, on dérive les fonctions trigonométriques réciproques, on intègre le reste. Mais ce n'est pas une règle absolue.

■ **Exemple III.9** L'exemple classique de l'étude d'une suite d'intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

L'intégrale est généralisée en $+\infty$. Pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$, cette intégrale est convergente car :

$$f(t) = t^n e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right) \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ converge.}$$

On cherche une relation de récurrence par intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u(t) = t^n & v(t) = nt^{n-1} \\ v(t) = e^{-t} & v'(t) = -e^{-t} \end{array}$$

On calcule donc :

$$[-t^n e^{-t}]_0^{+\infty} = 0$$

Ainsi, le crochet converge (et est égal à 0), on peut donc écrire :

$$I_n = n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = nI_{n-1}$$

(précisément, on retrouve le fait que l'intégrale généralisée I_{n-1} est convergente et que l'on a l'égalité ci-dessus).

Ainsi : $I_n = nI_{n-1}$. On utilise alors le calcul de $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ (intégrale de référence) pour obtenir que $I_n = n!$ par une récurrence facile.

■

IV Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

IV.1 Définitions

Définition IV.1 — Intégrale généralisée absolument convergente. Si f est une application numérique continue par morceaux sur un intervalle I , l'intégrale généralisée $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt$ est absolument convergente lorsque l'intégrale généralisée

$$\int_{\inf I}^{\sup I} |f(t)|dt \text{ est convergente.}$$



$|f(t)|$ désigne la valeur absolue ou le module.

Pour une fonction réelle et positive, la notion de convergence et de convergence absolue sont confondues.

■ **Exemple IV.1** Pour prendre un exemple complexe :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2} dt \text{ est absolument convergente car } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ est convergente}$$

■

Proposition IV.1 Soit f une fonction telle que l'intégrale généralisée $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt$ soit absolument convergente, alors cette intégrale est convergente.

Autrement dit, la convergence absolue entraîne la convergence.

Dans ce cas, on a de plus :

$$\left| \int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt \right| \leq \int_{\inf I}^{\sup I} |f(t)|dt$$

Démonstration. Pour faciliter les notations, on montre ce résultat dans le cas où $I = [a, +\infty[$.

Commençons par montrer la convergence. On considère une fonction f telle que $\int_I |f|$ converge.

Dans le cas réel, on définit les fonctions (partie positive et négative) :

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) : x \mapsto \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a : $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. Les fonctions f^+ et f^- sont positive, et : $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$.

Donc :

$$\int_I f^+ \quad \text{et} \quad \int_I f^- \text{ convergent}$$

en conséquence $\int_I f$ converge.

Dans le cas complexe, on travaille sur la partie réelle et imaginaire :

$$f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$$

Or $|\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$, et de même : $|\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$ ainsi, $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont absolument convergente et donc convergente (en appliquant le résultat précédent), ainsi la fonction f est convergente.


Pour montrer l'inégalité, on applique le résultat sur un segment :

$$\forall A > a, \quad \left| \int_a^A f(t) dt \right| \leq \int_a^A |f(t)| dt$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ on obtient (puisqu'on a montré la convergence) :

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| dt$$

■

 La décomposition $f = f^+ + f^-$ est à connaître.

Définition IV.2 Une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I est intégrable sur I lorsque $\int_{\inf I}^{\sup I} |f(t)| dt$ est absolument convergente.

Notation IV.1. L'ensemble des fonctions intégrable sur I à valeurs dans \mathbb{K} est noté : $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.



La fonction f est donc dans $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ si $\int_{\inf I}^{\sup I} |f(t)| dt$ converge, c'est la même notion que celles de familles sommables : l'intégrale en valeur absolue converge. On peut bien sûr trouver des intégrales convergentes non absolument convergente, on parle d'intégrale semi-convergente.

De même que pour les fonctions l'étude des intégrales convergentes non absolument convergente est compliqué : il s'agit des cas où les parties positives et négatives se « compensent ». L'étude de telle intégrale est hors-programme.

Notation IV.2. On note alors $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt = \int_I f(t) dt = \int_I f$

Si la fonction f est continue sur $]a, b[$ (a et b réel) et prolongeable par continuité en a , alors elle est intégrable sur $[a, b[$.

D'une manière générale, si a et b sont réels, que I est l'intervalle $]a, b[$ ou $[a, b[$ ou encore $]a, b[$, et que la fonction f est bornée sur I , alors clairement f est intégrable sur I .

IV.2 Manipulation et propriété

★ Intégrabilité en une borne

Considérons une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I .

Lorsque $I =]a, b]$ (avec a réel ou $a = -\infty$), alors, comme on l'a déjà vu La convergence de l'intégrale : $\int_a^b |f(t)| dt$ ne dépend que du comportement de la fonction f au voisinage du point a . Au sens où si il existe un réel $c \in I$, tel que l'intégrale généralisée :

$$\int_a^c |f(t)| dt \text{ converge}$$

alors $\int_a^b |f(t)| dt$ converge et donc f est intégrable sur I .

On parle ainsi, par un abus de langage, dans le cas où $I =]a, b]$ de fonction intégrable en a pour dire que l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ converge et que l'on sait l'intégrale est impropre uniquement en a .

De même, lorsque $I = [a, b[$ (avec b réel ou $b = +\infty$), on parle de fonction intégrable en b .

Lorsque $I =]a, b[$ (intégrale doublement généralisée), on rappelle que l'on découpe l'intervalle en deux parties pour étudier deux intégrale simplement généralisée.

Proposition IV.2 — Intégrabilité et comparaison. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $I = [a, +\infty[$:

- si $f(x) = O_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f .

C'est particulièrement le cas si $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$ ou encore si

$$\exists M > a, \forall x \geq M, |f(x)| \leq |g(x)|$$

- si $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f .

On traite de même les cas d'intégrales généralisées sur

$$I =]-\infty, a], \quad I = [a, b[, \quad I =]a, b]$$

Démonstration. Supposons g intégrable $f(x) = O_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$, Ainsi, le quotient $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ est borné pour x suffisamment grand, ce qui s'écrit :

$$\exists A > a, \exists M \in \mathbb{R}, \forall t \geq A, |f(t)| \leq M|g(t)|$$

on intègre :

$$\forall x > A, \int_A^x |f(t)| dt \leq \int_A^x |g(t)| dt \leq \int_A^{+\infty} |g(t)| dt$$

Ainsi, $\int_A^{+\infty} |f(t)| dt$ converge puisque :

$$x \mapsto \int_A^x |f(t)| dt \text{ est majorée}$$

Ce qui montre donc que $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge (toujours le même argument d'intégrabilité en $+\infty$).

Enfin, si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors à partir d'un certain rang :

$$\frac{1}{2}|g(x)| \leq |f(x)| \leq 2|g(x)|$$

et donc l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g . ■



Ainsi, $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0.

De même, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$, tandis qu'elle est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Avec un changement de variable, on voit que pour $a \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en a si et seulement $\alpha < 1$.

La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Proposition IV.3 Si la fonction f est **continue** et **intégrable** sur un intervalle I , et telle que $\int_I |f(t)| dt = 0$, alors $f = 0$.

En conséquence, si une fonction continue et positive est d'intégrale nulle, alors elle est nulle.

Démonstration. Déjà on traite le cas d'une fonction f positive, le cas d'une fonction de signe quelconque consiste à appliquer le résultat à $|f|$.

On commence par traiter le cas d'un segment $[a, b]$.

Supposons que f soit non nulle, ie, qu'il existe un $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$ en utilisant la continuité en x_0 avec la précision $\frac{f(x_0)}{2}$, on obtient l'existence d'un $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{f(x_0)}{2}$$

En particulier, cela donne :

$$\forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) > 0$$

On écrit alors :

$$\int_a^b f(t) dt \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t) dt > 0$$

(si x_0 est un bords de $[a, b]$, alors c'est le même résultat. On a donc démontré que :

$$f \neq 0 \implies \int_a^b f(t) dt > 0$$

ce qui donne par contraposé :

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \implies f = 0$$

On traite ensuite le cas d'un intervalle quelconque : pour faciliter les notations, on montre ce résultat dans le cas où $I = [a, +\infty[$.

On remarque que pour tout $A > a$, on a :

$$0 \leq \int_a^A |f(t)| dt \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| dt$$

et donc :

$$\forall A > a, \int_a^A |f(t)| dt = 0$$

En appliquant le résultat connu au segment $[a, A]$ on obtient : f est nulle sur $[a, A]$. Comme A est quelconque, cela donne que la fonction f est nulle sur $[a, +\infty[$. ■

R Si la fonction f est uniquement continue par morceaux, alors elle est nulle sauf aux points de discontinuités.

Proposition IV.4 L'ensemble des fonctions continues par morceaux, à valeurs dans \mathbb{K} et intégrable sur l'intervalle I est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration. Soit f et g intégrable sur I , ainsi qu'un $\lambda \in \mathbb{K}$.

On sait donc que $\int_I |f(t)| dt$ converge et que $\int_I |g(t)| dt$ converge.

De plus, on a :

$$\forall t \in I, |f(t) + \lambda g(t)| \leq |f(t)| + |\lambda| |g(t)|$$

et la fonction : $t \mapsto |f(t)| + |\lambda| |g(t)|$ est intégrable puisque :

$$\int_I |f(t)| + |\lambda| |g(t)| dt \text{ converge}$$

Ainsi, par comparaison, $\int_I |f(t) + \lambda g(t)| dt$ converge ce qui montre que $f + \lambda g$ est intégrable. ■

Intégration sur un intervalle

★ Convergence par calcul d'une primitive

Exercice 1 En revenant à la définition, étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t \ln(\ln t)}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Correction : On fait un changement de variables sur $[2, A]$:

$$\int_2^A \frac{dt}{t \ln t} = \int_{\ln(2)}^{\ln A} \frac{du}{u} \text{ en posant } u = \ln(t)$$

cette intégrale diverge en $+\infty$.

Idem pour la deuxième :

$$\int_3^A \frac{dt}{t \ln t \ln(\ln t)} = \int_{\ln(\ln(3))}^{\ln(\ln A)} \frac{du}{u} \text{ en posant } u = \ln(\ln t)$$

Cette intégrale diverge.

Pour la troisième :

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(1-\varepsilon) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

idem sur $] -1, 0]$ et donc l'intégrale converge et vaut π .

★ Convergence par comparaison

Exercice 2 Étudier l'intégrabilité de :

$$f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

$$g : x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2} \text{ sur } [1, +\infty[$$

$$h : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x}} \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$f_z : t \mapsto \frac{1}{(z+t)\sqrt{1+t}}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

Correction : La fonction f est CM et positive sur \mathbb{R}^+ et on a $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, ainsi f est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

La fonction g est CM et positive sur $[1, +\infty[$ et on a :

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^2} = o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

La fonction h est CM et positive sur $]0, +\infty[$, l'intégrale est doublement généralisée. Cela donne :

$$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ donc intégrable en } 0$$

et :

$$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \text{ donc intégrable en } +\infty.$$

La fonction f_z est \mathcal{CM} sur \mathbb{R}^+ , car $z+t$ ne s'annule pas. Le problème est donc en $+\infty$, or :

$$|z+t|^2 = (\operatorname{Re}(z)+t)^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^2$$

ainsi :

$$|f_z(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

Ainsi, f_z est intégrable.

Exercice 3 Soit a, b, c et d des réels tels que $a > b$ et $c > d$.

À quelle condition $\int_0^{+\infty} \frac{x^a + x^b}{x^c + x^d} dx$ converge-t-elle ?

Correction : L'intégrale est doublement généralisée.

En 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{d-b}} \text{ l'intégrale converge ssi } d - b < 1$$

En $+\infty$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{c-a}} \text{ l'intégrale converge ssi } c - a < 1$$

Exercice 4

1. Soit a un réel, pour quelles valeurs de a les intégrales :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^a} dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} dx$$

convergent ?

2. Soit $(t, u) \in (]0, +\infty[)^2$, calculer $\int_t^u \frac{\ln(x)}{x^a} dx$ en déduire la valeur des intégrales de la question précédente (en cas de convergence).

3. Pour quelles valeurs du couple de réels (a, b) avec $a < b$, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a + x^b} dx$$

converge-t-elle ?

Correction :

1. Soit $a > 1$, on pose $b = \frac{1+a}{2}$, on a :

$$\frac{\ln(x)}{x^a} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^b} \right)$$

d'où la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} dx$ Si $a \leq 1$:

$$\frac{\ln(x)}{x^a} \geq \frac{1}{x^a}$$

d'où la divergence.

Pour l'autre (ne pas oublier les valeurs absolues) :

$$\left| \frac{\ln(x)}{x^a} \right| = -\frac{\ln x}{x^a} \geq \frac{1}{x^a}$$

d'où la divergence si $a \geq 1$.

Sinon, on considère $b = \frac{1+a}{2}$, et on a :

$$\left| \frac{\ln(x)}{x^a} \right| \underset{x \rightarrow 0}{o} \left(\frac{1}{x^b} \right)$$

D'où manière à avoir convergence si $a < 1$

2. IPP :

$$\begin{aligned} \int_t^u \frac{\ln(x)}{x^a} dx &= \int_t^u \ln(x) x^{-a} dx \\ &= \left[\frac{1}{-a+1} x^{-a+1} \ln(x) \right]_t^u - \frac{1}{-a+1} \int_t^u x^{-a} dx \\ &= \frac{1}{-a+1} \left(u^{-a+1} \ln(u) - t^{-a+1} \ln(t) - \frac{1}{-a+1} u^{-a+1} - \frac{1}{-a+1} t^{-a+1} \right) \end{aligned}$$

Pour $a > 1$, on pose d'abord $t = 1$ puis on fait tendre u vers $+\infty$, pour obtenir :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = \frac{1}{(1-a)^2}$$

De même pour $a < 1$, on pose d'abord $u = 1$ et on fait tendre t vers 0, pour obtenir :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^a} = -\frac{1}{(1-a)^2}$$

Le cas $a = 1$ doit être traité à part.

3. Il suffit de faire des équivalents :

$$\frac{\ln(x)}{x^a + x^b} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^a}$$

donc convergence si $a < 1$, et :

$$\frac{\ln(x)}{x^a + x^b} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^b}$$

donc convergence si $b > 1$.

Il faut les deux conditions (intégrales doublement généralisées).

★ Changement de variables

Exercice 5 Calculer $\int_0^1 \arcsin(\sqrt{t}) dt$

Correction : La fonction $t \mapsto \arcsin \sqrt{t}$ est \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$. L'intégrale n'est donc pas généralisée.

On fait donc le changement de variable :

$$t = \sin^2(u) \quad u = \arcsin(\sqrt{t})$$

$$t \text{ varie de } 0 \text{ à } 1 \quad u \text{ varie de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{2}$$

$$dt = 2 \sin(u) \cos(u) du \quad u \mapsto \sin^2(u) \in \mathcal{C}^1 \text{ et bijective.}$$

D'où :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin u \cos u u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2u) u du$$

On finit par une IPP :

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{2} u \cos(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u) du \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} [\sin(2u)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Une autre méthode consiste à faire les modifications suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arcsin(\sqrt{t}) dt &= \int_0^1 \arcsin(u) (2u) du \\ &= [\arcsin(u) u^2]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 6 À l'aide de changement de variable montrer la convergence et calculer :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt \quad \text{en utilisant } u = \frac{1}{t}$$

$$\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \text{en utilisant } t = \sin u$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3 \sqrt{t^2-1}} \quad \text{en utilisant } t = \operatorname{ch} u \text{ puis } v = \operatorname{sh}(u) \text{ puis } x = \tan(v)$$

Correction : Pour le premier, la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ est \mathcal{C}^∞ sur $]0, 1[$. Elle est donc doublement généralisée.

En 0, on a : $\frac{\ln(1-t^2)}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -1$ on peut donc prolonger par continuité et la fonction est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$.

En 1, on a : $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \ln(1-t)$ or l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(u) du$ converge donc $t \mapsto \ln(1-t)$ est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$.

Ainsi, f est intégrable sur $]0, 1[$.

Avec le changement de variable proposée, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt &= \int_{+\infty}^1 -\ln\left(1 - \frac{1}{u^2}\right) du \\ &= \int_1^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{u^2}\right) du \end{aligned}$$

Pour le calcul on a pour $x > 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln\left(1 - \frac{1}{u^2}\right) du &= \int_1^x \ln(u-1) du + \int_1^x \ln(u+1) du - 2 \int_1^x \ln(u) du \\ &= \int_0^{x-1} \ln(u) du + \int_2^{x+1} \ln(u) du - 2 \int_1^x \ln(u) du \\ &= \int_0^1 \ln(u) du - \int_1^2 \ln(u) du - \int_{x-1}^x \ln(u) du + \int_x^{x+1} \ln(u) du \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} - \int_{x-1}^x \ln(u) du + \int_x^{x+1} \ln(u) du = 0$$

On aura alors :

$$\begin{aligned} I &= [u \ln(u) - u + 1]_0^1 - [u \ln(u) - u + 1]_1^2 \\ &= -1 - (2 \ln(2) - 2 + 1) = -2 \ln(2). \end{aligned}$$

Il faut donc faire des DLs :

$$\begin{aligned} - \int_{x-1}^x \ln(u) du + \int_x^{x+1} \ln(u) du &= (x+1) \ln(x+1) + (x-1) \ln(x-1) - 2x \ln(x) \\ &= (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + (x-1) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Pour le deuxième : $f : t \mapsto \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}$ est \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1[$. L'intégrale est donc généralisée en 1. Or on a :

$$|f(t)| \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$$

et on sait que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}}$ est convergente. Ainsi f est intégrable.

On utilise donc le changement de variables :

$$t = \sin(u)$$

t varie de 0 à 1

$u \mapsto \sin(u) \in \mathcal{C}^1$ et bijective

$$u = \arcsin(t)$$

u varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} \cos(u) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(u) du \end{aligned}$$

On continue par une linéarisation :

$$\begin{aligned} \sin^3(u) &= -\frac{1}{8i} (e^{iu} - e^{-iu})^3 \\ &= \frac{1}{4} (+3 \sin u - \sin(3u)) \end{aligned}$$

ou sinon écrire :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(u)) \sin(u) du \\ &= \left[-\cos u + \frac{\cos^3 u}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Pour le troisième : $t \mapsto \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}$ est \mathcal{C}^∞ et positive sur $]1, +\infty[$. L'intégrale est donc doublement généralisée.

On a :

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^4} \text{ intégrable en } +\infty$$

$$f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} \text{ intégrable en } 1$$

Ainsi, la fonction f est intégrable.

On fait le changement de variable proposée :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3\sqrt{t^2-1}} &= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^3 u \operatorname{sh} u} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{du}{\operatorname{ch}^3 u} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} u}{(1 + \operatorname{sh}^2(u))^2} du \end{aligned}$$

puis de nouveau : $x = \operatorname{sh} u$:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Enfin, on fait $x = \tan v$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \tan^2 v)}{(1 + \tan^2 v)^2} dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{1 + \tan^2 v} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(v) dv \end{aligned}$$

Il reste à linéariser pour obtenir :

$$I = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 7 Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ converge et la calculer à l'aide du changement de variables $t = \frac{1}{x}$.

Correction : On montre facilement la convergence :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2} = o_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \qquad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$$

Après changement de variable :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx &= \int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\frac{1}{t^2}} \frac{1}{t^2} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = -I \end{aligned}$$

d'où $I = 0$.

Exercice 8 Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x} dx$ converge et la calculer à l'aide du changement de variables $x = t^2$.

Correction : l'intégrale est généralisée en 0. Pour l'existence :

$$\frac{1}{\sqrt{x}+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

d'où l'existence.

Avec le changement de variable :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x} dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t} 2t dt = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = 2 \ln(2).$$

★ **Intégration par parties**

Exercice 9 Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$$

R

Lorsque le crochet ne converge pas, on ne peut pas faire l'ipp sur l'intégrale généralisée. On fait donc l'ipp sur l'intégrale « finie » sur un segment puis on fait tendre la borne vers le bords. Le crochet peut alors parfois se compenser.

Correction : $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue et positive par morceaux sur $[1, +\infty[$. Comme :

$$\frac{\ln(t)}{t^2} = \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

on peut en déduire que $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est intégrable et donc que : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ existe.

On utilise donc une ipp :

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(t) & u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v'(t) &= \frac{1}{t^2} & v(t) &= -\frac{1}{t} \end{aligned}$$

On regarde le crochet :

$$\left[-\frac{\ln(t)}{t} \right]_1^{+\infty} = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

On en déduit que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

au sens où l'existence de l'une est équivalente à l'existence de l'autre et qu'elles sont égales.

On sait : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1$ d'où $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = 1$.

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$, et on sait que $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$ et $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$ existe.

Pour $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$, on peut utiliser l'ipp suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(t) & u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v'(t) &= \frac{1}{(1+t)^2} & v(t) &= -\frac{1}{1+t} \end{aligned}$$

On calcule le crochet :

$$\left[-\frac{\ln t}{1+t} \right]_0^1 = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\ln t}{1+t} = -\infty$$

On ne peut donc pas utiliser le résultat sur les ipp pour des intégrales généralisées.

Il faut revenir à l'intégrale sur un segment. On considère donc $\varepsilon > 0$. On a alors en faisant l'ipp sur $[\varepsilon, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt &= \left[-\frac{\ln t}{1+t} \right]_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{t(t+1)} dt \\ &= \frac{\ln \varepsilon}{1+\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{\ln \varepsilon}{1+\varepsilon} - \ln(2) - \ln(\varepsilon) + \ln(1+\varepsilon) \\ &= -\ln(2) - \frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{1+\varepsilon} + \ln(1+\varepsilon) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\ln(2) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = -\ln(2)$$

Exercice 10 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

Correction :

Déjà pour l'existence : $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est CM sur $[0, +\infty[$ et $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$.

Méthode 1 : On utilise une ipp en intégrant le 1 : Le crochet est nul :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{(1+t^2)^n} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{(1+t^2)^n} = 0$$

et :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \\ &= 2n \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1) - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= 2nI_n - 2nI_{n+1} \end{aligned}$$

Méthode 1 : on peut aussi faire :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2-t^2)}{(1+t^2)^n} dt \\ &= I_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n} dt \end{aligned}$$

(en effet cette dernière intégrale converge). On effectue une IPP :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n} dt = \left[-\frac{t}{(2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2(n-1)} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}$$

On obtient alors :

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

Et par récurrence et avec $I_1 = \frac{\pi}{2}$:

$$I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2} ((n-1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

★ **Produit scalaire et inégalité de Cauchy-Schwarz**

Exercice 11

1. Montrer que $t \mapsto |\ln t|$ est de carré intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $\int_0^1 |\ln t|^2 dt$.
2. Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{|\ln t|}{t^{\frac{1}{4}}} dt \leq 2$$

Correction :

1. Cette fonction est continue par morceaux.

On utilise ensuite une IPP :

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(t) & u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v'(t) &= \ln(t) & v(t) &= t \ln(t) - t \end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\ln t|^2 dt &= \int_0^1 (\ln t)^2 dt \\ &= [\ln(t)(t \ln(t) - t)]_0^1 - \int_0^1 (\ln(t) - 1) dt \end{aligned}$$

On calcule le crochet :

$$[\ln(t)(t \ln(t) - t)]_0^1 = -\lim_{t \rightarrow 0} t \ln^2(t) - t \ln(t) = 0$$

On obtient de plus :

$$\int_0^1 (\ln(t) - 1) dt = [t \ln t - 2t]_0^1 - 2$$

d'où $I = 2$.

2. On applique ensuite cauchy-schwarz.

Exercice 12 Soit f une fonction de carré intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Montrer que :

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right)^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f^2(t) dt.$$

Étudier le cas d'égalité.

Correction : simple application de Cauchy-Schwarz avec :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$$

le cas d'égalité : $f : t \mapsto ke^{-t}$.

Exercice 13 Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues de carré intégrable sur \mathbb{R} , muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} fg$$

Montrer que le sous-espace vectoriel de E des fonctions paires et le sous-espace vectoriel de E des fonctions impaires sont supplémentaires orthogonaux.

Correction : on prend f paire et g impaire et on vérifie que $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = 0$ (car c'est l'intégrale sur \mathbb{R} d'une fonction impaire). Les deux espaces sont donc orthogonaux **Attention :** cela ne suffit pas.

On vérifie ensuite que si $\varphi \in E$, les fonctions

$$f : t \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(t) + \varphi(-t))$$

$$g : t \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(t) - \varphi(-t))$$

sont paires / impaires, continues et de carré intégrable (attention aux trois points).

Exercice 14 Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues de carré intégrable sur I , muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_I fg$$

on note N_2 la norme associée à ce produit scalaire.

On dit qu'une suite de fonctions (f_n) de E converge en moyenne quadratique vers une fonction f de E si $\lim_{n \rightarrow \infty} N_2(f_n - f) = 0$.

1. Montrer les inégalités :

$$\forall (f, g) \in E^2, |\langle f, g \rangle| \leq \int_I |fg| \leq N_2(f)N_2(g)$$

2. En déduire que si (f_n) et (g_n) sont deux suites de fonctions de E convergeant en moyenne quadratique vers f et g respectivement, alors la suite de réels $\left(\langle f_n, g_n \rangle \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $\langle f, g \rangle$.

Correction :

1. **Remarque :** c'est un truc à avoir vu pour les fonctions continues réelles de carré intégrable : $N_2(f) = N_2(|f|)$.

Soit $(f, g) \in E$.

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle| &= \left| \int_I fg \right| \\ &\leq \int_I |fg| = \left| \int_I |fg| \right| = \langle |f|, |g| \rangle \\ &\leq N_2(|f|)N_2(|g|) = N_2(f)N_2(g) \end{aligned}$$

2. On écrit :

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle| &= |\langle f_n - f, g_n \rangle + \langle f, g_n - g \rangle| \\ &\leq N_2(f_n - f)N_2(g_n) + N_2(f)N_2(g_n - g) \end{aligned}$$

On a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_2(f_n - f) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_2(g_n - g) = 0 \quad N_2(g_n) \leq N_2(g_n - g) + N_2(g) \text{ est bornée}$$

★ **Intégrales de Wallis**

Exercice 15 On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3 .
2. Montrer que la suite (u_n) décroît et qu'elle converge.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

4. À l'aide des formules d'Euler et de la formule du binôme de Newton, écrire u_n sous la forme d'une somme.
5. Trouver une relation entre u_{n+2} et u_n .
6. En déduire l'expression de u_{2l} et de u_{2l+1} en fonction de $l \in \mathbb{N}$.
7. Montrer que le produit $(n+1)u_n u_{n+1}$ est constant.
En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.
8. **Lien avec la formule de Stirling**
On admet qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C \sqrt{nn^n} e^{-n}$. Déduire de ce qui précède la valeur de C .

Correction :

1. On trouve facilement : $u_0 = \frac{\pi}{2}, u_1 = 1$. Ensuite :

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad \text{car } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx = 0$$

Pour :

$$u_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

on linéarise :

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - 3e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{4} (\sin(3x) - 3\sin(x)) \\ &= -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) dx + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} + 3 \right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$$

en intégrant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, cela donne :

$$u_{n+1} \leq u_n$$

ainsi la suite décroît.

Elle est minorée par 0 donc converge vers une limite positive ou nulle.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise le changement de variables en posant $t = \frac{\pi}{2} - x$. Cela donne :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt \end{aligned}$$

4. On part de la formule d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{ix} + e^{-ix})^n dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} e^{-i(n-k)x} dx \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(2k-n)x} dx \end{aligned} \quad \text{inversion somme finie et intégrale}$$

Il me semble que l'on peut s'arrêter ici vu la manière dont la question est posée.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin^{n+1}(x) dx \end{aligned}$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin^{n+1}(x) & u'(x) &= (n+1) \sin^n(x) \cos(x) \\ v(x) &= -\cos(x) & v'(x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= [\cos(x) \sin^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \cos^2(x) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) (1 - \sin^2(x)) dx \\ &= (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$$

6. Pour les termes pairs, la relation s'écrit :

$$\forall l \in \mathbb{N}, u_{2l+2} = \frac{2l+1}{2l+2} u_{2l}$$

avec $u_0 = \frac{\pi}{2}$ donne :

$$u_2 = \frac{1}{2} u_0 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

$$u_4 = \frac{3}{4} u_2 = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{\pi}{2}$$

$$u_6 = \frac{5}{6} u_2 = \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \frac{\pi}{2}$$

$$u_8 = \frac{7}{8} u_2 = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8} \frac{\pi}{2}$$

On voit donc le produit des termes impairs au numérateur et le produit des nombres pairs au dénominateur.

On montre donc par une récurrence très rapide que :

$$\forall l \in \mathbb{N}, u_{2l} = \frac{(2l-1)(2l-3)\dots 1}{(2l)(2l-2)\dots 2} \frac{\pi}{2}$$

Il reste donc à simplifier l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{(2l-1)(2l-3)\dots 1}{(2l)(2l-2)\dots 2} &= \frac{(2l)!}{((2l)(2l-2)\dots 2)^2} \\ &= \frac{(2l)!}{(2^l l!)^2} \\ &= \frac{(2l)!}{4^l (l!)^2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall l \in \mathbb{N}, u_{2l} = \frac{(2l)!}{4^l (l!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Pour les termes impairs, la relation s'écrit :

$$\forall l \in \mathbb{N}, u_{2l+3} = \frac{2l+2}{2l+3} u_{2l+1}$$

et comme $u_1 = 1$, on obtient par récurrence la relation :

$$u_{2l+1} = \frac{(2l)(2l-2)\dots 2}{(2l+1)(2l-1)\dots 1}$$

Avec la même technique :

$$\forall l \in \mathbb{N}, u_{2l+1} = \frac{4^l (l!)^2}{(2l+1)!}$$

7. Notons, v_n la suite définie par :

$$v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= (n+2)u_{n+2}u_{n+1} \\ &= (n+1)u_n u_{n+1} = v_n \end{aligned}$$

$$\text{en utilisant } u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$$

Ainsi, la suite (v_n) est constante.

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \text{ ie } (n+1)u_{n+1}u_n = u_1u_0 = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$$

NB : attention la relation $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_{n+1}$ n'est pas toujours vraie (ex des suites géométriques).

On part ensuite de la relation de décroissance :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq u_n$$

que l'on écrit :

$$\frac{n+1}{n+2}u_n \leq u_{n+1} \leq u_n$$

on multiplie par $(n+2)u_n$ (quantité positive) :

$$(n+1)u_n^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq (n+2)u_n^2$$

On renverse l'inégalité :

$$u_n^2 \leq \frac{\pi}{2(n+2)} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2(n+1)} \leq u_n^2$$

et donc :

$$\frac{\pi}{2(n+2)} \leq u_n^2 \leq \frac{\pi}{2(n+1)}$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^2 n = \frac{\pi}{2}$$

et donc que $u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ ou encore que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

8. On admet donc l'existence de C tel que :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C\sqrt{nn^n}e^{-n}$$

On remplace dans l'expression de u_{2l} :

$$\begin{aligned} u_{2l} &= \frac{(2l)!}{4^l (l!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &\underset{l \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C\sqrt{2l}(2l)^{2l} e^{-2l}}{4^l (C\sqrt{l}l^l e^{-l})^2} \frac{\pi}{2} \\ &\underset{l \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{C} \frac{\sqrt{2l}(2l)^{2l}}{4^l l^{2l}} \frac{\pi}{2} \\ &\underset{l \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{C} \frac{1}{\sqrt{2l}} \pi \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$u_{2l} \underset{l \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{l}}$$

D'où $C = \sqrt{2\pi}$. On retombe bien sur la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \sqrt{nn^n} e^{-n}$$

★ **Exercices de concours**

Exercice 16

1. Montrer que l'intégrale :

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

converge.

Que vaut I_{2p+1} ?

2. Trouver une relation entre I_{2p+2} et I_{2p} et achever le calcul des (I_p) .

On admet que $I_0 = 1$.

3. Soit l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto \varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{cases}$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

4. On suppose $n = 2$.

Construire une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(1, X, X^2)$.

On admet : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Correction :

1. Intégrale doublement généralisée d'une fonction continue par morceaux. On a facilement :

$$t^n e^{-\frac{t^2}{2}} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right) \quad \text{et} \quad |t|^n e^{-\frac{t^2}{2}} = \underset{t \rightarrow -\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

d'où la convergence des deux intégrales. I_{2p+1} est l'intégrale sur \mathbb{R} d'une fonction impaire, donc $I_{2p+1} = 0$.

2. On fait une IPP :

$$\begin{aligned} I_{2p+2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

cela donne :

$$\begin{aligned} u'(t) &= t e^{-\frac{t^2}{2}} & u(t) &= -e^{-\frac{t^2}{2}} \\ v'(t) &= (2p+1)t^{2p} & v(t) &= t^{2p+1} \end{aligned}$$

Le crochet est nul par croissance comparée, ce qui donne :

$$I_{2p+2} = (2p+1)I_{2p}$$

On obtient alors par une récurrence facile :

$$\forall p \geq 0, I_{2p} = \frac{(2p-1)!}{2^{p-1}(p-1)!}$$

3. Il faut en premier s'assurer que si P et Q sont des polynômes, (P, Q) existe. Pour cela, on note $R = PQ$, n le degré de R et on a :

$$R = \sum_{k=0}^n r_k X^k$$

donc :

$$(P, Q) = \sum_{k=0}^n r_k I_k \text{ existe.}$$

Les propriétés de symétries et de bilinéarités, de positivité sont évidentes. Pour définie positif, attention à bien écrire : intégrale d'une fonction **continue** et positive est nulle, donc la fonction est nulle.

4. On commence par calculer $\|1\|$:

$$\|1\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = I_0 = 1$$

Ainsi 1 est le premier vecteur cherché.

Cherchons le deuxième : on cherche $P = X + \alpha$ tel que : $\langle 1, P \rangle = 0$, ie : $\alpha = -\langle 1, X \rangle$

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -I_1 = 0$$

Ainsi, $P = X$ convient. On calcule ensuite $\|X\|$:

$$\|X\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = I_2 = 1$$

D'où le deuxième vecteur de la base est : X .

Cherchons le troisième : on cherche $P = X^2 + \alpha X + \beta$ tel que : $\langle 1, P \rangle = 0$ et $\langle X, P \rangle = 0$, cela donne :

$$\beta = -\langle 1, X^2 \rangle = I_2 = 1$$

$$\alpha = -\langle X, X^2 \rangle = I_3 = 0$$

D'où $P = X^2 - 1$, on normalise :

$$\|P\|^2 = I_4 - 2I_2 + I_0 = 2$$

d'où $\|P\| = \sqrt{2}$ et on choisit le troisième vecteur :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 1)$$

Exercice 17 Montrer que les intégrales suivantes convergent et les calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)^3} dt \quad \int_1^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt$$

Correction :

Pour $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)^3}$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. On écrit :

$$\frac{t}{(1+t)^3} = \left| \frac{t}{(1+t)^3} \right|_{t \rightarrow +\infty} \sim \frac{1}{t^2}$$

D'où la convergence de l'intégrale.

Pour le calcul :

$$\frac{t}{(1+t)^3} = \frac{1+t-1}{(1+t)^3} = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3} = (1+t)^{-2} - (1+t)^{-3}$$

Ainsi pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t}{(1+t)^3} dt &= [(-1)(1+t)^{-1}]_0^x - \left[-\frac{1}{2}(1+t)^{-2}\right]_0^x \\ &= -\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1+x)^2} + 1 - \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La deuxième est généralisée en 1 et en $+\infty$

$$\left| \ln\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \right|_{t \rightarrow +\infty} \sim \frac{1}{t^2}$$

et :

$$\begin{aligned}\ln\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) &= \ln\left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right) \\ &= \ln(t - 1) + \ln(t + 1) - 2\ln(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \ln(t - 1)\end{aligned}$$

et on sait que :

$$\int_0^1 \ln(u) du \text{ converge donc } \int_1^2 \ln(t - 1) dt \text{ converge}$$

D'où l'existence.

Pour le calcul, on écrit pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt &= \int_1^x \ln(t - 1) + \ln(t + 1) - 2\ln(t) dt \\ &= \int_0^{x-1} \ln(t) dt + \int_2^{x+1} \ln(t) dt - 2 \int_1^x \ln(t) dt \\ &= \int_0^1 \ln(t) dt - \int_1^2 \ln(t) dt - \int_{x-1}^x \ln(t) dt + \int_x^{x+1} \ln(t) dt \\ &= [t \ln(t) - t]_0^1 - [t \ln(t) - t]_1^2 - [t \ln(t) - t]_{x-1}^x + [t \ln(t) - t]_x^{x+1} \\ &= -1 - (2\ln(2) - 2 + 1) \\ &\quad - (x \ln(x) - x - (x - 1) \ln(x - 1) + x - 1) + ((x + 1) \ln(x + 1) - x - 1 - x \ln(x) + x) \\ &= -2\ln(2) + x \ln\left(\frac{(x + 1)(x - 1)}{x^2}\right) + \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)\end{aligned}$$

Le dernier terme tend clairement vers 0. Il reste à écrire :

$$\ln\left(\frac{(x + 1)(x - 1)}{x^2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$$

Ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = -2\ln(2)$$

Exercice 18

1. Pour quelles valeurs de a l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^a} dt$ est-elle convergente ?
2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$ est-elle convergente ?
3. On considère les fonctions définies sur \mathbb{R}_*^+ :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad g : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Étudier les variations de f et de g . Donner leurs limites en 0 et à l'infini.

Correction :

1. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^a}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{e^{-t}}{t^a} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^a} \text{ or } \int_0^1 \frac{dt}{t^a} \text{ converge ssi } a < 1 \\ \frac{e^{-t}}{t^a} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim}\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale converge si et seulement si $a < 1$.

2. La fonction $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. On a :

$$e^{-t} \ln t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t) \text{ or } \int_0^1 \ln(t) dt \text{ converge}$$

$$e^{-t} \ln(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

Donc l'intégrale converge.

3. **NB** : voir la fiche étude d'une fonction définie par une intégrale.

On note φ une primitive de $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

La fonction φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x > 0, f(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

Par composée $x \mapsto \varphi(2x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ donc f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.

On peut dériver :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, f'(x) &= 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) \\ &= 2 \frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x} \\ &= \frac{e^{-x}}{x} (e^{-x} - 1) \end{aligned}$$

Comme $t > 0$ on obtient que f' est négative et que f est décroissante. On obtient donc le tableau de variations :

| | | | |
|---------------------|---|----------|-----------|
| t | 0 | 1 | $+\infty$ |
| Signe de $f'(t)$ | | - | |
| Variation de $f(t)$ | | $\ln(2)$ | 0 |

On peut remarque que f est positive (car intégrale d'une fonction positive dans le sens naturel, et donc qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ car décroissante).

En $+\infty$: fixons $x > 0$, on a :

$$\forall t \in [x, 2x], \frac{e^{-2x}}{2x} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-x}}{x}$$

et en intégrant sur $[x, 2x]$, cela donne :

$$\frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

comme x est quelconque, on peut donc écrire :

$$\forall x > 0, \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

On en déduit donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

En 0, on procède de même mais on n'encadre pas le $\frac{1}{t}$. On fixe $x > 0$.

$$\forall t \in [x, 2x], \frac{e^{-2x}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-x}}{t}$$

On intègre :

$$\forall x > 0, e^{-2x} \ln(2) \leq f(x) e^{-x} \ln(2)$$

ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(2)$.

Pour la fonction g , on peut écrire :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, g(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \varphi(x) + \varphi(1)\end{aligned}$$

Ainsi, on peut dire que la fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ , et que :

$$\forall x > 0, g'(x) = -\varphi'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

donc la fonction g est décroissante.

En $+\infty$. Par définition de l'intégrale convergente, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = 0$$

On peut donc dire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

En 0. On va écrire :

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$$

et on va montrer que le terme : $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ tend vers $+\infty$.

Pour cela, On fixe $0 < x < 1$ et on écrit :

$$\forall t \in [x, 1], \frac{e^{-x}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-1}}{t}$$

On intègre sur $[x, 1]$:

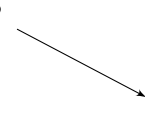
$$\forall x > 0, -e^{-x} \ln(x) \leq \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-1} - \ln(x)$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \ln(x) = -\infty$ et donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

On obtient le tableau de variations :

| | | |
|---------------------|-----------|-----------|
| t | 0 | $+\infty$ |
| Signe de $g'(t)$ | | - |
| Variation de $g(t)$ | $+\infty$ | 0 |



Exercice 19 Convergence de l'intégrale de Dirichlet

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ converge.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$ converge.
3. Soit x un réel strictement positif, on pose :

$$f : x \mapsto \int_{\pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

À l'aide d'une intégration par parties, donner une autre expression de $f(x)$.

En déduire que : $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge, puis que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

Correction :

1. En 0, c'est prolongeable par continuité (intégrale faussement généralisée) avec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1$. En $+\infty$:

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

2. En 0 c'est encore prolongeable par continuité avec : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
En $+\infty$:

$$\left| \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x^2}$$

3. On fait une IPP :

$$u'(t) = \sin(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{t}$$

$$u(t) = 1 - \cos(t)$$

$$v'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

Cela donne pour $x > \pi$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt \\ &= \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_{\pi}^x + \int_{\pi}^x \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt \\ &= \frac{1 - \cos(x)}{x} + \frac{2}{\pi} + \int_{\pi}^x \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

ainsi, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{\pi} + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

ce que l'on peut écrire sous la forme :

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge et } \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{2}{\pi} + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

Comme $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est faussement généralisée en 0, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

Exercice 20

1. Pour quelles valeurs de a réel, l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^a} dt$$

converge-t-elle ?

2. Soit les fonctions :

$$f : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt \end{cases}$$

Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_*^+ .

Donner leur sens de variations et calculer leur limite aux bornes de \mathbb{R}_*^+

3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ converge.

4. Soit b et x deux réels strictement positifs.

Donner une relation liant : $\int_b^x \frac{\arctan t}{t} dt$ et $\int_b^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Correction :

1. On a une intégrale doublement généralisée. En 0 :

$$\frac{\arctan t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

qui converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ ie $\alpha < 2$.

En $+\infty$

$$\frac{\arctan t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \frac{1}{t^\alpha}$$

qui converge si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi cette intégrale ne converge pas.

2. Pour f la fonction : $t \mapsto \frac{\arctan t}{t}$ est continue sur \mathbb{R}^+ (prolongée par continuité en 0), ainsi, f est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0 donc de classe \mathcal{C}^1 .

Pour g , on a :

$$\forall x > 0, g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt - \int_1^x \frac{\arctan t}{t^2} dt$$

La première intégrale converge et la deuxième est donc la primitive qui s'annule en 1 de la fonction continue sur $]0, +\infty[: t \mapsto \frac{\arctan t}{t^2}$. ainsi g est de classe \mathcal{C}^1 .

Hyperplan et produit scalaire
 Isométries vectorielles
 Matrices orthogonales
 Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3
 Isométries vectorielles du plan euclidien
 Isométries vectorielles de l'espace euclidien
 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles
 Exercices
 Procédé de normalisation de Gram-Schmidt et applications
 Caractéristiques géométriques d'un endomorphisme de \mathbb{R}^3

7 — Espaces euclidiens

Ce chapitre prolonge les acquis de première année sur les espaces euclidiens.

I Hyperplan et produit scalaire

On rappelle qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel qui admet un supplémentaire de dimension 1. On a vu qu'un hyperplan s'identifie toujours comme le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

On a aussi vu que dans le cas de la dimension finie, si on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , alors H est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires (a_1, \dots, a_n) non tous nuls, tels que :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

C'est l'équation cartésienne du plan.

Dans le cas où E est en fait un espace euclidien, on a mieux.

Proposition I.1 Soit E un espace euclidien et f une forme linéaire sur E . Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, f(x) = \langle a, x \rangle$$

Réciproquement, pour tout $a \in E$, l'application :

$$x \longmapsto \langle a, x \rangle$$

est une forme linéaire.



$a = 0$ si et seulement si f est l'application nulle.

Démonstration. Commençons par l'unicité : supposons qu'il y ait deux vecteurs a et b qui vérifient la relation.

On considère alors une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E (qui existe toujours grâce au procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt).

On a alors :

$$f(e_1) = \langle a, e_1 \rangle e_1 = \langle b, e_1 \rangle e_1$$

idem pour e_2, e_3 jusqu'à e_n . Donc les coordonnées de a et de b dans \mathcal{B} sont les mêmes donc $a = b$. D'où l'unicité.

Pour l'existence, on considère toujours une BON \mathcal{B} et on pose donc a le vecteur de E , tel que

$$a = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i = \left(f(e_1), \dots, f(e_n) \right)_{\mathcal{B}}$$

On constate alors que si $x = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \left(x_1, \dots, x_n \right)_{\mathcal{B}}$ est un vecteur quelconque de E , alors :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \langle a, x \rangle$$

En effet, puisque \mathcal{B} est une BON, le produit scalaire s'exprime en fonction des coordonnées dans \mathcal{B} comme le produit scalaire canonique. ■



la matrice de f dans la base \mathcal{B} est une simple ligne $Mat_{\mathcal{B}}(f) = (a_1, \dots, a_n)$. Le vecteur a de la proposition est le vecteur donc les coordonnées dans la base \mathcal{B} sont (a_1, \dots, a_n) . En effet :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E, f(x) = Mat_{\mathcal{B}}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \langle a, x \rangle$$

Proposition 1.2 Soit E un espace euclidien et H un hyperplan de E , alors il existe $a \in E$ tel que :

$$x \in H \iff a \perp x$$

On dit que a est un vecteur normal à H .

Démonstration. On considère donc un forme linéaire de noyau H , et on écrit : $f : x \mapsto \langle a, x \rangle$.

On a alors :

$$\begin{aligned} x \in H &\iff f(x) = 0 \\ &\iff \langle a, x \rangle = 0 \end{aligned}$$

■



Pour un hyperplan H , il y a plusieurs formes linéaires f telles que $\ker(f) = H$, donc plusieurs vecteurs normaux (ils sont tous colinéaires). Pour une forme linéaire f donnée, il n'y a qu'un vecteur a tel que f s'écrive : $x \mapsto \langle a, x \rangle$.

Si on connaît un vecteur normal alors on connaît l'équation cartésienne et réciproquement :

$$\text{l'équation cartésienne : } \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

$$\text{donne le vecteur normal } a = (a_1, \dots, a_n).$$

Le vecteur normal a est en fait une base de H^\perp (qui est une droite).



On retrouve l'équation cartésienne d'une droite (vectorielle) Δ du plan qui s'écrit :

$$(x, y) \in \mathcal{D} \iff ax + by = 0$$

pour une droite affine c'est une équation de la forme :

$$(x, y) \in \mathcal{D} \iff ax + by + c = 0$$

Le vecteur (a, b) est normal à la droite.

On peut faire de même l'équation d'un plan Π de l'espace :

$$(x, y, z) \in \Pi \iff ax + by + cz = 0 \text{ (vectoriel)}$$

$$(x, y, z) \in \Pi \iff ax + by + cz + d = 0 \text{ (affine)}$$

★ Projeté et distance à un hyperplan

Soit un vecteur x et H un hyperplan de vecteur normal a .

Alors le projeté est solution des équations :

$$\begin{cases} y \perp a \\ x - y \text{ colinéaire à } a \end{cases} \quad \text{d'inconnue } y$$

On cherche une solution sous la forme $y = x - \alpha a$ puisque $x - y$ doit être colinéaire à a .

On trouve alors facilement que : En fait, on constate que :

$$x - \frac{1}{\|a\|^2} \langle x, a \rangle a \quad \text{est le projeté orthogonal de } x \text{ sur } H.$$

puisque c'est une solution (donc l'unique solution) du système d'équations précédent.

En particulier, la distance de x à H est :


$$d(x, H) = \|x - P_H(x)\| = \frac{1}{\|a\|} |\langle a, x \rangle|$$


Dans le cas où on a une base orthonormée, alors l'hyperplan admet pour équation cartésienne :

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

alors la distance à l'hyperplan d'un vecteur x est :

$$d(x, H) = \frac{|a_1 x_1 + \dots + a_n x_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

 Ainsi, dans le cas d'un hyperplan en dimension finie, si on connaît un vecteur normal et / ou si connaît l'équation cartésienne, alors on a une expression analytique du projeté et de la distance.

 Pour une droite vectorielle du plan d'équation : $\mathcal{D} : ax + by = 0$, la distance est :

$$d((x, y), \mathcal{D}) = \frac{|ax + by|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Pour une droite affine, on admet (voir le cours de première année) que la distance à la droite $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ est :

$$d((x, y), \mathcal{D}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Pour un plan de l'espace $\Pi : ax + by + cz = 0$ la distance est de même :

$$d((x, y, z), \Pi) = \frac{|ax + by + cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

et de la même manière, pour un plan affine $\Pi : ax + by + cz + d = 0$:

$$d((x, y, z), \Pi) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

II Isométries vectorielles

II.1 Définition et caractérisation

On rappelle qu'un espace euclidien est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie qui est muni d'un produit scalaire.

Définition II.1 Soit E un espace euclidien.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) s'il conserve la norme euclidienne, c'est-à-dire si :


$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \|u(x)\|$$

ou de manière équivalente si : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \|u(x)\|^2$.

On utilise toujours le mot automorphisme car une isométrie est toujours bijective :

Proposition II.1 Une isométrie de E est toujours un automorphisme de E .

Démonstration. On peut facilement vérifier que $\ker(u) = \{0\}$ puisque si on considère un x de E tel que $u(x) = 0$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$ donc $x = 0$. ■

 Si u est une isométrie, et λ est une valeur propre (complexe ou réelle) de u , alors $|\lambda| = 1$, en effet, on connaît l'existence d'un x (vecteur propre) non nul tel que $u(x) = \lambda x$ et donc $\|u(x)\| = |\lambda| \|x\|$ mais comme $\|u(x)\| = \|x\|$ ainsi $|\lambda| = 1$.

Proposition II.2 Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si, et seulement si, il conserve le produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Le preuve est essentiellement basée sur le lien entre produit scalaire et norme : le produit scalaire détermine la norme et réciproquement (égalité de polarisation).

Démonstration. Notons :

$$(1) : \quad \forall x \in E, \|x\| = \|u(x)\|$$

$$(2) : \quad \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Montrons que (1) \iff (2).

Supposons (1) et considérons $(x, y) \in E^2$, on a alors :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2) && \text{car } u \text{ conserve la norme} \\ &= \frac{1}{4} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2) \\ &= \langle u(x), u(y) \rangle \end{aligned}$$

D'où (1) \implies (2)

Supposons (2) et considérons $x \in E$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle} && \text{d'après (2)} \\ &= \|u(x)\| \end{aligned}$$

D'où (2) \implies (1). ■

■ **Exemple II.1** Soit F un SEV de E et la symétrie orthogonale par rapport à F est une isométrie puisque si x s'écrit $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in F^\perp$, alors $s(x) = a - b$ et

$$\|x\|^2 = a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad \|s(x)\|^2 = a^2 + b^2$$

donc $\|x\| = \|s(x)\|$ ■

On sait déjà que u étant un automorphisme, il transforme toute base de E en une base de E . En fait, on a une caractérisation des isométries :

Proposition II.3 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E , les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est une isométrie de E ,
2. Toute base orthonormale de E est transformée par u en une base orthonormale de E .
3. Il existe une base orthonormale de E transformée par u en une base orthonor-

male de E .

Démonstration. On suppose que u est une isométrie.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

On sait alors que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on calcule alors :

$$\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est bien une base orthonormée de E , et u a bien transformé la BON quelconque \mathcal{B} en une BON. Ainsi, l'isométrie u transforme toutes les bases orthonormales de E en une base orthonormale.

Supposons maintenant qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , telle que $\mathcal{B}' = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Considérons $x \in E$. On écrit alors :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{ie } x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}.$$

On a alors :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{expression de la norme en fonction des coordonnées dans une BON}$$

On a :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \quad \text{ie } x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}'}$$

Comme \mathcal{B}' est toujours une BON, on a encore :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

On en déduit :

$$\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$$

et comme x est quelconque, on obtient que u est une isométrie. ■

II.2 Propriétés

Proposition II.4 Soit u une isométrie de E .

Si F est un SEV de E et si F est stable par u , alors F^\perp est aussi stable par u .

Démonstration. Démonstration 1 :

Commençons par un lemme qui a un intérêt en lui même :

En dimension finie, si F est stable par u , et que u est un automorphisme, alors F est aussi stable par u^{-1} .

Pour cela, considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E adaptée à F (ie les p premiers vecteurs $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ forment une base de F).

Comme u envoie une base sur une base, on considère la base :

$$\mathcal{B}' = (u(e_1), \dots, u(e_p), u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$$

On voit alors que la famille $\mathcal{F}' = (u(e_1), \dots, u(e_p))$ est une base de F . En effet, il s'agit déjà de vecteurs de F (puisque F est stable), d'autre part elle est libre (puisque elle est extraite d'une base) et elle contient le bon nombre de vecteurs (puisque $\dim(F) = p$).

Soit $x \in F$, on va montrer que $u^{-1}(x) \in F$. Pour cela, on décompose x dans la base \mathcal{F}' :

$$x = \sum_{i=1}^p \alpha_i u(e_i) \text{ où } (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$$

on applique alors u^{-1} :

$$u^{-1}(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i$$

et donc $u^{-1}(x) \in F$.

R Sur les matrices, on peut dire que si une matrice est triangulaire par bloc, alors son inverse est triangulaire par bloc (avec des blocs de même taille).

Avec ce résultat, on peut démontrer le résultat précédent de la manière suivante : Soit $x \in F^\perp$ et $a \in F$, on a alors :

$$\langle u(x), a \rangle = \langle x, u^{-1}(a) \rangle$$

or $u^{-1}(a) \in F$, donc $\langle x, u^{-1}(a) \rangle = 0$ car $x \in F^\perp$.

On en déduit que $u(x) \in F^\perp$ et donc que F^\perp est stable.

Démonstration 2 : On considère une base \mathcal{B} de E adaptée à F .

Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on peut supposer que cette base est orthonormée.

NB : le procédé d'orthonormalisation transforme une base adaptée à F en une BON adaptée à F .

On note cette base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et on suppose que les p premiers vecteurs forment une base de F , ie $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. On sait alors que $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Comme \mathcal{B} est une base orthonormée et que u est une isométrie, on a

$$\mathcal{B}' = (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est une BON.}$$

Comme F est stable, on a : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_i) \in F$, et comme ces vecteurs forment une famille libre, on a par argument de dimension :

$$(u(e_1), \dots, u(e_p)) \text{ est une base de } F$$

Par suite $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ est une base de F et donc $(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ est une base de F^\perp . En particulier, cela démontre que :

$$\forall i \in \llbracket p+1, n \rrbracket, u(e_i) \in F$$

Comme $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, cela montre que F^\perp est stable par u . ■



Dans la base \mathcal{B} , la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par bloc. Ce résultat est surtout utile avec F qui est sous-espace propre de u .

II.3 Groupe orthogonal

On note $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes bijectifs appelé groupe linéaire. Comme on l'a vu si u est une symétrie, alors $u \in GL(E)$.

Proposition II.5 Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ sont des isométries, alors :

$$u \circ v \quad \text{et} \quad u^{-1} \text{ sont des isométries.}$$

Autrement dit : l'ensemble des isométries est une partie de $GL(E)$ qui est stable par composition et par passage à l'endomorphisme réciproque, c'est un sous-groupe de $GL(E)$.

On appelle cet ensemble le groupe orthogonal de E .

Notation II.1. On note $O(E)$ le groupe orthogonal de E .

Démonstration. Considérons u et v deux isométries. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \|u \circ v(x)\| &= \|u(v(x))\| \\ &= \|v(x)\| = \|x\| \end{aligned}$$

Ainsi, $u \circ v$ est une isométrie.

On a aussi :

$$\forall x \in E, \|u^{-1}(x)\| = \|u(u^{-1}(x))\| = \|x\|$$

donc u^{-1} est aussi une isométrie. ■

III Matrices orthogonales

III.1 Définition et caractérisation

Lorsqu'on ne précise pas, on munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel.

Définition III.1 Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque l'endomorphisme de \mathbb{R}^n qui lui est associé est une isométrie vectorielle pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

■ **Exemple III.1** Considérons la matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme canoniquement associé est :

$$f : (x, y, z) \mapsto (x, \cos(\theta)y + \sin(\theta)z, -\sin(\theta)y + \cos(\theta)z)$$

On a :

$$\begin{aligned} \|f(x, y, z)\|^2 &= x^2 + (\cos(\theta)y + \sin(\theta)z)^2 + (-\sin(\theta)y + \cos(\theta)z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 = \|(x, y, z)\|^2 \end{aligned}$$

■

Proposition III.1 Une matrice est orthogonale si, et seulement si, elle est la matrice d'un changement de base orthonormale, ie la matrice de passage d'une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n orthonormale à une base \mathcal{C} de \mathbb{R}^n orthonormale (pour le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n).

Démonstration. Supposons M orthogonale.

Si on note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M , alors f transforme la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n (qui est orthonormale) en une base orthonormale $\mathcal{C} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$.

La matrice M qui est donc la matrice de passage entre les bases \mathcal{C} et \mathcal{B} est donc une matrice d'un changement de base orthonormale.

Réciproquement, supposons que M soit la matrice d'un changement de base d'une base orthonormale $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ à une base orthonormale $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_n)$. Ainsi, on peut écrire :

$$M = \begin{pmatrix} | & | & | \\ C_1 & C_2 & C_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

où la colonne C_i contient les coordonnées de f_i dans la base \mathcal{D} .

Notons f l'endomorphisme canoniquement associé. Il envoie la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n sur une famille (c_1, \dots, c_n) où le vecteur (de \mathbb{R}^n), c_i a pour coordonnées dans la base canonique C_i .

Si on calcule pour $i \neq j$, le produit scalaire $\langle c_i, c_j \rangle$, cela revient à calculer $C_i^T C_j$, ou encore, puisque ces colonnes contiennent les coordonnées de ces vecteurs dans la BON \mathcal{D} : $\langle f_i, f_j \rangle$, ce qui est nul puisque les (f_i) forment une BON. Ainsi, $\langle c_i, c_j \rangle = 0$. De même, on vérifie que $\langle c_i, c_i \rangle = 1$. Au final (c_1, \dots, c_n) est bien une BON.

L'endomorphisme canoniquement associé f envoie donc la base canonique sur une BON. c'est donc une isométrie vectorielle. Donc M est orthogonale. ■

Notation III.1. On note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales. C'est le groupe orthogonal.

Proposition III.2 Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. M est une matrice orthogonale
2. Les colonnes de M forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n .
3. $MM^T = I_n$ et $M^T M = I_n$, ie M est inversible et $M^{-1} = M^T$.
4. Les lignes de M forment une base orthonormale.

Démonstration. Supposons que la matrice M est orthogonale, alors c'est la matrice de passage de la base canonique à une BON, donc ces colonnes forment une BON.

En particulier, lorsque l'on calcule $M^T M$ en décomposant M par ses colonnes, on obtient :

$$M^T M = \begin{pmatrix} \text{---} C_1 \text{---} \\ \text{---} C_2 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} C_n \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ C_1 & C_2 & C_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} (\text{---} C_i \text{---}) \begin{pmatrix} | \\ C_j \\ | \end{pmatrix} &= \langle c_i, c_j \rangle \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

où c_i et c_j sont les vecteurs de \mathbb{R}^n dont les coordonnées dans la base canonique sont C_i et C_j .

On retrouve bien la matrice identité. Ainsi, $M^T M = I_n$.

On en déduit que $M^T = M^{-1}$ et donc $MM^T = I_n$.

On a donc :

$$(1) \implies (2) \quad (1) \implies (3)$$

Réciproquement, si on suppose (2), on a alors : que M est la matrice de passage de la base canonique vers une BON. et donc $M \in O(n)$. D'où (2) \implies (1).

Si on suppose maintenant que $M^T M = I_n$, alors le calcul ci dessus montre que les colonnes de M forment une BON. D'où (3) \implies (1).

Enfin, on en déduit que M est orthogonale si et seulement si M^T est une matrice orthogonale et donc que les lignes de M forment une BON si et seulement si les colonnes de M forment une BON. ■



Une propriété évidente à avoir en tête : si X et Y sont deux matrices colonnes, correspondant aux coordonnées des vecteurs x et y dans la base canonique, alors :

$$\langle x, y \rangle = X^T Y$$

à condition d'identifier les réels et les matrices de taille 1×1 .



L'inverse et la transposée d'une matrice orthogonale sont donc des matrices orthogonales, plus précisément, l'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée.

On peut enfin montrer qu'un endomorphisme est une isométrie en utilisant sa matrice :

Proposition III.3 Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est une isométrie vectorielle.
2. dans toute base orthonormale, la matrice associée à u est orthogonale.
3. il existe une BON telle que la matrice associée à u dans cette base est orthogonale.

Démonstration. Supposons que u est une isométrie vectorielle, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON. On a alors la famille $\mathcal{C} = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une BON. ainsi, $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice orthogonale. C'est valable pour toutes les BON \mathcal{B} .

D'où :

$$(1) \implies (2) \quad (1) \implies (3)$$

(2) \implies (3) étant évident, on suppose donc qu'il existe une BON \mathcal{B} , telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice orthogonale, ie telle que $\mathcal{C} = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une BON. L'endomorphisme u envoie donc une BON en une BON et donc u est une isométrie. ■

III.2 Propriétés

Proposition III.4 Toute matrice orthogonale est inversible.

L'ensemble des matrice orthogonales est stable par multiplication et par passage à l'inverse.



Cela justifie l'utilisation du terme : « groupe orthogonal ».

Démonstration. On a déjà vu que toute matrice orthogonale est inversible et que $M^{-1} = M^T$.

On a aussi remarqué que si $M \in O(n)$ alors $M^{-1} \in O(n)$.

Soit A et B orthogonale, on a alors :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$$

ainsi, AB est aussi orthogonale. ■

Proposition III.5 Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à $+1$ ou -1 .

Démonstration. On applique le déterminant à $M^T M = I_n$, ce qui donne $\det(M)^2 = 1$. ■





On découpe alors les isométries en deux parties : les isométries directes (telles que $\det(M) = 1$) et les isométries indirectes ($\det(M) = -1$). Notons que les rotations du plan sont directes, mais que les réflexions sont indirectes.

★ **Groupe spécial orthogonal**

Proposition III.6 L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est stable par multiplication et par passage à l'inverse.

Notation III.2. On note cet ensemble $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$, c'est le groupe spécial orthogonal d'ordre n .

 $SO(n)$ est donc un sous-groupe du groupe $O(n)$, lui-même un sous-groupe de GL_n .

 L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant -1 n'est pas stable par multiplication puisque le produit de deux matrices de déterminant -1 est une matrice de déterminant 1.

Démonstration. Soit A et B deux matrices de SO_n . On a alors : AB est orthogonal et $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$, ainsi : $AB \in SO_n$.

On a aussi A^{-1} est orthogonal et $\det(A^{-1}) = 1$, donc $A^{-1} \in SO_n$. ■

IV Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

IV.1 Orientation


Définition IV.1 Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux BON.

La matrice M de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' peut être de déterminant 1 ou -1 .

Dans le cas où M est de déterminant 1, on dit que les BON \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont la même orientation.

Dans le cas où M est de déterminant -1 , on dit que les BON \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont d'orientation contraire.

Orienter l'espace c'est choisir une BON de référence. Les BON qui ont la même orientation sont alors orthonormales directes, tandis que les BON d'orientation contraire sont orthonormales indirectes (ou rétrogrades).

 Pour mesurer des produits scalaires (et donc des normes), on a besoin d'une BON. On a besoin d'orienter l'espace pour mesurer des angles orientés ! Orienter l'espace permet aussi de définir le produit mixte (voir plus loin). Orienter l'espace consiste donc à juste choisir une BON de référence et dire : celle-ci est directe. En pratique, en SI et en physique on oriente toujours l'espace de la même manière (avec la main droite : le premier vecteur sur le pour, le deuxième sur l'index et le dernier sur le majeur). Mais ceci n'est qu'une convention. Si on a orienté l'espace en choisissant la BON \mathcal{B} directe, alors une base \mathcal{C} (qui peut-être ou pas orthonormée) est dans le sens directe si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) > 0$, rétrograde sinon.

★ **Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3**

Lorsqu'un espace euclidien E de dimension n est orienté, on cherche à orienter les sous-espaces vectoriels de E . Le seul cas au programme est celui où E est de dimension 3.

Dans un espace euclidien orienté de dimension 3 :

- On oriente une droite D en choisissant un vecteur directeur (ie une base de D) de norme 1.
On choisit donc u_1 un vecteur de norme 1 à partir de celui-ci on peut le compléter en une base orthonormée directe (u_1, u_2, u_3) .
On parle d'**axe** pour une droite orientée.
- On oriente un plan Π , en prenant une base (u, v) orthonormée du plan et en complétant par un vecteur orthogonal w normée pour avoir une base (u, v, w) orthonormée directe.
On peut orienter le plan de deux manière en choisissant w ou $-w$.

Dans un espace euclidien orienté de dimension 2 : on peut de la même manière orienter une droite D de \mathbb{R}^2 : en choisissant un vecteur u_1 de norme 1. On peut alors compléter u_1 en un BOND (u_1, u_2) . On peut choisir u_1 ou $-u_1$ pour orienter la droite.

IV.2 Produit mixte

Dans le cas général : si E est un espace de dimension n et (u_1, \dots, u_n) est une famille de n vecteurs de E , alors $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ dépend du choix de la base \mathcal{B} : quand on change de base, on change la matrice des coordonnées de la famille, donc on change le déterminant. La formule est :

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

notons que c'est le déterminant de la matrice de passage qui intervient.

On se place maintenant dans \mathbb{R}^2 muni d'une base orthonormée directe notée \mathcal{B} . Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^2 , alors le réel $\det_{\mathcal{B}}(u, v)$ est indépendant du choix de la base \mathcal{B} . En effet, si \mathcal{B}' est une autre base (toujours orthonormée directe), alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(u, v) = \underbrace{\det(\mathcal{B})}_{=1} \det_{\mathcal{B}}(u, v)$$

Ceci amène à la définition suivante :

Définition IV.2 Pour u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^2 on appelle produit mixte de u et v le réel $\det_{\mathcal{B}}(u, v)$ où \mathcal{B} est une base orthonormée directe quelconque de \mathbb{R}^2 ,

De la même manière, pour u, v et w trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , on appelle produit mixte de u, v et w le réel $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$, où \mathcal{B} est une base orthonormée directe quelconque de \mathbb{R}^3 .

Notation IV.1. On note $[u, v] = \det_{\mathcal{B}}(u, v)$ le produit mixte dans \mathbb{R}^2 et $[u, v, w]$ dans \mathbb{R}^3 .



D'une manière générale, si E est un espace euclidien orienté de dimension n et (u_1, \dots, u_n) est une famille de vecteurs alors $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ ne dépend pas du choix de \mathcal{B} et donc on peut définir le produit mixte de n vecteurs : $[u_1, \dots, u_n]$. Le produit mixte est donc simplement un autre nom pour le déterminant.



En dimension 2, le produit mixte $[u, v]$ représente l'aire algébrique du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs. En dimension 3, le produit mixte $[u, v, w]$ représente le volume algébrique du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.

IV.3 Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3

Définition IV.3 Soit u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , il existe alors un unique vecteur w de \mathbb{R}^3 tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, [u, v, x] = \langle w, x \rangle$$

Ce vecteur w est appelé le produit vectoriel de u par v .

Démonstration. En effet, l'application : $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 . Donc il existe un unique vecteur w vérifiant la condition. ■

Notation IV.2. On note $u \wedge v$. On a donc la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, [u, v, x] = \underset{\mathcal{B}}{\det}(u, v, x) = \langle u \wedge v, x \rangle$$

avec \mathcal{B} une BOND quelconque.

Proposition IV.1 — Propriétés du produit vectoriel.

L'application : $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée. Autrement dit, on a :

- à u fixé, $v \mapsto u \wedge v$ est linéaire,
- à v fixé, $u \mapsto u \wedge v$ est linéaire,
- $u \wedge v = -v \wedge u$.

On a :

$$u \wedge v = 0 \iff u \text{ et } v \text{ sont colinéaires}$$

Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v .

Si u et v sont non colinéaires, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de \mathbb{R}^3 .

Démonstration. On fixe u , et on considère $v_1 + \alpha v_2$ une combinaison linéaire de vecteurs de \mathbb{R}^3 . Pour un vecteur x quelconque de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} [u, v_1 + \alpha v_2, x] &= \underset{\mathcal{B}}{\det}(u, v_1 + \alpha v_2, x) && \mathcal{B} \text{ BOND quelconque de } \mathbb{R}^3 \\ &= \underset{\mathcal{B}}{\det}(u, v_1, x) + \alpha \underset{\mathcal{B}}{\det}(u, v_2, x) && \text{linéarité du déterminant} \\ &= \langle u \wedge v_1, x \rangle + \alpha \langle u \wedge v_2, x \rangle && \text{définition du produit vectoriel} \\ &= \langle (u \wedge v_1 + \alpha u \wedge v_2), x \rangle && \text{linéarité du produit scalaire} \end{aligned}$$

Par définition du produit vectoriel, on peut ainsi écrire que :

$$u \wedge (v_1 + \alpha v_2) = u \wedge v_1 + \alpha u \wedge v_2$$

Pour l'antisymétrie, on fixe u et v dans \mathbb{R}^3 et un vecteur x quelconque de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}\langle u \wedge v, x \rangle &= [u, v, x] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, x) \\ &= -\det_{\mathcal{B}}(v, u, x) = -\langle v \wedge u, x \rangle\end{aligned}$$

Cette relation montre alors que $u \wedge v = -v \wedge u$.

Supposons que u et v soient deux vecteurs de \mathbb{R}^3 colinéaires, alors l'application :

$$x \mapsto [u, v, x] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, x) \text{ est l'application nulle}$$

donc $u \wedge v = 0$.

Réciproquement : si $u \wedge v = 0$ c'est que l'application ci-dessus est nulle, et donc qu'il est impossible d'ajouter un vecteur x à la famille (u, v) pour obtenir une famille (u, v, x) qui soit une base de \mathbb{R}^3 . c'est donc que (u, v) est liée d'après le résultat sur les bases incomplètes.

On a aussi :

$$[u, v, u] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, u) = 0 \text{ donc } \langle u \wedge v, u \rangle = 0$$

ce qui signifie donc que $(u \wedge v) \perp u$, on obtient de même $(u \wedge v) \perp v$.

Supposons maintenant que u et v soient non colinéaire (ie que (u, v) est une famille libre). Montrons que $(u, v, u \wedge v)$ est libre. Pour cela, on forme l'équation $\alpha u + \beta v + \gamma u \wedge v = 0$. On prend le produit scalaire avec $u \wedge v$ pour obtenir $\gamma \|u \wedge v\|^2 = 0$ donc $\gamma = 0$ puisqu'on a vu que $u \wedge v \neq 0$. Il reste $\alpha u + \beta v = 0$ qui donne $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ car (u, v) est libre.

On a donc une famille libre donc une base. de plus :

$$[u, v, u \wedge v] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \|u \wedge v\|^2 > 0$$

donc cette base est directe. ■

Proposition IV.2 — Expression analytique du produit vectoriel. Soit \mathcal{B} une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 , et soit $u = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$ et $v = (x', y', z')_{\mathcal{B}}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Alors, on a :

$$u \wedge v = (yz' - y'z, zx' - xz', xy' - x'y)_{\mathcal{B}}$$

On a ainsi directement accès aux coordonnées de $u \wedge v$ en fonction de celles de u et de v .

Démonstration. C'est lié au calcul en développant le déterminant selon la dernière colonne

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) &= \begin{vmatrix} x & x' & a \\ y & y' & b \\ z & z' & c \end{vmatrix} = (yz' - y'z)a - (xz' - zx')b + (xy' - x'y)c \\ &= \langle u \wedge v, w \rangle\end{aligned}$$
■



Il est important de retenir la démonstration pour pouvoir retrouver rapidement la formule.

IV.4 Interprétation géométrique

Dans cette partie, on voit rapidement (sans démonstration) comment le produit scalaire et l'orientation de l'espace permettent de donner une définition à l'angle entre deux vecteurs.

Définition IV.4 Soient u et v deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^3 .

La mesure de l'angle non orienté des vecteurs u et v est l'unique réel $\theta \in [0, \pi]$, tel que :

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos(\theta)$$

comme on l'a vu c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui permet la définition du cosinus.

Il s'agit ici d'un angle géométrique, ie entre 0 et π . Il n'est pas orienté.

Proposition IV.3 Soient u et v deux vecteurs non nuls et non liés et P le plan engendré par (u, v) . Soit w un vecteur unitaire orientant P .

Alors on a :

$$u \wedge v = \|u\| \|v\| \sin(\theta) w$$

où θ est une mesure de l'angle orienté de u et v selon w dans le plan P .

Démonstration. ADMIS. ■

V Isométries vectorielles du plan euclidien

V.1 Matrice de $O_2(\mathbb{R})$

Proposition V.1 Une matrice de $O_2(\mathbb{R})$ est de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

En particulier :

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

C'est l'ensemble des rotations vectorielles.



Les isométries vectorielles de \mathbb{R}^2 sont donc :

$$\text{les rotations de la forme} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{les réflexions de la forme} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $O_2(\mathbb{R})$.

On a : les relations suivantes :

$$a^2 + c^2 = 1 \quad \text{première colonne orthonormée}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \text{première ligne orthonormée}$$

$$b^2 + d^2 = 1 \quad \text{deuxième colonne orthonormée}$$

$$ab + cd = 0 \quad \text{première et deuxième colonne orthogonale}$$

On peut donc écrire $a = \cos \theta$ et $c = \sin \theta$, de la deuxième, on obtient alors : $b = \sin \theta$ ou $b = -\sin \theta$, puis $d = \cos \theta$ ou $d = -\cos \theta$

Supposons $b = \sin \theta$, alors on obtient :

$$\cos \theta \sin \theta + \sin \theta d = 0,$$

d'où $d = -\cos \theta$.

Supposons $b = -\sin \theta$ et on obtient de même : $d = \cos \theta$.

On a donc bien l'une des deux formes ci-dessus. ■

Proposition V.2 Soit deux matrices $R(\theta)$ et $R(\theta')$ de rotation de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta')R(\theta) = R(\theta + \theta')$$

En particulier, la multiplication est commutative dans SO_2 .

Démonstration. Il suffit de faire le produit :

$$\begin{aligned} R(\theta)R(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -\sin \theta' \cos \theta - \sin \theta \cos \theta' \\ \sin \theta' \cos \theta' + \sin \theta \cos \theta & \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\ &= R(\theta')R(\theta). \end{aligned}$$

■

V.2 Interprétation géométrique

Soit maintenant \mathcal{P} le plan orienté, c'est à dire que l'on a muni le plan d'un repère orthonormé direct.

Les isométries de \mathcal{P} correspondent aux isométries vectorielles, donc aux matrices orthogonales.

Les isométries de \mathcal{P} directes, correspondent aux matrices de $SO_2(\mathbb{R})$. Il s'agit donc des isométries vectorielles positives ou des rotations vectorielles planes. Cet ensemble est noté $SO(\mathcal{P})$.

Pour une telle rotation r , il existe un réel θ unique à 2π près tel que quelque soit la BON \mathcal{B} directe, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

le réel θ est alors une mesure de l'angle de cette rotation, qui est alors la rotation d'angle θ .

La composée de deux rotations est une rotation. Plus précisément, la composée des rotations d'angle θ et d'angle θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$. La composition est donc commutative dans $SO(\mathcal{P})$.

Si un vecteur v a pour coordonnées (x, y) dans une BON de \mathcal{P} , alors son image par la rotation r d'angle θ a pour coordonnées (x', y') (toujours dans la base \mathcal{B}) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On constate l'analogie avec les complexes :

$$x' + iy' = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy)$$

ce qui justifie l'écriture complexe de la rotation.

Proposition V.3 En identifiant le plan orienté et les complexes, la rotation r d'angle θ est l'application :

$$z \longmapsto e^{i\theta} z$$

On obtient aussi :

Proposition V.4 Les isométries vectorielles d'un plan euclidien \mathcal{P} sont soit des rotations soit des réflexions.

La composée de deux réflexions est une rotation.

Démonstration. C'est la classification des matrices de $O_2(\mathbb{R})$.

On voit que si A et B sont deux réflexions, alors : AB est de déterminant 1, donc une rotation. ■

VI Isométries vectorielles de l'espace euclidien

On considère E un espace euclidien de dimension 3. On va alors classifier les isométries de E .

VI.1 Matrice de $O_3(E)$

Proposition VI.1 Soit $u \in O(E)$. Alors on a :

- Si $\det(u) = 1$ (ie $u \in SO(E)$), alors il existe une base orthonormée (que l'on peut choisir directe) \mathcal{B} de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- Si $\det(u) = -1$ (ie $u \in O(E) \setminus SO(E)$), alors il existe une base orthonormée (que l'on peut choisir directe) \mathcal{B} de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Démonstration. Considérons $u \in O_3(E)$, alors les valeurs propres complexes de u sont toutes de modules 1, et il existe au moins une valeur propre réelle (donc 1 ou -1 est valeur propre).

Supposons $\det(u) = 1$, alors on a plusieurs choix (selon l'ordre géométrique de la valeur propre 1) :

- Soit $\dim(E_1(u)) = 3$, et donc u est l'identité. Ce qui correspond au cas $\theta = 0$ ci-dessus.
- Soit $\dim(E_1(u)) = 2$, et donc $E_1(u)$ est un plan stable. Le problème est que dans ce cas : $(E_1(u))^\perp$ est une droite stable, donc il y a une autre valeur propre (qui n'est pas 1) que l'on note λ . u est donc diagonalisable. Les valeurs propres de u sont donc 1 (ordre géométrique et algébrique 2) et λ d'ordre 1. Comme χ_u est réel, on a nécessairement $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc $\lambda = -1$. Ceci est impossible puisque $\det(u) = 1$. Donc ce cas ne se produit pas.
- Soit $\dim(E_1(u)) = 1$, dans ce cas $E_1(u)$ est une droite stable notée D et $(E_1(u))^\perp$ est un plan stable noté Π . Dans une base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ orthonormée directe, avec f_1 base de D et donc (f_2, f_3) base de Π , la matrice de u est diagonale par bloc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme induit par u sur Π est aussi une isométrie (u conserve la norme donc \tilde{u} aussi), de plus : $\det(\tilde{u}) = 1$ (car la matrice de \tilde{u} dans (f_2, f_3) est : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$).

On applique le résultat précédent qui donne :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si \mathcal{B} n'est pas directe, on peut remplacer f_1 par $-f_1$. Donc on peut toujours supposer u directe.

- Soit $\dim(E_1(u)) = 0$ et donc -1 n'est pas valeur propre. Dans ce cas les trois valeurs propres complexes sont $(-1, -1, -1)$ ou $(-1, \lambda, \bar{\lambda})$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, mais dans tous les cas $\det(u) = -1$ ce qui n'est pas possible.

Supposons maintenant que $\det(u) = -1$

On procède de même en considérant l'ordre géométrique de la valeur propre -1 :

- Si $\dim(E_{-1}(u)) = 3$, et donc $u = -id$ est l'identité. Ce qui correspond au cas $\theta = \pi$ ci-dessus.
- Si $\dim(E_{-1}(u)) = 2$, alors comme ci-dessus, cela signifie qu'une droite est stable et donc qu'il y a une deuxième valeur propre réelle, qui doit donc être 1 . Donc le déterminant est égal à 1 ce qui n'est pas possible.
- Si $\dim(E_{-1}(u)) = 1$, alors c'est une droite D , et idem qu'au dessus D^\perp est un plan stable Π . On construit de même une base (f_1, f_2, f_3) base orthonormée avec f_1 base de D et (f_2, f_3) base de Π , On note toujours \tilde{u} l'endomorphisme induit par u sur Π . Comme ci-dessus, \tilde{u} est une isométrie et en regardant la matrice, on constate que son déterminant est 1 . On applique alors le résultat sur $SO_2(\mathbb{R})$ pour avoir la forme de la matrice :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

de la même manière, si la base construite n'est pas directe, alors on remplace f_1 par $-f_1$.

- Si $\dim(E_{-1}(u)) = 0$, c'est que -1 n'est pas valeur propre donc les valeurs propres sont $(1, 1, 1)$ ou $(1, \lambda, \bar{\lambda})$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, mais dans tous les cas $\det(u) = -1$ ce qui n'est pas possible.

■

VI.2 Interprétation géométrique

Pour les isométries d'un espace euclidien de dimension 3, on a le tableau suivant :

| $\dim(E_1(u))$ | Nature de u | Type d'isométrie |
|----------------|---|------------------|
| 0 | antirotation d'axe $E_{-1}(u)$ cas particulier : $-Id_E$ | - |
| 1 | rotation d'axe $E_1(u)$ cas particulier : demi tour | + |
| 2 | réflexion par rapport au plan $E_1(u)$ | - |
| 3 | Id_E | + |

Une antirotation d'axe D est une composée d'une symétrie par rapport au plan $\Pi = D^\perp$ et d'une rotation par rapport à D .



On peut aussi (en exercice) refaire ce tableau en considérant $\dim(E_{-1}(u))$.



Bien repérer quelque cas particulier pour lesquels, 1 et -1 sont valeurs propres :

- demi-tour :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

C'est une rotation d'angle π .

– Réflexion (symétrie selon un plan) :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est une anti-rotation d'angle 0.

Pour classifier les isométries d'un espace vectoriel de dimension 3, on procède ainsi :

- Si $\det(u) = 1$. On regarde la dimension de $E_1(u)$.
 - Si $\dim E_1(u) = 3$ c'est l'identité.
 - Si $\dim E_1(u) = 1$, $E_1(u)$ est une droite D , c'est l'axe de rotation. On commence par déterminer cet axe de rotation en trouvant f_1 une base de D .
Le plan $\Pi = D^\perp$ est stable par u et l'endomorphisme induit par u sur Π est une rotation. Pour trouver l'angle de la rotation on utilise la relation $Tr(u) = 1 + 2 \cos(\theta)$ qui permet facilement de déterminer θ au signe près.
Pour connaître le signe exact (ie le « signe » de l'angle), on prend un vecteur f_2 quelconque non colinéaire à f_1 (par exemple un vecteur de la base canonique), puis on calcule $u(f_2)$. On regarde alors si $(f_1, f_2, u(f_2))$ est directe (dans ce cas l'angle est dans $[0, \pi]$) ou indirect (dans ce cas l'angle est dans $[-\pi, 0]$).
- Si $\det(u) = -1$.
 - Si $\dim E_{-1}(u) = 3$ c'est que $u = -Id$.
 - Si $\dim E_{-1}(u) = 1$ on cherche de même une base f_1 de $D = E_{-1}(u)$, puis on procède de même : on utilise $Tr u = -1 + 2 \cos \theta$ qui donne l'angle au « signe » près. Puis on prend un vecteur f_2 et on regarde si $(f_1, f_2, u(f_2))$ est directe.



On peut aussi construire une BOND $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et déterminer directement la matrice de u dans cette base.

VII Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

VII.1 Définition

Définition VII.1 Un endomorphisme u de E est dit autoadjoint lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Notation VII.1. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.



On parle aussi d'endomorphisme symétrique, à la place d'autoadjoint, mais on préférera autoadjoint.

★ **Caractérisation des projecteurs orthogonaux**

Soit E un espace euclidien. On appelle projecteur orthogonal un projecteur tel que $\text{Im}(p) = \ker(p)^\perp$,

Autrement dit si on a une décomposition $E = F \oplus G$ alors le projecteur sur F parallèlement à G est orthogonal si et seulement si $F = G^\perp$.

On parle de même de symétrie orthogonale et de réflexions (symétrie par rapport à un hyperplan).

Proposition VII.1 Soit E un espace euclidien, et p un projecteur de E . Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si il est autoadjoint.

Démonstration. On suppose que p est un projecteur orthogonal. Soit x et y dans E . On écrit $x = a + u$ avec $a \in \text{Im}(p)$ et $u \in \ker(p)$, et de même $y = b + v$.

On a alors :

$$\langle p(x), y \rangle = \langle a, y \rangle = \langle a, b \rangle + \underbrace{\langle a, v \rangle}_{=0} = \langle a, p(y) \rangle$$

D'où p est autoadjoint.

On suppose p autoadjoint. Soit $a \in \text{Im}(p)$ et $u \in \ker(p)$, on calcule :

$$\langle a, u \rangle = \langle p(a), u \rangle = \langle a, p(u) \rangle = \langle a, 0 \rangle = 0$$

■

VII.2 Matrices symétriques

Soit x et y deux vecteurs de E , \mathcal{B} une BON, et X et Y les matrices colonnes correspondantes à x et y , soit enfin $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice correspondant à u . On a alors :

$$\begin{aligned} \langle u(x), y \rangle &= (MX)^T Y = X^T M^T Y \\ &= \langle x, u^T(y) \rangle \end{aligned}$$

où u^T est l'endomorphisme correspondant à M^T .

Cette relation permet de donner un sens mathématique à la transposée d'une matrice.

On obtient alors :

Proposition VII.2 Si \mathcal{B} est une BON de E et que u est un endomorphisme de E , alors u est symétrique si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Démonstration. Supposons qu'il existe une BON tel que la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ symétrique.

considérons $(x, y) \in E^2$ On écrit les coordonnées dans la BON de x et de y dans des matrices colonnes X et Y . La relation précédente montre que :

$$(MX)^T Y = X^T M^T Y = X^T M Y =$$

ce qui signifie :

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Supposons maintenant que u soit une isométrie, considérons une BON \mathcal{B} quelconque.

Comme u est autoadjoint, on a la relation pour tout couple de vecteurs X et Y :

$$X^T M^T Y = X^T M Y$$

On choisit pour vecteur X et Y les vecteurs e_i de base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ie les vecteurs colonnes avec une 1 sur la i -ième composante et des zéros ailleurs.

On a facilement pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$e_i^T M e_j = M_{i,j}$$

et donc

$$e_i^T M e_j = e_i^T M^T e_j \text{ signifie } M_{i,j} = M_{j,i}$$


Comme i et j sont quelconques, cela signifie que M est symétrique. ■

VII.3 Théorème spectral

Théorème VII.3 Un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.

En particulier un endomorphisme autoadjoint est diagonalisable.

Démonstration. Conformément au programme ce théorème est admis. ■

 Sans aucun doute, le résultat le plus important de la partie algèbre linéaire !

Proposition VII.4 Pour toute matrice symétrique réelle A , il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telle que :

$$A = PDP^{-1} \text{ ou encore } A = PDP^T$$



Bien repérer et indiquer les hypothèses (la matrice doit être symétrique et réelle). Le fait que les vecteurs propres sont orthogonaux est utile : si on n'en connaît certains alors on peut en déduire d'autres.

La matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

est complexe, symétrique. Elle n'est pas diagonalisable, puisque $\chi_M = X^2$ et que M n'est pas nulle.

Démonstration. On met dans P les vecteurs propres, et dans D les valeurs propres correspondantes. Comme ils forment une BON, la matrice P est inversible et orthogonale.

Comme P est constitué de vecteurs propre, on a :

$$AP = PD \quad \text{et donc } A = PDP^{-1}.$$

■

VII.4 Endomorphisme autoadjoint positif

Définition VII.2 Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint est dit positif lorsque :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$$

Il est dit défini positif lorsque :

$$\forall x \in E, x \neq 0 \implies \langle u(x), x \rangle > 0$$



Ainsi, u est défini positif, si il est positif et si

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0 \iff x = 0$$



Si u est défini positif, alors :

$$\varphi \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \langle u(x), y \rangle \end{cases}$$

est un produit scalaire.

Notation VII.2. On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints strictement positifs.

Proposition VII.5 — caractérisation spectrale. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint.

On sait déjà que u est diagonalisable d'après le théorème spectral.

Alors $u \in \mathcal{S}^+(E)$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives et de même, $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration. On suppose que $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Soit λ une valeur propre et x un vecteur propre associé. On a alors :

$$\langle u(x), x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2 \geq 0$$

donc $\lambda \geq 0$.

Réciproquement, on suppose que toutes les valeurs propres de u sont positives. On considère $x \in E$, et on décompose dans une base orthonormale de vecteurs propres (e_1, \dots, e_n) en écrivant : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \langle u(x), x \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On suppose maintenant que $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Soit encore λ une valeur propre et x un vecteur propre associé. Comme x est non nul, on a maintenant la relation :

$$\lambda \|x\|^2 > 0$$

ce qui donne $\lambda > 0$.

Réciproquement, on suppose que toutes les valeurs propres de u sont strictement positives. On considère un vecteur x tel que : $\langle u(x), x \rangle = 0$. On décompose x sous la forme : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. La relation vu précédemment donne toujours :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = 0$$

Comme c'est une somme de réels positifs, cela donne : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i x_i^2 = 0$ comme $\lambda_i \neq 0$, on a $x_i = 0$. Ainsi, x est nul. ■

Définition VII.3 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

On dit que la matrice A est symétrique positive lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$$

On dit que la matrice A est symétrique définie positive lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \implies X^T A X > 0$$

Notation VII.3. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et définies positives.



Si A est symétrique définie positive alors :

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto X^T A Y \end{array} \right.$$

est un produit scalaire.

De même que pour les endomorphismes on a la caractérisation spectrale :

Proposition VII.6 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On sait déjà que A est diagonalisable d'après le théorème spectral.

Alors A est positive si et seulement si toutes ces valeurs propres sont positives, et A est strictement positive si et seulement si toutes ces valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration. Il suffit de considérer les endomorphismes canoniquement associés. ■

Espaces euclidiens

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

★ Rappels de première année

Exercice 1

1. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire.
2. On note \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques. Montrer que \mathcal{A}_n est le supplémentaire orthogonal de \mathcal{S}_n .
3. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice réelle. Expliquer pourquoi :

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \quad \text{avec } M = (m_{i,j})$$

existe et est égal à $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - a_{j,i})^2$.

4. Calculer l'orthogonal des matrices diagonales pour ce produit scalaire.
5. Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\text{Tr}(A)| \leq \sqrt{n}N(A)$$

où $N(A)$ est la norme associée à ce produit scalaire.
Étudier le cas d'égalité.

Correction :

1. Très classique, notons que

$$\|A\|^2 = \text{Tr}(A^T A) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$$

donc c'est la norme canonique en identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec \mathbb{R}^{n^2} .

Une BON est la base canonique constituée des matrices $(E_{i,j})_{i,j}$, avec $E_{i,j}$ est la matrice avec un 1 en (i, j) 0 partout ailleurs.

En particulier, on peut vérifier que $(A, E_{i,j}) = a_{i,j}$ (coefficient ligne i colonne j de A).

2. Il existe deux méthodes :

- construire des BON pour \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n :

$$\left((E_{i,i})_{i,i}, \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{i,j} + E_{j,i})_{i < j} \right) \quad \text{BON de } \mathcal{S}_n$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} (E_{i,j} - E_{j,i})_{i < j} \right) \quad \text{BON de } \mathcal{A}_n$$

On vérifie alors facilement que :

$$\left((E_{i,i})_{i,i}, \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{i,j} + E_{j,i})_{i < j}, \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{i,j} - E_{j,i})_{i < j} \right) \quad \text{BON de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Comme la réunion de la BON de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est une BON de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n sont supplémentaires orthogonaux.

- on sait aussi que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = \frac{1}{2} (A + A^T) + \frac{1}{2} (A - A^T)$$

On connaît donc la projection de la matrice A sur les matrices \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n .

Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On considère ensuite deux matrices $A \in \mathcal{S}_n$ et $B \in \mathcal{A}_n$. On a :

$$\begin{aligned}(A, B) &= \text{Tr}(A^T B) = \text{Tr}(AB) \text{ car } A \in \mathcal{S} \\ &= \text{Tr}(B^T A) && \text{car } \text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^T) \\ &= -\text{Tr}(BA) = -\text{Tr}(AB) && \text{car } \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)\end{aligned}$$

On en déduit que $(A, B) = 0$ et que on en déduit que \mathcal{A}_n et \mathcal{S}_n sont supplémentaires orthogonaux.

3. La borne inférieure existe car c'est une partie minorée par 0 et non vide de \mathbb{R} . Il faut faire le lien et dire que l'on calcule $d^2(A, \mathcal{S}_n) = d^2(A, P)$, où P est le projeté sur \mathcal{S}_n , la borne inférieure est donc atteinte.

C'est donc aussi $\|Q\|^2$, avec Q le projeté sur \mathcal{A}_n . À partir de là deux choix :

- Utiliser l'expression du projeté : $Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$, ce qui donne :

$$\|Q\|^2 = \frac{1}{4} \sum_i \sum_j (a_{i,j} - a_{j,i})^2.$$

- Utiliser les BON vues à la question précédente :

$$\begin{aligned}\|Q\|^2 &= \sum_{i < j} \left(\left(A, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{i,j} - E_{j,i}) \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i < j} (a_{i,j} - a_{j,i})^2\end{aligned}$$

Un petit calcul montre alors que ces deux expressions sont égales.

4. En utilisant les BON vue à la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \text{Vect}((E_{i,i})_i) && \text{BON} \\ \mathcal{D}^\perp &= \text{Vect}((E_{i,j})_{i \neq j})\end{aligned}$$

C'est à dire les matrices avec des 0 sur la diagonales.

On peut aussi chercher les conditions sur une matrice A pour que pour tout matrices $D \in \mathcal{D}$, $(A, D) = 0$. Cela s'écrit :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{nn} = 0$$

D'où clairement :

$$a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$$

5. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\text{Tr}(A)| = |(A, I_n)| \leq \|A\| \|I_n\|$$

Or on a : $\|I_n\| = \sqrt{n}$. Le cas d'égalité correspond au cas où $A = \lambda I_n$.

Exercice 2 Exemple d'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Montrer que l'application :

$$\left((x, y, z), (x', y', z') \right) \mapsto 2xx' + yy' + 5zz'$$

définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

2. Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie : $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Montrer que

$$(x + y + z)^2 \leq \frac{17}{10}$$

Est-ce qu'il peut y avoir égalité?

Correction :

1. Facile.

2. On applique Cauchy-Schwarz avec : $X = (x, y, z)$ et $Y = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{5})$, cela donne :

$$(x + y + z)^2 = (\langle X, Y \rangle)^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2$$

Il suffit de vérifier que $\|Y\|^2 = \frac{17}{10}$.

Il y a égalité si $\|X\|^2 = 1$ et égalité dans Cauchy-Schwarz. On en déduit que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $X = \lambda Y$. On obtient alors $X = \pm \sqrt{\frac{10}{17}} Y$.

Exercice 3 Exemple de calcul d'orthonormalisation

Soit \mathbb{R}^3 muni de sa structure canonique d'espace euclidien. Vérifier que les vecteurs

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 0, 2), \quad v_3 = (1, 1, 1)$$

forment une base de \mathbb{R}^3 .

Déterminer son orthonormalisée de Gram-Schmidt

Correction : calculatoire mais sans difficulté.

Pour montrer que c'est une base, on peut calculer le déterminant :

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Pour u_1 , on calcule $\|v_1\|$. Ainsi, $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 0, 1)$.

Pour u_2 , on commence par chercher x sous la forme $x = v_2 + \alpha u_1$, avec $\langle x, u_1 \rangle = 0$. Ainsi, $\alpha = - \langle v_2, u_1 \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} 3$.

Au final :

$$\begin{aligned} x &= (1, 0, 2) - \frac{3}{2} (1, 0, 1) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (-1, 0, 1) \end{aligned}$$

On a alors $\|x\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et donc :

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1, 0, 1)$$

Pour u_3 , on cherche x sous la forme $x = v_3 + \alpha u_2 + \beta u_1$.

On veut : $\langle x, u_2 \rangle = 0$ donc

$$\alpha = - \langle v_3, u_2 \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} \langle (-1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle = 0$$

on veut aussi $\langle x, u_1 \rangle = 0$ donc :

$$\beta = - \langle v_3, u_1 \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} \langle (1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle = -\sqrt{2}.$$

Au final :

$$x = v_3 - \sqrt{2} u_1 = (0, 1, 0)$$

et comme x est déjà normé : $u_3 = (0, 1, 0)$. La base obtenue est donc :

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 0, 1) \quad u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1, 0, 1) \quad u_3 = (0, 1, 0)$$

★ **Produit scalaire sur l'ensemble des fonctions de carré intégrable**

Exercice 4 Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. On munit E d'un produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 t^2 f(t)g(t)dt$$

1. Vérifier que c'est bien un produit scalaire.

On note \mathcal{P} l'ensemble des fonctions paires de E et \mathcal{I} l'ensemble des fonctions impaires.

2. Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{I} sont orthogonaux.

3. En déduire que \mathcal{P} est le supplémentaire orthogonal de \mathcal{I} .

On note $G = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

4. Soit $f \in G^\perp$.

Montrer que $g : x \mapsto x^2 f(x)$ est dans G . En déduire que $G^\perp = \{0\}$

Correction :

1. cours pour l'essentiel avec un point important pour la continuité en 0.

2. Si $f \in \mathcal{P}$ et $g \in \mathcal{I}$, alors :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt &= \int_1^{-1} f(-t)g(-t)(-dt) && \text{par changement de variable} \\ &= - \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt && \text{par parité imparité} \end{aligned}$$

et donc $\langle f, g \rangle = 0$.

3. Soit $f \in E$, on écrit :

$$\forall x \in [-1, 1], f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Ainsi : $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$. Comme ils sont orthogonaux la somme est directe et ils sont supplémentaires orthogonaux.

4. $g \in G$ évident. Et donc $\langle f, g \rangle = 0$. Ce qui s'écrit :

$$\int_{-1}^1 t^4 f^2(t)dt = 0$$

intégrale d'une fonction continue et positive nulle donc : $\forall t \in [-1, 1], t^4 f^2(t) = 0$ donc $\forall t \in [-1, 1] \setminus \{0\}, f(t) = 0$, et continuité de f donc $f = 0$.

R L'exercice précédent montre donc que la relation $(G^\perp)^\perp = G$ n'est plus valable en dimension infinie. De même, on peut avoir : $G \oplus G^\perp \neq E$. Plus précisément, G et G^\perp sont toujours en somme directe (puisque leur intersection est réduite au vecteur nul) mais pas toujours supplémentaires.

Correction :

1. facile

2. facile

3. $f(X_0, X_0) = 0$, donc pour que f soit un produit scalaire, il faut que A soit inversible.

4. Si A est symétrique, alors f est clairement symétrique.

Si f est symétrique, alors en prenant $X = E_i$ et $Y = E_j$ on obtient $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout i et j .

Exercice 5 Soit E un espace euclidien de dimension n ($n > 2$). On considère (e_1, \dots, e_n) une famille de n vecteurs de E et on pose $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. On note aussi :

$$f : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i \end{cases}$$

1. Montrer que :

$$\text{Im}(f) \subset G \quad \text{et} \quad \ker(f)^\perp \subset G$$

2. Montrer que f est bijective si et seulement si la famille (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

3. Montrer que $f = Id$ si et seulement si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E .

Correction :

1. Soit $y \in \text{Im}(f)$, alors on sait que y s'écrit :

$$y = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$$

et donc clairement y est combinaison linéaire de vecteurs de la famille (e_1, \dots, e_n) , d'où : $\text{Im}(f) \subset G$.
Soit maintenant $x \in G^\perp$, on a alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (x|e_i) = 0$$

en conséquence : $f(x) = 0$, cad $x \in \ker(f)$. ainsi :

$$G^\perp \subset \ker(f)$$

en prenant l'orthogonal cela donne : $\ker(f)^\perp \subset G$.

REM : avec la règle $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$ et la règle $A^{\perp\perp} = A$ valable ici car on est en dimension finie

2. Supposons f bijective, alors f surjective, ie $\text{Im}(f) = E$ et donc $E \subset G$ cad $E = G$, et donc la famille (e_1, \dots, e_n) est génératrice donc une base car le bon nombre de vecteurs.

REM : on peut aussi faire avec le noyau : f injective, ie $\ker(f) = \{0\}$ et donc $E = \{0\}^\perp \subset G$.

Supposons : (e_1, \dots, e_n) est une base de E . Montrons que f est injective. Pour cela, on prend $x \in \ker(f)$, on a alors :

$$\sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i = 0 \text{ donc } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (x|e_i) = 0 \text{ car la famille est libre}$$

On écrit ensuite les coordonnées dans la base (e_1, \dots, e_n) :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

on a alors :

$$(x|x) = \left(x \left| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right. \right) = \sum_{i=1}^n x_i (x|e_i) = 0$$

et donc $x = 0$. D'où f injective et puisque c 'est un endomorphisme, f est bijective.

3. Si (e_1, \dots, e_n) est une BON de E , alors f est l'identité, c 'est du cours (les coordonnées = les produits scalaires).

Supposons que f soit l'identité. Déjà, (e_1, \dots, e_n) est une base Calculons $f(e_1)$.

On a :

$$f(e_1) = e_1 = \sum_{i=1}^n (e_1|e_i)e_i$$

D'où :

$$(1 - \|e_1\|^2)e_1 + \sum_{i=2}^n (e_1|e_i)e_i = 0$$

Puisque c 'est une base, cela donne :

$$\|e_1\|^2 = 1, \quad \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, (e_1|e_i) = 0$$

Ainsi, e_1 est normé et orthogonal aux autres. on procède de même pour e_2, e_3 , etc.

Exercice 6 Soit E un espace préhilbertien et G un SEV de E de dimension n .

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de G .

On pose :

$$H = \left\{ x - \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i \mid x \in E \right\}$$

Vérifier que H est un SEV de E puis montrer que H et G sont supplémentaires orthogonaux.

Correction :

H est l'image de $Id - P_G$, c'est donc un SEV.

Pour $x \in E$, on a :

$$x = p_G(x) + (x - p_G(x))$$

d'où $E = G + H$.

Soit x dans G et y dans H . On écrit : $y = z - p_G(z)$ et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $x_i = \langle x, e_i \rangle$ et on calcule $\langle x, y \rangle$:

$$\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, p_G(z) \rangle$$

D'un côté :

$$\langle x, z \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, z \rangle$$

de l'autre :

$$\begin{aligned} \langle x, p_G(z) \rangle &= \langle x, \sum_{i=1}^n \langle e_i, z \rangle e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i, z \rangle \langle x, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e_i, z \rangle x_i \end{aligned}$$

D'où $\langle x, y \rangle = 0$.

On a donc montré que $G \perp H$, c'est-à-dire que $G \subset H^\perp$ et $H \subset G^\perp$.

Rappel : cela implique $G \cap H = \{0\}$. à démontrer.

Rappel : comme $E = G + H$ cela implique que $G = H^\perp$. à démontrer

★ **Exercices rapides d'application directe du cours**

Exercice 7 Soit E un espace euclidien, $u \in O(E)$ et F un SEV de E .

Montrer que $u(F^\perp) = (u(F))^\perp$.

Retrouver en particulier que si F est stable par u , alors F^\perp est aussi stable par u .

Correction : Soit $y \in u(F^\perp)$ et $y' \in u(F)$. On écrit alors $y = u(x)$ et $y' = u(x')$ avec $x \in F^\perp$ et $x' \in F$. Clairement, on a :

$$\langle y, y' \rangle = \langle u(x), u(x') \rangle = \langle x, x' \rangle = 0$$

D'où l'inclusion.

Méthode 1 : Pour montrer l'égalité, on peut utiliser les dimensions en utilisant :

$$\dim(u(F)) = \dim(F) \text{ car } u \text{ est un isomorphisme.}$$

On peut rappeler cela rapidement : on considère une base de $F : (e_1, \dots, e_p)$, alors $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ est libre (car u injective), de plus, $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ est génératrice de $u(F)$. Donc, $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ est une base de $u(F)$, donc $\dim(u(F)) = \dim(F)$.

En particulier, si F est stable, on a $u(F) = F$ (en effet $u(F) \subset F$ et égalité des dimensions). Donc : $u(F^\perp) = F^\perp$.

Méthode 2 : On prend une BON de E adaptée à F . On note :

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une BON adaptée à F

$\mathcal{C} = (u(e_1), \dots, u(e_p), u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ est une BON

avec (e_1, \dots, e_p) base de F .

On décompose $x \in (u(F))^\perp$ dans \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \text{ avec } x_i = \langle x, u(e_i) \rangle \\ &= \sum_{i=p+1}^n x_i u(e_i) \text{ car } x \in (u(F))^\perp \\ &= u\left(\sum_{i=p+1}^n x_i e_i\right) \in u(F^\perp) \end{aligned}$$

Application : si F est stable, alors $u(F) \subset F$, donc $u(F) = F$ (par égalité des dimensions).
donc $F^\perp = (u(F))^\perp$, et donc :

$$F^\perp = u(F^\perp)$$

Exercice 8 Soit E un espace pré-hilbertien. $(e_i)_{i \in [1, n]}$ une famille orthonormée.

Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n (\langle x, e_i \rangle)^2 \leq \|x\|^2$$

R Cette inégalité dite **inégalité de Bessel** est à connaître.

Correction : On note $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ le SEV engendré par la famille. Alors :

$$\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \text{ est le projeté de } x \text{ sur } F$$

et donc $\|P_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ donne le résultat.

On rappelle que l'on peut projeter sur un espace de dimension finie (même si l'espace ambiant n'est pas de dimension finie).

On rappelle aussi que comme (e_i) est une famille orthonormale, on a :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

$$\|P_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (\langle x, e_i \rangle)^2$$

Exercice 9 Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que :

$$\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$$

1. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|y) = -(x|f(y))$.
2. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont orthogonaux.
3. En déduire que $\text{Im}(f) = \ker(f)^\perp$.

correction

1. On applique sur $x + y$:

$$\begin{aligned} 0 &= (f(x) + f(y), x + y) = (f(x), x) + (f(y), x) + (f(x), y) + (f(y), y) \\ &= (f(y), x) + (f(x), y) \end{aligned}$$

2. soit $x \in \ker(f)$ et $y \in \text{Im}(f)$. On écrit $y = f(a)$. Ainsi :

$$(x, y) = (x, f(a)) = -(f(x), a) = 0$$

3. On a $\text{Im}(f) \subset \ker(f)^\perp$ et égalité des dimensions par théorème du rang (NB : on est en dimension finie car espace euclidien).

★ **Produit scalaire et polynômes**

Exercice 10 Soit n un entier naturel non nul et (a_0, \dots, a_n) $n + 1$ réels 2 à 2 distincts.

On considère sur $\mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire :

$$(P, Q) \longmapsto \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$$

Soit la famille $(L_i)_{i=0\dots n}$ des polynômes d'interpolation de Lagrange associée aux réels (a_0, \dots, a_n) :

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

1. Montrer que cette famille est une base orthonormée.
2. Soit P un polynôme. Écrire les coordonnées de P dans cette base.

Correction :

1. On calcule :

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^n L_i(a_k) L_j(a_k)$$

or :

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Ainsi, si $i \neq j$, il n'y a que des termes nuls dans la somme et donc $\langle L_i, L_j \rangle = 0$

Si $i = j$, il n'y a que le terme $k = i = j$ qui est non nul et donc $\langle L_i, L_i \rangle = 1$.

Ainsi les (L_i) forment une famille orthonormée et ont le bon nombre de vecteurs donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On calcule :

$$\langle P, L_i \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_i(a_k) = P(a_i)$$

car un seul terme est non nul dans la somme.

Au final :

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$$

★ **Isométrie**

Exercice 11 Soit u un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n .

Montrer que l'application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n définie par :

$$f : x \mapsto x - 2 \langle u, x \rangle u$$

est une isométrie vectorielle de \mathbb{R}^n .

Interpréter cette isométrie.

Correction : on considère un vecteur x de \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \|x - 2 \langle u, x \rangle u\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 4 (\langle u, x \rangle)^2 + 4 (\langle u, x \rangle)^2 \|u\|^2 \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi, f est une isométrie. Si on note $D = \text{Vect}(u)$, alors $f = \text{Id} - 2p$, avec p le projecteur sur D . C'est donc une symétrie.

Exercice 12 Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E .

Montrer que :

$$\ker(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$$

Cela signifie que dans un espace euclidien, une symétrie est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale (au sens où $E_1(f) = E_{-1}(f)^\perp$).

Correction : Il faut faire une inclusion et l'égalité des dimensions.

Soit $x \in \ker(f - \text{Id}_E)$ et $y \in \text{Im}(f - \text{Id}_E)$. Il s'agit de démontrer que $x \perp y$.

On sait que $f(x) = x$ et on sait $\exists a \in E, y = f(a) - a$. On a alors :

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle x, f(a) \rangle - \langle x, a \rangle \\ &= \langle f(x), f(a) \rangle - \langle x, a \rangle\end{aligned}$$

Comme f est une isométrie, on sait que $\langle f(x), f(a) \rangle = \langle x, a \rangle$. D'où $\langle x, y \rangle = 0$, comme x et y sont quelconques, cela signifie que $\ker(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$.

L'égalité des dimension provient du théorème du rang.

★ **Une application théorique du procédé d'orthogonalisation**

Exercice 13 Inégalité de Hadamard

Soit (x_1, \dots, x_n) n vecteurs d'un espace euclidien de dimension n .

Prouver que :

$$|[x_1, \dots, x_n]| \leq \|x_1\| \|x_2\| \cdots \|x_n\|$$

R Géométriquement, l'inégalité exprime que, pour des côtés de longueur donnée, un parallélépipède est de volume maximal s'il est rectangle.

Correction : Déjà si x_1, \dots, x_n sont liés, alors c'est évident, le problème se pose donc quand c'est une base.

On note \mathcal{B} une BOND et on suppose donc que (x_1, \dots, x_n) est une base et on note (u_1, \dots, u_n) la BON obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Montrons alors la propriété suivante :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |[x_1, \dots, x_n]| \leq \|x_1\| \|x_2\| \cdots \|x_k\| [u_1, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n]$$

On note donc :

$$\mathcal{P}(k) : "[x_1, \dots, x_n] \leq \|x_1\| \|x_2\| \cdots \|x_k\| [u_1, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n]"$$

et on procède par récurrence finie.

Montrons la propriété pour $k = 1$: comme $u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, cela donne :

$$|[x_1, \dots, x_n]| = \|x_1\| [u_1, x_2, \dots, x_n]$$

D'où la propriété au rang 1 (qui est dans ce cas une égalité).

Soit $k < n$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vrai.

On sait donc : $[x_1, \dots, x_n] \leq \|x_1\| \|x_2\| \cdots \|x_k\| [u_1, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n]$. Le procédé de Gram-Schmidt consiste à poser :

$$w = x_{k+1} - \sum_{i=0}^k \langle x_{k+1}, u_i \rangle u_i$$

puis à choisir $u_{k+1} = \frac{w}{\|w\|}$.

Comme

$$\sum_{i=0}^k \langle x_{k+1}, u_i \rangle u_i \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$$

on a :

$$\begin{aligned}[u_1, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n] &= [u_1, \dots, u_k, w, x_{k+2}, \dots, x_n] \\ &= \|w\| [u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n]\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que :

$$\|w\| \leq \|x_{k+1}\|$$

Pour cela, on a (comme (u_1, \dots, u_n) est une BON) :

$$\|x_{k+1}\|^2 = \sum_{i=0}^n (\langle x_{k+1}, u_i \rangle)^2$$

et comme w est le projeté de x_{k+1} sur (u_{k+1}, \dots, u_n) , on a :

$$\|w\|^2 = \sum_{i=k+1}^n (\langle x_{k+1}, u_i \rangle)^2$$

Ainsi : $\|w\| \leq \|x_{k+1}\|$ (c'est en fait l'inégalité de Bessel). Ce qui démontre l'hérédité.

À la fin, on obtient :

$$\left| [x_1, \dots, x_n] \right| \leq \|x_1\| \|x_2\| \cdots \|x_n\| \underbrace{\left| [u_1, \dots, u_n] \right|}_{=\pm 1}$$

Autre correction : si on se contente d'orthogonaliser (sans normaliser les vecteurs), on note encore : (u_1, \dots, u_n) la base obtenue.

La matrice P de passage de (x_1, \dots, x_n) à (u_1, \dots, u_n) est triangulaire supérieure avec sur la diagonale les valeurs de $\langle x_i, u_i \rangle$. Ainsi,

$$|\det(P)| = \prod_{i=1}^n |\langle x_i, u_i \rangle| \leq \prod_{i=1}^n \|u_i\|.$$

$$\text{Or } \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(P) \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)}_{=\pm 1}$$

★ Théorème spectral

Exercice 14 Soit $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$,

où a, b et c sont trois réels non nuls vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

1. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés à M .
3. Préciser la nature géométrique de l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à M .

Correction :

1. La matrice M est diagonalisable car réelle et symétrique.
2. On a $\text{rang}(M) = 1$, donc 0 est valeur propre d'ordre géométrique (donc algébrique car M diagonalisable) 2. La somme des valeurs propres fait la trace donc 1. Donc l'autre valeur propre est 1 (de multiplicité 1).

Il faut ensuite trouver des bases des sous-espaces propres. On a :

$$E_0 = \ker(M) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \right\}$$

(c'est un plan). Pour E_1 , il faut prendre un vecteur orthogonal. Une base de E_1 est par exemple $((a, b, c))$.

3. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé, alors u est autoadjoint (car M est symétrique) et u est un projecteur (car $M^2 = M$ donc $u \circ u = u$). Ainsi, u est un projecteur orthogonal sur (la droite) E_1 .

★ Produit mixte et vectoriel

Exercice 15 On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ orienté par une BOND.

1. Démontrer la relation :

$$\forall (u, v, w) \in E^3, u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$$

2. Démontrer la relation :

$$\forall (u, v) \in E^2, \|u \wedge v\|^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$$

3. Résoudre pour tout $(a, b) \in E^2$, l'équation $a \wedge x = b$ d'inconnue x .

Correction :

1. On peut le faire avec les coordonnées dans une BOND. On note :

$$u = (a, b, c), \quad v = (d, e, f), \quad w = (g, h, i) \quad \text{coordonnées dans une BOND}$$

On a :

$$v \wedge w = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \\ g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} ei - fh \\ fg - di \\ dh - eg \end{pmatrix}$$

avec la technique habituelle pour retrouver le calcul avec 3 déterminants.

Il faut alors calculer :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} ei - fh \\ fg - di \\ dh - eg \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} ei - fh \\ fg - di \\ dh - eg \\ ei - fh \\ fg - di \\ dh - eg \end{bmatrix} \\ = \begin{pmatrix} b(dh - eg) - c(fg - di) \\ c(ei - fh) - a(dh - eg) \\ a(fg - di) - b(ei - fh) \end{pmatrix}$$

On factorise pour faire apparaître v et w :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} ei - fh \\ fg - di \\ dh - eg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bdh + cdi - beg - cfg \\ cei + aeg - cfh - adh \\ afg + bfh - adi - bei \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} d(bh + ci) - g(be + cf) \\ e(ci + ag) - h(cf + ad) \\ f(ag + bh) - i(ad + be) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} d(ag + bh + ci) - g(ad + be + cf) \\ e(bh + ci + ag) - h(be + cf + ad) \\ f(ci + ag + bh) - i(cf + ad + be) \end{pmatrix}$$

On voit que l'on a :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} ei - fh \\ fg - di \\ dh - eg \end{pmatrix} = (ag + bh + ci) \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} - (ad + be + cf) \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \\ = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$$

Méthode 2 : Supposons que v et w ne soit pas colinéaire, alors $(v, w, v \wedge w)$ base directe de E . On note $x = u \wedge (v \wedge w)$. Le vecteur x se décompose dans cette base :

$$x = \alpha v + \beta w + \gamma v \wedge w$$

en prenant le produit scalaire avec $v \wedge w$, on obtient : $\gamma = 0$. Il reste à vérifier que $\alpha = (u \cdot w)$ et $\beta = -(u \cdot v)$.

La vecteur u se décompose dans cette base :

2. On peut le faire avec les coordonnées dans une BOND.

Toujours en notant :

$$u = (a, b, c), \quad v = (d, e, f) \quad \text{coordonnées dans une BOND}$$

On a :

$$a \wedge w = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 &= (bf - ce)^2 + (cd - af)^2 + (ae - bd)^2 \\ &= (bf)^2 + (ce)^2 + (cd)^2 + (af)^2 + (ae)^2 + (bd)^2 - 2(bfce + cda f + aebd) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^2 &= (ad + be + cf)^2 \\ &= (ad)^2 + (be)^2 + (cf)^2 + 2(adbe + adcf + bec f) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|u \wedge v\|^2 + (u \cdot v)^2 = (bf)^2 + (ce)^2 + (cd)^2 + (af)^2 + (ae)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (be)^2 + (cf)^2$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|u\|^2 \|v\|^2 &= (a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2) \\ &= (bf)^2 + (ce)^2 + (cd)^2 + (af)^2 + (ae)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (be)^2 + (cf)^2 \end{aligned}$$

3. Si a n'est pas orthogonal à b alors il n'y a pas de solution. Si a est nul, et b non nul, alors il n'y a pas de solution. Si a est nul et b nul, alors tout vecteur x de E est solution.

Supposons donc $a \perp b$, et $a \neq 0$.

Déjà, on considère : $\varphi : x \mapsto a \wedge x$. φ est une application linéaire. On cherche les solutions x de $\varphi(x) = b$.

Le noyau de φ est l'ensemble des vecteur colinéaires à a .

On peut donc chercher un vecteur x solution particulière, et les autres solutions seront de la forme $x + \alpha a$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

On cherche ainsi x tel que $a \perp x$. Soit x une telle solution.

Sur le dessin, il semble que x soit colinéaire et dans le même sens que $b \wedge a$. On note $c = a \wedge b$. On a alors :

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 \text{ ie } \|c\| = \|a\| \|b\|$$

d'après la question 2 comme $a \perp b$.

On sait que $\left(\frac{a}{\|a\|}, \frac{b}{\|b\|}, \frac{c}{\|c\|}\right)$ forment une BOND.

On sait aussi que : $x \perp b$ et $x \perp a$. ainsi, on peut écrire :

$$x = (x \cdot c) \frac{c}{\|c\|^2}$$

On a déjà $\|x\| = \frac{|<c,x>|}{\|c\|}$

Comme $a \wedge x = b$, on applique la question 2 en utilisant $x \perp a$:

$$\|a \wedge x\| = \|a\| \|x\| = \|b\|$$

Ainsi :

$$\|x\| = \frac{\|b\|}{\|a\|}$$

Ainsi :

$$|c \cdot x| = \frac{\|b\|}{\|a\|} \|c\| = \|b\|^2$$

Ainsi :

$$x = \pm \|b\|^2 \frac{c}{\|c\|^2} \text{ ie } x = \pm \frac{a \wedge b}{\|a\|^2}$$

Il y a donc deux solutions candidates.

Il reste à vérifier que :

$$\det(a, b, x) = -\det(a, x, b) = -\langle (a \wedge x) \cdot b \rangle = -\|b\|^2 < 0$$

Ainsi, a, b, x est dans le sens rétrograde, ce qui montre que $x = -\frac{a \wedge b}{\|a\|^2}$ est solution, et l'autre non.

Ce que l'on peut aussi écrire :

$$x = \frac{b \wedge a}{\|a\|^2}$$

C'est notre solution particulière.

Réciproquement, (toujours dans le cas où $a \perp b$ et $a \neq 0$), on considère un $\alpha \in \mathbb{R}$.

on pose $x = \frac{b \wedge a}{\|a\|^2} + \alpha a$ On a alors :

$$\begin{aligned} a \wedge x &= a \wedge (b \wedge a) + \alpha a \wedge a \\ &= a \wedge (b \wedge a) = (a \cdot a)b - (a \cdot b)a = \|a\|^2 b \end{aligned}$$

Ainsi : $a \wedge x = b$

★ Projecteur orthogonal et endomorphisme autoadjoint

Exercice 16 Dans un espace E euclidien.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur (ie $p \circ p = p$).

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. p est un projecteur orthogonal (ie $\text{Im } p \perp \text{ker } p$).
2. $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ (continuité)
3. $\forall (x, y) \in E, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$ (autoadjoint)

Ainsi, dans un espace E euclidien, un projecteur est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si c'est un projecteur orthogonal et et seulement si il est continue

Indication : pour montrer que la continuité implique l'orthogonalité, on pourra considérer : $x \in \text{Im } p$ et $y \in \text{ker } p$ et $w = \alpha x + y$ pour α quelconque dans \mathbb{R} .

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie (ie $s \circ s = Id$). Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. s est une symétrie orthogonale (ie $\text{ker}(s - Id) = \text{ker}(s + id)^\perp$),
2. $\forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$ (isométrie)
3. $\forall (x, y) \in E, \langle s(x), y \rangle = \langle x, s(y) \rangle$ (autoadjoint)

Ainsi, dans un espace E euclidien, une symétrie est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

R Attention au vocabulaire : on parle de projecteur orthogonal lorsque $\text{Im } p \perp \text{ker } p$. Bien entendu, un tel projecteur ne conserve pas la norme et donc n'est pas un automorphisme orthogonal (une isométrie).

Par contre, une symétrie orthogonale conserve la norme et est donc une isométrie.

Pour un projecteur p , l'équivalence : p orthogonal si et seulement si p autoadjoint est dans le cours.

Correction :

On suppose que p est un projecteur orthogonal, alors pour $x \in E$, on écrit $x = a + b$ avec $a \in \text{Im}(p)$ et $b \in \text{ker}(p)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|p(x)\|^2 &= \|a\|^2 \\ \|x\|^2 &= \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \end{aligned}$$

D'où la relation et (1) \implies (2).

REM : Cela correspond à l'inégalité de Bessel : la norme du projeté est inférieure à la norme du vecteur.

Supposons la continuité, on considère ensuite $x \in \text{Im } p$ et $y \in \text{ker } p$. On note pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $w = \alpha x + y$.

On a alors :

$$\|w\|^2 = \alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

or $p(w) = \alpha x$ et donc $\|p(w)\|^2 = \alpha^2 \|x\|^2$. L'inégalité donne donc :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq 2\alpha \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Ce qui n'est possible pour toute valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ que si $\langle x, y \rangle = 0$. On en déduit $\text{Im}(p) \subset \text{ker}(p)^\perp$ et l'égalité par le théorème du rang qui donne l'égalité des dimensions. D'où (2) \implies (1) et (1) \iff (2).

Montrons que (1) \iff (3) (c'est du cours).

Supposons maintenant que p est un projecteur orthogonal. Soit x et y dans E . On décompose alors selon $E = \text{ker } p \oplus \text{Im } p$

$$x = p(x) + (x - p(x)) \quad \text{et} \quad y = p(y) + (y - p(y))$$

si bien que :

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle \quad \text{car} \quad \langle p(x), y - p(y) \rangle = 0$$

De même :

$$\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle \quad \text{car} \quad \langle x - p(x), p(y) \rangle = 0$$

Supposons maintenant la propriété :

$$\forall (x, y) \in E, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$$

Soit $x \in \text{ker}(p)$ et $y \in \text{Im}(p)$. On a alors :

$$\langle x, y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle = 0$$

REM : on peut aussi montrer que (3) \implies (2) :

soit $x \in E$, on utilise la propriété avec $y = p(x)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \|p(x)\|^2 &= \langle p(x), p(x) \rangle \\ &= \langle x, p^2(x) \rangle = \langle x, p(x) \rangle \\ &\leq |\langle x, p(x) \rangle| \\ &\leq \|x\| \|p(x)\| \end{aligned}$$

ainsi : $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ et la continuité

Pour les symétries.

Supposons que s est une symétrie orthogonale.

On prend x dans E , et on écrit : $x = a + b$ avec $a \in \text{ker}(s - Id)$ et $b \in \text{ker}(s + id)$. On a alors $s(x) = a - b$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= a^2 + b^2 \quad \text{car} \quad \text{ker}(s - Id) = \text{ker}(s + id)^\perp \\ &= a^2 + (-b)^2 = \|s(x)\|^2 \end{aligned}$$

donc s est une isométrie. et (1) \implies (2).

On suppose que s est une isométrie, donc conserve le produit scalaire. On prend $(x, y) \in E^2$.

$$\langle s(x), y \rangle = \langle s(s(x)), s(y) \rangle = \langle x, s(y) \rangle$$

D'où (2) \implies (3).

Pour (2) \implies (1), on prend $a \in E_1(s)$ et $b \in E_{-1}(s)$. On a :

$$\begin{aligned} \|s(a+b)\|^2 &= \|a-b\|^2 \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

et

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \langle a, b \rangle = \|s(a+b)\|^2$$

D'où $\langle a, b \rangle = 0$.

Pour (3) \implies (1), on prend $a \in E_1(s)$ et $b \in E_{-1}(s)$.

$$\langle a, b \rangle = \langle s(a), b \rangle = \langle a, s(b) \rangle = \langle a, -b \rangle = - \langle a, b \rangle$$

D'où $\langle a, b \rangle = 0$.

★ **Interprétation géométrique des matrices de $O_3(\mathbb{R})$**

Exercice 17 Montrer que l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est une réflexion dont on déterminera l'axe.

Correction :

Il faut déjà vérifier que A est une matrice orthogonale. Pour cela, on fait :

$$AA^T = A^2 \text{ car } A \text{ est symétrique.}$$

et on constate que cela fait l'identité.

Il faut ensuite déterminer le sous-espace propre associé à 1.

$$E_1 = \ker(A - I_3) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On constate que $\text{Rg}(A - I_3) = 1$, donc $\dim(\ker(A - I_3)) = 2$, ainsi, u est une réflexion. On a :

$$E_1 = \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 1, 1))$$

On note donc $f_1 = (1, 2, 0)$, et $f_2 = (0, 1, 1)$. C'est une base (non orthonormée) du plan Π .

Pour déterminer l'axe, on peut prendre :

$$f_3 = f_1 \wedge f_2 = (2, -1, 1)$$

la base (f_1, f_2, f_3) sera donc directe (non orthonormée)

On montre alors que f_3 est une base de E_{-1} soit en vérifiant $u(f_3) = -f_3$. Soit par le raisonnement : f_3 est une base de Π^\perp , or Π est stable donc Π^\perp aussi, donc on a une droite stable donc f_3 est vecteur propre associée à une valeur propre différente de 1 qui ne peut donc être que -1 . ainsi $f_3 \in E_{-1}$ et donc par égalité des dimensions, f_3 base de E_{-1} et bien sûr $E_{-1} = \Pi^\perp$.

Réflexion par rapport au plan d'équation :

$$2x - y + z = 0$$

Exercice 18 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à :

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction :

On constate que S est symétrique et que $S^2 = I_3$. On vérifie que 1 est valeur propre d'ordre 2.

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (0, 1, 1)$$

forment une base de E_1 , donc

$$u_1 \wedge u_2 = (1, -1, 0) \text{ est une base de } E_{-1}$$

Symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation : $x - y + z = 0$.

Exercice 19 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à :

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction : rotation d'axe $D : \text{Vect}((0, 1, 1))$ et d'angle $-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Pour cela, on vérifie que $SS^T = I_3$ et que $\det(S) = 1$. On cherche le sous-espace propre : $E_1 = \text{Vect}((0, 1, 1))$.

Ensuite, on utilise la relation sur la trace pour avoir $\theta = \pm \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Ensuite, on prend $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ et $u_2 = (1, 0, 0)$, comme $u_1 \perp u_2$, on a u_2 qui est dans le plan de la rotation. On prend $u_3 = u_1 \wedge u_2$, et on calcule $\langle f(u_2) \cdot u_3 \rangle = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ pour avoir le signe de θ .

★ **Exercices de concours**

Exercice 20 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$.

On pose :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}\left(\left\{U^k \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\right\}\right)$$

1. Montrer que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $(U^T)^k = U^{n-k}$.
2. Montrer que $(U^k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est une base orthogonale de F .
3. Déterminer la projection orthogonale d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur F .

Correction :

1. Méthode 1 : on vérifie que $U^T = U^{-1}$ et que $U^n = I_n$. Ainsi :

$$(U^T)^k = U^{-k} = U^{n-k}$$

Méthode 2 : On vérifie que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, U^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi utiliser la base canonique et l'endomorphisme f canoniquement associé à U :

$$f(e_1) = e_n, f(e_2) = e_1, \dots, f(e_n) = e_{n-1}$$

D'où le calcul facile de f^k :

$$f^k(e_1) = e_{n-k+1}, \dots, f^k(e_{k+1}) = e_1, f^k(e_{k+2}) = e_2, \dots, f^k(e_n) = e_{n-k}$$

D'où le calcul de U^k . Idem avec $(U^T)^k$.

2. Pour $0 \leq i < j < n$, on a :

$$\begin{aligned} \langle U^i, U^j \rangle &= \text{Tr}\left((U^i)^T U^j\right) \\ &= \text{Tr}(U^{j-i}) \end{aligned}$$

En utilisant :

$$U^{n+i-j} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-j+i} \\ I_{j-i} & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient : $\langle U^i, U^j \rangle = 0$. La famille est orthogonale.

Constituée de vecteurs non nulle, donc c'est une base de l'EV qu'elle engendre ie base de F .

Notons que $\langle U^i, U^i \rangle = \text{Tr}(I_n) = n$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors comme c'est le produit scalaire naturel, on a :

$$\langle A, U^k \rangle = \sum_{j=1}^k a_{n-k+j,j} + \sum_{j=k+1}^n a_{j-k,j}$$

C'est la somme double $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} (U^k)_{i,j}$. C'est donc la somme des coefficients de A , le long de la k -ième « diagonale » les valeurs égales à 1 dans U^k .

On note donc :

$$d_k = \sum_{j=1}^k a_{n-k+j,j} + \sum_{j=k+1}^n a_{j-k,j}$$

et on a :

$$p_F(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d_k U^k$$

Exercice 21 Endomorphisme autoadjoint dans les polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par $(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

On identifie de plus, les polynômes et les applications polynomiales.

1. Montrer que l'application u définie sur E par :

$$u(P) : x \mapsto \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt$$

est un endomorphisme autoadjoint de E .

2. En déduire qu'il existe une base orthonormée (P_0, \dots, P_n) de E formées de vecteurs propre de u .

On note $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées.

3. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y).$$

En déduire $Tr(u)$ en fonction de n .

Correction :

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on fixe alors t , et on note $\varphi : x \mapsto (x+t)^n P(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P(t) t^{n-k} x^k$. φ est clairement une fonction polynomiale (en x) de degré au plus n , ainsi on peut écrire :

$$\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \varphi(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k(t) x^k$$

De plus, $\alpha_k : t \mapsto \binom{n}{k} P(t) t^{n-k}$ est clairement un polynôme en t donc continue.

En intégrant, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 \alpha_k(t) dt \right) x^k$$

on voit donc que $u(P)$ est une fonction polynomiale de degré au plus n .

De plus u est clairement linéaire, donc u est un endomorphisme.

Montrons que u est autoadjoint. Pour cela, on calcule pour $(P, Q) \in E^2$:

$$\begin{aligned} \langle u(P), Q \rangle &= \int_0^1 u(P)(t) Q(t) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (t+u)^n P(u) du \right) Q(t) dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (t+u)^n P(u) Q(t) du dt \end{aligned}$$

il s'agit d'intégrale finie donc on peut échanger les deux intégrales :

$$\begin{aligned}\langle u(P), Q \rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (t+u)^n Q(t) dt \right) P(u) du \\ &= \int_0^1 u(Q)(u) P(u) du = \langle P, u(Q) \rangle\end{aligned}$$

D'où la symétrie.

- Comme u est autoadjoint le théorème spectral s'applique.
- On fixe $y \in \mathbb{R}$, et on décompose la fonction polynomiale $f_y : x \mapsto (x+y)^n$ (qui est bien de degré inférieur ou égal à n) dans la base des vecteurs propres :

$$f_y = \sum_{k=0}^n \langle f_y, P_k \rangle P_k$$

ce qui s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \langle f_y, P_k \rangle P_k(x)$$

Il reste donc à calculer $\langle f_y, P_k \rangle$ qui est une fonctions de y :

$$\begin{aligned}\langle f_y, P_k \rangle &= \int_0^1 (u+y)^n P_k(u) du \\ &= u(P_k)(y) = \lambda_k P_k(y)\end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y).$$

On choisit ensuite $t \in \mathbb{R}$, et on a :

$$2^n t^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k (P_k(t))^2$$

On intègre entre 0 et 1 :

$$\frac{2^n}{n+1} = \sum_{k=0}^n \lambda_k \underbrace{\int_0^1 (P_k(t))^2 dt}_{=1}$$

Ainsi, la trace de u (la somme des valeurs propres) est $\frac{2^n}{n+1}$.

Exercice 22 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$$

- Montrer que $\varphi : P \mapsto (1-X^2)P'' - 2XP'$ est dans $S(E)$.
- Déterminer son spectre.
Quelle est la dimension des sous-espaces propres ?

Correction : On vérifie rapidement que φ est linéaire et de E dans E .

$$\begin{aligned}\langle \varphi(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 ((1-t^2)P''(t) - 2tP'(t)) Q(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 (1-t^2)P'(t)Q'(t) dt\end{aligned}$$

après une i.p.p.

D'où la symétrie.

On sait donc que φ est diagonalisable.

On cherche (λ, P) , avec P non nul tel que : $\varphi(P) = \lambda P$. Cela donne :

$$(1 - X^2)P'' - 2XP' - \lambda P = 0$$

On écrit alors $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$. Comme P est non nul $a_m \neq 0$.

Et on obtient :

$$(1 - X^2) \sum_{k=0}^m a_k k(k-1) X^{k-2} - 2X \sum_{k=0}^m k a_k X^{k-1} - \lambda \sum_{k=0}^m a_k X^k = 0$$

On regarde ensuite le terme de plus haut degré :

$$-a_m m(m-1) X^m - 2m a_m X^m - \lambda a_m X^m + \dots = 0$$

Ainsi :

$$\lambda = -m(m-1) - 2m = -m^2 - m = -m(m+1)$$

Ainsi, les valeurs propres candidates sont les $n+1$ valeurs :

$$\left\{ -m(m+1) \mid m \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$$

Pour vérifier que c'est effectivement des valeurs propres, on peut construire la matrice de φ :

$$\varphi(X^m) = -m(m+1)X^m + m(m-1)X^{m-2}$$

donc c'est une matrice triang sup avec $-m(m+1)$ sur la diagonale et des $m(m-1)$ sur la diagonale « +2 ».

On lit le spectre sur la diagonale.

Comme il y a $n+1$ valeurs propres et que $\dim(E) = n+1$, les sous-espaces propres sont des droites.

R Quand un endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifie pour tout $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{R}_d[X]$ est stable par φ alors la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure.

Exercice 23 Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$ et (a, b) une famille libre de deux vecteurs unitaires de E .

Soit

$$f : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto (a, x)a + (b, x)b \end{cases}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E .
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

Correction :

1. On prend $(a, y) \in E^2$, et on calcule :

$$(f(x), y) = (a, x)(a, y) + (b, x)(b, y)$$

et :

$$(x, f(y)) = (a, y)(a, x) + (b, y)(b, x)$$

2. f étant un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien, il est diagonalisable.

On note $\Pi = \text{Vect}(a, b)$ et on a Π^\perp est un espace de dimension $n-2$.

On constate aussi que $\text{Im}(f) \subset \Pi$ et $\ker(f) \supset \Pi^\perp$.

Il reste à vérifier que ces relations sont des égalités par les dimensions : on a $\text{Im}(f) \subset \Pi$ donc $\text{rg}(f) \leq 2$.

Calculons :

$$f(a) = a + (b, a)bf(b) = (b, a)a + b$$

donc avec $l_1 - (b-a)l_2$ et $l_2 - (b-a)l_1$:

$$f(a - (b,a)b) = (1 - (b,a)^2) a$$

$$f(b - (b,a)a) = (1 - (b,a)^2) b$$

Si $(a,b) = 1$, alors $(a,b) = \|a\|\|b\|$ donc égalité dans Cauchy-shwartz donc vecteur colinéaire ce qui n'est pas possible. Ainsi $(b,a) \neq 1$, et donc $a \in \text{Im}(f)$, et $b \in \text{Im}(f)$, donc $\text{Im}(f) = \Pi$, puis par égalité des dimensions $\ker(f) = \Pi^\perp$. Ainsi, 0 est valeur propre d'ordre géométrique : $n - 2$. Comme on sait que f admet une base orthonomée de vecteur propre, il est clair que les autres vecteurs propres de la base sont dans Π .

Méthode 1 : On regarde ensuite :

$$f(a+b) = (1 + (b,a))(a+b)$$

Ainsi, $1 + (b,a)$ est valeur propre (non nulle car sinon égalité dans Cauchy-shwartz), associée au vecteur propre $a+b$ (non nul).

Le dernier vecteur propre est nécessairement orthogonal à $a+b$, ainsi qu'à tous les autres (il est donc dans Π). Il faut donc trouver un vecteur orthogonal à $a+b$, on voit que $a-b$ convient puisque :

$$(a+b, a-b) = \|a\|^2 - \|b\|^2 = 0$$

d'où l'idée de calculer $f(a-b)$:

$$f(a-b) = (1 - (b,a))a + ((b-a) - 1)b = (1 - (b,a))(a-b)$$

Ainsi, $a-b$ (qui est non nul) est vecteur propre associé à $1 - (b,a)$ (toujours non nuls sinon égalité dans C-S). On a bien obtenu les éléments propres.

Méthode 1 : On cherche des vecteurs propres dans Π , ce qui revient à résoudre :

$$f(a + \beta b) = \lambda(a + \beta b)$$

de paramètre λ d'inconnu β .

avec $l_1 + \beta l_2$, cela donne :

$$f(a + \beta b) = (1 + \beta(a,b))a + (\beta + (a,b))b = \lambda a + \lambda \beta b$$

D'où $\lambda = 1 + \beta(a,b)$ et :

$$\beta + (a,b) = \lambda \beta$$

ce qui donne en remplaçant :

$$(a,b) = \beta^2(a,b)$$

d'où $\beta = \pm 1$ si $(a,b) \neq 0$.

Si $(a,b) = 0$, alors en fait c'est a et b qui sont vecteurs propres associées à 1.

Procédé de normalisation de Gram-Schmidt et applications

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

*

★ Le procédé

Le but du procédé de normalisation de Gram-Schmidt est de construire une base orthonormale d'un espace.

Le principe est de « redresser » les vecteurs un par un pour obtenir une base orthonormée.

On considère donc $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre.

On souhaite construire une famille $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_p)$ qui soit orthonormale et telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i)$$

Pour cela, on procède vecteur par vecteur :

- Il faut prendre v_1 colinéaire à u_1 , comme on veut qu'il soit unitaire, on choisit donc :

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1$$

- (v_1, v_2) doit engendrer le même plan que (u_1, u_2) , on doit donc chercher v_2 comme un combinaison linéaire de (v_1, u_2) . Le plus simple est de procéder en deux étapes :

- on cherche un vecteur temporaire $x = u_2 + \alpha v_1$ (avec α à déterminer), tel que : $\langle x, v_1 \rangle = 0$, ce qui donne : $\alpha = -\langle u_2, v_1 \rangle$, avec un tel choix de α , le vecteur x est orthogonal à v_1 . Géométriquement : on redresse le vecteur en le déplaçant parallèlement à la droite engendré par u_1 pour le rendre orthogonal.
- on pose $v_2 = \frac{1}{\|x\|} x$ pour le normaliser.

Au final, on a donc posé :

$$v_2 = \frac{1}{\|(u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1)\|} (u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1)$$

- (v_1, v_2, v_3) doivent engendrer le même plan que (u_1, u_2, u_3) , on doit donc chercher v_3 comme un combinaison linéaire de (v_1, v_2, u_3) .

On procède encore en deux étapes :

- On cherche un vecteur temporaire $x = u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2$ (avec (α, β) à déterminer), tel que : $\langle x, v_1 \rangle = 0$, et $\langle x, v_2 \rangle = 0$. Cela donne facilement :

$$\alpha = -\langle u_3, v_1 \rangle \quad \text{et} \quad \beta = -\langle u_3, v_2 \rangle$$

le vecteur x est ainsi orthogonal à v_1 et à v_2 .

Géométriquement : on redresse encore le vecteur en le déplaçant parallèlement au plan (v_1, v_2) .

- on pose $v_3 = \frac{1}{\|x\|} x$ pour le normaliser.

Au final, on a donc posé :

$$v_3 = \frac{1}{\|(u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2)\|} (u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2)$$

- à l'étape i , en considérant que les $i-1$ premiers vecteurs (v_1, \dots, v_{i-1}) ont été construit, on cherche le vecteur v_i comme une combinaison linéaire de $(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i)$.

On procède de la même manière :

- On cherche un vecteur temporaire $x = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k v_k$ (avec les (α_k) à déterminer), tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket, \langle x, v_k \rangle = 0$$

Cela donne facilement :

$$\forall k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket, \alpha_k = -\langle u_i, v_k \rangle$$

On pose donc :


$$x = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle u_i, v_k \rangle v_k$$

– On normalise en posant : $v_i = \frac{1}{\|x\|} x$


Pour donner la formule exacte, on a donc posé :

$$v_i = \frac{1}{\left\| u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle u_i, v_k \rangle v_k \right\|} \left(u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle u_i, v_k \rangle v_k \right)$$

Le procédé de Gram-Schmidt est un processus constructif, ie un algorithme. Il n'y a pas de formule qui donne directement le i -ième. Il faut savoir l'appliquer sur un exemple en petite dimension.

 En fait pour calculer x , on projete u_i sur l'orthogonal à l'espace $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$. En effet, le vecteur : $\sum_{k=1}^{i-1} \langle u_i, v_k \rangle v_k$

est le projeté sur l'espace $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$, donc : $u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle u_i, v_k \rangle v_k$ est le projeté sur l'orthogonal de cet espace.

 Si on souhaite simplement avoir une famille orthogonale, il n'est pas nécessaire de normaliser, mais on doit alors poser :

$$v_i = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k$$

★ Exemple de mise en œuvre

On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

On cherche une base (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est orthonormée. On va donc orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$.

On a : $\|1\| = 1$, donc le premier vecteur 1 n'a pas besoin d'être changé et $P_0 = 1$.

Ensuite, on cherche un polynôme Q sous la forme $Q = X + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que : $\langle Q, 1 \rangle = 0$, cela donne :

$$\int_0^1 (x + \alpha) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \alpha x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \alpha = 0$$

D'où $\alpha = -\frac{1}{2}$.

On pose donc $Q = X - \frac{1}{2}$, puis $P_1 = \frac{Q}{\|Q\|}$. On calcule donc la norme de $Q = X - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \|Q\|^2 &= \int_0^1 Q^2(x) dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{4 - 6 + 3}{12} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Ainsi, on pose $P_1 = \sqrt{12} \left(X - \frac{1}{2} \right)$.

On recommence ensuite pour P_2 .

On commence par chercher un polynôme Q de la forme : $Q = X^2 + \alpha P_1 + \beta P_0$ vérifiant :

$$\langle Q, P_0 \rangle = 0 \text{ et } \langle Q, P_1 \rangle = 0$$

Cela donne :

$$\langle X^2, P_0 \rangle + \beta = 0$$

$$\text{donc } \beta = - \int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{3}$$

$$\langle X^2, P_1 \rangle + \alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \alpha &= -\sqrt{12} \int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= -\sqrt{12} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de Q :

$$\begin{aligned} Q &= X^2 - \left(X - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \\ &= X^2 - X + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Puis sa norme :

$$\begin{aligned} \|Q\|^2 &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 + x^2 + \frac{1}{36} - 2x^3 + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3}\right) dx \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{180} (36 + 60 + 5 - 90 + 20 - 30) \\ &= \frac{1}{180} \end{aligned}$$

Ainsi, $\|Q\| = \frac{1}{\sqrt{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$.

Ce qui donne pour finir :

$$\begin{aligned} P_2 &= 6\sqrt{5} \left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right) \\ &= 6\sqrt{5}X^2 - 6\sqrt{5}X + \sqrt{5} \end{aligned}$$

★ Conséquences théoriques

Le procédé d'orthonormalisation de Gramm-schmidt est l'équivalent du théorème de la base incomplète pour les espaces euclidiens :

Dans un espace euclidien, **il existe des bases orthonormales.**

Plus précisément, si on considère une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E , alors on peut construire une base orthonormale $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ vérifiant :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p).$$

En partant d'une famille orthonormale, on peut la compléter en une base puis orthonormaliser cette base, or dans le procédé de Gramm-schmidt si les premiers vecteurs forment une famille orthonormale, il ne sont pas modifié par le procédé d'orthonormalisation. On obtient ainsi le résultat suivant :

Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Cela permet étant donné un sous-espace vectoriel F de construire son supplémentaire orthogonal : on part d'une BON de F que l'on complète en une BON, les vecteurs que l'on ajoute sont alors une base de l'orthogonal de F .

★ Application au calcul du projeté

On considère F un SEV d'un espace euclidien E . On peut même supposer que E est de dimension infinie du moment que l'espace F sur lequel on projette est de dimension finie. Or, si on connaît une BON (u_1, \dots, u_p) de F , alors :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle u_i.$$

Notons que parfois, on veut juste calculer la distance de x à F , ie $\|x - p_F(x)\|$ or cette distance est par définition égale à $\|P_{F^\perp}(x)\|$. Donc parfois, ce n'est pas une BON de F qui nous intéresse, mais une BON de son orthogonal. Si (u_1, \dots, u_p) est une BON de F , alors on complète cette base avec le procédé de gramm-schmidt en une base $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ de E et (u_{p+1}, \dots, u_n) est une base de F^\perp .

★ **Calcul du projeté après utilisation de Gramm-schmidt**

Calculons le projeté de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

En notant (P_0, P_1, P_2) la base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ obtenue par le procédé de Gramm-schmidt précédemment. On a la formule directe :

$$P_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \langle X^3, P_0 \rangle P_0 + \langle X^3, P_1 \rangle P_1 + \langle X^3, P_2 \rangle P_2$$

On doit donc calculer les produits scalaires :

$$\langle X^3, P_0 \rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \langle X^3, P_1 \rangle &= \sqrt{12} \int_0^1 x^3 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \sqrt{12} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) \\ &= \sqrt{12} \frac{3}{40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle X^3, P_2 \rangle &= \int_0^1 x^3 \left(6\sqrt{5}x^2 - 6\sqrt{5}x + \sqrt{5} \right) dx \\ &= \sqrt{5} - \frac{6}{5}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{5} \\ &= \sqrt{5} \left(1 - \frac{6}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{20}\sqrt{5} \end{aligned}$$

Au final, le projeté est :

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) &= \frac{1}{4} + 12 \frac{3}{40} \left(X - \frac{1}{2} \right) + \frac{30}{20} \left(X^2 - X + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{9}{10} \left(X - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2} \left(X^2 - X + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{3}{2}X^2 - \frac{6}{10}X + \frac{1}{20} \end{aligned}$$

★ **Calcul du projeté sans utiliser Gramm-schmidt**

Pour le problème précédent, on peut aussi calculer ce projeté ainsi : on cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tel que :

$$\begin{aligned} \langle 1, X^3 - aX^2 - bX - c \rangle &= 0 \\ \langle X, X^3 - aX^2 - bX - c \rangle &= 0 \\ \langle X^2, X^3 - aX^2 - bX - c \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $aX^2 + bX + c$ sera le projeté de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$, puisque $X^3 - (aX^2 + bX + c)$ sera orthogonal à une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} - c &= 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{a}{4} - \frac{b}{3} - \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{1}{6} - \frac{a}{5} - \frac{b}{4} - \frac{1}{3} &= 0 \end{aligned}$$

on résout donc le système :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

En calculant $A^{-1} = \begin{pmatrix} 30 & -180 & 180 \\ -36 & 192 & -180 \\ 9 & -36 & 30 \end{pmatrix}$ on retrouve bien la même solution.

★ **Calcul d'une borne inférieure liée à une intégrale**

Voici un autre exemple : on cherche

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$$

Cette borne inférieure existe, puisque c'est la borne inférieure de l'ensemble non vide et minoré (par 0), de l'ensemble de réels :

$$\left\{ \int_0^{2\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On interprète ce problème ainsi : dans l'ensemble des fonctions continues de $[0, 2\pi]$ dans \mathbb{R} , on utilise le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

Il s'agit bien d'un produit scalaire.

si on note $i : x \mapsto x$ et

$$F = \text{Vect}(x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x)$$

alors, le problème revient à chercher :

$$\inf_{g \in F} \|i - g\|^2$$

On peut donc assurer que cette borne inférieure est atteinte en un unique point pour g projeté de i sur F . Ce projeté existe bien puisque F est de dimension finie.

Pour calculer g , on doit chercher a et b , tels que :

$$\int_0^{2\pi} \cos(x) (x - a \cos(x) - b \sin(x)) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin(x) (x - a \cos(x) - b \sin(x)) dx = 0$$

En effet, pour de tels (a, b) , on peut noter $g : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$ et on a :

$$(i - g) \perp \cos \quad \text{et} \quad (i - g) \perp \sin$$

autrement dit g est le projeté orthogonal de i sur F .

Pour obtenir un système, on calcule rapidement :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x \cos(x) dx &= 0 & \int_0^{2\pi} x \sin(x) dx &= -2\pi \\ \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx &= \pi & \int_0^{2\pi} \cos(x) \sin(x) dx &= 0 & \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx &= \pi \end{aligned}$$

On obtient alors le système :

$$-a\pi = 0 \quad -2\pi - b\pi = 0$$

d'où $a = 0$ et $b = -2$. ainsi, le projeté est $x \mapsto -2 \sin(x)$ et la distance est :

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx &= \int_0^{2\pi} (x + 2 \sin(x))^2 dx \\ &= \int_0^{2\pi} (x^2 + 4x \sin(x) + 4 \sin^2(x)) dx \\ &= \frac{8\pi^3}{3} - 8\pi + 4\pi = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi \end{aligned}$$

★ **Exemple complet**

Considérons le produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

Prenons la base canonique et calculons l'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

- 1 est déjà normé, on pose donc $P_1 = 1$.
- $\langle X, 1 \rangle = 1$, on pose donc $Q = X - 1$, qui est normé donc $P_2 = X - 1$.
- $\langle X^2, 1 \rangle = 1$, $\langle X^2, X - 1 \rangle = 2$ donc $Q = X^2 - 2(X - 1) - 1 = (X - 1)^2$, sa norme est $\|Q\|^2 = 4$, ainsi : $P_3 = \frac{1}{2}(X - 1)^2$

On doit enfin calculer le projeté de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, on peut faire :

$$P_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \langle X^2, 1 \rangle + \langle X^2, X - 1 \rangle (X - 1) = 2X - 1$$

ou encore chercher $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tels que :

$$\langle X^2 - aX - b, 1 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle X^2 - aX - b, X \rangle = 0$$

Cela donne :

$$1 - a - b = 0$$

$$1 - a - b + 2 - a = 0$$

d'où $a = 2$ et $b = -1$, on retrouve bien $2X - 1$ comme projeté.

Au final, on obtient la distance :

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - 2X + 1\| = \|(X - 1)^2\| = 2$$

★ **Exemple d'implémentation en Python**

Voici un exemple de code pour le premier problème.

```

1 from pylab import *
2
3 """
4 calcul de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour les polynômes
5 et le produit scalaire:
6 <P,Q> = int_0^1 P(x)Q(x)dx
7
8 Structure choisie pour les polynômes: array1d
9 avec:
10 P =(a0, ... , a_{n-1}) <--> P = sum_{k=0}^{n-1}a_k X^k
11
12 > la somme de deux polynômes s'écrit sommePoly(P,Q)
13 > le produit externe s'écrit lambda*P
14 > le produit de deux polynômes correspond à la fonction produitPoly
15 > Attention: le degré est degP = len(P)+1
16 """
17
18 def produitScalaire(P,Q):
19     """
20     entrée: P , Q = array1d
21           = polynômes:
22           P =(a0, ... , a_{n-1}) <--> P = sum_{k=0}^{n-1}a_k X^k
23     sortie: prodScal = <P,Q> = int_0^1 P(x)Q(x)dx
24     """
25     R = produitPoly(P, Q)
26     prodScal = sum( [R[i] *1/(i+1) for i in range(len(R))] )
27     return prodScal
28
29 def produitPoly(P, Q):
30     """
31     entrée: P , Q = array1d
32           = polynômes
33           P =(a0, ... , a_{n-1}) <--> P = sum_{k=0}^{n-1}a_k X^k

```

```

34  sortie: R = array1d = polynôme
    """
36  degP, degQ = len(P)-1, len(Q)-1
    degR = degP + degQ
38  R = zeros(degR+1)
    for i in range(len(P)):
40      for j in range(len(Q)):
            R[i+j] += P[i]*Q[j]
42  return R

44  def norme(P):
    """
46  entrée: P = array1d
            = polynôme
            P =(a0, ... , a_{n-1}) <--> P = sum_{k=0}^{n-1}a_k X^k
    sortie: norme = norme du polynôme pour le ps considéré
    """
50  return sqrt(produitScalaire(P,P))

52  def sommePoly(P,Q):
    """
54  entrée: P , Q = array1d
            = polynômes
    sortie: S = P+Q = array1d = polynômes
58  NB: on n'a pas éliminé les éventuels termes nuls dans S
    """
60  lenS = max(len(P), len(Q))
    S = zeros(lenS)

62
64  n = min(len(P), len(Q))
    for i in range(n):
            S[i] = P[i]+Q[i]

66
68  if len(P) < lenS:
            for i in range(n, len(S)):
                    S[i] = Q[i]
70  elif len(Q) < lenS:
            for i in range(n, len(S)):
                    S[i] = P[i]
72  return S

74  def orthonormalise(listeV, U):
    """
76  entrée: listeV = list de array1d
            = liste de polynômes déjà orthonormalisés
            U = array1d
            = polynôme à ajouter à la famille
    sortie: Q = polynôme orthogonal à la famille listeV
    """
82
84  Q = U
    for V in listeV:
86        alpha = produitScalaire(U,V)
            # print("alpha:",alpha)
88        Q = sommePoly(Q, - alpha*V)
    return Q

90
92  def printPoly(P):
    """
94  entrée: P = array1d
            = polynômes
    sortie: None
96  impression du polynôme

```

```

98     """
100     msg = ""
102     for i in range(len(P)):
104         msg += str(P[i]) + "X^(" + str(i) + ")"
106         if i < len(P)-1:
108             msg += " + "
110         else :
112             msg += " de degré " + str(len(P)-1)
114     print(msg)
116     return
118
120
122 print("--- exemple d'orthonormalisation de gramm-Schmidt ---")
124 print("--- Calcul de l'orthonormalisé de la base canonique ---")
126
128 Un = array([1])
130 P1 = (1 / norme(Un)) * Un
132 print("--- premier polynôme: ---")
134 printPoly(P1)
136 listeV = [ P1 ]
138
140
142 X = array([0,1])
144 Q = orthonormalise(listeV, X)
146 P2 = (1 / norme(Q)) * Q
148 print("--- deuxième polynôme: ---")
150 printPoly(P2)
152 listeV.append(P2)
154
156
158 X2 = array([0,0,1])
160 Q = orthonormalise(listeV, X2)
162 P3 = (1 / norme(Q)) * Q
164 print("--- troisième polynôme: ---")
166 printPoly(P3)
168
170
172 print("--- calcul du projeté ---")
174 X3 = array([0,0,0,1])
176
178
180 P = zeros(3)
182 for U in [P1,P2,P3]:
184     P = sommePoly(P, produitScalaire(X3, U) *U)
186 print("projeté:")
188 printPoly(P)

```

Pour le dernier problème, on peut reprendre des parties du code :

```

1 from pylab import *
2
3 """
4 calcul de l'orthonormalisation de Gramm-Schmidt pour les polynômes
5 et le produit scalaire:
6 <P,Q> = P(1)Q(1) + P'(1) Q'(1)+P''(1) Q''(1)
7
8 Structure choisie pour les polynômes: array1d
9 avec:
10 P =(a0, ... , a_{n-1}) <--> P = sum_{k=0}^{n-1}a_k x^k
11
12 > la somme de deux polynômes s'écrit sommePoly(P,Q)
13 > le produit externe s'écrit lambda*P
14 > le produit de deux polynômes correspond à la fonction produitPoly
15 > Attention: le degré est degP = len(P)+1
16 """

```



```

18 def produitScalaire(P,Q):
    """
20     entrée: P , Q = array1d
        = polynômes:
22         P =(a0, ... , a_{n-1}) <--> P = sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k
    sortie: prodScal = <P,Q> = int_0^1 P(x)Q(x)dx
    """
24     p1 = sum(P)
26     q1 = sum(Q)
    pd1 = sum([k*P[k] for k in range(len(P))])
28     qd1 = sum([k*Q[k] for k in range(len(Q))])
    pdd1 = sum([k*(k-1)*P[k] for k in range(len(P))])
30     qdd1 = sum([k*(k-1)*Q[k] for k in range(len(Q))])
    prodScal = p1*q1 + pd1*qd1 + pdd1*qdd1
32     return prodScal

34 def sommePoly(P,Q):
    """
36     entrée: P , Q = array1d
        = polynômes
38     sortie: S = P+Q = array1d = polynômes
    """
40     lenS = max(len(P), len(Q))
    S = zeros(lenS)
42
44     n = min(len(P), len(Q))
    for i in range(n):
        S[i] = P[i]+Q[i]
46
48     if len(P) < lenS:
        for i in range(n, len(S)):
            S[i] = Q[i]
50     elif len(Q) < lenS:
        for i in range(n, len(S)):
            S[i] = P[i]
52     return S

54 def norme(P):
    """
56     entrée: P = array1d
        = polynôme
58         P =(a0, ... , a_{n-1}) <--> P = sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k
    sortie: norme = norme du polynôme
    """
60     return sqrt(produitScalaire(P,P))

62 def orthonormalise(listeV, U):
    """
64     entrée: listeV = list de array1d
        = liste de polynômes déjà orthonormalisés
66     U = array1d
        = polynôme à ajouter à la famille
68     sortie: Q = polynôme orthogonal à la famille listeV
    """
70
72     Q = U
74     for V in listeV:
        alpha = produitScalaire(U,V)
76         # print("alpha:",alpha)
        Q = sommePoly(Q, - alpha*V)
78     return Q

80 def printPoly(P):

```

```

82     """
83     entrée: P = array1d
84             = polynômes
85     sortie: None
86     impression du polynôme
87     """
88     msg = ""
89     for i in range(len(P)):
90         msg += str(P[i]) + "X^(" + str(i) + ")"
91         if i < len(P)-1:
92             msg += " + "
93         else :
94             msg += " de degré " + str(len(P)-1)
95     print(msg)
96     return
97
98
99
100 print("--- exemple d'orthonormalisation de gramm-Schmidt ---")
101 print("--- Calcul de l'orthonormalisé de la base canonique ---")
102
103
104 Un = array([1])
105 P1 = (1 / norme(Un)) * Un
106 print("--- premier polynôme: ---")
107 printPoly(P1)
108 listeV = [ P1 ]
109
110
111
112 X = array([0,1])
113 Q = orthonormalise(listeV, X)
114 P2 = (1 / norme(Q)) * Q
115 print("--- deuxième polynôme: ---")
116 printPoly(P2)
117 listeV.append(P2)
118
119
120 X2 = array([0,0,1])
121 Q = orthonormalise(listeV, X2)
122 P3 = (1 / norme(Q)) * Q
123 print("--- troisième polynôme: ---")
124 printPoly(P3)
125
126
127 print("--- calcul du projeté ---")
128 X3 = array([0,0,1])
129
130
131 P = zeros(2)
132 for U in [P1,P2]:
133     P = sommePoly(P, produitScalaire(X3, U) * U)
134 print("projeté: ")
135 printPoly(P)
136 print("distance: ", norme(sommePoly(X3,-P)))

```

Caractéristiques géométriques d'un endomorphisme de \mathbb{R}^3

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

Dans cette fiche, on résume les principales techniques pour résoudre un exercice commun : on vous donne une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on demande de déterminer les caractéristiques géométriques de l'endomorphisme canoniquement associé.

On considère donc une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on note f l'endomorphisme canoniquement associé. On ne considère bien sûr pas le cas où $f = Id$ (et donc $A = I_3$) et $f = -Id$ (et donc $A = -I_3$).

★ Les résultats du cours à connaître

Pour traiter ces exercices, il faut revoir :

- la diagonalisation,
- le lien entre les droites stables et les vecteurs propres,
- le fait que si un SEV F est stable par une isométrie, alors F^\perp est aussi stable (en lien avec le point précédent).
- la classification des isométries de l'espace euclidien qui peut être faite en fonction du déterminant, en fonction de la dimension de E_1 , en fonction de la dimension de E_{-1} .

★ Réponses attendues

L'endomorphisme canoniquement associé peut être :

• Un projecteur.

Dans ce cas :

- la matrice A n'est pas inversible,
- on a la relation : $A^2 = A$,
- la matrice A est diagonalisable.

Il faut alors déterminer le noyau (ie E_0) et l'image (qui est aussi E_1 dans ce cas).

Le projecteur est alors dit « projecteur sur E_1 parallèlement à E_0 ».

Un projecteur est dit **orthogonal** lorsque E_0 et E_1 sont supplémentaires orthogonaux. Dans ce cas la matrice est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale. Il suffit de déterminer E_0 ou E_1 .

Généralement, on parle du projecteur orthogonal sur E_1 (sans préciser parallèlement à E_0).

Un résultat du cours (à savoir redémontrer) assure qu'un projecteur f est orthogonal si et seulement si f est autoadjoint ie A est symétrique. On retrouve le fait que A est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale puisque symétrique réelle.

• Une symétrie.

Dans ce cas :

- la matrice A est inversible
- on a la relation : $A^2 = I_3$,
- la matrice A est diagonalisable.

Il faut alors déterminer E_1 et E_{-1} .

La symétrie est dite « symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1} ».

Une symétrie est dite **orthogonale** lorsque E_{-1} et E_1 sont supplémentaires orthogonaux. Dans ce cas la matrice est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale, et bien sûr il suffit de déterminer E_{-1} ou E_1 .

Dans \mathbb{R}^3 il y a deux cas :

- soit E_1 est une droite, et dans ce cas f est un **demi-tour** (symétrie orthogonale par rapport à une droite ou rotation d'angle π).
- soit E_1 est un plan, et dans ce cas f est une **réflexion** (symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan).

Un résultat qui n'est pas dans le cours mais qu'il faut savoir démontrer indique que la symétrie f est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme f est autoadjoint ie A est symétrique.

Notons que cela implique que A est à la fois symétrique et orthogonale (puisque $A^2 = A^T A = I_3$), et qu'un sens est évident avec le théorème spectral qui assure que les sous-espaces propres sont orthogonaux dans ce cas.

• Une rotation.

L'endomorphisme f est une isométrie de \mathbb{R}^3 pour laquelle il existe une BON $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ avec :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Comme on les a déjà éliminés, on ne considère pas les cas où $\theta = 0$ (identité) et $\theta = \pi$ (demi tour).

Dans ce cas :

- la matrice A est orthogonale (puisque f est une isométrie),
- $\det(A) = 1$
- la matrice A n'est pas diagonalisable,
- 1 est la seule valeur propre réelle, le spectre sur \mathbb{C} est : $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$,
- E_1 est de dimension 1.

La droite $D = E_1 = \text{Vect}(f_1)$ est l'**axe de la rotation** et l'angle θ est l'**angle** de la rotation. La rotation se fait dans le plan $\Pi = \text{Vect}(f_2, f_3)$. Pour déterminer les éléments géométriques de la rotation, on détermine E_1 et l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$. Plus précisément, on parle d'axe de la rotation car la droite D est orientée par le choix du vecteur f_1 , changer de vecteur f_1 changera le signe θ .

• Une **anti-rotation**.

L'endomorphisme f est une isométrie de \mathbb{R}^3 pour laquelle il existe une BON $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ avec :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Comme on les a déjà éliminés, on ne considère pas les cas où $\theta = 0$ (réflexion) et $\theta = \pi$ (ie $f = -Id$).

Dans ce cas :

- la matrice A est orthogonale (puisque f est une isométrie),
- $\det(A) = -1$
- la matrice A n'est pas diagonalisable,
- -1 est la seule valeur propre réelle, le spectre sur \mathbb{C} est : $\{-1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$,
- E_{-1} est de dimension 1.

La droite $D = E_{-1} = \text{Vect}(f_1)$ est l'**axe de l'anti-rotation** et l'angle θ est l'**angle** de l'anti-rotation. Plus précisément, f est la composée d'une réflexion d'axe D et d'une rotation d'angle θ toujours selon l'axe D (ces deux endomorphismes commutent).

Pour déterminer les éléments géométriques de la rotation, on détermine E_1 et l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$. De la même manière qu'une rotation, la droite D est orientée par le choix du vecteur f_1 ,

Exercice 1 Dans un espace E préhilbertien.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur (ie $p \circ p = p$).

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. p est un projecteur orthogonal (ie $\text{Im } p \perp \text{ker } p$).
2. $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ (continuité)
3. $\forall (x, y) \in E, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$

Ainsi, dans un espace E euclidien, un projecteur est un endomorphisme autoadjoit si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur (ie $s \circ s = Id$). Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. s est une symétrie orthogonale,
2. $\forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$
3. $\forall (x, y) \in E, \langle s(x), y \rangle = \langle x, s(y) \rangle$

Ainsi, dans un espace E euclidien, une symétrie est un endomorphisme autoadjoit si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.

★ **Méthode**

On donne donc une matrice A et on demande d'interpréter géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé f . Il est relativement difficile d'exposer une méthode qui sera la plus rapide dans toutes les situations.

Voici quelques idées :

- Calculer $A^T A$.

- Si $A^T A = A$ et A est symétrique c'est que A est un projecteur orthogonal, on détermine alors E_1 .
- Si $A^T A = I_3$ on a une matrice orthogonale, si de plus A est symétrique, c'est nécessairement une symétrie orthogonale. Il faut déterminer E_1 , si c'est une droite c'est un demi-tour (d'axe E_1), si c'est un plan, c'est une réflexion (par rapport au plan E_1^\perp).
- Si $A^T A = I_3$ et que A n'est pas symétrique. C'est alors une rotation ou une anti-rotation.

Le calcul du déterminant permet de différencier mais il est généralement un peu long (tout dépend de la matrice A). Le plus simple est de regarder si 1 est valeur propre, si c'est le cas c'est une rotation d'axe E_1 , sinon c'est une anti-rotation (et il faut alors calculer l'axe E_{-1}).

Pour déterminer l'angle, on procède en deux temps :

- La valeur de l'angle se trouve avec la relation $tr(A) = 1 + 2\cos(\theta)$ (dans le cas d'une rotation) et $tr(A) = -1 + 2\cos(\theta)$ (dans le cas d'une anti-rotation).

En effet, la trace de la matrice A est la trace de l'endomorphisme f , c'est donc la trace de la matrice sous sa forme vue plus haut.

Cela donne donc $\cos(\theta)$, ie l'angle « au signe près ».

- Pour le signe de l'angle, on note f_1 un vecteur directeur de l'axe (de la rotation ou de l'anti-rotation), et on prend f_2 un vecteur qui n'est pas colinéaire à f_1 . on calcule alors $f(f_2)$ (en utilisant la matrice A).

On regarde ensuite si $(f_1, f_2, f(f_2))$ est une base directe, ie $\det_{\mathcal{C}}(f_1, f_2, f(f_2)) > 0$ (où \mathcal{C} désigne la base canonique qui est une BOND).

Il faut donc calculer ce déterminant, ce qui revient à calculer le produit scalaire : $\langle f_1 \wedge f_2, f(f_2) \rangle$.

Si cette quantité est positive, c'est que $\theta \in [0, \pi[$ est positif, sinon c'est que $\theta \in]-\pi, 0]$.

Souvent, on prend pour vecteur f_2 l'un des vecteurs de la base canonique (pas colinéaires à f_1), ainsi, le calcul de $f(f_2)$ est facile (c'est la colonne de A correspondante), et le calcul de $f_1 \wedge f_2$ est aussi trivial (car beaucoup de 0).

On peut aussi prendre un vecteur f_2 orthogonal à f_1 comme cela, f_2 est dans le plan de la rotation. Il peut aussi arriver que l'on demande une BON dans laquelle la matrice de f est de la forme attendue. Pour cela, il suffit de prendre f_1 normé, f_2 orthogonal à f_1 et normé et poser $f_3 = f_1 \wedge f_2$.

Exercice 2

Caractériser géométriquement l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Correction : On remarque que la matrice A est symétrique et orthogonale. L'endomorphisme canoniquement associé est donc une symétrie orthogonale. Pour le déterminer complètement, il suffit de déterminer l'ensemble de ses points invariants. On résout donc l'équation $AX = X$, et on trouve que l'ensemble des points invariants est $F = \text{vect}(1, 4, 1)$. A est donc la matrice, dans la base canonique, de la symétrie orthogonale par rapport à F , ou encore du retournement par rapport à F .

Exercice 3

Caractériser géométriquement l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction : On vérifie que les colonnes de A forment une base orthonormée. Ainsi, f est un endomorphisme orthogonal. De plus, $\det(A) = 1$. f est donc une rotation. Cherchons son axe en cherchant ses points fixes. L'équation $AX = X$ donne que l'axe est la droite $\text{vect}(1, 1, 1)$. Posons $u = (1, 1, 1)$. Pour déterminer l'angle de cette rotation, que l'on note θ , on remarque qu'en écrivant la matrice de f sous forme réduite, on a $Tr(A) = 1 + 2\cos\theta$. Or, $Tr(A) = 2$, et donc $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$, soit $\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Pour conclure quant au signe de θ , on peut remarquer que, posant $v = (1, -1, 0)$, qui est orthogonal à u , alors la base $(u, v, f(v))$ est directe, ce qui signifie que $\theta \in]0, \pi[$. On en déduit donc que f est la rotation d'axe dirigé par $(1, 1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 4

Caractériser géométriquement l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad D = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Correction : Rotation autour de l'axe dirigé et orienté par $(3, 1, 1)$ d'angle $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$.

Rotation d'axe dirigé et orienté par $w = (1, 1, 0)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Retournement d'axe dirigé par $(1, 4, 1)$.

Rotation d'axe dirigé et orienté par $w = (1, 0, -4)$ et d'angle $\theta = \arccos\left(-\frac{8}{9}\right)$.

8 — Interversion de symboles

Dans ce chapitre, on voit tous les théorèmes qui permettent d'inverser l'ordre des symboles (de dérivation, d'intégration, de somme, de limites, etc.) en analyse. Une grande partie consiste en des rappels. Une autre partie est nouvelle : le théorème de convergence dominée et le théorème de dérivation sous le signe somme.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I Rappels

I.1 Limite de la dérivée

Soit f définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus a$. On souhaite savoir à quelle condition elle est dérivable en a .

On rappelle donc qu'il ne faut surtout pas dériver la fonction f et déterminer à partir de l'expression de f' obtenue si f est dérivable en a en faisant tendre x vers a dans l'expression de $f'(x)$. Dit de manière différente : l'ensemble de définition de l'expression de f' n'est pas nécessairement l'ensemble de dérivabilité de f .

Plus précisément, le théorème suivant précise les liens entre les limites de l'application dérivée et la dérivabilité en a .

Théorème I.1 — Limite de la dérivée. Soit f définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus a$.

On suppose que l'application dérivée f' admet une limite L (finie ou non) en a . Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

Ainsi, le taux d'accroissement en a tends aussi vers L

On peut donc écrire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

R a peut être un bords de l'intervalle I .



Particulièrement utile dans le cas d'une fonction qui est prolongée par continuité en a : on est assuré de la continuité et on montre la dérivabilité par la limite de l'application dérivée (plutôt que la limite du taux d'accroissement).

C'est en particulier le cas pour l'étude du problème de recollement de solutions d'équations différentielles.

Démonstration. On traite la dérivabilité à droite en a .

Soit $a < x < b$, f est alors continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$, donc on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$$\exists c_x \in]a, x[, f(x) = f(a) + f'(c_x)(x-a) \text{ soit } \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(c_x)$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$ (d'après le théorème des gendarmes), puisque $c_x \in]a, x[$. Comme on sait que $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L$, on a par composition des limites : $\lim_{x \rightarrow a} f'(c_x) = L$. Et donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = L. \text{ Ce qui s'écrit aussi } f \text{ est dérivable (à droite) en } a, \text{ avec } f'(a) = L.$$

On traite de même la dérivabilité à gauche en a . ■

Corollaire 1.2 Soit f définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus a$.

On suppose que l'application dérivée f' admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en a . Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

On suppose maintenant que l'application dérivée f' tends vers $+\infty$ en a . Alors \mathcal{C}_f admet une demi-tangente verticale en a .

Corollaire 1.3 Soit f définie et continue sur un intervalle I et de classe \mathcal{C}^1 sur $I \setminus a$.

On suppose que l'application dérivée f' admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en a , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I , avec $f'(a) = l$.

■ **Exemple 1.1** Soient λ un réel non nul et f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(\lambda x) - 1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrons que f est \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On voit que f est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ (quotient de fcts continues). En 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}\lambda^2 x^2}{x} = -\frac{\lambda^2 x}{2} \rightarrow 0 = f(0)$$

D'où la continuité en 0 et sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On a f de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ (quotient de fcts \mathcal{C}^1).

En 0 :

$$f'(x) = -\frac{\lambda \sin(\lambda x)}{\sin x} - (\cos(\lambda x) - 1) \frac{\cos(x)}{\sin^2 x}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\lambda x)}{\sin x} &\rightarrow \lambda \\ (\cos(\lambda x) - 1) \frac{\cos(x)}{\sin^2 x} &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\lambda^2 x^2}{2} \frac{1}{x^2} = -\frac{\lambda^2}{2} \rightarrow -\frac{\lambda^2}{2} \end{aligned}$$

Par addition des limites, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{\lambda^2}{2}$$

Ainsi, on peut appliquer le théorème de la limite de la dérivée (en vérifiant proprement les hypothèses). Cela donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{\lambda^2}{2}.$$

Et donc f dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{\lambda^2}{2}$.

Ensuite f' est continue en 0, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$.

Et enfin f est \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. ■

I.2 Continuité de la limite / somme d'une suite de fonctions

Proposition I.4 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f .

La fonction f est alors continue sur I .

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

On a aussi le résultat dit « de la double limite » :

Théorème I.5 — de la double limite. Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers f sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie).

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite notée l_n en a .

Alors :

- la suite (l_n) admet une limite l
- La fonction f admet une limite en a et cette limite est l .

On peut donc écrire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Pour les séries on a le résultat suivant :

Proposition I.6 Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I et que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I , alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ de la série est continue.

Ce résultat est aussi utile si la série de fonctions f_n converge normalement sur tout segment car on a alors la convergence uniforme.

On a aussi le résultat de la double limite :

Théorème I.7 soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie) ; si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I , de somme S , et si, pour tout n , f_n admet une limite l_n en a alors :

- la série $\sum l_n$ converge,
- la fonction S admet une limite en a et :

$$\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$$

I.3 Interversion limite et intégrale

Proposition I.8 Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Alors la suite de réel $\left(\int_a^b f_n(t) dt \right)_n$ converge et on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

On peut dire que l'on a échangé les symboles limites et intégrales : la limite des intégrales est l'intégrale des limites. On peut ainsi écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt$$

Démonstration. Le résultat consiste à utiliser l'inégalité triangulaire pour les intégrales :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f_n(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f(t) - f_n(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f - f_n(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \|f - f_n\|_{\infty} dt \end{aligned}$$

puisque $\forall t \in [a, b], |f_n(t) - f(t)| \leq \|f - f_n\|_\infty$.

On obtient :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f_n(t) dt \right| \leq (b-a) \|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f_n(t) dt \right| = 0 \quad \text{ie} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

■



L'inégalité :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f_n(t) dt \right| \leq (b-a) \|f - f_n\|$$

est à retenir. Lorsqu'on intègre sur un intervalle de taille infinie, on ne va pas pouvoir utiliser cette inégalité.

Le résultat est d'ailleurs faux sur un intervalle de taille infinie : par exemple, si on pose :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n^2}x & \text{si } x \in [0, n] \\ -\frac{1}{n^2}(x-2n) & \text{si } x \in [n, 2n] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(f_n est croissante affine jusqu'à n où elle vaut $\frac{1}{n}$ puis décroissante affine jusqu'à $2n$ où elle est nulle).

Alors clairement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$$

$$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}^+} = \frac{1}{n} \text{ et donc } f_n \text{ converge uniformément vers la fonction nulle.}$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1 \text{ tandis que : } \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = 0.$$

Pour la série on a le même résultat (très souvent on l'utilise avec la convergence normale) :

Proposition I.9 Soit (f_n) une suite de fonctions numériques continues sur un segment $[a, b]$. On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors la série des intégrales $\sum \left(\int_a^b f_n(t) dt \right)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$$

I.4 Interversion dérivation / limite ou somme

Proposition I.10 Soit (f_n) une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite des fonctions dérivées (f'_n) converge uniformément sur I vers h . On a alors :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ et } f' = h.$$

Démonstration. Déjà, on peut voir que h est continue comme limite de fonction continue

Considérons $x \in I$ et $x_0 \in I$, on a alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{x_0}^x f'_n(t) dt \right) && \text{car } f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\ &= \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt && \text{par convergence uniforme de la suite } (f'_n) \\ &= \int_{x_0}^x h(t) dt \end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ est une primitive de la fonction continue h , c'est donc une fonction de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $f' = h$. ■



Ce n'est pas un résultat qui permet d'intervertir limite et dérivée. En effet, il faut la convergence uniforme de la suite des fonctions dérivées. On n'a aucun résultat du type : « Si f_n converge uniformément vers f , alors f'_n converge vers f' ». On peut trouver des contre-exemples.



On peut par contre montrer que dans les hypothèses précédentes, la convergence de f_n vers f est en fait uniforme sur tout segment.

En effet, si $[a, b]$ est un segment de I , on a pour tout $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |((f_n(x) - f(x)) - (f_n(a) - f(a))) + (f_n(a) - f(a))| \\ &\leq \left| \int_a^x (f_n - f)'(t) dt \right| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \|(f_n - f)'\|_{\infty}^{[a,b]} |x - a| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \|f'_n - f'\|_{\infty}^{[a,b]} |b - a| + |f_n(a) - f(a)| \end{aligned}$$

et donc :

$$\|f_n - f\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \|f'_n - f'\|_{\infty}^{[a,b]} |b - a| + |f_n(a) - f(a)|$$

Ainsi, si (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f' , on a (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f .

Comme le segment $[a, b]$ est quelconque, cela donne : si (f'_n) converge uniformément vers f' sur tout segment, alors (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment.



On peut revoir dans le chapitre sur suites et séries de fonctions les résultats suivants :

- La même résultat avec une version faible des hypothèses,
- La généralisation aux fonctions de classe \mathcal{C}^k (il faut la convergence uniforme de la dernière dérivée et convergence simple des précédentes.
- Le résultat précédent avec les hypothèses faibles.
- Les version « séries de fonctions » de ces résultats.

II Convergence dominée pour une suite de fonctions

Théorème II.1 — Théorème de convergence dominée. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions sur I , telle que :

- H1** pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ,
- H2** la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f ,
- H3** la fonction f est continue par morceaux,
- H4** il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

On a alors :

- les fonctions f_n et f sont intégrables sur I
- la suite numériques $\left(\int_I f_n(t) dt \right)$ converge,
- et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

Démonstration. On peut constater que f_n et f sont intégrable car φ l'est.

Le reste de la démonstration est hors-programme. ■



C'est un théorème d'interversion de symbole :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$$

L'hypothèse de domination est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

ce que l'on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$

Autrement dit, toutes les fonctions f_n sont majorées (en module / valeur absolue) par la fonction φ **indépendamment du paramètre n** . La fonction φ n'est pas « trop grande » puisqu'elle est **intégrable**.

Notons en particulier que f vérifie la domination aussi :

$$\forall t \in I, |f(t)| \leq \varphi(t)$$

(inégalité que l'on obtient en passant à la limite simple dans l'inégalité ci-dessus.)



Il arrive parfois que φ est en fait la fonction f : c'est le cas si pour toute valeur de t , $f_n(t)$ tends vers $f(t)$ en étant croissant.

Dans le cas où I est un intervalle borné, alors on peut utiliser une constante pour φ .

Bilan des hypothèses On veut écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$$

On retrouve alors les hypothèses nécessaires :

- Pour que $\int_I f_n(t)$, il faut que pour toute valeur de n , f_n soit continue par morceaux (H1) et intégrable. Cette deuxième condition est une conséquence de la domination comme on l'a vu.
- Pour que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ ait un sens, il faut que la suite de fonctions (f_n) converge simplement (H2).
- On doit pouvoir alors définir : $\int_I f(t) dt$, ce qui impose que f soit continue par morceaux (H3) et intégrable. Cette deuxième condition est aussi une conséquence de la domination.

Seule l'hypothèse de domination est donc vraiment à retenir.



Pour que $\int_I f_n(t)$ existe, on pourrait se contenter de demander que l'intégrale soit convergente. Il faut se rappeler qu'une intégrale impropre convergente, non absolument convergente est un objet mathématique compliqué. Aussi dans les résultats de ce chapitre, pour que $\int_I f_n(t)$ existe il faut que f_n soit continue par morceaux et intégrable.

En ce qui concerne la condition f est continue par morceaux, notons que cela provient du fait que l'on a que convergence simple ! Le programme précise *L'hypothèse de continuité par morceaux de f , imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.*



En utilisant la suite de fonction $g_n = f_n - f$, qui est continue par morceaux, converge simplement vers 0 et qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |g_n| \leq |f_n| + |f| \leq 2\varphi$$

Ainsi la suite de fonction g_n est dominée par la fonction intégrable 2φ . On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$$

ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_n - f| = 0.$$

Ce résultat est plus fort que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f$$

■ **Exemple II.1** On va montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

On considère la suite de fonctions (f_n) définie ainsi :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} & \text{si } 0 \leq t \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur \mathbb{R}^+ et la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction :

$$f : t \mapsto e^{-t^2}$$

car pour t fixé, et n vérifiant $t \leq n$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)\right)$$

et

$$n^2 \ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^2 \times -\frac{t^2}{n^2} \rightarrow -t^2$$

La fonction f est aussi continue par morceaux.

On a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^+, f_n(t) \leq f(t)$$

En effet, si $t \geq n$ c'est évident : $f_n(t) = 0$ et $f(t) > 0$.

si $t \leq n$, on a : $f_n(t) = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)\right)$ Or on sait :

$$\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u \text{ inégalité de convexité.}$$

On obtient donc :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) \leq -\frac{t^2}{n^2}$$

$$\text{et donc } \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)\right) \leq \exp(-t^2)$$

ce que l'on écrit : $f_n(t) \leq f(t)$

On peut aussi voir qu'à t fixé, la suite

$$\left(\exp \left(n^2 \ln \left(1 - \frac{t^2}{n^2} \right) \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{est croissante.}$$

et donc nécessairement la limite f est un majorant.

On a donc l'hypothèse de domination.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| = f_n \leq f \quad (\text{on peut enlever la valeur absolue car il s'agit de fonctions positives})$$

Il reste à vérifier que la fonction dominante est intégrable. Le problème est en $+\infty$ car la fonction f est continue sur \mathbb{R}^+ .

On a clairement :

$$\forall t \geq 1, 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$$

et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = -1$ converge (intégrale de référence). Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{converge.}$$

On a donc bien :

- Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux,
- La suite de fonctions f_n est dominée par la fonction f qui est intégrable.

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}^+} f(t) dt$$

ce que l'on peut écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2} \right)^{n^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

■

III Intégration terme à terme sur un intervalle

Théorème III.1 — Intégration terme à terme. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonction vérifiant :

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I .

H2 La série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S .

H3 La fonction S est continue par morceaux.

H4 La série de réels $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge.

Alors on a les résultats suivants :

- la fonction S est intégrable sur I
- La série numérique $\left(\sum \int_I f_n(t) dt \right)$ converge

• et on a :

$$\int_I S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Démonstration. La série numérique $\sum \int_I f_n(t) dt$ converge, en effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_I f_n(t) dt \right| \leq \int_I |f_n(t)| dt$$

et la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge,

Ainsi, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \int_I f_n(t) dt \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| dt$$

Le reste est admis conformément au programme. ■



C'est une interversion de symboles :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) dt \right)$$

L'hypothèse importante est : $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge.

Cela signifie que l'on peut calculer (ou du moins estimer) la valeur de l'intégrale généralisée $I_n = \int_I |f_n(t)| dt$ et que cette estimation assure que $\sum I_n$ est une série numérique (à termes positifs) convergente.

Cette hypothèse tient le même rôle que l'hypothèse de domination.



Parfois, on ne peut pas appliquer ce théorème, mais on peut utiliser le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

Bilan des hypothèses On veut écrire :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) dt \right)$$

- Pour que $\int_I f_n(t) dt$ existe, il faut que pour toute valeur de n , f_n soit continue par morceaux et intégrable (H1).
- Pour que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ existe, il faut que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I (H2).
- Pour que $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$ existe, il faut que la fonction S soit continue par morceaux (H3) et intégrable.

Ce dernier point est une conséquence de l'hypothèse de convergence de la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$.

■ **Exemple III.1** On souhaite montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$$

On considère donc la suite de fonctions définies sur \mathbb{R}^+ par :

$$f_n : t \mapsto t^2 e^{-nt} \quad \text{pour } n \geq 1$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables, car $t^2 e^{-nt} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

On voit aussi que pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt} &= t^2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} \\ &= t^2 \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} && \text{série géométrique de raison } e^{-t} \in]0, 1[\\ &= \frac{t^2}{e^t - 1} \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ converge simplement vers la fonction $S : t \mapsto t^2 \frac{1}{e^t - 1}$ sur $]0, +\infty[$.

De plus, cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$.

Ⓡ Le fait que ce soit ouvert en 0, ne change rien !

On calcule alors $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ par intégration par parties. Déjà :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt \text{ converge car } t^2 e^{-nt} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right) \text{ puisque } n \geq 1$$

Ensuite :

$$\left[\frac{1}{n} t^2 e^{-nt} \right]_0^{+\infty} = 0$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n} \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt$$

On recommence :

$$\left[\frac{1}{n} t e^{-nt} \right]_0^{+\infty} = 0$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^2} \int_0^{+\infty} e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3}$$

On vérifie les hypothèses :

H1 à n fixé, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$,

H2 la série de fonction $(\sum f_n)$ converge simplement vers S sur $]0, +\infty[$

H3 La fonction S est bien continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

H4 La série de réels

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \text{ ie la série } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$$

est une série convergente.

Les hypothèses sont donc toutes vérifiées, on en déduit que la fonction S est intégrable et on a :

$$\int_0^{+\infty} S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$$

Au final :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$$

■

IV Continuité sous le signe intégrale

On considère I et J deux intervalles de \mathbb{R} et une fonction de deux variables à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} :

$$f : (x, t) \mapsto f(x, t) \text{ définie sur } I \times J$$

On se pose le problème de la continuité de l'application :

$$x \mapsto \int_J f(x, t) dt$$

L'intégrale : $\int_J f(x, t) dt$ est une intégrale généralisée qui dépend du paramètre x .

Théorème IV.1 — Continuité sous le signe intégral. Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$.

On suppose :

H1 pour tout $x \in I$ fixé, l'application partielle $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ,

H2 pour tout $t \in J$ fixé, l'application partielle $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I

H3 Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J , telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

On note $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$.

On a alors :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J
- la fonction g est continue sur I .

L'hypothèse de domination indique que l'on peut dominer toutes les fonctions $(f(x, \cdot))_{x \in I}$ par une fonction φ . C'est à dire que l'on peut majorer $|f(x, t)|$ indépendamment du paramètre x Cette fonction étant intégrable.



Bien repérer : la variable qui sert à l'intégration (dans la proposition c'est t) et l'autre (x dans la proposition). Il faut donc majorer $|f(x, t)|$ indépendamment de la variable sur laquelle on n'intègre pas.

On peut dire que x est le paramètre de l'intégrale, et donc dominer c'est majorer indépendamment du paramètre x .

On trouve souvent cette domination en montrant que $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable : on majore la valeur absolue $|f(x, t)|$ par une fonction simple que l'on sait être intégrable, il se trouve que cette fonction ne dépend pas de x .

Démonstration. La démonstration repose sur la caractérisation séquentielle de la limite.

On considère un $a \in I$, et on veut montrer que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Pour cela, on considère une suite (x_n) quelconque de limite a et on montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(a)$. La caractérisation séquentielle de la limite assure alors que puisque c'est vrai pour toute suite, c'est vrai pour la limite continue.

On construit une suite de fonctions (u_n) ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n : t \mapsto f(x_n, t)$$

On a alors :

- à $t \in J$ fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = f(a, t)$, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ et que $x \mapsto f(x, t)$ est continue en a . Ainsi, la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction $t \mapsto f(a, t)$.
- à $n \in \mathbb{N}$ fixé, $t \mapsto u_n(t)$ est intégrable puisque $t \mapsto f(x_n, t)$ l'est.
- On a la même fonction dominante pour la suite de fonction que pour f :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in J, |u_n(t)| = |f(x_n, t)| \leq \varphi(t)$$

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable.

Ainsi, la suite de fonction (u_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée. Ce qui indique que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J u_n(t) dt = \int_J \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) dt$$

ce qui s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f(x_n, t) dt = \int_J f(a, t) dt$$

ou encore :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(a)$$

Ainsi, comme la suite (x_n) est quelconque, cela indique que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, d'où la continuité en a .

Comme a est quelconque, on a la continuité de g sur I . ■

Bilan des hypothèses

On veut écrire : $f(x, t)$ est continue par rapport au paramètre x , donc $\int_J f(x, t) dt$ aussi.

- Pour que pour toute valeur de $x \in I$, $\int_J f(x, t) dt$ existe, il faut que pour toute valeur de $x \in I$ l'application partielle $t \mapsto f(x, t)$ soit continue par morceaux (H1) et intégrable. Cette dernière condition est une conséquence de la domination.
- Il faut qu'à $t \in J$ fixé, l'application partielle $x \mapsto f(x, t)$ soit continue (H2).
Donc encore une fois, seule l'hypothèse de domination est à retenir.

■ **Exemple IV.1** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R} .

On considère la **transformée de Fourier** \hat{f} définie par :

$$\hat{f} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx} dt \end{cases}$$

On veut montrer que \hat{f} est continue sur \mathbb{R} .

On majore donc $|f(t)e^{itx}|$ indépendamment de la variable x , ici c'est très simple :

$$|f(t)e^{itx}| = |f(t)| \leq |f(t)|$$

La fonction dominante est donc la fonction $t \mapsto |f(t)|$ qui est intégrable.

On fait le bilan :

H1 À x fixé, la fonction $t \mapsto f(t)e^{itx}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} ,

H2 À t fixé, la fonction $x \mapsto f(t)e^{itx}$ est continue sur \mathbb{R} ,

H3 L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, |f(t)e^{itx}| \leq |f(t)|$$

et la fonction $|f|$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Ainsi, la fonction \hat{f} est continue. ■

★ **Version avec des hypothèses plus faibles**

La continuité est une propriété locale, au sens où être continue sur l'intervalle I revient à être continue sur tout segment de l'intervalle I .

On a alors un résultat plus fort :

Proposition IV.2 Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$.

On suppose :

H1 pour tout $x \in I$ fixé, l'application partielle $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ,

H2 pour tout $t \in J$ fixé, l'application partielle $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I

H3 pour tout segment K inclus dans I , il existe une fonction φ_K continue par morceaux, positive et intégrable sur J , telle que :

$$\forall (x, t) \in K \times J, |f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$$

On note $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$.

On a alors :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J
- la fonction g est continue sur I .



Très souvent on considère un segment de la forme $[a, b]$ inclus dans I et on majore $|f(x, t)|$ indépendamment de x pour $x \in [a, b]$ et donc le majorant dépend de a et b (mais toujours pas du paramètre x !).

On retrouve le même phénomène que la convergence normale / uniforme sur tout segment.

★ **Théorème de convergence dominée à paramètre continu**

Théorème IV.3 — convergence dominée à paramètre continu. Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$, et soit a une borne de I .

On suppose :

- H1** pour tout $t \in J$ fixé, l'application partielle $x \mapsto f(x, t)$ admet une limite en a , notée $l(t)$.
- H2** pour tout $x \in I$ fixé, l'application partielle $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ,
- H3** pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto l(t)$ est continue par morceaux sur J ,
- H4** Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J , telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

On note $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$.

On a alors :

- la fonction l est intégrable.
- La fonction g admet une limite en a
- on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \int_J l(t) dt$$



On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_J f(x, t) dt = \int_J \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) dt$$

C'est le même résultat que pour la continuité. La différence est que l'on fait tendre le paramètre, vers un paramètre limite a qui est un bord de I .

Démonstration. La démonstration est la même que pour la continuité, on utilise la caractérisation séquentielle. La seule différence est que le point a est un bords de I . ■

L'hypothèse de domination est la même que pour le théorème de continuité sous le signe intégral : on peut dominer toutes les fonctions $(f(x, \cdot))_{x \in I}$ par une fonction φ . Cette fonction étant intégrable.

C'est à dire que l'on peut majorer $|f(x,t)|$ indépendamment du paramètre x

V Dérivation sous le signe intégrale

On se demande maintenant si la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est dérivable.

Théorème V.1 — Formule de Leibniz, dérivation sous le signe intégral. Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I \times J$.

On suppose :

- H1** pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ,
- H2** pour tout $t \in J$, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I ,
- H3** pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux,
- H4** Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi(t)$$

On note alors

$$g : x \mapsto \int_J f(x,t)dt$$

On a :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur J
- la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur I et on a :

$$\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Démonstration. Admis conformément au programme. ■



C'est un résultat d'échange de dérivation et de signe intégrale, en effet, on a :

$$\forall x \in I, \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \frac{d}{dx} \left(\int_J f(x,t)dt \right)$$



Très souvent, en dérivant on montre que la fonction g est solution d'une équation différentielle et on en déduit la fonction g et donc la valeur d'une intégrale à paramètre.

Hypothèse de domination L'hypothèse de domination est que pour tout paramètre x , on a une domination de l'application dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$, c'est à dire que $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right|$ est majoré indépendamment du paramètre x .

Bilan des hypothèses

On veut écrire :

$$\forall x \in I, \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \frac{d}{dx} \left(\int_J f(x, t) dt \right)$$

- Pour que $\int_J f(x, t) dt$ existe, il faut que f soit continue et intégrable (H1).
- Pour que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ existe, il faut que pour tout $t \in J$, l'application partielle $x \mapsto f(x, t)$ soit de classe \mathcal{C}^1 (H2).
- Pour que $\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ existe, il faut que pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ soit continue par morceaux (H3) et intégrable. La condition d'intégrabilité est une conséquence de la domination.

Ainsi, seule l'hypothèse de domination est importante.



Cette fois il faut l'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$ puisque l'hypothèse de domination est sur $\frac{\partial f}{\partial x}$.

★ **Version avec des hypothèses plus faibles**

Puisque la dérivation est une propriété locale, on a un résultat plus fort avec une hypothèse de domination pour tout segment de I :

Proposition V.2 Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$.

On suppose :

- H1** pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ,
- H2** pour tout $t \in J$, l'application partielle $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I ,
- H3** pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux,
- H4** pour tout segment K inclus dans I , il existe une fonction φ_K continue par morceaux et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in K \times J, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

On note alors

$$g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$$

On a :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur J
- la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur I et on a :

$$\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$



Comme précédemment, on considère souvent $[a, b]$ un segment de I et on majore donc $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right|$ indépendamment du paramètre x pour $x \in [a, b]$. La domination peut donc dépendre de a et / ou de b .

■ **Exemple V.1** On souhaite calculer la valeur de

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t^2)^n} \text{ pour } x > 0 \text{ et } n \geq 1$$

C'est donc une suite d'intégrale à paramètres.

Commençons par calculer $I_1(x)$. On a :

$$\forall x > 0, I_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+t^2}$$

À $x > 0$ fixé, cette intégrale est convergente (et même absolument convergente car positive), $t \mapsto \frac{1}{x+t^2}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et $\frac{1}{x+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ avec $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ qui converge.

Le calcul est simple car on a une primitive :

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+t^2} = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \frac{du}{1+u^2} \end{aligned}$$

en posant $u = \frac{t}{\sqrt{x}}$

$$I_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} [\arctan(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$$

■

Considérons $n \geq 1$ quelconque, on souhaite dériver I_n .

On note $f_n(x, t) = \frac{1}{(x+t^2)^n}$.

Pour $x > 0$, $t \mapsto \frac{1}{(x+t^2)^n}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et intégrable car :

$$\frac{1}{(x+t^2)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} \text{ intégrale de Riemann avec } \alpha = 2n.$$

On fixe $t \in [0, +\infty[$ et on dérive :

$$\forall x > 0, \frac{\partial f_n}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(x+t^2)^n} \right) = -\frac{n}{(x+t^2)^{n+1}}$$

Il faut majorer cette expression (en valeur absolue) indépendamment de x pour $x > 0$ par une fonction intégrable.

Ce n'est pas possible, on va alors se restreindre à un segment.

On considère donc $0 < a < b$ et le segment $[a, b]$ qui est donc inclus dans $]0, +\infty[$.

On a :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}^+, \frac{n}{(x+t^2)^{n+1}} \leq n \frac{1}{(a+t^2)^{n+1}}$$

On considère donc la fonction φ_a définie par :

$$\varphi_a(t) = n \frac{1}{(a+t^2)^{n+1}}.$$

Cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ car elle continue par morceaux et

$$\varphi_a(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2(n+1)}} \text{ intégrable de Riemann avec } \alpha = 2n + 2.$$

On a donc à $n \geq 1$ fixé :

H1 À $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto f_n(x, t)$ est bien continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

H2 À $t \geq 0$ fixé, la fonction $x \mapsto f_n(x, t)$ est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ ,

H3 À $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f_n(x, t)$ est bien continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ ,

H4 Pour tout segment $[a, b]$ de \mathbb{R}^{+*} , on note $\varphi_a : t \mapsto \frac{n}{(a+t^2)^{n+1}}$.

On a bien :

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in \mathbb{R}^+, \left| \frac{\partial}{\partial x} f_n(x, t) \right| \leq \varphi_a(t)$$

De plus, la fonction φ_a est bien continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R}^+ .

On obtient que I_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_*^+ et que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_*^+, I_n'(x) &= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{n}{(x+t^2)^{n+1}} \right) dt \\ &= -nI_{n+1}(x) \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence la formule suivante :

$$\forall x > 0, \forall n \geq 2, I_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1 \times 3 \dots (2n-3)}{(n-1)! 2^{n-1}} x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

En effet, on a vu que pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{\pi}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ I_2(x) &= -\frac{1}{1} I_1'(x) = \frac{\pi}{2} x^{-\frac{3}{2}} \\ I_3(x) &= -\frac{1}{2} I_2'(x) = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{\pi}{2} x^{-\frac{5}{2}} \\ I_4(x) &= -\frac{1}{3} I_3'(x) = \frac{1}{3 \times 2} \frac{3 \times 5}{2^2} \frac{\pi}{2} x^{-\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à rédiger la récurrence.

★ **Généralisation aux fonctions de classe \mathcal{C}^k**

On peut appliquer ce résultat par récurrence :

Proposition V.3 Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On suppose :

H1 pour tout $t \in J$, l'application partielle $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^k sur I .

H2 pour tout $x \in I$ et pour tout $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$ l'application dérivée partielle :

$$t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \text{ est continue par morceaux sur } J$$

et intégrable sur J

(**NB** : en particulier $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable).

H3 Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur J , telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

On note la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$

On a alors :

- la fonction g est de classe \mathcal{C}^k sur I ,
- et on a

$$\forall x \in I, \forall p \in \llbracket 1, k \rrbracket, g^{(p)}(x) = \int_J \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) dt$$

l'hypothèse de domination signifie ici que la dernière dérivée partielle est dominée (ie majorée indépendamment du paramètre x).

Comme précédemment, il faut que la fonction dominante soit intégrable.



Le cadre d'application de cette formule est celui où on a une expression explicite des dérivées successives $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)$ pour pouvoir vérifier qu'elles sont continues par morceaux.

Il faut aussi l'expression de la dernière dérivée partielle $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ pour avoir la domination.



Comme on n'a pas de domination de la fonction f , il faut l'hypothèse qu'à x fixé, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable. De même pour les premières dérivées partielles, il faut l'hypothèse intégrable (pour la dernière c'est une conséquence de la domination).



En fait, on peut montrer que si la dernière dérivée partielle est dominée alors les précédentes sont dominées (au moins sur tout segment).

Bilan des hypothèses

On veut intervertir les symboles :

$$\frac{d^p}{dx^p} \left(\int_J f(x, t) dt \right) = \int_J \left(\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \right) dt$$

- pour que $\int_J f(x,t)dt$ existe, il faut qu'à x fixé, $t \mapsto f(x,t)$ soit continue par morceaux et intégrable (H2).
 - pour que $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ existe, il faut qu'à t fixé, $x \mapsto f(x,t)$ soit de classe \mathcal{C}^k (H2).
 - pour que $\int_J \left(\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) \right) dt$, il faut que pour tout $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, et tout $x \in I$, l'application $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ soit continue par morceaux et intégrable (H2).
- Encore une fois, la seule hypothèse à bien comprendre et retenir est la domination de la dernière dérivée partielle.



Il existe une version « sur tout segment » de ce résultat : on peut remplacer l'hypothèse de domination par : pour tout $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, pour tout segment K de I il existe une fonction φ_p^K continue par morceaux et intégrable sur J , telle que :

$$\forall (x,t) \in K \times J, \left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) \right| \leq \varphi_p(t)$$

Voici par exemple, une version « \mathcal{C}^∞ avec domination sur tout segment » de ce résultat

Proposition V.4 On suppose :

H1 pour tout $t \in J$, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

H2 pour tout $x \in I$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ l'application dérivée partielle :

$$t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } J.$$

H3 pour tout $p \in \mathbb{N}$, et tout segment K de I , il existe une fonction φ_p^K continue par morceaux et intégrable sur J , telle que :

$$\forall (x,t) \in K \times J, \left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) \right| \leq \varphi_p^K(t)$$

On note la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)dt$

On a alors :

- la fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ sur I ,
- pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in I, \forall p \in \mathbb{N}, g^{(p)}(x) = \int_J \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)dt$$



Dans les hypothèses, la fonction φ qui domine $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ dépend donc de p (ordre de la dérivation) et de K (le segment).

■ **Exemple V.2** Soit la fonction :

$$F : x \mapsto \int_0^1 \sin(tx)dt$$

montrons qu'elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

On note $f : (x, t) \mapsto \sin(tx)$ définie sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

On a facilement :

H1 pour $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto \sin(tx)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = t^k \sin\left(tx + k\frac{\pi}{2}\right)$$

H2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, l'application :

$$t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty$$

H3 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a la majoration :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \left| t^k \sin\left(tx + k\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq t^k$$

on a donc une domination de la dérivée partielle k -ième par la fonction $\varphi_k : t \mapsto t^k$ sur $[0, 1]$. Cette fonction est intégrable.

On peut donc appliquer le théorème, qui donne que F est de classe \mathcal{C}^∞ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, F^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k \sin\left(tx + k\frac{\pi}{2}\right) dt$$

■

R Bien comprendre dans l'exemple précédent : comme on travaille sur un segment, les hypothèses d'intégrabilité sont très simple.

Interversion de symboles

★ Rappels de première année

Exercice 1 Considérons la fonction $F : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Prolonger F par continuité en 0.
2. Vérifier que ce prolongement est dérivable en 0.
3. Retrouver ce résultat par les séries entières.

Correction :

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$, ainsi, on peut prolonger la fonction F par continuité en posant $F(0) = 1$.
2. On sait que F est continue en 0 (puisqu'on a appliqué le prolongement par continuité). On a aussi :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, F'(x) &= -\frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)} \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{1+x} \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left(-\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) + (1 - x + o(x)) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = -\frac{1}{2}$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, cela donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$$

Donc F est dérivable en 0 avec $F'(0) = -\frac{1}{2}$.

NB : on peut aussi faire le taux d'accroissement.

3. On utilise la série entière de $\ln(1+x)$:

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[\setminus\{0\}, F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n+1} \end{aligned}$$

On constate que l'égalité est aussi vraie en 0.

La série entière : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n+1} \right)$ a pour rayon de convergence 1.

Ainsi, F est DSE donc de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$.

Exercice 2 On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, si $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_- et \mathbb{R}_+ .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$$

Donner l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n .

4. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Préciser la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. f est continue sur \mathbb{R}_*^+ et \mathbb{R}_*^- . En 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0.$$

2. évident.

3. Par récurrence (à détailler). Initialisation évidente en posant $P_0 = 1$.

Hérédité :

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0, f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &= \frac{P_n'(x)}{x^{3n}} f(x) - 3n \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} f(x) + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f'(x) \\ &= \frac{P_n'(x)}{x^{3n}} f(x) - 3n \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} f(x) + \frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}} f(x) \\ &= \frac{f(x)}{x^{3n+3}} (x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)) \end{aligned}$$

On pose donc :

$$P_{n+1} = X^3 P_n'(X) - 3nX^2 P_n(X) + 2P_n(X)$$

C'est bien un polynôme, et on a bien la relation.

4. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : f est de n fois dérivable sur \mathbb{R} .

L'initialisation est évidente pour $n = 0$.

Pour l'hérédité, on constate que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_n\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{t^{\frac{3n}{2}}} e^{-t} = 0 \end{aligned}$$

Par comparaison entre les puissance et l'exponentielle.

Comme $f^{(n)}$ est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* , le théorème de la limite de la dérivée s'applique qui donne : le taux d'accroissement de $f^{(n)}$ en 0 tends vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0$$

Ainsi, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et donc sur \mathbb{R} ie f est $n + 1$ fois dérivable en 0 et donc sur \mathbb{R} . D'où l'hérédité.

On constate que $f^{(n)}(0) = 0$.

★ **Théorème de convergence dominée**

Exercice 3 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1 + nx}{(1+x)^n} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx$$

Correction :

Première limite : On considère $f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$, on voit que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
- la suite de fonction (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x}$.
- la fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

- En utilisant $\ln(1+u) \leq u$, on obtient facilement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, |f_n(x)| \leq f(x)$$

La suite de fonction (f_n) est ainsi dominée par la fonction f qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée donne alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

Deuxième limite : On considère ensuite $f_n : x \mapsto \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $[0, 1]$,
- La suite de fonction f_n converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On peut dire que c'est une croissance comparée ou écrire pour $x \in]0, 1]$ fixé :

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{nx}{(1+x)^n} = \exp \left(\underbrace{\ln(n) + \ln(x) - n \ln(1+x)}_{\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -n \ln(1+x) \rightarrow -\infty} \right) \rightarrow 0$$

- la fonction f est continue par morceaux sur $[0, 1]$.
- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |f_n(x)| \leq 1$$

La suite de fonction (f_n) est ainsi dominée par la fonction $\varphi : x \mapsto 1$ qui est intégrable. En effet à $x \in [0, 1]$ fixé et n fixé :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \geq 1 + nx$$

Le théorème de convergence dominée donne alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx = \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

R On aurait aussi pu travailler sur $]0, 1]$

Troisième limite On a :

$$\begin{aligned} \text{à } x \text{ fixé, } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \varphi : x &\mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Si bien que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Quatrième limite On pose :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} & \text{si } x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f_n converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ fonction continue par morceaux. La fonction dominante est : $\varphi : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$. On obtient ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 2.$$

Exercice 4 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t^n) dt$$

Puis à l'aide d'un changement de variables :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nt^n f(t^n) dt$$

Correction : Comme f est continue sur un segment, f est bornée. Donc $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1], |f(t)| \leq M$.
On pose donc $g_n : t \mapsto f(t^n)$ et $\varphi : t \mapsto M$. On constate que g_n converge simplement vers la fonction :

$$g : t \mapsto \begin{cases} f(0) & \text{si } t \in [0, 1[\text{ par continuité en } 0 \\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Les hypothèses du thm de convergence dominée sont vérifiées.

Et donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t^n) dt = f(0)$$

Pour le deuxième problème, on pose à n fixé :

$$\begin{aligned} u = t^n & \quad t = u^{\frac{1}{n}} \\ t \text{ varie de } 0 \text{ à } 1 & \quad u \text{ varie de } 0 \text{ à } 1 \\ du = nt^{n-1} dt & \quad t \mapsto t^n \text{ est } \mathcal{C}^1 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 nt^n f(t^n) dt = \int_0^1 u^{\frac{1}{n}} f(u) du$$

On pose donc :

$$g_n : u \mapsto u^{\frac{1}{n}} f(u)$$

à u fixé, $u \neq 1$ et $u \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \underbrace{\ln(u)}_{< 0}\right) = e^0 = 1$$

ainsi (g_n) converge vers :

$$g : t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, 1[\\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

D'autre part, si on pose $\varphi : u \mapsto M$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in [0, 1], \left| u^{\frac{1}{n}} f(u) \right| \leq M$$

Les hypothèses du thm de convergence dominée sont vérifiées. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nt^n f(t^n) dt = \int_0^1 f(t) dt$$

Exercice 5 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)t^n dt$.

On suppose que f est \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. À l'aide d'une IPP, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 f(t)t^n dt \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(nt) dt$$

Correction :

On note ensuite $g_n : t \mapsto f(t)t^n$. On a alors (g_n) converge simplement vers :

$$g : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1[\\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

On vérifie ensuite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], |f(t)t^n| = |g_n(t)| \leq |f(t)|$$

qui est intégrable puisque c'est une fonction continue sur un segment. D'où les hypothèses du thm de cv dominée sont vérifiées et donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t)t^n dt = 0$$

Pour le deuxième problème, on commence par fixer n et faire une IPP :

$$\begin{aligned} n \int_0^1 f(t)t^n dt &= \left[f(t)t^{n+1} \frac{n}{n+1} \right]_0^1 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 f'(t)t^{n+1} dt \\ &= \frac{n}{n+1} f(1) - \frac{n}{n+1} \int_0^1 f'(t)t^{n+1} dt \end{aligned}$$

REM : bien insister que l'on peut faire l'ipp car f est \mathcal{C}^1 . On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f'(t)t^{n+1} dt = 0 \text{ résultat précédent avec } f' \in \mathcal{C}^0$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 f(t)t^n dt = f(1)$$

REM : pour le troisième il n'y a pas de CV simple donc pas de théorème de CV dominée.

Pour le troisième on procède de même :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) \sin(nt) dt &= \left[-\frac{1}{n} f(t) \cos(nt) \right]_0^1 + \frac{1}{n} \int_0^1 f'(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{n} (f(0) - f(1) \cos(n)) + \frac{1}{n} \int_0^1 f'(t) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (f(0) - f(1) \cos(n)) &= 0 \text{ car borné } \times \text{ tend vers } 0 \\ \int_0^1 f'(t) \cos(nt) dt &\text{ est bornée donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 f'(t) \cos(nt) dt = 0 \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(nt) dt = 0$.

Exercice 6 Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que $f(0) \neq 0$.

Montrer que $\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt$ diverge et que $\int_0^1 \frac{f(t) - f(0)}{t} dt$ converge.

En déduire un équivalent de $\int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers 0

Correction :

$\int_0^1 \frac{f(t) - f(0)}{t} dt$ est faussement généralisée en 0 car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(0)$.

Ainsi : $\int_0^1 \frac{f(t) - f(0)}{t} dt$ converge, comme $\int_0^1 \frac{f(0)}{t} dt$ diverge, on a nécessairement : $\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt$ diverge.

Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt &= \int_x^1 \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + f(0) \int_x^1 \frac{dt}{t} \\ &= \int_x^1 \frac{f(t) - f(0)}{t} dt - f(0) \ln(x) \end{aligned}$$

Comme :

$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{f(t) - f(0)}{t} dt$ est fini

Ainsi :

$$\int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -f(0) \ln(x)$$

★ **Intégration terme à terme**

Exercice 7 L'objectif est de montrer la relation suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

1. Justifier l'existence des deux membre de cette égalité.
2. Montrer que :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t} e^{-nt}$$

3. On admet que : $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-nt} dt$ en utilisant un changement de variables.

4. Conclure.

Correction :

1. On note $f : t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$. La fonction f est CM sur $]0, +\infty[$. On a de plus les approximations suivantes :

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Par critère de comparaison des fonctions positives, on en déduit que f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$ existe.

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2}$.

2. On utilise une série géométrique de raison e^{-t} et de premier terme $\sqrt{t}e^{-t}$. On a bien $|e^{-t}| < 1$ car $t > 0$. Cela donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt} = \sqrt{t} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$$

3. On utilise un changement de variable :

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{nt} & t &= \frac{y^2}{n} \\ \frac{dy}{dt} &= \sqrt{n} \frac{1}{2\sqrt{t}} & dy &= \sqrt{n} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

t varie de 0 à $+\infty$, y varie de 0 à $+\infty$, $t \mapsto \frac{y^2}{n}$ est bien de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissant.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt} dt &= \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} te^{-nt} \sqrt{n} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{2}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y^2} dy \end{aligned}$$

On utilise alors une IPP :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} yy e^{-y^2} dy &= \left[y \left(-\frac{1}{2} e^{-y^2} \right) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \end{aligned}$$

car le crochet est nul.

Au final :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt} dt = \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4. On utilise le théorème d'intégration terme à terme. On note $f_n : t \mapsto \sqrt{t}e^{-nt}$

• On a bien :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

converge.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux.
- La série de fonction $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$.
- La fonction f est bien continue par morceaux.

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt,$$

ce qui s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Exercice 8 Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Commentaire : exercice type à savoir refaire.

Correction : on commence par écrire pour $t > 0$:

$$\frac{\sin t}{e^t - 1} = \sin t e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t e^{-nt}$$

On pose donc $f_n : t \mapsto \sin t e^{-nt}$. f_n est bien \mathcal{C}^∞ ($]0, +\infty[$) et $f_n(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2}\right)$. Cela a donc un sens de vouloir écrire :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$$

Il faut montrer que $\sum \int |f_n|$ converge. On travaille donc sur :

$$\int_0^{+\infty} |\sin t e^{-nt}| dt$$

NB : avec les valeurs absolues ! Il faut majorer cette quantité (qui ne dépend que de n). On peut faire :

$$|\sin t e^{-nt}| \leq t e^{-nt}$$

Puis avec une ipp, on montre facilement que :

$$\int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}$$

On fait alors le bilan des hypothèses et on constate que l'on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

Il faut ensuite calculer : $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$. **NB :** sans les valeurs absolues cette fois. En faisant « deux ipp dans le même sens » ou en utilisant : $\sin t e^{-nt} = \operatorname{Im} (e^{-(n-i)t})$, on a facilement :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{n^2 + 1}$$

ce qui donne le résultat.

Extrait du programme : On présente des exemples sur lesquels le théorème ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

Exercice 9 Intégration terme à terme et convergence dominée

L'objectif est de montrer la relation :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

1. Justifier l'existence des deux membres de cette égalité.
2. Rappeler le développement en série entière de $\frac{1}{1+x}$ sur $] -1, 1[$.
3. Montrer que les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme ne sont pas satisfaites.
4. Poser :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k.$$

Est-il possible d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (f_n) ? Conclure.

Correction :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est une série alternée. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ est une intégrale sur un segment (pas généralisée).
2. cours :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$$

3. si on calcule $\int_0^1 |(-1)^k x^k| dx = \frac{1}{k+1}$ mais la série des $\sum \frac{1}{k+1}$ ne converge pas !.

4. On pose donc f_n la somme partielle. On a aussi :

$$f_n(x) = \frac{1 - (-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

On vérifie les hypothèses du THM de convergence dominée.

En particulier l'hypothèse de domination :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \left| \frac{1 - (-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \right| \leq \frac{2}{1+x}$$

On applique donc le théorème :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 \sum_{k=0}^n f_k(t) dt \right) = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k(t) \right) dt$$

Ce qui s'écrit (intersion des sommes finies) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 f_k(t) dt \right) = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k(t) \right) dt$$

Ou encore :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_k(t) dt \right) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (f_k(t)) dt$$

★ Intégrales à paramètres

Exercice 10 On pose $F(a) = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}} dx$. Démontrer que F est continue sur \mathbb{R} .

En déduire $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}} dx$.

Calculer ensuite : $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}} dx$.

Correction : On note :

$$f : (a, x) \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}}$$

- à paramètre $a \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}}$ est \mathcal{C}^∞ .
- à variable $x \in [0, 1]$ fixé, $a \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}}$ est \mathcal{C}^0 .
- On note $\varphi : x \mapsto x^2$. On a alors $\forall (a, x) \in \mathbb{R} \times [0, 1], |f(a, x)| \leq \varphi(x)$. La fonction φ est bien \mathcal{C}^∞ et intégrable sur $[0, 1]$.

Ainsi, F est continue sur \mathbb{R} .

En particulier :

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}} dx &= F(0) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Pour la limite en $+\infty$, on applique le thm de cv dominée à paramètre continu (la domination est la même qu'à la question précédente).

- à paramètre $a \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}}$ est \mathcal{C}^∞ .
- à variable $x \in [0, 1]$ fixé, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}} = 0$
- $x \mapsto 0$ est \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$ (cette limite pourrait a priori dépendre de x).
- On note $\varphi : x \mapsto x^2$. On a alors $\forall (a, x) \in \mathbb{R} \times [0, 1], |f(a, x)| \leq \varphi(x)$. La fonction φ est bien \mathcal{C}^∞ et intégrable sur $[0, 1]$.

On peut donc échanger limite et intégrale pour obtenir :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = 0$$

Exercice 11 Montrer que la fonction :

$$F : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+ixy)}$$

est continue sur \mathbb{R} .

Correction : On note :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)}$$

- à paramètre $y \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)}$ est $\mathcal{C}\mathcal{M}$,
- à variable $x \in \mathbb{R}$ fixé, $y \mapsto \frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)}$ est \mathcal{C}^0 ,
- On note $\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. On a alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |f(x, y)| \leq \varphi(x).$$

La fonction φ est bien $\mathcal{C}\mathcal{M}$ et intégrable sur \mathbb{R} .

Ainsi F est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 12 On pose $F(a) = \int_0^\pi \sin(a \sin x) dx$.

Démontrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Correction : On note :

$$f : (a, x) \mapsto \sin(a \sin x)$$

On a :

$$\forall (a, x) \in \mathbb{R} \times [0, \pi], \frac{\partial f}{\partial a} = \sin(x) \cos(a \sin(x))$$

Ainsi on a :

- à paramètre $a \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto \sin(a \sin x)$ est $\mathcal{C}\mathcal{M}$ et intégrable sur $[0, \pi]$.
- à variable $x \in [0, \pi]$ fixé, la fonction $a \mapsto \sin(a \sin x)$ est de classe \mathcal{C}^1 , avec : $\frac{\partial f}{\partial a} = \sin(x) \cos(a \sin(x))$.
- à paramètre $a \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto \sin(x) \cos(a \sin(x))$ est $\mathcal{C}\mathcal{M}$.
- On pose $\varphi : x \mapsto 1$. et on a bien :

$$\forall (a, x) \in \mathbb{R} \times [0, \pi], |\sin(x) \cos(a \sin(x))| \leq \varphi(x)$$

La fonction φ est bien $\mathcal{C}\mathcal{M}$ et intégrable sur $[0, \pi]$.

On en déduit que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 et que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, F'(a) = \int_0^\pi \sin(x) \cos(a \sin(x)) dx$$

Extrait du programme : Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire.

Exercice 13

1. En distinguant les cas $x > 0$, $x = 0$ et $-1 < x < 0$.

Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$ est convergente pour tout x de $] -1, +\infty[$.

2. Montrer que la fonction :

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

3. En déduire une expression explicite de $f(x)$.

Correction :

1. On note $h_x : t \mapsto \frac{t^x - 1}{\ln t}$.

Déjà, h_x est \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$. On a une intégrale doublement généralisée.

Pour $x = 0$, h_x est la fonction nulle, donc clairement $f(0) = 0$.

Pour $x > 0$, on a en 1 :

$$\frac{t^x - 1}{\ln t} = \frac{e^{x \ln(t)} - 1}{\ln t} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} x$$

Ainsi, h_x est prolongeable par continuité en posant $h_x(1) = x$, et donc h_x est intégrable en 1 (intégrale faussement généralisée).

En 0 :

$$\frac{t^x - 1}{\ln t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\ln(t)} \rightarrow 0$$

Ainsi, h_x est prolongeable par continuité en posant $h_x(0) = 0$, et donc h_x est intégrable en 0. On voit donc que pour $x > 0$, l'intégrale est convergente (elle est en fait deux fois faussement généralisée).

Pour $x < 0$, c'est le même argument en 1 : l'intégrale est faussement généralisée. En 0 :

$$\frac{t^x - 1}{\ln t} = \frac{e^{x \ln(t)} - 1}{\ln t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^x}{\ln(t)} = \frac{1}{t^{-x} \ln(t)}$$

$$|h_x(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{-x} |\ln(t)|} = o\left(\frac{1}{t^{-x}}\right)$$

or $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-x}}$ cv car $-x < 1$.

2. On note

$$g : (x, t) \mapsto h_x(t) = \frac{t^x - 1}{\ln t}$$

On a déjà :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = t^x$$

On voudrait dominer cette fonction indépendamment du paramètre $x \in]-1, +\infty[$ par une fonction intégrable. Cela n'est pas possible, il faut dominer sur tout segment $[a, b] \subset]-1, +\infty[$. On a alors :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, 1[, |t^x| \leq t^a$$

avec $t \mapsto t^a$ intégrable sur $]0, 1[$ (critère de Riemann avec $\alpha = -a > 1$).

On a :

- à paramètre $x \in]-1, +\infty[$ fixé, $t \mapsto \frac{t^x - 1}{\ln t}$ est \mathcal{C}^1 et intégrable,
- à variable $t \in]0, 1[$ fixée, $x \mapsto \frac{t^x - 1}{\ln t}$ est \mathcal{C}^1 avec :

$$\forall (x, t) \in]-1, +\infty[\times]0, 1[, \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = t^x$$

- à variable $t \in]0, 1[$ fixée $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = t^x$ est \mathcal{C}^1 ,
- pour tout segment $[a, b] \subset]-1, +\infty[$, on note $\varphi_a : t \mapsto t^a$, et on a :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, 1[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = |t^x| \leq t^a$$

La fonction φ_a est \mathcal{C}^1 et intégrable sur $]0, 1[$ car

$$\int_0^1 t^a dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{-a}} dt \quad \text{est une intégrale de Riemann avec } -a > 1$$

On en déduit que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 , et que :

$$\forall x > -1, f'(x) = \int_0^1 t^x dx = \frac{1}{x+1}$$

3. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et la fonction f ont la même dérivée sur l'intervalle $] -1, +\infty[$, on en déduit que :

$$\exists c \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x) + c$$

en prenant $x = 0$, on a $c = 0$. Ainsi, $f : x \mapsto \ln(1+x)$

Exercice 14

1. Montrer que la fonction :

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}

2. En déduire une expression explicite de $F(x)$.

Indication : on admettra la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Correction :

1. On a :

- à $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto e^{-t^2} \cos(xt)$ est \mathcal{C}^∞ et intégrable sur $[0, +\infty[$ (on peut utiliser $e^{-t^2} |\cos(xt)| \leq \frac{1}{t^2}$).
- à $t \geq 0$ fixé, $x \mapsto e^{-t^2} \cos(xt)$ est de classe \mathcal{C}^1 ,
- à $x \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto -te^{-t^2} \sin(xt)$ est \mathcal{C}^∞ .
- on note $\varphi : t \mapsto te^{-t^2}$ et on a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \left| -te^{-t^2} \sin(xt) \right| \leq te^{-t^2}$$

la fonction φ est \mathcal{C}^∞ et intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Ainsi, F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = - \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(xt) dt$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on fait une ipp avec :

$$\begin{aligned} u'(t) &= -te^{-t^2} & u(t) &= \frac{1}{2}e^{-t^2} \\ v(t) &= \sin(xt) & v'(t) &= x \cos(xt) \end{aligned}$$

Le crochet est nul, donc :

$$F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$$

On en déduit que F est solution de l'équation différentielle homogène :

$$y' + \frac{x}{2}y = 0$$

On en déduit : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, F(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$. Or on voit que $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Exercice 15

1. Déterminer l'ensemble D de définition de la fonction :

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$$

2. Montrer que F est \mathcal{C}^∞ sur $D \setminus \{0\}$.

Correction :

1. On a pour $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\left| \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, ainsi, $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est aussi intégrable, et donc $F(x)$ existe.

D'autre part, si $x < 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} = +\infty$, donc l'intégrale diverge. Au final, $D = \mathbb{R}^+$.

2. on note $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$.

On utilise alors le thm de dérivation sous le signe intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$.

- à $t \geq 0$ fixé, $x \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

De plus, on calcule facilement les dérivées successives :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \forall x > 0, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (-1)^k t^k \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

- à $x > 0$ fixé, et pour toute valeur de k , la fonction : $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (-1)^k t^k \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est bien continue par morceaux.
- pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^*$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \forall x \in [a, b], \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| = t^k \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \leq t^k \frac{e^{-ta}}{1+t^2}$$

Ainsi, la dérivée k -ième $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est dominée sur le segment $[a, b]$ par :

$$\varphi : t \mapsto t^k \frac{e^{-ta}}{1+t^2} \text{ fonction continue par morceaux}$$

Or $t^k \frac{e^{-ta}}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^k e^{-ta} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ ainsi, la fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On a donc une domination sur tout segment de chaque dérivée par une fonction intégrable.

On a donc bien toutes les hypothèses d'interversion, ce qui donne que la fonction F est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, F^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$$

★ **Exercices de concours**

Exercice 16 CCP MP 2018

On considère l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

1. Démontrer à l'aide d'une série entière que

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$$

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on

$$|I - s_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$$

- Déterminer, en détaillant, la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\forall x \in [0, 1], |f_n(x)| \leq e^{-x^2}$. En déduire que

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k (2k+1)}$$

Correction :

- La fonction exp est développable en série entière entière de rayon de convergence infini et

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

En utilisant ceci avec x^2 , on en déduit que

$$I = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)} dx$$

$f_n : x \mapsto (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)}$ est continue sur $[0, 1]$ et $\|f_k\|_{\infty} = \frac{1}{k!}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_k)$ converge normalement sur le SEGMENT $[0, 1]$. On est dans le cas simple où l'interversion somme-intégrale est licite. Elle donne

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k} dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$

- $u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ est le terme général d'une suite alternée, décroissante en module et convergente de limite nulle. La règle spéciale s'applique à la série $\sum(u_k)$. Elle indique que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$$

Ceci s'écrit exactement

$$|I - s_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$$

- Soit $x \geq 0$. $x^2/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0, 0 \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{1}{2}$. Pour ces $n, 1 - \frac{x^2}{n} > 0$ et donc

$$\forall n \geq n_0, f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right)$$

Le terme dans l'exponentielle équivaut, quand $n \rightarrow +\infty$, à $n \times \left(-\frac{x^2}{n}\right) = -x^2$ et tend donc vers $-x^2$. Par continuité de l'exponentielle, on a donc $f_n(x) \rightarrow e^{-x^2}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Ainsi : (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers $x \mapsto e^{-x^2}$

- Par concavité de la fonction logarithme,

$$\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$$

Soit $x \in [0, 1]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x^2/n \in [0, 1]$. Si $x^2/n \in [0, 1[$ alors (croissance de exp et notre inégalité de concavité)

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq e^{-x^2}$$

et le résultat reste vrai si $x^2/n = 1$ ($0 \leq e^{-x^2}$ dans ce cas).

Ainsi $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leq e^{-x^2}$

Utilisons alors le théorème de convergence dominée.

- (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction continue sur $[0, 1]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leq e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, 1]$ puisque continue sur le SEGMENT.

Le théorème s'applique et donne

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$$

On développe la puissance par formule du binôme et par linéarité du passage à l'intégrale,

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{n}\right)^k dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}$$

Exercice 17 Fonction Gamma

Soit :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Chercher \mathcal{D} l'ensemble de définition de Γ .
2. Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_*^+ .
3. Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. En déduire que :

$$\exists c \in]1, 2[, \Gamma'(c) = 0$$

4. Donner le sens de variation de Γ' puis de Γ .
5. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
6. En déduire un équivalent de $\Gamma(x)$ au voisinage de 0.
7. Montrer que :

$$\forall x > 3, \Gamma(x) \geq (x-1)\Gamma(2).$$

En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x}$.

Correction : On note

$$f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$$

1. $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.

En $+\infty$:

$$f(x, t) = o_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2}$$

intégrable en $+\infty$ pour toute valeur de x .

En 0 :

$$f(x, t) = \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$$

intégrable en 0 lorsque $1-x < 1$ ie $x > 0$.

2. Soit $0 < a < b$, on a la majoration :

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = \ln^2(t) e^{-t} t^{x-1} \leq \begin{cases} \ln^2(t) e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1] \\ \ln^2(t) e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

On pose donc φ (ou $\varphi_{a,b}$) cette fonction.

On vérifie que φ est intégrable. En 0 :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln^2(t) t^{a-1} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{\frac{a}{2}} \ln^2(t) t^{\frac{a}{2}-1} = o_{a \rightarrow 0} \left(t^{\frac{a}{2}-1} \right) \end{aligned}$$

intégrable en 0 car $1 - \frac{a}{2} < 1$.

en $+\infty$ on a : $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

Il reste à rédiger le bilan des hypothèses. On rappelle que la domination concerne que la dernière dérivée. il faut donc montrer que la fonction et sa première dérivée sont intégrable.

- pour $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^∞ et intégrable sur \mathbb{R}_*^+ (cf q1).
- pour $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_*^+ (ce qui permet de dériver).
- pour $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\ln(t) e^{-t} t^{x-1}$ est \mathcal{C}^∞ .

Elle est aussi intégrable puisqu'en 0, on a :

$$\begin{aligned} \left| -\ln(t) e^{-t} t^{x-1} \right| &= -\ln(t) e^{-t} t^{x-1} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln(t) t^{x-1} = -\ln(t) t^{\frac{x}{2}} t^{\frac{x}{2}-1} \\ &= o_{t \rightarrow 0} \left(t^{\frac{x}{2}-1} \right) \text{ intégrable car } 1 - \frac{x}{2} < 1 \end{aligned}$$

En $+\infty$ c'est clair : $\left| -\ln(t) e^{-t} t^{x-1} \right| = o_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t^2} \right)$

- pour $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \ln(t)^2 e^{-t} t^{x-1}$ est \mathcal{C}^∞ . (on peut ajouter intégrable mais c'est une conséquence directe de la propriété suivante).
- Pour un segment $[a, b]$ quelconque de \mathbb{R}_*^+ , On a la majoration :

$$\forall x \in [a, b], \forall t > 0, \ln(t)^2 e^{-t} t^{x-1} \leq \varphi(t)$$

où :

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} \ln^2(t) e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1] \\ \ln^2(t) e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Cette fonction est bien \mathcal{C}^∞ et intégrable.

D'après le thm de dérivation (2x) sous le signe intégral appliqué sur tout segment de $]0, +\infty[$, on en déduit que Γ est \mathcal{C}^2 .

De plus, on a :

$$\forall x > 0, \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^2 e^{-t} t^{x-1}$$

3. $\Gamma(1) = 1$ (c'est du cours).

Pour $\Gamma(2)$ il faut faire une IPP (crochet nul par croissance comparée) :

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Le théorème de Rolle (dont il faut rappeler les hypothèses) donne alors la conclusion.

- Γ'' est positif donc Γ' croissant. On en déduit le signe de Γ' : négatif avant c positif après. Et donc Γ décroissante avant c puis croissante.
- REM : question à savoir faire!** La fonction Γ prolonge la factorielle aux réels.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$$

ipp usuelle :

$$[t^x (-e^{-t})]_0^{+\infty} = 0$$

donc :

$$\Gamma(x+1) = - \int_0^{+\infty} x t^{x-1} (-e^{-t}) dt = x \Gamma(x)$$

6. On utilise la relation précédente :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\Gamma(1)}{x} = \frac{1}{x}$$

par continuité de Γ .

7. On remplace x par $x-1$ pour $x > 1$:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

et donc pour $x > 3$:

$$\Gamma(x) \geq (x-1)\Gamma(2)$$

car $x-1 \geq 2$ et Γ croissante sur $[2, +\infty[$.

8. D'où Γ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

D'autre part :

$$\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x} \Gamma(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \Gamma(x) \rightarrow +\infty$$

Exercice 18 Soit les fonctions :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x e^{-t^2} dt \end{cases}$$

1. Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

2. Montrer que $f + g^2$ est une fonction constante.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4. Montrer que : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et calculer sa valeur.

5. En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$ puis pour tout entier naturel, la valeur de $\Gamma(n + \frac{1}{2})$

Rappel : la fonction Γ est :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Correction :

1. Pour f c'est une dérivation sous le signe intégral.

$$\text{On pose : } u(x, t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$$

On calcule :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$$

Pour un segment de la forme $[-M, M] \subset \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in [-M, M], \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = 2xe^{-(1+t^2)x^2} \leq 2M$$

ce qui est intégrable sur $[0, 1]$ (car $[0, 1]$ est de longueur finie donc les constantes sont intégrable).

Il reste à faire le bilan des hypothèses :

- à $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto u(x, t)$ est \mathcal{C}^∞ et intégrable (il n'y a aucune difficulté c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment).
- à $t \in [0, 1]$ fixé, $t \mapsto u(x, t)$ est \mathcal{C}^1 . On a vu :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$$

- à $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est \mathcal{C}^∞ .
- Pour tout segment $[-M, M]$ de \mathbb{R} , on a la majoration :

$$\forall x \in [-M, M], \forall t \in [0, 1], \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq M$$

qui est continue par morceaux et intégrable.

On a donc f qui est \mathcal{C}^1 , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt$$

Pour g , on a g est la primitive qui s'annule en 0 de $t \mapsto e^{-t^2}$. Donc g est \mathcal{C}^1 et $g'(x) = e^{-x^2}$.

2. on note $\varphi : x \mapsto f(x) + g^2(x)$. La fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 , et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = f'(x) + 2g(x)g'(x)$$

On va travailler sur $f'(x)$ pour vérifier cette relation, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^t e^{-u^2} du \quad \text{en posant } u = tx \\ &= -2g'(x)g(x) \end{aligned}$$

Ainsi φ a sa dérivée nulle sur l'intervalle \mathbb{R} donc elle est constante.

3. C'est le théorème de convergence dominée à paramètre continue. On a la majoration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1], \left| \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Cette fonction est CM et intégrable.

On fait donc un bilan des hypothèses (à compléter), et on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} \right) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. On calcule $\varphi(0)$. On a :

$$g(0) = 0 \text{ et } f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

Comme f est de limite nulle en $+\infty$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g^2(x) = \frac{\pi}{4}$$

on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g^2(x) = \frac{\pi}{4} \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5. On a donc :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

en posant $t = u^2$ ie $u = \sqrt{t}$

On vérifie ensuite la relation :

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

pour conclure par récurrence.

Exercice 19 Soit :

$$f : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.
2. À l'aide de la dérivée de f , donner une expression de $f(x)$ en fonction de x .
3. Soit m et p deux réels supérieurs ou égaux à 1.

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-mt} - e^{-pt}}{t} dt$.
