Table des matières

9 — Espaces vectoriels normés

Extrait du programme

Cette section vise les objectifs suivants :

- généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;
- fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.

Le but de ce chapitre est d'étudier la topologie pour des espaces vectoriels normés quelconques.

La lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et la lettre E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

I Normes et distances

I.1 Définition

Définition I.1 Une norme sur E est une application N :

$$N : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array} \right.$$

qui vérifie :

$$\begin{array}{lr} \forall x \in E, \quad N(x) \geqslant 0 & \text{positivité} \\ \forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0 & \text{séparation} \\ \forall (x,y) \in E^2, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) & \text{inégalité triangulaire ou sous-additivité} \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x) & \text{homogénéité} \end{array}$$

On dit alors que (E,N) est un espace vectoriel normé et pour $x \in E$, on dit

que $N(x)$ est la norme de x.
Un vecteur est dit unitaire si sa norme est égale à 1.

✎ Si F est un SEV de E, alors N est aussi une norme sur F c'est la **norme induite**. Dans l'homogénéité, c'est la valeur absolue ou le produit scalaire.

⋆ Cas d'un produit scalaire associé

Proposition I.1 Si E est un espace préhilbertien réel, ie muni d'un produit scalaire, alors l'application :

$$N : x \longmapsto \|x\| = \sqrt{<x,x>}$$

est une norme.
C'est la norme associée au produit scalaire.

Démonstration. En effet, les premières propriétés découlent directement de la définition d'un produit scalaire :

$$\forall x \in E,\ N(x) = \sqrt{<x,x>} \geqslant 0$$
$$\forall x \in E,\ N(x) = 0 \iff <x,x>= 0 \iff x = 0$$
$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = \sqrt{<\lambda x, \lambda x>} = \sqrt{\lambda^2 <x,x>} = |\lambda| N(x)$$

Si maintenant on considère $(x,y) \in E^2$, alors on a :

$$\begin{aligned} N(x+y) \leqslant N(x)+N(y) &\iff (N(x+y))^2 \leqslant (N(x)+N(y))^2 \\ &\iff N(x)^2 + 2<x,y> + N(y)^2 \leqslant N(x)^2 + 2N(x)N(y) + N(y)^2 \\ &\iff <x,y> \leqslant N(x)N(y) \end{aligned}$$

Cette propriété est vraie en d'après Cauchy-Shwarz :

$$<x,y> \leqslant |<x,y>| \leqslant N(x)N(y)$$

Ainsi, on a bien l'inégalité triangulaire :

$$N(x+y) \leqslant N(x)+N(y)$$

■

On peut aussi dans ce cas chercher l'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Proposition I.2 Soit E un espace préhilbertien réel et N la norme associée. Soit $(x,y) \in E^2$, alors :

$$N(x+y) = N(x)+N(y) \iff \exists \lambda \geqslant 0,\ x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x$$

On dit que x et y sont positivement liés.

Démonstration. Soit (x,y) tel que l'on ait si $N(x+y) = N(x)+N(y)$, alors en reprenant la démonstration précédente, cela donne :

$$< x,y >= | < x,y > | = N(x)N(y)$$

On a donc égalité dans Cauchy-Shwarz et donc les vecteurs x et y sont liés et égalité $< x,y >= | < x,y > |$, ce qui signifie qu'ils sont positivement liés (colinéaires dans le même sens) :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x.$$

■

R Ainsi, pour démontrer l'inégalité triangulaire, on a besoin de l'inégalité de Cauchy-Shwarz. Dans un exercice qui consiste à démontrer qu'une application est une norme, si on n'arrive pas à faire l'inégalité triangulaire, il peut être parfois intéressant de déterminer si un produit scalaire est associé.

On rappelle alors que l'on peut retrouver le produit scalaire à partir de la norme avec les égalités de polarisation :

$$< x,y >= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

! Une norme peut être associée à aucun produit scalaire !
Précisément, on peut démontrer qu'une norme sur $\mathbb{R}^n$ est associé à un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'inégalité du parallélogramme :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

Si elle vérifie cette propriété, alors le produit scalaire est donné par l'égalité de polarisation.

I.2 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Proposition I.3 — Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$
Les applications suivantes sont des normes :

$$\|\cdot\|_\infty : x = (x_1,\dots,x_n)_{\mathscr{B}} \longmapsto \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i| \qquad \text{norme infinie}$$

$$\|\cdot\|_1 : x = (x_1,\dots,x_n)_{\mathscr{B}} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{norme 1}$$

Dans $\mathbb{R}^n$, on peut ajouter la **norme euclidienne** :

$$\|\cdot\|_2 : x = (x_1,\dots,x_n)_{\mathscr{B}} \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

qui est associé au produit scalaire :

$$< x,y > = \langle (x_1,\dots,x_n)_{\mathscr{B}}, (y_1,\dots,y_n)_{\mathscr{B}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Pour ce produit scalaire, la base $\mathscr{B}$ est orthonormée.
Dans $\mathbb{C}^n$, on peut proposer la norme suivante :

$$\|\cdot\|_2 : x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

qui ne dépend plus d'un produit scalaire.

Ces normes dépendent de la base ! En fait, on devrait noter $\|x\|_\infty^{\mathscr{B}}$.
La norme euclidienne n'a un sens que dans $\mathbb{R}^n$ (pas de produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$).
Pour la norme infinie : c'est le maximum d'un nombre fini de valeurs !

Démonstration. Commençons par la norme infinie.

$$\forall x \in \mathbb{K}^n,\ \|x\|_\infty \geqslant 0 \qquad \text{évident}$$

Si on considère $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|x\|_\infty = 0$ alors

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = 0$$

et donc $x = 0$.
Si on considère $x \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} (|\lambda x_i|) = |\lambda| \max_{i\in[\![1,n]\!]} (|x_i|) = |\lambda|\|x\|_\infty$$

Soit maintenant x et y deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on a alors :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

En considérant le i qui réalise le maximum, on obtient :

$$\max_i |x_i + y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \qquad \text{et donc} \qquad \|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

On en déduit que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.
Pour la norme 1.

$$\forall x \in \mathbb{K}^n,\ \|x\|_1 \geqslant 0 \qquad \text{évident}$$

Si on considère $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|x\|_1 = 0$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \text{ et donc } \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = 0 \text{ car c'est une somme de termes positifs}$$

et donc $x = 0$.

Si on considère $x \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$$

Considérons maintenant x et y deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on a alors :

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Ainsi, $\|\cdot\|_1$ est une norme.

Pour $\|\cdot\|_2$ dans $\mathbb{R}^n$, le résultat a déjà été vu : c'est la norme associée au produit scalaire.

Pour $\|\cdot\|_2$ dans $\mathbb{C}^n$, on peut déjà remarque la propriété suivante : pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \|(|x_1|, \dots, |x_n|)\|_2$$

cette dernière étant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

À partir de là, on démontre facilement, que si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \|(|x_1|, \dots, |x_n|)\|_2 \geqslant 0$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors :

$$\begin{aligned}
\|\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n)\|_2 &= \|(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\|_2 \\
&= \|(|\lambda||x_1|, \dots, |\lambda||x_n|)\|_2 \\
&= |\lambda| \|(|x_1|, \dots, |x_n|)\|_2 = |\lambda| \|\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n)\|_2
\end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2} \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^2}
\end{aligned}$$

on reconnaît ici la norme euclidienne de l'élément de $\mathbb{R}^n$:

$$(|x_1| + |y_1|, \dots, |x_n| + |y_n|)$$

On peut donc appliquer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2 &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (|x_i|)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (|y_i|)^2} \\
&\leqslant \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

■

✎ On peut démontrer que la norme infinie et la norme 1 ne sont pas associées à un produit scalaire.

⋆ **Autres normes usuelles**

Sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a les mêmes normes usuelles que $\mathbb{R}^{np}$. Pour $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on peut définir :

$$\|M\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|m_{ij}| \qquad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}m_{ij}^2} \qquad \|M\|_\infty = \max_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}|m_{ij}|$$

Dans le cas de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, la norme 2 est :

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|m_{ij}|^2}$$

elle n'est plus associée à un produit scalaire.

Dans le cas où $n = p$ et où on se place dans $\mathbb{R}$, on a une autre expression de la norme à l'aide de la trace :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \|M\|_2 = \sqrt{Tr\left(M^T M\right)}$$

Pour les fonctions continues sur $[a,b]$, on a une généralisation des normes précédentes. Pour $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$$

I.3 Propriétés

Proposition I.4 Soit (E,N) un espace normé, on a alors l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$$

et l'inégalité triangulaire généralisée :

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n,\ \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ N\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|N(x_i)$$

Démonstration. On a déjà vu la démonstration de l'inégalité triangulaire renversée :

$$N(x) \leqslant N(x-y) + N(y) \text{ ie } N(x) - N(y) \leqslant N(x-y)$$
$$\text{et de même } N(y) - N(x) \leqslant N(x-y)$$

D'où :

$$|N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$$

La deuxième se démontre par récurrence.

■

✎ L'inégalité triangulaire renversée est très importante.

I.4 Distance

Définition I.2 On appelle distance sur un ensemble non vide X toute application d de X^2 dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\begin{array}{lr} \forall (x,y) \in X^2,\ d(x,y) \geqslant 0 & \text{positivité} \\ \forall (x,y) \in X^2,\ d(x,y) = d(y,x) & \text{symétrie} \\ \forall (x,y,z) \in X^3,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) & \text{inégalité triangulaire} \\ \forall (x,y) \in X^2,\ d(x,y) = 0 \iff x = y & \text{axiome de séparation} \end{array}$$

(X,d) est alors un espace métrique

■ **Exemple I.1** Soit

$$d : (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut vérifier que d est une distance (qui ne provient pas d'une norme). ■

Proposition I.5 — Distance associée à une norme. Soit (E,N) un espace vectoriel normé.

Soit N une norme sur E, on définit alors :

$$d : (x,y) \mapsto N(x-y)$$

l'application d est alors une distance, c'est la **distance associée à la norme**.

Démonstration. Clairement :

$$\begin{array}{l} \forall (x,y) \in E^2,\ N(x-y) \geqslant 0 \\ \forall (x,y) \in E^2,\ N(x-y) = N(y-x) \\ \forall (x,y,z) \in E^3,\ N(x-z) = N((x-y)+(y-z)) \leqslant N(x-y) + N(y-z) \\ \forall (x,y) \in E^2,\ N(x-y) = 0 \iff x = y \end{array}$$

■

On a donc trois niveaux : le niveau **espace métrique** (pour lequel il n'y a que la distance), le niveau **espace normé** (pour lequel il y a une norme et une distance) et le niveau **espace euclidien** (pour lequel il y a un produit scalaire, une norme et une distance).

I.5 Boules et sphères

On considère (E,N) un espace normé et d la distance sur E associée à N.

Définition I.3 — Boules ouvertes et fermées, sphères. Soit a un élément de E et r un réel positif.

La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\begin{aligned} B_f(a,r) &= \left\{x \in E \middle| d(x,a) \leqslant r\right\} \\ &= \left\{x \in E \middle| N(x-a) \leqslant r\right\} \end{aligned}$$

La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\begin{aligned} B_o(a,r) &= \left\{x \in E \middle| d(x,a) < r\right\} \\ &= \left\{x \in E \middle| N(x-a) < r\right\} \end{aligned}$$

La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\begin{aligned} S(a,r) &= \left\{x \in E \middle| d(x,a) = r\right\} \\ &= \left\{x \in E \middle| N(x-a) = r\right\} \end{aligned}$$

■ **Exemple I.2** Dessiner les boules unités pour les différentes normes de $\mathbb{R}^2$. ■

R On parle aussi de cercle et de disque dans le cas de la dimension 2.

I.6 Partie convexe

Définition I.4 — Partie convexe. Une partie A de E est dite convexe si

$$\forall (x,y) \in A^2,\ \forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in A$$

Cela revient à dire que pour tout couple (x,y) de vecteurs de A, le segment $[x,y]$ est inclus dans A.
Il faut faire le lien entre $tx+(1-t)y$ et le barycentre de (x,t) et $(y,(1-t))$.
Interprétation sur le dessin.

Proposition I.6 L'intersection de deux parties convexes est une partie convexe.

Démonstration. Soit A et B deux convexes, soient x et y deux éléments de $A \cap B$ et $t \in [0,1]$, on a alors $tx + (1-t)y \in A \cap B$. ■

Proposition I.7 Soit (E,N) un espace vectoriel normé.
Une boule (fermée ou ouverte) est alors une partie convexe.

Démonstration. On traite le cas de la boule fermée.

On considère deux éléments (x,y) vérifiant $d(x,a) \leqslant r$ et $d(y,a) \leqslant r$ et $t \in [0,1]$.

On a alors :

$$\begin{aligned} d(tx+(1-t)y,a) &= N((tx+(1-t)y)-a) \\ &= N(t(x-a)+(1-t)(y-a)) \\ &\leqslant N(t(x-a))+N((1-t)(y-a)) \\ &\leqslant tN(x-a)+(1-t)N(y-a) \\ &\leqslant td(x,a)+(1-t)d(y,a) \\ &\leqslant tr+(1-t)r=r \end{aligned}$$

■

I.7 Partie bornée, suite bornée et fonction bornée

Définition I.5 Soit (E,N) un espace normé.

On dit qu'une partie A de E est bornée si elle est incluse dans une boucle de centre 0. Cela revient à dire :

$$\exists M\in\mathbb{R},\ \forall a\in A,\ N(a)\leqslant M$$

On dit qu'une application d'un ensemble quelconque Ω dans E est bornée si son ensemble image $f(\Omega)$ est une partie bornée de E. Cela revient à dire :

$$\exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in\Omega,\ N(f(x))\leqslant M$$

En particulier, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si $\left\{u_n \middle| n\in\mathbb{N}\right\}$ est une partie bornée de E. Cela revient à dire :

$$\exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ N(u_n)\leqslant M$$

✎ La réunion, l'intersection de deux parties bornées est bornée. Si une partie est incluse dans une partie bornée, alors elle est bornée.
On peut prendre inférieur ou égal ou inférieur strict dans la définition.

✎ On note $\mathscr{B}(\Omega,E)$ l'ensemble des applications bornées. Dans cet ensemble on peut définir la norme :

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in\Omega}\Big(N(f(x))\Big)$$

C'est une norme sur $\mathscr{B}(\Omega,E)$. C'est la **norme de la convergence uniforme**.

II Suites d'un espace vectoriel normé

II.1 Convergence

(E,N) est un espace vectoriel normé.

Définition II.1 On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers le vecteur $l \in E$ si la suite réelle $N(u_n - l)$ converge vers 0.

Cela revient à dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies d(u_n, l) \leqslant \varepsilon$$

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Notation II.1. *Le vecteur l est appelé limite de la suite (u_n) et on note bien sûr $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.*

Comme pour les suites réelles, on doit normalement n'utiliser cette notation que lorsque l'on sait que la suite converge.

On peut donc écrire :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \iff \lim_{n\to\infty} N(u_n - l) = 0$$

Ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E vers le vecteur l, revient à la convergence de la suite de réels $\Big(N(u_n - l)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

Proposition II.1 Si une suite (u_n) de E converge vers un vecteur l, alors le vecteur l est unique.

Démonstration. Reprendre mot pour mot la démonstration de première année :on suppose qu'il y a deux limites l et l', et on applique la définition avec $\varepsilon = \frac{1}{3}N(l - l')$.

À partir d'un certain rang N :

$$\begin{aligned} N(l - l') &\leqslant N(l - u_N) + N(u_N - l) \\ &\leqslant \frac{2}{3}N(l - l') \end{aligned}$$

D'où $N(l - l') = 0$ et $l = l'$. ■

■ **Exemple II.1** On peut donc dire :

$$\text{la suite de matrices } \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{n}} & \frac{1}{n} \\ e^{-n} & 1 + \frac{1}{n} \end{pmatrix} \text{ converge vers } I_2$$

à condition de définir d'abords la norme sur l'ensemble des matrices.

Par exemple la norme euclidienne associée à $(A, B) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B})$ ou la norme infinie.

■

■ **Exemple II.2** On retrouve la convergence uniforme d'une suite de fonction sur un intervalle I en utilisant la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

La suite de fonction f_n converge vers f si et seulement si la suite de réels $\|f_n - f\|_\infty$ tends vers 0. ■

La convergence dépends *a priori* de la norme choisie ! On va voir que dans le cas de la dimension finie, la convergence ne dépends pas de la norme.

II.2 Propriétés

Proposition II.2 Si une suite (u_n) de E converge vers un vecteur l, alors la suite (u_n) est bornée.

Démonstration. Reprendre mot pour mot la démonstration de première année : à partir d'un certain rang N (u_n) vérifie :

$$\forall n \geqslant N,\ N(u_n) \leqslant N(l)+1$$

Il reste à poser :

$$M = \max\left(N(l)+1, N(u_0), \dots, N(u_{N-1})\right)$$

pour avoir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ N(u_n) \leqslant M$$

■

✯ Suites extraites

Définition II.2 — suite extraite. Si (u_n) est une suite, une suite extraite est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Les exemples classiques sont les suites de rangs pairs et impairs (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Un lemme important à retenir est que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$ ce qui se démontre par récurrence.

Proposition II.3 Toute suite extraite d'une suite convergente de E est convergente vers la même limite.

Démonstration. Reprendre mot pour mot la démonstration de première année : On suppose $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = l$, et en utilisant $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$, on obtient : $\lim\limits_{n\infty}\left(u_{\varphi(n)}\right)$. ■

✯ Normes équivalentes

Le résultat important de cette partie est le suivant :

Proposition II.4 En dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme.

Ce résultat est faux en dimension infinie !

■ **Exemple II.3** Si on considère la suite de fonction $f_n : t \mapsto nt^n$ définie sur $[0,1]$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_1 = \int_0^1 nt^n dt = \frac{n}{n+1} \leqslant 1$$

mais :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty = n$$

La suite (f_n) est donc bornée pour la norme 1 mais pas pour la norme inifnie. ∎

Définition II.3 — Normes équivalentes. Soit E un espace vectoriel N et $\|\cdot\|$ deux normes sur E.

Ces deux normes sont dites équivalentes si :

$$\exists(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2,\ \forall x \in E,\ \alpha\|x\| \leqslant N(x) \leqslant \beta\|x\|$$

Proposition II.5 La propriété « être équivalente » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes.

Démonstration. **Réflexivité :** La norme N est équivalente à elle-même (il suffit de prendre $\alpha = \beta = 1$).

Symétrie : Supposons N et $\|\cdot\|$ équivalentes, avec : $\forall x \in E,\ \alpha\|x\| \leqslant N(x) \leqslant \beta\|x\|$. On a alors :

$$\forall x \in E,\ \frac{1}{\beta}N(x) \leqslant \|x\| \leqslant \frac{1}{\alpha}N(x)$$

donc N et $\|\cdot\|$ équivalente,

Transitivité : Supposons N et $\|\cdot\|$ équivalentes, et $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$ équivalentes avec :

$$\begin{aligned}\forall x \in E,\ \alpha\|x\| &\leqslant N(x) \leqslant \beta\|x\| \\ a|||x||| &\leqslant \|x\| \leqslant b|||x|||\end{aligned}$$

alors clairement :

$$\forall x \in E,\ \alpha a|||x||| \leqslant N(x) \leqslant b\beta|||x|||$$

D'où N et $|||\cdot|||$ sont équivalentes. ∎

Extrait du programme :

La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.

Démontrons que les trois normes usuelles dans $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Proposition II.6 On a l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n,\ \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \leqslant n\|x\|_\infty$$

Démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Déjà :

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &= \max\left(|x_1|, \ldots, |x_n|\right)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1\end{aligned}$$

On note ε_i la valeur $+1$ ou -1 telle que $|x_i| = \varepsilon_i x_i$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\\ &= \langle x, \varepsilon\rangle && \text{pour le produit scalaire usuel}\\ &\leqslant \|\varepsilon\|_2 \|x\|_2 && \text{Cauchy-Shwarz}\\ &= \sqrt{n}\|x\|_2\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\\ &\leqslant \sqrt{n\|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty\end{aligned}$$

■

La relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant 2\|x\|_\infty$$

peut se voir comme une inclusion de boule (dessiner les boules correspondantes).
de même pour :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|x\|_\infty$$

Proposition II.7 Si N et $\|\cdot\|$ sont équivalentes, alors toute suite (u_n) qui converge vers l pour la norme N, converge également vers l pour la norme $\|\cdot\|$ et réciproquement.
De même, si la suite (u_n) est bornée pour la norme N, alors elle est bornée pour la norme $\|\cdot\|$.

Ainsi, si deux normes sont équivalentes, alors les suites convergentes sont les mêmes.
En conséquence, pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on peut chercher une suite qui converge pour une norme et non pour l'autre. (ou qui est bornée pour une norme et non pour l'autre).

Démonstration. On sait :

$$\forall x \in E,\ \alpha\|x\| \leqslant N(x) \leqslant \beta\|x\|$$

On remplace x par $u_n - l$, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha\|u_n - l\| \leqslant N(u_n - l) \leqslant \beta\|u_n - l\|$$

Le résultat est alors évident.

Le deuxième se démontre avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha\|u_n\| \leqslant N(u_n) \leqslant \beta\|u_n\|$$

■

Proposition II.8 En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. ADMIS conformément au programme ■

✎ On obtient bien le résultat : en dimension finie, la convergence d'une suite et sa limite ne dépends pas de la norme choisie. Les normes 1, 2 et ∞ dépendent de la base choisie, mais lorsque l'on change de base, on a une norme équivalente.

✯ Convergence des suites de coordonnées

On se place dans le cas de la dimension finie.

Proposition II.9 Soit (E,N) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et (u_n) une suite de E.

On note :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{p} u_{n,k} e_k$$

On dispose ainsi de p suites : la suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des k-ième coordonnées de (u_n).

On a alors : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ la suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ainsi, **l'étude la convergence d'une suite de vecteur peut se faire en étudiant la convergence des suites de chaque coordonnées** (dans une base quelconque).

De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{p} \lim_{n\to+\infty} u_{n,k} e_k$$

Autrement dit **les coordonnées de la limite sont les limites de chacune des coordonnées.**

Démonstration. On suppose que $\lim_n u_n = l$ et on note $l = (l_1, \dots, l_p)_{\mathscr{B}}$.

On considère $k \in [\![1,p]\!]$, on a alors $\|u_n - l\|_\infty = 0$, or on sait :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n,k} - l_k| \leqslant \|u_n - l\|_\infty$$

donc $\lim_{n\infty} u_{n,k} = l_k$. Ainsi, les suites des coordonnées convergent vers les coordonnées de la limite.

On suppose maintenant que toutes les suites de coordonnées converge. On note l_k la limite de la suite $(u_{n,k})$ et $l = (l_1, \dots, l_p)_{\mathscr{B}}$. On veut donc démontrer que (u_n) converge vers l.

On considère la norme 1 et on a :

$$\|u_n - l\|_1 = \sum_{k=1}^{p} |u_{n,k} - l_k|$$

Comme chaque terme tends vers 0, la somme des p termes tends vers 0, et donc $\lim_n u_n = l$.

Ainsi, la suite (u_n) converge vers l.

■

III Topologie d'un espace vectoriel normé

On considère (E,N) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel norméet A une partie de E.

⋆ Équivalence topologique avec $\mathbb{K}^p$

Pour commencer on montre que l'étude topologique de (E,N) de dimension finie se ramène à celle de $\mathbb{K}^n$ muni d'une norme :

Proposition III.1 Soit (E,N) un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

On considère l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{K}^n \\ x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathscr{B}} & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

Cette application permet d'identifier E et $\mathbb{K}^n$ (une fois choisie la base $\mathscr{B}$). C'est une bijection.

Considérons alors l'application :

$$\widetilde{N} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & N\left(\varphi^{-1}(x)\right) = N\left((x_1, \dots, x_n)_{\mathscr{B}}\right) \end{array} \right.$$

Cette application est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

✎ En pratique, ce résultat théorique assure que l'on peut identifier l'espace vectoriel normé (E,N) avec $\mathbb{K}^n$ muni de la norme ci-dessus. Ainsi, toute propriétés sur des parties / des éléments de E pourra être démontré sur les parties / les éléments de $\mathbb{K}^n$ correspondant. Et réciproquement.
On pourra par exemple montrer qu'une partie A de E est ouverte en montrant que la partie $\tilde{A}$ de $\mathbb{K}^n$ associée est ouverte.
On peut ainsi systématiquement se ramener à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Il faut vérifier les propriétés.

$$\forall x \in \mathbb{K}^n,\ \widetilde{N(x)} \geqslant 0 \qquad\qquad \text{évident.}$$

D'où la positivité.

Soit maintenant $x \in \mathbb{K}^n$, tel que $\widetilde{N}(x) = 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} N\left(\varphi^{-1}(x)\right) = 0 \text{ donc } \varphi^{-1}(x) = 0 & \\ \text{et donc } x = 0 & \qquad \text{car } \varphi^{-1} \text{ est bijective.} \end{aligned}$$

D'où $\widetilde{N}$ est définie positive

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{K}^n,\ \widetilde{N(\lambda x)} =& N\left(\varphi^{-1}(\lambda x)\right) = N\left(\lambda \varphi^{-1}(x)\right) \\ =& |\lambda| N\left(\varphi^{-1}(x)\right) = |\lambda| \widetilde{N}(x) \end{aligned}$$

D'où $\widetilde{N}$ est homogène.

Si on considère $(x,y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, alors on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{N}(x+y) =& N\left(\varphi^{-1}(x+y)\right) \\ =& N\left(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)\right) \\ \leqslant& N\left(\varphi^{-1}(x)\right) + N\left(\varphi^{-1}(y)\right) \\ \leqslant& \widetilde{N}(x) + \widetilde{N}(y) \end{aligned}$$

D'où l'inégalité triangulaire. ■

III.1 Parties ouvertes

Définition III.1 — Point intérieur, intérieur, partie ouverte. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

On dit qu'un point a de E est un point intérieur à la partie A lorsque :

$$\exists r > 0,\ B_o(a,r) \subset A$$

Autrement dit : il existe une boule de rayon non nul centrée en a incluse dans la partie A.

L'l'intérieur de A est l'ensemble des points intérieurs.

On dit que la partie A est une partie ouverte de E lorsque tous les points de A sont des points intérieurs à A.

Notation III.1. *L'intérieur est noté $\mathring{A}$. Donc A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.*

$\mathring{A} \subset A$ avec égalité si et seulement si A est ouvert !
Dire que a est un point intérieur de A signifie que $a \in A$ et que si on zoome suffisamment sur a, alors tout ce qui est autour de a est dans A. Lorsqu'on zoome suffisamment sur a on ne voit plus l'extérieur de A.
Cela signifie que pour les propriétés locales (continuité, dérivabilité, etc), tout se passe comme si on ne sortait pas de A.
On va le voir au chapitre suivant, mais si une fonction est définie sur un ouvert, alors cela a du sens de parler de la dérivée de cette fonction : en tout point, elle est définie autour de ce point.
On peut aussi dire que si $a \in \mathring{A}$, alors si on perturbe a un tout petit peu, alors on reste dans A.

A priori la notion d'ouverts dépends de la norme (puisque la boule est prise pour une certaine norme). Mais si deux normes sont équivalentes, alors les ouverts pour les deux normes sont les mêmes car dans ce cas, la valeur du rayon r de la définition dépends de la norme, mais pas son existence.
En particulier lorsque E est de dimension finie, la notion de partie ouverte ne dépends pas de la norme choisie.
Notons aussi que dans la définition on peut aussi prendre une boule fermée, puisque :

$$B_f\left(a,\frac{r}{2}\right) \subset B_o(a,r)$$

On devrait parler d'ouverts de E : en effet, si $A \subset E$ et $A \subset F$, on peut avoir A ouvert dans E mais pas dans F. Être ouvert est une propriété relative à l'espace choisi. Ex : dans $\mathbb{R}^2$, si on considère :

$$A = \left\{(x,0) | x \in]0,1[\right\} =]0,1[\times \{0\}$$
$$F = \mathrm{Vect}((1,0))$$

alors A est ouvert dans F mais pas dans $\mathbb{R}^2$.
En pratique et conformément au programme, on se place systématiquement dans le cas où la partie A est considérée comme une partie de l'espace E entier et donc « A est un ouvert » signifie : « A est un ouvert de E ».

■ **Exemple III.1** Faire des exemples avec des intervalles ou des parties de $\mathbb{R}^2$. ■

■ **Exemple III.2** L'ensemble des matrices symétriques n'est pas un ouvert. ■

■ **Exemple III.3** L'ensemble des matrices diagonalisables n'est pas un ouvert, puisque par exemple la matrice :

$$M(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable, mais est arbitrairement proche de I_2 (qui est diagonalisable).

Par contre, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est dans l'intérieur des matrices diagonalisables.
■

■ **Exemple III.4** L'ensemble des matrice de $GL_2(\mathbb{R})$ est un ouvert par continuité du déterminant. ■

■ **Exemple III.5** Faire des exemples avec les matrices, les polynômes. ■

Proposition III.2 Toute boule ouverte est ouverte.

Démonstration.

R On fait volontairement ici la démonstrations en utilisant uniquement la définition. Avec les résultats à suivre sur la caractérisation séquentielle des fermés et les fonctions continues, ce résultat se démontrera en une ligne.

Soit $x \in E$ et $r > 0$ montrons que $B_o(x,r)$ est ouverte.

Pour cela, on considère $a \in B_o(x,r)$, on note $\rho = \frac{1}{2}(r - N(a-x))$, et on montre que :

$$B_o(a,\rho) \subset B_o(x,r)$$

En effet, si $z \in B_o(a,\rho)$, alors :

$$\begin{aligned} N(z-x) &\leqslant N(z-a) + N(a-x) \\ &\leqslant \rho + N(a-x) = \frac{1}{2}(r - N(a-x)) < r \end{aligned}$$

■

III.2 Partie fermée

Définition III.2 — Point adhérent, partie fermée. Un point a de E est dit point adhérent à la partie A si :

$$\forall r > 0,\ B_o(a,r) \cap A \neq \emptyset$$

L'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents.

La partie A de E est dite fermée si elle contient tous ses points adhérents.

Notation III.2. *L'adhérence de A est noté $\overline{A}$. Ainsi A est fermé si et seulement si $\overline{A} \subset A$.*

Un point de A est adhérent à A, on a donc : $A \subset \overline{A}$ avec égalité si et seulement si A est fermé.

Un point de $\overline{A}$ est adhérent à A si on ne peut pas le séparer de A : on ne peut pas zoomer suffisamment pour voir a sans voir un petit bout de A.

La notion de partie fermée dépend a priori de la norme, mais si deux normes sont équivalentes, les parties fermées pour les deux normes sont alors les mêmes. C'est en particulier le cas en dimension finie.

■ **Exemple III.6** Faire des exemples avec des intervalles et des parties de $\mathbb{R}^2$. ■

■ **Exemple III.7** Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, et si s est la borne supérieure, alors s est adhérent à A. En effet, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$, vérifiant $d(s,x) \leqslant \varepsilon$. ■

■ **Exemple III.8** On a : $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, ce qui est une traduction de $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On peut montrer que : $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. ■

■ **Exemple III.9** Les singletons sont des parties fermées. ■

Proposition III.3 La boule fermée est fermée.

Tout point de la sphère est adhérent à la boule ouverte.

L'adhérence de la boule ouverte est la boule fermée.

La sphère est fermée.

Démonstration.

R On fait volontairement ici ces démonstrations en utilisant uniquement la définition. Avec les résultats à suivre sur la caractérisation séquentielle des fermés et les fonctions continues, ces résultats se démontreront en une ligne.

Considérons $x \in E$ et $r > 0$. Montrons que la $B_f(x,r)$ est fermé.

Soit $a \notin B_f(x,r)$ ie que $N(x-a) > r$. On considère alors la valeur $\rho = N(x-a) - r$.

On a $\rho > 0$. Montrons que $B_o(a,\rho) \cap B_f(x,r) = \emptyset$. En effet, soit $y \in B_o(a,\rho) \cap B_f(x,r)$, alors on a :

$$d(a,y) < \rho \text{ et } d(x,y) < r$$

donc :

$$d(a,x) \leqslant d(a,y) + d(y,x) < \rho + r < d(x,a)$$

ce qui est une contradiction. Ainsi : $B_o(a,\rho) \cap B_f(x,r) = \emptyset$ et donc $a \notin \overline{B_f(x,r)}$.

On peut donc dire :

$$\forall a \in E,\ a \notin B_f(x,r) \implies a \notin \overline{B_f(x,r)}$$

par contraposé, on obtient :

$$\forall a \in E,\ a \in \overline{B_f(x,r)} \implies a \in B_f(x,r)$$

Ainsi :

$$\overline{B_f(x,r)} \subset B_f(x,r)$$

et $B_f(x,r)$ est fermé.

Pour le deuxième point, considérons S la sphère de centre x et de rayon r et un point $a \in S$. Montrons que a est dans l'adhérence de $B_o(x,r)$.

Soit $\rho > 0$, on doit montrer que $B_o(a,\rho) \cap B_o(x,r) \neq \emptyset$.

On suppose $\rho < r$ sinon il n'y a rien à démontrer.

Pour cela, on pose :

$$y = x + \frac{r - \frac{\rho}{2}}{r}(a-x) = \frac{\rho}{2r}x + \frac{r-\frac{\rho}{2}}{r}a$$

On a alors :

$$N(y-x) = \frac{r-\frac{\rho}{2}}{r}r = r - \frac{\rho}{2} < r$$

Ainsi $y \in B_o(x,r)$. On a aussi :

$$\begin{aligned} N(y-a) &= \frac{\rho}{2r}x - \frac{\rho}{2r}a \\ &= \frac{\rho}{2r}(x-a) = \frac{\rho}{2} < \rho \end{aligned}$$

Ainsi, $y \in B_o(a,\rho)$.

Ainsi, tout point de la sphère est adhérent à la boule ouverte.

L'adhérence de la boule ouverte contient alors la boule ouverte et la sphère et donc contient la boule fermée. On a donc :

$$B_f(x,r) \subset \overline{B_o(x,r)}$$

Considérons maintenant un $a \in \overline{B_o(x,r)}$, on sait alors que :

$$\forall \rho > 0,\ B_o(a,\rho) \cap B_o(x,r) \neq \emptyset$$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $a \notin B_f(x,r)$, donc $N(x-a) > r$, on pose alors $\rho = \frac{1}{2}(N(x-a) - r)$. Et on vérifie rapidement que :

$$B_o(a,\rho) \cap B_o(x,r) = \emptyset$$

En effet, si $z \in B_o(a,\rho) \cap B_o(x,r)$, alors on a :

$$N(z-a) < \rho \qquad \text{et} \qquad N(x-a) < r$$

Donc :

$$N(x-a) < \rho + r = \frac{1}{2}(N(x-a)+r) < N(x-a)$$

contradiction. Ainsi, z n'existe pas, donc $B_o(a,\rho) \cap B_o(x,r) = \emptyset$ et donc : $a \in B_f(x,r)$ avec au final, l'inclusion réciproque qui donne : $B_f(x,r) = \overline{B_o(x,r)}$. ■

> ! Le contraire de ouvert n'est pas fermée : certaines parties peuvent être ni ouverte, ni fermée (exemple avec les intervalles de $\mathbb{R}$).
> Certaines peuvent être les deux ($\emptyset$ et E)

✩ Caractérisation séquentielle

Proposition III.4 — Caractérisation séquentielle des points adhérents. Un point a de E est adhérent à une partie A de E si et seulement si il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a.

Démonstration. Soit a adhérent à A, en prenant $r = \frac{1}{n}$ dans la définition, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in E,\ x_n \in A \text{ et } d(x_n,a) < \frac{1}{n}$$

Ainsi la suite (x_n) est une suite d'éléments de A convergeant vers a.

Supposons maintenant que l'on dispose d'une suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers a. On a alors par définition de la convergence :

$$\forall r > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ d(x_n,a) < r$$

ainsi, $x_n \in B_o(a,r) \cap A$ et ainsi : $B_o(a,r) \cap A \neq \emptyset$, on peut donc écrire :

$$\forall r > 0,\ B_o(a,r) \cap A \neq \emptyset.$$

■

Corollaire III.5 En particulier, A est fermé si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers un élément a, on a $a \in A$. Autrement dit, une partie est fermée si et seulement si elle contient toutes les limites des suites de ces éléments.

Démonstration. Supposons A fermé et soit (a_n) une suite d'élément de A convergeant vers un élément a. On a alors par définition $a \in \overline{A}$, et donc $a \in A$.

Réciproquement, supposons que pour toute suite (a_n) une suite d'élément de A convergeant vers un élément a, on a $a \in A$. Considérons $a \in \overline{A}$, un point adhérent alors il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a, et donc $a \in A$, ainsi $\overline{A} \subset A$ et donc A est fermé. ∎

C'est la caractérisation à avoir en tête : elle permet de comprendre cette notion d'adhérence.
On peut ainsi redémontrer que la boule fermée est fermée : si une suite (u_n) vérifie $N(u_n - x) \leqslant r$, et (u_n) converge vers l, alors $N(l-x) \leqslant r$.
De même, on montre que la sphère est fermée.
On retrouve aussi que l'adhérence de la boule ouverte est la boule fermée.
Le principe est que les égalités et les inégalités larges passent à la limite.
On peut aussi retrouver des résultats du type si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

■ **Exemple III.10** Montrer que $A_3(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. ■

III.3 Propriétés

Proposition III.6 Soit A une partie de E, et C_A sont complémentaire dans E.
Alors la partie A est fermé si et seulement si la partie C_A est ouverte.
De même, A est ouvert si et seulement si C_A est fermé.

Démonstration. Commençons par une remarque : pour deux parties U,V de E quelconques, on a :

$$\text{non }(U \subset V) \text{ s'écrit : } U \cap C_V \neq \emptyset$$

Sur un dessin c'est facile, cela se démontre en écrivant :

$$\begin{aligned} \text{non }(\forall x \in U, x \in V) \text{ est } &: \exists x \in U, x \in C_V \\ \text{ou encore } &: U \cap C_V \neq \emptyset \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que A est fermé.
On sait donc que : $\overline{A} \subset A$, ce que l'on peut écrire pour un x quelconque dans E :

$$x \in \overline{A} \implies x \in A$$

ce qui s'écrit aussi en remplaçant par la définition de l'adhérence :

$$(\forall \rho > 0,\ B_o(x,\rho) \cap A \neq \emptyset) \implies x \in A$$

On prend la contraposée :

$$x \in C_A \implies \text{non }\left(x \in \overline{A}\right)$$

ou avec la définition :

$$x \in C_A \implies \text{non } (\forall \rho > 0,\ B_o(x,\rho) \cap A \neq \emptyset)$$

on utilise alors les techniques de négations :

$$\begin{aligned} &\text{non } (\forall \rho > 0,\ B_o(x,\rho) \cap A \neq \emptyset) \\ \text{s'écrit :} &\exists \rho > 0,\ \text{non } (B_o(x,\rho) \cap A \neq \emptyset) \end{aligned}$$

avec la remarque ci-dessus :

$$\exists \rho > 0, B_o(x,\rho) \subset C_A$$

Ainsi, on a :

$$x \in C_A \implies \exists \rho > 0, B_o(x,\rho) \subset C_A$$

On reconnaît la définition de $x \in \mathring{C_A}$: ainsi :

$$x \in C_A \implies x \in \mathring{C_A}$$

et donc $C_A \subset \mathring{C_A}$, ce qui signifie que C_A est ouvert.

On a donc démontré que si A est fermé alors son complémentaire C_A est ouvert.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons maintenant que A est ouvert, et en fait on va procéder de même : on sait que $A \subset \mathring{A}$, ainsi :

$$x \in A \implies \exists \rho > 0, B_o(x,\rho) \subset A$$

en prenant la contraposé :

$$\forall \rho > 0,\ \text{non } (B_o(x,\rho) \subset A) \implies x \in C_A$$

en utilisant le fait que la négation de $U \subset V$ est $U \cap C_V \neq \emptyset$, cela donne :

$$\forall \rho > 0, B_o(x,\rho) \cap C_A \neq \emptyset \implies x \in C_A$$

ce qui se note aussi :

$$x \in \overline{C_A} \implies x \in C_A$$

ou encore $\overline{C_A} \subset C_A$.

On peut donc dire que C_A est fermé. Au final, on a démontré que si A est ouvert alors son complémentaire C_A est fermé. ■

Définition III.3 — frontière. Soit A une partie de E. On définit alors la frontière de A, noté $\mathscr{F}_A$, comme : $\mathscr{F}_A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

✎ On a clairement :

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}.$$

On a aussi si $A \subset B$:

$$\mathring{A} \subset \mathring{B} \text{ et } \overline{A} \subset \overline{B}$$

On peut démontrer cela avec la caractérisation séquentielle ou directement avec la définition.

⋆ Stabilité par union et intersection

Proposition III.7 Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Une intersection quelconque de fermés est un fermé, une réunion finie de fermés est un fermé.

Démonstration. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts.

Montrons que $\bigcup_{i\in I} O_i$ est ouvert.

Pour cela, on considère donc $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$

On sait alors qu'il existe un i_0 tel que $x \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est un ouvert, il existe un $r > 0$, tel que $B_o(x,r) \subset O_{i_0}$. Ainsi,

$$B_o(x,r) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$$

ce qui signifie que $x \in \overset{\circ}{\bigcup_{i\in I} O_i}$, comme x est quelconque, cela signifie que $\bigcup_{i\in I} O_i$ est ouvert.

Soit maintenant $(O_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie d'ouvert. Montrons que $\bigcap_{i\in I} O_i$ est fermé. Pour cela, on considère donc $x \in \bigcap_{i\in I} O_i$. On sait alors que pour tout $i \in I$, $x \in O_i$, donc il existe un $r_i > 0$, tel que $B_o(x,r_i) \subset O_i$.

On pose alors $r = \min_{i\in I} r_i$. Comme c'est le minimum d'un nombre fini de valeurs strictement positive, on a $r > 0$.

De plus,

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ B_o(x,r) \subset B_o(x,r_i) \subset O_i$$

Ainsi :

$$B_o(x,r) \subset \bigcap_{i\in I} O_i$$

Donc comme précédemment, $x \in \overset{\circ}{\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} O_i}$, et $\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} O_i$ est ouvert.

Pour les fermés, on pourrait faire le même raisonnement.

On préfère ici raisonner par le complémentaire : Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de fermés, alors :

$$C\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} C(F_i) \text{ est une réunion d'ouverts}$$

Ainsi :

$$C\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) \text{ est un ouvert}$$

et donc $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.

Soit maintenant $(F_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de fermés, alors :

$$C\left(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} F_i\right) = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} C(F_i) \text{ est une intersection finie d'ouverts}$$

Ainsi :

$$C\left(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} F_i\right) \text{ est un ouvert}$$

et donc $\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} F_i$ est un fermé. ■

Il est plus simple de retenir la démonstration que le résultat.
On voit bien le problème avec la suite d'ouverts :

$$O_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$$

On a l'intersection des O_n qui est le singleton $\{0\}$ n'est pas ouvert.
Le problème est que pour un $x \in \bigcap(O_n)$, il existe bien pour tout $n \in \mathbb{N}$ un r_n tel que $B_o(x, r_n) \subset O_n$, mais si on pose

$$r = \min_{n\in\mathbb{N}} r_n$$

on a un minimum sur un nombre infinie de valeur et ici $r = 0$.

III.4 Partie dense

Définition III.4 — partie dense. Soit A une partie de E.
On dit que A est dense lorsque $\overline{A} = E$

■ **Exemple III.11** $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Proposition III.8 — caractérisation des parties denses. Soit A une partie de E.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. Pour tout élément x de E, il existe une suite (y_n) d'éléments de A qui converge vers x.
2. Pour tout élément x de E, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément y de A tel que $N(x-a) < \varepsilon$.
3. $\overline{A} = E$.

Démonstration. C'est évident, juste un jeu sur les définitions.
Supposons $\overline{A} = E$, alors pour tout $x \in E$, $x \in \overline{A}$, et donc par la caractérisation séquentielle, il existe une suite (y_n) d'éléments de A qui converge vers x, ce qui donne $\boxed{1}$. Tandis que si on traduit $x \in \overline{A}$ avec la définition, on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $B_o(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. ce qui signifie que il existe un élément y de A tel que $N(x-a) < \varepsilon$, ie $\boxed{1}$.

D'où :

$$\boxed{3} \implies \boxed{2} \text{ et } \implies \boxed{3} \implies \boxed{1}$$

Pour un élément $x \in E$, la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, N(x-a) < \varepsilon$$

signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, B_o(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

et donc par définition cela signifie que $x \in \overline{A}$. Ce qui est équivalent avec la caractérisation séquentielle à il existe une suite (y_n) d'éléments de A qui converge vers x. ainsi, clairement

$$\boxed{1} \iff \boxed{2}$$

de plus ces propriétés signifie que tout élément de E est dans $\overline{A}$, ie $E \subset \overline{A}$.

Comme l'inclusion réciproque est évidente, cela donne :

$$\boxed{1} \implies \boxed{3}$$

■

▪ **Exemple III.12** **À savoir refaire !** L'ensemble des matrices inversibles est dense dans l'ensemble des matrices.

En effet, si on considère une matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, alors on peut considérer la suite de matrices :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ définies par } \forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = M + \frac{1}{n} I_p$$

à partir d'un certain rang, $\frac{1}{n}$ n'est pas valeur propre, donc la matrice A_n est inversible. et $\lim_{n\infty} A_n = M$.

▪

IV Limite et continuité en un point

IV.1 Définition

Dans cette section (E,N) et $(F,\|\cdot\|)$ désignent deux espaces vectoriels normés de dimension finie.

Définition IV.1 — Limite en un point. Soit f une application d'une partie A de E à valeurs dans F, a un point adhérent à A et b un élément de F.

On dit que la fonction f admet la limite b en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ (N(x-a) \leqslant \delta \implies \|f(x)-b\| \leqslant \varepsilon)$$

Le vecteur b est alors unique et on le note $b = \lim_{x\to a} f(x)$.

On retrouve bien sûr la définition d'une limite d'une fonction réelle de la variable réelle. on pourra aussi faire la limite d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par exemple.

IV.2 Caractérisation

Proposition IV.1 — Caractérisation séquentielle de la limite. Soit f une application d'une partie A de E à valeurs dans F, a un point adhérent à A et b un élément de F.

L'application f a pour limite b en a si et seulement si : pour tout suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.

Démonstration. On suppose $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Soit (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a.

Déjà, on sait que la suite (x_n) existe (caractérisation séquentielle des points de l'adhérence). On sait par définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies N(x_n - a) \leqslant \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ (N(x-a) \leqslant \delta \implies \|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon)$$

et on doit démontrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies \|f(x_n) - b\| \leqslant \varepsilon$$

Considérons $\varepsilon > 0$, on note δ le réel strictement positif tel que :

$$\forall x \in A,\ (N(x-a) \leqslant \delta \implies \|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon)$$

puis ont note N l'entier tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies N(x_n - a) \leqslant \delta$$

Considérons $n \geqslant N$, on a alors :

$$N(x_n - a) \leqslant \delta \text{ donc } \implies \|f(x_n) - b\| \leqslant \varepsilon$$

On a bien montré que $\lim_{n\infty} f(x_n) = b$.

Réciproquement, supposons que pour toute suite (x_n) de limite a, on a : $\lim_{n\infty} f(x_n) = b$.

Raisonnons par l'absurde en niant $\lim_{x\to a} f(x) = b$. On prends donc la négation de la définition :

$$\text{non}\,(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ (N(x-a) \leqslant \delta \implies \|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon))$$

Ce qui s'écrit :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in A, (N(x-a) \leqslant \delta \text{ et } \|f(x) - b\| > \varepsilon)$$

Considérons $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $\delta = \frac{1}{n}$, on obtient l'existence d'un x_n vérifiant :

$$\left(N(x_n - a) \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } \|f(x_n) - b\| > \varepsilon \right)$$

On a ainsi construit une suite (x_n) vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{N},\ N(x_n - a) \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{en particulier} \qquad \lim_{n\infty} x_n = a.$$

mais aussi :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \ \|f(x_n) - b\| > \varepsilon \qquad \text{en particulier} \qquad x_n \text{ ne tends pas vers } b.$$

On a donc une contradiction.

■

✎ Cette caractérisation séquentielle est particulièrement utile dans le cadre du théorème de convergence dominée. C'est par exemple ce qui permet d'obtenir (à parti du théorème de convergence dominée) le théorème de continuité sous le signe intégral.
Dans le programme lorsque l'on veut écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_I f(x,t)dt = \int_I \lim_{x \to +\infty} f(x,t)dt$$

On utilise souvent le théorème de convergence dominée à une suite quelconque (x_n) de limite $+\infty$.

On note maintenant $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Pour tout $x \in A$, on note $(f_i(x))$ les scalaires tels que :

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))_{\mathscr{B}} = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i$$

L'application $f_i : x \longmapsto f_i(x)$ (de A dans $\mathbb{K}$) est appelée i-ième application coordonnée de f.

Proposition IV.2 L'application f admet en un point adhérent a de A la limite $b = \sum_{i=1}^{p} b_i e_i$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'application coordonnée f_i admet pour limite b_i en a.

Démonstration. On a montré ce résultat pour les suites, il suffit d'utiliser la caractérisation séquentielle.

Si on considère une suite (x_n) d'éléments de A qui tends vers a, on sait que $\lim_{n\infty} f(x_n) = b$ si et seulement si les applications coordonnées convergent.

■

IV.3 Limites et opérations

Proposition IV.3 — Limite d'une combinaison linéaire. Soit f et g deux applications de A dans F admettant pour limites respectives b et c au point a adhérent à A. Soit $\alpha \in K$ un scalaire.

Alors :

$$\lim_{x \to a} (\alpha f + g)(x) = \alpha b + c$$

Pour le produit, on ne peut considérer que le produit externe :

Proposition IV.4 Soit f une application de A dans F admettant pour limite b au point a adhérent à A. Soit u une application de A dans $\mathbb{K}$ admettant pour limite α au point a adhérent à A.

Alors :

$$\lim_{x \to a} u(x)f(x) = \alpha b$$

Pour l'inverse, il faut que la fonction soit à valeur dans $\mathbb{K}$

Proposition IV.5 Soit une fonction u de A dans $\mathbb{K}$ de limite α en $a \in \overline{A}$ avec $\alpha \neq 0$. Alors :

$$\exists r > 0,\ \forall x \in B(a,r) \cap A,\ u(x) \neq 0$$

Autrement dit la fonction u ne s'annule pas autour de a.

On pose alors :

$$X = B(a,r) \cap A$$

Si bien que la fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur X. On a alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\alpha}$$

Pour la composée de limites, on a le même résultat qu'en première année :

Proposition IV.6 Soit (E,N), $(F,\|\cdot\|)$, et (G,N') trois espaces vectoriels normés de dimensions finies. Soit A une partie de E, a un point de E adhérent à A et B une partie de F.

Soit $f : A \to B$ et $G : B \to G$.

On a alors, si $\lim_{x \to a} f(x) = b$, alors $b \in \overline{B}$.

Si de plus $\lim_{y \to b} g(y) = c$, alors $\lim_{x \to a} f(g(y)) = c$.

Le premier résultat assure que le deuxième a bien un sens.

Démonstration. Pour montrer que $b \in \overline{B}$, on peut simplement constater qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a (car $a \in \overline{A}$), puis que $\lim_{n\infty} f(a_n) = b$, ainsi la suite $(f(a_n))$ est une suite d'éléments de B qui converge vers b.

Pour le deuxième résultat, en utilisant la caractérisation séquentielle, il suffit de considérer une suite (a_n) d'élément de A convergeant vers a, et on a $\lim_{n\infty} f(a_n) = b$ comme on l'a vu, donc $\lim_n \infty g(f(a_n)) = c$. Comme c'est vrai pour toute suite, on a bien : $\lim_{x \to a} f(g(y)) = c$. ■

IV.4 Continuité en un point

Définition IV.2 Soit $f : A \to F$.

Soit $a \in A$, si f admet une limite en a et que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, alors la fonction f est continue en a.

Si $a \notin A$, si f admet une limite en a, alors f est prolongeable par continuité en a. Le prolongement par continuité est la fonction :

$$\tilde{f} : \begin{cases} A \cup \{a\} & \to & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \lim_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a. \end{cases} \end{cases}$$

Les deux résultats suivants sont la traduction de ce que l'on a vu pour les limites :

Proposition IV.7 La fonction f est continue en un point a de A si et seulement si les applications coordonnées sont continues en a.

Proposition IV.8 Si $a \in A$, l'application f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Méthode : on a souvent des exercices du type :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{cases}$$

On demande alors de prolonger f par continuité en $(0,0)$.

Dans le cas positif, il faut trouver $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, pour trouver la limite, on peut choisir « un chemin » qui tend vers $(0,0)$, par exemple étudier les applications partielles : $t \mapsto f(0,t)$ et $t \mapsto f(t,0)$. Ces applications ont pour limite $f(0,0)$. On pose alors $f(0,0)$ la valeur de cette limite. Ensuite, il faut montrer :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Pour cela, le plus simple est de majorer :

$$|f(x,y) - f(0,0)|$$

par une quantité qui dépends de (x,y) et qui tends clairement vers $(0,0)$ (par exemple un polynôme en (x,y)).

Dans le cas négatif, il faut montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas. On choisit alors des « chemins » qui permettent de se rapprocher de $(0,0)$ et tels que la limite le long de ce chemin n'existe pas, ou que la limite le long de deux chemins soient différentes.

Ces chemins peuvent être des suites ou des fonctions (le long de courbe paramétrée).

Par exemple, on peut considérer des suites :

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}, 0\right), \qquad v_n = f\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

ce qui renvient à prendre les applications partielles : $f_1 : t \mapsto f(t,0)$ et $f_2 : t \mapsto f(0,t)$. Si l'une des suites (u_n) et (v_n) n'ont pas de limite ou si les deux limites sont différentes, alors : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas. Idem, si l'une des fonctions f_1 et f_2 n'a pas de limite ou si les deux limites sont différentes.

On peut aussi prendre des suites du type :

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right), \qquad f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ce qui renvient à suivre des courbes paramétrées : $\varphi : t \mapsto f(t,t^2)$ et $\phi : t \mapsto f(t,\sqrt{t})$. Dans le cas général, on constuit des suites du type :

$$u_n = f(x_n,y_n) \text{ avec } \lim_{n\infty} x_n = 0 \text{ et } \lim_{n\infty} y_n = 0$$

ou des fonctions du type :

$$t \mapsto f(x(t),y(t)) \text{ avec } \lim_{t\to 0} x(t) = 0 \text{ et } \lim_{t\to 0} y(t) = 0$$

Pour avoir un intuition du résultat et éventuellement des chemins à suivre, il faut faire un développement limité (en plusieurs variables) de $f(x,y)$ pour (x,y) proche de $(0,0)$.

V Continuité sur une partie

V.1 Définition et propriétés

Définition V.1 Une application définie sur une partie A de E est continue sur A si et seulement si elle est continue en tout point de A

Notation V.1. *L'ensemble des fonctions continues est noté* $\mathscr{C}^0(A,F)$.

Proposition V.1 Soit f une application continue de E dans F.

Soit O un ouvert de F, alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E. Ainsi, l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est continue.

Soit C un fermé de F, alors $f^{-1}(C)$ est un fermé de E. Ainsi, l'image réciproque d'un fermé par une application continue est continue.

Démonstration. On commence par le cas d'un fermé en utilisant la caractérisation séquentielle.

On considère donc une suite (x_n) d'éléments de $f^{-1}(C)$, qui converge vers une limite $l \in E$.

On va montrer que $l \in f^{-1}(C)$.

Pour cela, on considère la suite $(f(x_n))$, c'est une suite d'éléments de C. De plus, par continuité de f, cette suite converge vers $f(l)$.

Comme C est fermé, C contient toutes les limites de ses suites, donc $f(l) \in C$. ce qui signifie que $l \in f^{-1}(C)$. Ainsi, $f^{-1}(C)$ contient toutes les limites de ses suites donc est fermé.

Considérons maintenant le cas d'un ouvert O de F. Montrons que $f^{-1}(O)$ est un ouvert.

REM : on pourrait passer par le complémentaire en utilisant le premier résultat.

Considérons $x \in f^{-1}(O)$, alors $f(x) \in O$, donc il existe $r > 0$, tel que $B_o(f(x), r) \subset O$.

comme f est continue en x, il existe un $\alpha > 0$, tel que :

$$\forall x' \in A, N(x - x') \leqslant \alpha \implies \|f(x) - f(x')\| \leqslant \frac{r}{2}$$

En conséquence, si on prend un x' tel que $N(x - x') < \alpha$, on aura $f(x') \in B_o(f(x), r) \subset O$. et donc $x' \in f^{-1}(O)$ $B_o(x, \alpha) \subset f^{-1}(O)$ Ce qui prouve que $f^{-1}(O)$ est un ouvert. ■

Proposition V.2 Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$, alors

l'ensemble $\{x \in E | f(x) \geqslant 0\}$ est un fermé
l'ensemble $\{x \in E | f(x) = 0\}$ est un fermé

En conséquence :

l'ensemble $\{x \in E | f(x) > 0\}$ est un ouvert
l'ensemble $\{x \in E | f(x) \neq 0\}$ est un ouvert

Démonstration. On a simplement :

$$\begin{aligned}
\{x \in E | f(x) \geqslant 0\} &= f^{-1}([0, +\infty[) && \text{image réciproque d'un fermé} \\
\{x \in E | f(x) = 0\} &= f^{-1}(\{0\}) && \text{image réciproque d'un fermé} \\
\{x \in E | f(x) > 0\} &= f^{-1}(]0, +\infty[) && \text{image réciproque d'un ouvert}
\end{aligned}$$

■

✎ C'est la méthode la plus simple pour montrer qu'un ensemble est ouvert / fermé !
On retrouve les résultats sur les boules et les sphères.
En pratique, cela signifie que l'on peut passer à la limite dans des inégalités larges et dans des égalités dans le cas d'applications à valeurs dans $\mathbb{R}$.

■ **Exemple V.1** Par exemple :

$$\left\{(x, y, z) \middle| x^2 + 3xy + yz \geqslant 0\right\} \text{ est un fermé}$$

■

■ **Exemple V.2** Exemple du déterminant : $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert puisque c'est l'ensemble des matrices vérifiant $\det(M) \neq 0$. En admettant la continuité du déterminant.
■

Proposition V.3 Une application f est continue sur la partie A de E si et seulement si ses applications coordonnées sont continues sur A

Démonstration. C'est une redite de ce que l'on a vu en un point. ■

Proposition V.4 Soit f une application continue sur une partie A de E.

On a alors :

1. Si B est une partie de E incluse dans A alors la restriction de f à B est continue sur B.
2. si g est une application continue sur une partie de F contenant $f(A)$, si bien que $g \circ f$ est définie sur A, alors $g \circ f$ est continue sur A.
3. Si g est continue sur A et λ est un scalaire, alors $f + \lambda g$ est continue sur A. On peut ainsi dire que $\mathscr{C}(A,F)$ est un SEV de l'ensemble des fonctions de A dans F.
4. Si u est une application de A dans $\mathbb{K}$ continue sur A, alors uf est continue sur A.

Démonstration. La preuve consiste essentiellement à appliquer ce que l'on a vu dans le cas de la limite en un point.

1. évident.
2. limite / continuité d'une composée.
3. limite / continuité d'une combinaison linéaire.
4. limite / continuité du produit externe.

■

V.2 Fonctions continues sur un fermé borné

Théorème V.5 Une fonction réelle continue sur une partie non vide fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit : si K est un fermé borné non vide en dimension finie (on dit aussi un compact dans ce cas), et que $f : K \to \mathbb{R}$ est une application continue, alors :

$$\exists(\alpha,\beta) \in K^2,\ \forall x \in K,\ f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta).$$

✎ Théorème fondamental : on retrouve le résultat de première année. Même application : construire des inégalités strictes, montrer que des bornes inférieures sont en fait atteinte !

■ **Exemple V.3** Soit f continue sur $[0,1]$, tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) > 0$. La fonction f est alors minorée par 0, elle admet donc une borne inférieure. On a $\inf_{[0,1]} f \geqslant 0$.

En fait, on peut montrer :

$$\exists a > 0,\ \forall x \in [0,1], f(x) > a.$$

Autrement dit : démontrer que l'on peut séparer l'axe horizontal et la courbe représentative de f.

Il suffit de considérer $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \min_{x \in [0,1]} f(x)$. Ce minimum existe puisque f est continue sur le segment $[0,1]$.

Puis on pose $a = \frac{f(\alpha)}{2}$. On a bien $a > 0$, car $f(\alpha) > 0$. et

$$\forall x \in [0,1], f(\alpha) \leqslant f(x),\ \text{donc}\ \frac{f(\alpha)}{2} < f(\alpha) \leqslant f(x).$$

■

V.3 Fonctions lipschitziennes

On considère toujours (E,N) et $(F,\|\cdot\|)$ des espaces vectoriels normés.

Définition V.2 Soit k un réel et A une partie de E.
Une fonction $f : A \to F$ est dite k -lipschitzienne sur A si :

$$\forall (x,y) \in A^2,\ \|f(y) - f(x)\| \leqslant kN(x-y)$$

✎ Même interprétation qu'en première année : la distance entre les images est inférieures à k la distance entre les points. Même technique qu'en première année : cela est particulièrement utile dans le cas d'étude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

■ **Exemple V.4** La norme est 1 - lipschitzienne (inégalité triangulaire renversée) !
En effet :

$$\forall (x,y) \in E, |N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$$

■

Proposition V.6 Toute application k -lipschitzienne sur A est continue sur A.

Démonstration. Soit $a \in A$ et f k lipschitzienne, on a :

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leqslant kN(h)$$

En conséquence :

$$\lim_{h\to 0} \|f(a+h) - f(a)\| = 0 \text{ ie } \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

D'où la continuité en a et donc en tout point. ■

✎ Ainsi, la norme est continue (ce qui était admis précédemment).

V.4 Continuité des applications linéaires

Proposition V.7 Soit (E,N) et $(F,\|\cdot\|)$ des espaces vectoriels normés de dimensions finies.
Toute application linéaire f de E dans F est continue.
Elle est même lipschitzienne :

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant KN(x)$$

✎ Pour une application linéaire, la notion de fonction k lipschitzienne s'écrit sous la forme :

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant KN(x)$$

En effet, supposons que $\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant KN(x-y)$ en posant $y = 0$, on obtient alors la relation ci-dessus.

Si on suppose la relation : $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant KN(x)$ alors en considérant $(x,y) \in E^2$ et en remplaçant x par $x-y$, on a :

$$\|f(x-y)\| \leqslant KN(x-y) \text{ d'où par linéarité : } \|f(x)-f(y)\| \leqslant KN(x-y)$$

Ainsi, cette définition est équivalente à celle de fonction lipschitzienne. En pratique c'est la relation $\|f(x)\| \leqslant KN(x)$ que l'on utilise pour les applications linéaires.

Démonstration. Puisqu'on peut montrer la continuité pour les applications coordonnées, on peut se ramener au cas où $f : E \to \mathbb{R}$.

On a alors la forme suivante :

$$f : (x_1,\dots,x_n) \longmapsto \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

Or les applications coordonnées :

$$c_i : (x_1,\dots,x_n) \longmapsto x_i \text{ sont continues car } |c_i(x)| = |x_i| \leqslant \|x\|_\infty$$

et $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$. Ainsi, la fonction f est continue.

Montrons maintenant qu'elle est lipschitzienne.

On considère alors :

$$K = \sup_{N(x)=1} \|f(x)\|$$

Cette borne supérieure existe (et est même atteinte), car c'est la borne supérieure d'une fonction continue sur un fermé borné.

Soit maintenant $x \in E$, on considère $y = \frac{x}{N(x)}$, on a $N(y) = 1$, donc :

$$f(y) \leqslant K \text{ ce qui s'écrit : } \quad \frac{1}{N(x)} f(x) \leqslant K \text{ par linéarité.}$$

Ainsi, $f(x) \leqslant KN(x)$

■

■ **Exemple V.5** Pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'application $X \longmapsto AX$ est continue. ■

✯ Norme d'application

Un exercice très classique consiste à montrer que l'application :

$$f \in \mathscr{L}(E,F) \longmapsto \sup_{N(x)=1} \|f(x)\|$$

est une norme sur $\mathscr{L}(E,F)$, souvent noté $|||f|||$

R Ce résultat est hors-programme.

En effet :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F), |||f||| \geqslant 0$$

Si $|||f||| = 0$, alors c'est que $\sup_{N(x)=1} \|f(x)\| = 0$, et donc que

$$\forall x \in E,\ N(x) = 1 \implies f(x) = 0$$

On en déduit en prenant un x quelconque dans E et en utilisant la linéarité que $\forall x \in E,\ f(x) = 0$.

Si l'on considère f et g deux fonctions, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in E \text{ vérifiant } N(x) = 1,\ \|f(x)+g(x)\| &\leqslant \|f(x)\| + \|g(x)\| \\ &\leqslant |||f||| + |||g|||\end{aligned}$$

Ainsi :

$$|||f+g||| \leqslant |||f||| + |||g|||$$

L'homogénéité s'écrit : pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\sup_{N(x)=1} \|\lambda f(x)\| = |\lambda| \sup_{N(x)=1} \|f(x)\|$$

V.5 Continuité des applications multi-linéaires

On rappelle qu'une application

$$f : (\mathbb{K}^n)^p \longmapsto E$$

est p linéaire, si elle est linéaire en chacune de ses variables.

Proposition V.8 Si f est une application p linéaire de $(\mathbb{K}^n)^p$ dans (E,N) espace vectoriel normé de dimension finie, alors :

$$\exists k > 0,\ \forall (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in (\mathbb{K}^n)^p,\ N\left(f(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) \leqslant k \prod_{i=1}^{p} \|X_i\|$$

Et f est continue sur $(\mathbb{K}^n)$

Démonstration. ADMIS. ■

La propriété :

$$\exists k > 0,\ \forall (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in (\mathbb{K}^n)^p,\ N\left(f(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) \leqslant k \prod_{i=1}^{p} \|X_i\|$$

signifie que f est k lipschitzienne.

■ **Exemple V.6 à connaître !**
L'application déterminant (qui corresponds au cas $p = n$) est ainsi continue.
L'application produit matricielle :

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{cases}$$

est continue. ■

On définit les applications polynomiales $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ en plusieurs indéterminée ainsi :

- Une fonction polynomiale en deux indéterminée est une combinaison linéaire finie de fonction de la forme : $(x,y) \mapsto x^k y^l$ avec $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.
- Une fonction polynomiale en trois indéterminée est une combinaison linéaire finie de fonction de la forme : $(x,y,z) \mapsto x^k y^l z^m$ avec $(k,l,m) \in \mathbb{N}^3$.
- Ainsi de suite : en fait une application polynomiale en n indéterminée $(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme en x_n donc les coefficients sont des polynômes en $(x_1, \dots, x_{n-1})$.

En utilisant les résultats suivants :

- Les applications coordonnées sont continues,
- le produit de deux applications continues $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est continue,
- une combinaison linéaire de fonctions continues est continue.

On obtient le résultat suivant :

> **Proposition V.9** Toute application polynômiale (en plusieurs indéterminée) de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est continue.

■ **Exemple V.7** Pour montrer que l'application :

$$(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} (x^2+y^2)\sin(xy^2) & e^{x+y} \\ (x+y^2)\cos(x) & \sin(x+y) \end{pmatrix}$$

on se ramène déjà aux application coordonnées :

$$f_1 : (x,y) \longmapsto (x^2+y^2)\sin(xy^2)$$
$$f_2 : (x,y) \longmapsto e^{x+y}$$
$$f_3 : (x,y) \longmapsto (x+y^2)\cos(x)$$
$$f_4 : (x,y) \longmapsto sin(x+y)$$

pour la composée, on fait un schéma de composition :

$$\begin{array}{ccccccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ (x,y) & \longmapsto & xy^2 & & & & \text{continue car polynomiale} \\ & & t & \longmapsto & \sin(t) & & \text{continue} \\ (x,y) & & \longmapsto & & \sin(xy^2) & & \text{est donc continue} \end{array}$$

ce qui montre que $(x,y) \mapsto \sin(xy^2)$ est continue, par produit avec $(x,y) \mapsto x^2+y^2$, on en déduit que f_1 est continue. On procède de même pour les autres fonctions. ■

Espaces vectoriels normés

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

⋆ Normes

Exercice 1 Soit l'application :

$$N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \sqrt{2x^2+y^2+2z^2} \end{array} \right.$$

Montrer que cette application est une norme.

Méthode : quand on veut prouver qu'une application est une norme et que l'on voit que la difficulté est dans l'inégalité triangulaire, il faut toujours regarder si il n'y a pas un produit scalaire associé. Celui-ci s'obtient par la formule de polarisation.

Correction : C'est la norme associée au produit scalaire :

$$\Big((x,y,z),(a,b,c)\Big) \longmapsto 2xa+yb+2zc$$

Exercice 2 Soit (E,N) un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que l'on définit une application de E dans $\mathbb{R}^+$ en posant :
$$\|.\| : x \longmapsto \|x\| = N(f(x))$$
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que cette application soit une norme sur E

Correction :

1. Pour x dans E, on a $f(x) \in E$, donc $N(f(x)) \in \mathbb{R}^+$, on a donc bien défini $\|x\|$ sans ambiguité dans $\mathbb{R}^+$ à partir d'un $x \in E$.
2. On a déjà montré que $\|.\|$ était à valeurs positives.
L'homogénéité est claire (comme f est linéaire).
L'inégalité triangulaire s'écrit pour $(x,y) \in E$ quelconque :
$$\|x+y\| = N(f(x+y)) = N(f(x)+f(y)) \leqslant N(f(x))+N(f(y))$$
Il reste donc la séparation.
Supposons que $\|.\|$ soit une norme, soit $x \in E$, tel que $f(x) = 0$, alors $\|x\| = 0$ donc $x = 0$. Ainsi, f est injective.
Supposons que f est injective. Soit $x \in E$, vérifiant $\|x\| = 0$ on a alors $f(x) = 0$ et donc $x = 0$.
Ainsi, cette application est une norme si et seulement si f est injective.

Exercice 3 Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\, R)$, et soit u une fonction strictement positive de E. On considère l'application :

$$N : f \in E \longmapsto \int_0^1 u(t)|f(t)|dt$$

1. Montrer que N est une norme.
2. Trouver deux réels (α,β) strictement positifs, tels que :
$$\forall f \in E,\ \alpha\|f\|_1 \leqslant N(f) \leqslant \beta\|f\|_1$$
avec $\alpha\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$
3. Trouver deux réels (m_2, m_∞), tels que :
$$\forall f \in E,\ N(f) \leqslant m_2\|f\|_2 \qquad \text{et} \qquad N(f) \leqslant m_\infty\|f\|_\infty$$

Correction :

1. La positivité et l'homogénéité se font sans difficulté. Pour la séparation, on considère $f \in E$, tel que : $N(f) = 0$, on a alors l'intégrale d'une fonction **continue** et positive qui est nulle, donc la fonction $t \longmapsto u(t)|f(t)|$ est nulle et puisque $u > 0$, cela donne $f = 0$.
   L'inégalité triangulaire est facile.
2. On applique le thm « continuité sur un segment » à u et on a :
$$\exists (t_0, t_1) \in [0,1]^2, \ \forall t \in [0,1], \ u(t_0) \leqslant u(t) \leqslant u(t_1)$$
   En intégrant cela donne :
$$u(t_0)\|f\|_1 \leqslant N(f) \leqslant u(t_1)\|f\|_1$$
3. On utilise cauchy-schwarz :
$$\begin{aligned} N(f) &= < u, |f| > && \text{pour le produit scalaire usuel dans } E \\ &= | < u, |f| > && \text{puisque c'est positif} \\ &\leqslant \|u\|_2 \||f|\|_2 \\ &\leqslant \|u\|_2 |f\|_2 \end{aligned}$$
   d'où $m_2 = \|u\|_2$.
   On majore :
$$\forall t \in [0,1], \ |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$$
   puis on multiplie par u et on intègre :
$$N(f) \leqslant \left(\int_0^1 u(t)dt \right) \|f\|_\infty$$

Exercice 4 Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note :
$$\begin{aligned} \|P\|_1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \\ \|P\|_\infty &= \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k| \\ N(p) &= \int_0^1 |P(t)|dt \end{aligned}$$

1. Vérifier rapidement qu'il s'agit de normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes (ie construire des suites qui convergent pour une norme mais pas pour les autres).
3. Soit q un entier naturel non nul, on se place dans $\mathbb{R}_q[X]$, que peut-on alors dire ?

Correction :

1. Pour la norme 1 : la positivité et l'homogénéité sont évidentes. Si $\|P\|_1 = 0$, alors on a une somme (finie) de termes positifs qui est nulle, donc tous les termes sont nuls. D'où la séparation. L'inégalité triangulaire s'écrit :
$$\|P + Q\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k + b_k| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| + \sum_{k=0}^{+\infty} |b_k|$$
   (nb : il s'agit de somme finie).
   Pour la norme infinie : la positivité et l'homogénéité sont évidentes. Si $\|P\|_\infty = 0$, alors on a un maximum (nbr fini) de valeurs positives qui est nul, donc tous les termes sont nuls. L'inégalité triangulaire, est la même chose que dans $\mathbb{R}^n$.
   Pour la norme N, c'est du cours (idem que pour les fonctions), avec l'argument en plus : si un polynôme est nul sur $[0,1]$, alors ses coefficients sont nuls.

2. Si l'on prend $P_n = X^n$, alors :

$$N(P_n) = \frac{1}{n+1} \text{ tend vers } 0$$
$$\|P_n\|_\infty = 1 \text{ ne tend pas vers } 0$$
$$\|P_n\|_1 = 1 \text{ ne tend pas vers } 0$$

Si on prend : $P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} X^k$. On a :

$$\|P_n\|_\infty = \frac{1}{n} \text{ tend vers } 0$$
$$\|P_n\|_1 = 1 \text{ ne tend pas vers } 0$$

3. Si on fixe q alors on est sur un espace de dimension finie, donc toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 5 Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit X appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note :

$$\|X\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$$

1. montrer que l'ensemble

$$E_A = \left\{ \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \middle| X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \right\}$$

est majoré.

2. On considère maintenant une norme $\|\cdot\|$ quelconque sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit alors de nouveau :

$$F_A = \left\{ \frac{\|AX\|}{\|X\|} \middle| X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \right\}$$

montrer que l'ensemble F_A est majoré.

3. Pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit alors :

$$|||A||| = \sup(F_A)$$

Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme. On dit que $|||\cdot|||$ est la norme subordonnée.

4. Montrer que pour toutes matrice $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$|||AB||| \leqslant |||A|||\ |||B|||$$

Commentaire : exercice important (norme subordonnée).
Correction :

1. On note $A = (a_{ij})$, et on écrit :

$$\|AX\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |(AX)_i|$$

Or pour $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned} |(AX)_i| &= \left|\sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_j\right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|\,|X_j| \\ &\leqslant \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \end{aligned}$$

On note alors :

$$M = \max_{i=1\ldots n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

ce maximum existe puisqu'on a un nombre fini de valeurs. On a alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$|(AX)_i| \leqslant M\|X\|_\infty$$

et donc :

$$\|AX\|_\infty \leqslant M\|X\|_\infty$$

Comme M ne dépend pas de X, on peut écrire :

$$\exists M \in R,\ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\|_\infty \leqslant M\|X\|_\infty$$

et donc E_A est majoré.

2. **Méthode 1 : démonstration du cours valable dans tous les cas**
On considère l'application : $f : X \longmapsto \|AX\|$, elle est continue comme composée de $X \longmapsto AX$ et $u \longmapsto \|u\|$. On considère aussi la sphère S unité de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour la norme $\|\cdot\|$). L'ensemble S est un fermé borné en dimension finie. Donc l'application : f est bornée et atteint ses bornes sur S.
Ainsi :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall X \in S,\ \|AX\| \leqslant M$$

Soit maintenant $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors le vecteur $\dfrac{X}{\|X\|}$ est dans S, et donc :

$$\left\|A\left(\frac{X}{\|X\|}\right)\right\| \leqslant M$$

Par linéarité, cela donne :

$$\frac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant M$$

Comme X est quelconque, on en déduit que F_A est majoré.
Méthode 2 : on se ramène à la norme infinie
On part de la relation précédente :

$$\exists M \in R,\ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\|_\infty \leqslant M\|X\|_\infty$$

On sait que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes car on est en dimension finie. On a donc l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}_*^+$ tels que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\alpha\|X\| \leqslant \|X\|_\infty \leqslant \beta\|X\|$$

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $X \neq 0$. On a donc deux relations :

$$\begin{aligned} &\alpha\|X\| \leqslant \|X\|_\infty \leqslant \beta\|X\| \\ \text{et } &\alpha\|AX\| \leqslant \|AX\|_\infty \leqslant \beta\|AX\| \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant \frac{\frac{1}{\alpha}\|AX\|_\infty}{\frac{1}{\beta}\|X\|_\infty} \leqslant \frac{\beta}{\alpha}M$$

3. La positivité est évidente car $F_A \subset \mathbb{R}^+$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} F_{\lambda A} &= \left\{ \frac{|\lambda|\|AX\|}{\|X\|} \middle| X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \right\} \\ &= |\lambda| F_A \end{aligned}$$

D'où l'homogénéité.

Soit une matrice A telle que $|||A||| = 0$, alors :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\, X \neq 0 \implies \frac{\|AX\|}{\|X\|} = 0$$
$$\text{et donc, } AX = 0$$

En prenant pour X les valeurs de la base canoniques, $E_1, \ldots, E_n$ (ou en considérant l'endomorphisme canoniquement associé), on en déduit que $A = 0$.
Pour l'inégalité triangulaire, on considère A et B deux matrices, et on a pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\frac{\|(A+B)X\|}{\|X\|} &\leqslant \frac{\|AX\|}{\|X\|} + \frac{\|BX\|}{\|X\|} \\ &\leqslant |||A||| + |||B|||\end{aligned}$$

Ainsi, $|||A||| + |||B|||$ est un majorant de F_{A+B} donc inférieur à la borne supérieure, ce qui s'écrit :

$$|||A+B||| \leqslant |||A||| + |||B|||$$

4. Soit X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\|(AB)X\| = \|A(BX)\| \leqslant |||A|||\ \|BX\|$$

En utilisant :

$$\forall U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AU\| \leqslant |||A|||\ \|U\|$$

on utilise cette relation sur la matrice B pour obtenir :

$$\|(AB)X\| = \|A(BX)\| \leqslant |||A|||\ |||B|||\ \|X\|$$

Donc pour X non nul :

$$\frac{\|(AB)X\|}{\|X\|} \leqslant |||A|||\ |||B|||$$

en passant au sup :

$$|||AB||| \leqslant |||A|||\ |||B|||$$

Exercice 6 On note $l_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles telles que la série $(\sum |u_n|)$ converge (ie la série $(\sum u_n)$ est absolument convergente), et $l_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles telles que la série $\left(\sum (u_n)^2\right)$ converge.

1. Montrer que $l_2(\mathbb{R}) \supset l_1(\mathbb{R})$.
2. On définit :

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \text{ pour } u \in l_1(\mathbb{R})$$

   Montrer que : $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $l_1(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites $l_2(\mathbb{R})$, alors $uv = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $l_1(\mathbb{R})$.
4. On définit :

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2} \text{ pour } u \in l_2(\mathbb{R})$$

   Déduire de la question précédente que $\|\cdot\|_2$ est une norme associé à un produit scalaire sur $l_2(\mathbb{R})$.
5. Montrer que l'on ne peut pas trouver $\alpha > 0$, tel que pour toute suite u de $l_1(\mathbb{R})$, on ait :

$$\alpha \|u\|_1 \leqslant \|u\|_2$$

6. Trouver $\beta > 0$, tel que pour toute suite u de $l_1(\mathbb{R})$, on a :

$$\beta \|u\|_2 \leqslant \|u\|_1$$

   indication : démontrez et utilisez la relation : $\sqrt{u+v} \leqslant \sqrt{u} + \sqrt{v}$ valable pour deux réels (u, v) positifs.

Correction :

1. Soit (u_n) une suite de $l_1(\mathbb{R})$, alors $\sum u_n$ converge absolument, en particulier, la suite est de limite nulle. On peut donc en déduire qu'il existe un rang n_0 vérifiant :
$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant 1$$
et donc pour $n \geqslant n_0$:
$$(u_n)^2 \leqslant |u_n|$$
Ce qui montre que la série $\left(\sum_{n\geqslant n_0} u_n^2\right)$ converge et donc que la série $\left(\sum_{n\geqslant 0} u_n^2\right)$ converge. A final, (u_n) est une suite de $l_2(\mathbb{R})$.
2. La positivité et l'homogénéité, c'est évident. Pour la séparation, on utilise l'argument somme infinie de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul.
Pour l'inégalité triangulaire, on somme les relations valables pour $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$$
3. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites $l_2(\mathbb{R})$, alors on utilise :
$$|u_n v_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n^2 + v_n^2\right)$$
ce qui montre que $(u_n v_n) \in l_1(\mathbb{R})$
4. On prend $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de $l_1(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \leqslant k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases} \end{cases}$$
Bien comprendre : (u_k) est une suite de $l_1(\mathbb{R})$ donc une suite de suites. En fait, à k fixé u_k est la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ mais tronquée à l'ordre k, elle est donc dans $l_1(\mathbb{R})$.
On a alors :
$$\|u_k\|_1 = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n+1} \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$$
$$\|u_k\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(n+1)^2}} \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}$$
Ainsi, on ne peut pas trouver $\alpha > 0$, tel que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha \|u_k\|_1 \leqslant \|u_k\|_2$$
5. Soit (u,v) deux réels positifs. On a alors :
$$\begin{aligned} \sqrt{u+v} \leqslant \sqrt{u} + \sqrt{v} &\iff u+v \leqslant u+v+2\sqrt{uv} \\ &\iff 0 \leqslant \sqrt{uv} \text{ VRAI} \end{aligned}$$
Considérons une suite $(u_n) \in l_1(\mathbb{R})$ On en déduit par récurrence que :
$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sqrt{\sum_{n=0}^{N} u_n^2} \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n|$$
On passe à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ et on obtient alors :
$$\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$
ce qui s'écrit :
$$\|u\|_2 \leqslant \|u\|_1$$
D'où $\beta = 1$ convient dans la relation demandée.

⋆ **Parties convexes**

Exercice 7 Montrer que le simplexe de $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta_n = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_i \geqslant 0 \right\}$$

est un convexe de $\mathbb{R}^n$.

Correction : simple application de la définition. On considère $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, et $t \in [0,1]$. On note

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) = t(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (1-t)(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i &= t \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (1-t) \sum_{i=1}^{n} \beta_i \\ &= 1 \end{aligned}$$

et toutes les coordonnées de γ sont positives. donc $\gamma \in \Delta_n$.

Exercice 8 Montrer que l'image directe d'un convexe par une application linéaire est un convexe. Même question pour l'image réciproque.

Correction :

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et K un convexe de E. Soit $(y_1, y_2) \in (f(K))^2$ et soit $t \in [0,1]$ On écrit $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. On a alors avec la linéarité :

$$ty_1 + (1-t)y_2 = f(tx_1 + (1-t)x_2)$$

or $tx_1 + (1-t)x_2 \in K$ car K convexe Ainsi, $ty_1 + (1-t)y_2 \in f(K)$ et comme y_1, y_2 et t sont quelconques, cela donne $f(K)$ convexe.

Soit maintenant L un convexe de F.

Soit x_1 et x_2 deux éléments de $f^{-1}(L)$, on a donc $f(x_1) \in L$ et $f(x_2) \in L$. On considère ensuite $t \in [0,1]$. On a alors :

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \in L \text{ car } L \text{ est convexe.}$$

D'où $tx_1 + (1-t)x_2 \in f^{-1}(L)$ et donc $f^{-1}(L)$ est convexe.

Exercice 9 Soit A une partie convexe. Montrer que $\mathring{A}$ est convexe.

Correction méthode 1 : on considère x_1 et x_2 deux éléments de $\mathring{A}$. On sait alors qu'il existe deux boules de rayon non nul, centrées en x_1 et x_2 incluses dans A. En prenant le plus petit des deux rayons, on obtient l'existence d'un $r > 0$, tel que :

$$B_o(x_1, r) \subset A, \qquad B_o(x_2, r) \subset A$$

soit maintenant $t \in [0,1]$ et $x = tx_1 + (1-t)x_2$. On va montrer que $B_o(x,r) \subset A$. Pour cela, on considère Soit $z \in B_o(x,r)$. On pose :

$$z_1 = x_1 + z - x \qquad \text{et} \qquad z_2 = x_2 + z - x$$

$z_1 \in B_o(x_1, r)$ donc $z_1 \in A$ et de même $z_2 \in A$. On a alors :

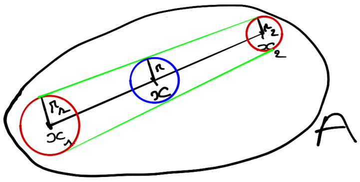
$$tz_1 + (1-t)z_2 = tx_1 + (1-t)x_2 + (z - x) = z$$

Comme A est convexe, cela donne : $z \in A$ et donc $\mathring{A}$ est convexe.

Correction méthode 2 : on considère x_1 et x_2 deux éléments de $\mathring{A}$. On sait alors :

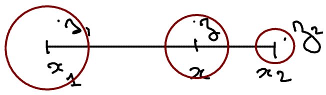
$$\exists r_1 > 0, B_o(x_1, r_1) \subset A, \qquad \exists r_2 > 0, B_o(x_2, r_2) \subset A$$

soit maintenant $t \in [0,1]$ et $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Un dessin assure qu'il faut poser $r = tr_1 + (1-t)r_2$ pour avoir $B_o(x,r) \subset A$.



Soit $z \in B_o(x,r)$, on doit vérifier que $z \in A$. Pour cela, on cherche z_1 et z_2, tels que :

$$z = tz_1 + (1-t)z_2.$$



On utilise alors les relations :

$$x = tx_1 + (1-t)x_2$$

$$r = tr_1 + (1-t)r_2 \text{ que l'on écrit : } 1 = t\frac{r_1}{t} + (1-t)\frac{r_2}{r}$$

On constate que l'on peut poser $z_1 = x_1 + \frac{r_1}{r}(z-x)$ et $z_2 = x_2 + \frac{r_2}{r}(z-x)$, ce qui donne :

$$tz_1 + (1-t)z_2 = tx_1 + (1-t)x_2 + \left(t\frac{r_1}{t} + (1-t)\frac{r_2}{r}\right)(z-x) = x + (z-x) = z$$

On a de plus :

$$\|z_1 - x_1\| = \frac{r_1}{r}\|z-x\| < r_1$$

donc $z_1 \in B_o(x_1,r_1)$ et de même $z_2 \in B_o(x_2,r_2)$. D'où z_1 et z_2 sont dans A et par convexité, $z \in A$.

✯ Convergence d'une suite de vecteurs

Exercice 10 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Établir que $(A-I_3)^2 = 0$. En déduire A^n.
Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}A^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Correction :

On utilise Newton pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^n &= ((A-I_3)+I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(A-I_3)^k && \text{car } (A-I_3) \text{ et } I_3 \text{ commutent} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k}(A-I_3)^k && \text{car } (A-I_3)^2 = 0 \\ &= I_3 + n(A-I_3) = nA + (1-n)I_3 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$A^n = \begin{pmatrix} n+(1-n) & 0 & 0 \\ -2n & 3n+(1-n) & n \\ 4n & -4n & -n+(1-n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2n & 1+2n & n \\ 4n & -4n & 1-2n \end{pmatrix}$$

Méthode alternative 1 : On peut aussi écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists(\alpha_n,\beta_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$$

on peut démontrer par récurrence que les suites (α_n, β_n) sont alors récurrentes d'ordre 2.

Méthode alternative 2 : On peut utiliser la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ \exists(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2,\ X^n = Q(X-1)^2 + \alpha_n X + \beta_n$$

puis avec la valeur en 1 et la valeur de la dérivée en 1, on a un système en (α_n, β_n), qui donne $\alpha_n = n$ et $\beta_n = 1-n$. Il reste à remplacer X par A.

Suite de l'exercice : Ainsi :

$$\frac{1}{n}A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{n}+2 & 1 \\ 4 & -4 & \frac{1}{n}-2 \end{pmatrix}$$

On passe à la limite sur chaque coefficient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ la suite $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ définie par :

$$Z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \text{ donné}$$

et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = & \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}w_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = & \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}v_n + \frac{1}{3}w_n \\ w_{n+1} = & \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}w_n - \frac{7}{6} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite Z_n vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = AZ_n + B$$

2. Montrer que pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\|AX\|_\infty \leqslant k\|X\|_\infty \qquad \text{avec } k \in]0,1[$$

3. Montrer que l'équation : $X = AX + B$ admet une unique solution L dans $\mathbb{R}^3$.
4. Déduire de ce qui précède et d'une récurrence une inégalité reliant $\|Z_n - L\|_\infty$, $\|Z_0 - L\|_\infty$, n et k. Conclure sur la convergence de Z_n.

Correction :

1. On trouve facilement : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$
2. On trouve $k = \frac{5}{6}$ car :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}w_n\right| &\leqslant \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\|X\|_\infty \\ \left|\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}v_n + \frac{1}{3}w_n\right| &\leqslant \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\|X\|_\infty \\ \left|\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}w_n\right| &\leqslant \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\|X\|_\infty \end{aligned}$$

3. Il suffit de vérifier que $(I_3 - A)$ est inversible. Pour cela, on considère X tel que $AX = X$, et donc $\|X\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\|X\|_\infty$, d'où X est nul. Donc pas de vecteur propre, donc 1 n'est pas valeur propre. Donc $I_2 - A$ inversible, donc l'équation admet une unique solution.

   R Il est important de noter que le coefficient de Lipschitz a un lien avec les valeurs propres.

   On aurait aussi pui calculer $\det(I_3 - A)$ ou résoudre le système, notons que la solution est $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|Z_{n+1} - L\| \leqslant \frac{5}{6}\|Z_n - L\|$$

   et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|Z_n - L\| \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n \|Z_0 - L\|$$

   Par suite : $\lim_{n\infty}\|Z_n - L\| = 0$, ie $\lim_{n\infty} Z_n = L$.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathscr{O}(E)$ une isométrie.
On pose $v = u - Id$.

1. Démontrer que $\ker(v) = (\mathrm{Im}(v))^\perp$.
   En déduire : $(\ker(v))^\perp = \mathrm{Im}(v)$.
2. Soit pour $n \geqslant 1$: $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$.
   Démontrer que pour tout $x \in E$, la suite $(u_n(x))$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\ker(v)$.

Correction :

1. Déjà fait dans le TD sur les espaces euclidiens :
   Soit $x \in \ker(v)$ et $y \in \mathrm{Im}(v)$, alors on sait que :

$$\exists a \in E,\ y = v(a) = u(a) - a \text{ et } v(x) = 0 \text{ ie} u(x) = x$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned} < x, y > &= \langle x, u(a) - a\rangle = \langle x, u(a)\rangle - \langle x, a\rangle \\ &= \langle u(x), u(a)\rangle - \langle x, a\rangle = 0 \end{aligned}$$

   car u conserve le produit scalaire.
   On utilise alors l'égalité des dimensions pour avoir l'égalité des espaces.
   En dimension finie,

$$(\ker(v))^\perp = \left((\mathrm{Im}(v))^\perp\right)^\perp = \mathrm{Im}(v)$$

2. Soit donc $x \in E$, on décompose x dans la somme directe orthogonale : $E = \ker(v) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(v)$. Cela s'écrit :

$$x = a + b \text{ avec } a \in \ker(v) \text{ et } b \in \mathrm{Im}(v)$$

   Il s'agit donc de montrer que :

$$\lim_{n\infty}\|u_n(x) - a\| = 0$$

   on calcule donc $u_n(x)$ pour $n \geqslant 1$.
   Déjà, par linéarité : $u_n(x) = u_n(a) + u_n(b)$.
   On a : $v(a) = 0$, cad $u(a) = a$, ce qui donne facilement $u_n(a) = a$ Déjà donc : $u_n(x) - a = u_n(b)$.
   Pour calculer $u_n(b)$, on sait que $\exists c \in E, b = v(c) = u(c) - c$. Ainsi :

$$u_n(b) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}(c) - u^k(c)$$

on reconnaît une série téléscopique. Après changement de variables :

$$u_n(b) = \frac{1}{n}(u^n(c) - c)$$

Ainsi, on peut écrire :

$$u_n(x) - a = u_n(b) = \frac{1}{n}(u^n(c) - c)$$

Ainsi, on va utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|u_n(x) - a\| &= \frac{1}{n}\|u^n(c) - c\| \leqslant \frac{1}{n}(\|u^n(c)\| + \|c\|) \\ &\leqslant \frac{2}{n}\|c\| \to 0 \end{aligned}$$

(Rappel : u est une isométrie donc conserve la norme). Ainsi : $\lim_{n\infty}\|u_n(x) - a\| = 0$ ce qui signifie que $(u_n(x))$ converge vers le projeté de x sur $\ker(v)$.

✯ Topologie

Exercice 13

1. Montrer que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > x\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leqslant x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Correction : application directe du cours : $(x,y) \mapsto y - x$ est continue !
On peut aussi faire par caractérisation séquentielle pour montrer que B est fermé donc A (son complémentaire) est ouvert.

Exercice 14 Soit $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 | xyz = 1\}$.
Montrer que A est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

Correction : La fonction $(x,y,z) \longmapsto xyz - 1$ est continue car polynôme donc $A = \{(x,y,z) | f(x,y,z) = 0\}$ est fermé.

Exercice 15 Soit E un espace vectoriel normé.
Montrer qu'un singleton est fermé.
En déduire qu'un ensemble fini est fermé.

Correction : On considère donc F un singleton et on note donc $F = \{a\}$ pour un certain a dans E.

Méthode 1 : On considère une suite (x_n) d'éléments de F qui converge vers une limite l. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F$ donc $x_n = a$ et donc la suite est constante et donc $l = a \in F$. On a donc montré que toute suite convergente d'éléments de F converge vers un élément de F, donc F est fermé.

Méthode 2 : On montre que C_F est ouvert. Soit $x \in C_F$, alors $x \neq a$, donc $r = N(x-a)/2 > 0$, or :

$$\forall z \in B(x,r), z \neq a$$

donc $B(x,r) \subset C_F$, donc C_F est ouvert.

Soit maintenant $E = \{x_i | i \in [\![1,n]\!]\}$ un ensemble fini.

Méthode 1 : on écrit :

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} \text{ donc une réunion finie de fermé}$$

c'est donc un fermé. **NB :** attention à bien écrire réunion **finie.**

Méthode 2 (sans utiliser le résultat précédent) : on considère une suite (a_n) d'élément de E qui converge vers une limite l et on montre que $l \in E$. Pour cela, on note :

$$d = \min_{1 \leqslant i < j \leqslant n} d(x_i, x_j) \text{ minimum sur un nombre fini de valeurs}$$

on a $d > 0$ et on voit que :

$$\forall (a,b) \in E^2,\ d(a,b) < d \implies a = b (*)$$

en utilisant la définition de la convergence avec $\varepsilon = d/3$, on obtient que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, d(x_n, l) \leqslant \frac{d}{3} \text{ et donc : } \forall n \geqslant n_0,\ d(x_n, x_{n_0}) < d$$

et donc en utilisant $(*)$, cela donne :

$$\forall n \geqslant n_0, x_n = x_{n_0}$$

la suite (x_n) est donc constant et $l = x_{n_0} \in E$.

Exercice 16 $\mathbb{Q}$ est-il un fermé ou un ouvert de $\mathbb{R}$?

$\mathbb{Z}$ est-il un fermé ou un ouvert de $\mathbb{R}$?

Correction : On a : $\overline{Q} = \mathbb{R}$. En effet, si (x_n) est une suite de rationel convergente vers l, alors $l \in \mathbb{R}$ D'autre part, tout réel est limite de rationnel (c'est la traduction de $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

ainsi $\mathbb{Q}$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Si (x_n) est une suite d'entiers relatifs convergente vers l, alors $l \in \mathbb{Z}$ (on le démontre en prenant $\varepsilon = \frac{1}{3}$ dans la définition, on a alors que (x_n) est stationnaire à partir d'un certain rang). Donc $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 17 En utilisant la caractérisation séquentielle des fermés, montrer que si A est ouvert alors C_A est fermé.

Correction : On considère une suite (x_n)de C_A qui converge vers l. Supposons par l'absurde que $l \in A$. On a alors l'existence d'un $r > 0$, tel que $B_o(l, r) \subset A$. Mais à partir d'un certain rang, on a $x_n \in B_o(l, r)$, donc $x_n \in A$ ce qui est impossible, donc $l \in C_A$ et C_A est fermé.

Exercice 18 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que si F contient une boule ouverte de centre 0_E et de rayon non nul, alors $F = E$.
2. Que peut-on dire si F est un ouvert de E ?
3. Montrer que F est fermé.

Correction :

1. On note $r > 0$ tel que $B_o(0, r) \subset F$. Soit e_i un vecteur de la base, alors $\frac{r}{2\|e_i\|} e_i$ est un vecteur de $B_o(0, r)$ donc de F. Ainsi, F contient la base de E et $F = E$.
2. Si F est un SEV de E et F est ouvert, alors $F = E$, puisque $0 \in F$, donc F contient une boule ouverte de centre 0.
3. On peut utiliser l'application continue $\varphi : x \longmapsto \|P_F(x) - x\|$, on a alors $F = \{x \in E | \varphi(x) = 0\}$ est fermé, ou utiliser la caractérisation séquentielle des fermés en écrivant les coordonnées dans une base adaptées à F.

Exercice 19

1. Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.
2. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.
3. Montrer qu'une intersection quelconque d'ouverts de E n'est pas nécessairement un ouvert de E.
4. Énoncer des résultats similaires pour les fermés.

Commentaire : à savoir refaire.

Correction :

1. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts. Montrons que $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ est ouvert. Soit $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$, alors il existe $i \in I$, tel que $x \in O_i$, et donc comme O_i est ouvert, il existe $r > 0$, tel que $B_o(x, r) \subset O_i$. On a alors :
$$B_o(x, r) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$$
ce qui montre que $\bigcup_{i\in I} O_i$ est un ouvert.
2. Soit $(O_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie d'ouverts. Montrons que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i$ est ouvert.
Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $x \in O_i$, et donc comme O_i est ouvert, il existe $r_i > 0$, tel que $B_o(x, r_i) \subset O_i$. Notons alors $r = \min_{i\in[\![1,n]\!]}(r_i)$. La valeur r existe comme minimum d'un nombre finie de valeurs, avec de plus $r > 0$.

On a alors :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ B_o(x,r) \subset O_i \text{ donc } B_o(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i$$

ce qui montre que $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ est un ouvert.

3. Pour contre exemple, on peut considérer la suite d'ouverts

$$\left(B_o(0,\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

donc l'intersection fait $\{0\}$.

4. on peut faire par complémentaire, ou refaire les raisonnements.
Si on considère une famille finie de fermé $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, alors les complémentaires : $(C(A_i))_{i\in 1n}$ sont des ouverts.
On doit montrer que la réunion $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est fermée. Or on a :

$$C\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} C(A_i)$$

C'est donc une intersection (finie) d'ouvert donc un ouvert. Ainsi : $C\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ est ouvert et donc $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est fermée.
Pour une intersection de fermé, c'est exactement le même raisonnement.
Comme contre exemple, on peut simplement écrire que :

$$E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_f(0,n)$$

Exercice 20 Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques) et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices antisymétriques) sont des fermés de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction : on vérifie que l'application $M \mapsto M - M^T$ est continue et on écrit :

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \middle| \|M - M^T\| = 0 \right\}$$

Exercice 21 Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E. On note :

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

1. Montrer que si A est ouvert alors $A + B$ est ouvert
2. On suppose que A et B sont deux fermés bornés de $\mathbb{R}$, montrer que $A + B$ est fermé et borné.

Correction :

1. Soit $u \in A + B$, on va montrer que $u \in \overset{\circ}{\overbrace{A+B}}$ (l'intérieur de $A + B$).
Pour cela, on écrit $u = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$ et on considère $r > 0$, tel que $B_o(a,r) \subset A$. on va montrer que $B_o(u,r) \subset (A + B)$.
On considère donc $z \in B_o(u,r)$, on sait alors que $N(z - u) < r$, et donc que : $N((z - b) - a) < r$ ce qui signifie que $z - b \in B_o(a,r)$, et donc que $z - b \in A$ ainsi, z s'écrit : $z = \underbrace{z - b}_{\in A} + \underbrace{b}_{\in B}$, et donc $z \in A + B$.
Au final, $B_o(u,r) \subset A + B$ et donc $A + B$ est ouvert.
2. On suppose donc maintenant que A et B sont deux fermés bornés de $\mathbb{R}$. Soit M_A et M_B tels que :

$$\forall x \in A, |x| \leqslant M_A \qquad \text{et} \qquad \forall y \in B, |y| \leqslant M_B$$

On note $M = M_A + M_B$.
Soit $u \in A + B$, on écrit alors : $u = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$, et on a :

$$|u| = |a + b| \leqslant |a| + |b| \leqslant M_A + M_B = M$$

Ainsi, $A+B$ est borné.
Il faut maintenant vérifier que $A+B$ est fermé. Pour cela, on considère une suite (u_n) de $A+B$ convergente vers l. On sait que l'on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a_n + b_n \text{ avec } a_n \in A, b_n \in B$$

On utilise Blozano-Weierstrass : (a_n) est une suite réelle bornée (car élément de A), donc on peut extraire une sous-suite convergente $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ qui converge donc vers un élément x on a $x \in A$ puisque A est fermé.
De même $(b_{\varphi(n)}$ est une suite réelle bornée donc on peut extraire une sous suite convergente : $\left(b_{\psi(\varphi(n))}\right)$. Cette sous-suite converge vers y et $y \in B$.
Comme on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\psi(\varphi(n))} = a_{\psi(\varphi(n))} + b_{\psi(\varphi(n))}$$

et que $\psi \circ \varphi$ est une extratrice, la suite $u_{\psi(\varphi(n))}$ est extraite de lasuite (u_n) et converge donc vers l. Idem pour $a_{\psi(\varphi(n))}$ qui est extraite de $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ et converge donc vers x, on a déjà vu que $b_{\psi(\varphi(n))}$ converge vers y. D'où $l = x+y$ et donc $l \in A+B$, ainsi, $A+B$ est fermé.

✯ Limite et continuité en un point

Exercice 22

1. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose :

$$g(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}.$$

La fonction g admet-elle une limite en $(0,0)$?

2. Même question avec $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^2}{xy}$.

Correction :il faut bien avoir saisi la technique.

- Pour montrer que g n'admet pas de limite l (ou n'est pas continue) en $(0,0)$, on construit deux suites x_n et y_n de vecteurs, de limite $(0,0)$, et telle que $\lim_{n\infty} g(x_n) \neq \lim_{n\infty} g(y_n)$ (ou que l'une de ces limites n'existe pas). On peut éventuellement aussi utiliser des fonctions $t \mapsto \varphi(t)$ et $t \mapsto \psi(t)$ de limite $(0,0)$ lorsque t tends vers 0 et telle que :

$$\lim_{t\to 0} g(\varphi(t)) = \lim_{t\to 0} g(\psi(t))$$

On peut voir cela comme si on approchait le point $(0,0)$ en suivant plusieurs chemin (généralement des droites).
- Pour montrer que g admet la limite l (ou est continue) en $(0,0)$ majore $g(x) - l$ par une quantité qui tends vers 0.

Pour le cas de l'exercice, on obtient :

$$|g(x,y)| \leqslant |x| + |y| \text{ donc } \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0.$$

et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t,t) = \frac{t^4 + t^2}{t^2} \to 1 \qquad \text{et} \qquad f(t,2t) = \frac{t^4 + 4t^2}{2t^2} \to 2$$

ainsi, f n'a pas de limite en $(0,0)$. On peut aussi utiliser $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ et $f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$.

Exercice 23 Étudier la continuité de l'application :

$$f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Même question avec l'application :

$$g : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Correction : Pour le premier :

$$|f(x,y)| \leqslant |y|$$

Ainsi f est continue en $(0,0)$.

Pour le deuxième :

$$g(t,t) \to \frac{1}{2} \text{ et } g(t,0) = 0$$

donc g n'est pas continue.

⭑ Produit matriciel et convergence d'une suite de matrices

Exercice 24

Soit (A_n) et (B_n) deux suites de matrices de $M_p(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers A et B.

1. Expliquer pourquoi la suite (A_nB_n) converge vers AB.
2. Soit une suite de matrices inversibles qui converge vers A. La matrice A est-elle forcément inversible ?
3. Montrer que si la suite $\left(A_n^{-1}\right)$ converge et la suite (A_n) converge vers A, alors A est inversible et $\left(A_n^{-1}\right)$ converge vers A^{-1}.

Correction :

1. L'application : $\varphi : (A,B) \longmapsto AB$ est bilinéaire sur $(M_p(\mathbb{R}))^2$, qui est de dimension finie. Ainsi, φ est continue. On a donc :

$$\lim_{n\infty} \varphi(A_n,B_n) = \varphi\left(\lim_{n\infty} A_n, \lim_{n\infty} B_n\right) = \varphi(A,B) = AB$$

On peut donc dire que la suite (A_nB_n) converge vers AB.

Autre méthode :

En prenant la norme infinie sur les matrices, on a facilement :

$$\forall (A,B) \in M_p(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant p|A\|\|B\|$$

(ce qui revient à la continuité)

On a alors :

$$\begin{aligned} \|A_nB_n - AB\| \leqslant & \|A_n(B_n - B)\| + \|(A_n - A)B\| \\ \leqslant & p\left(\|A_n\|\|(B_n - B)\| + \|(A_n - A)\|\|B\|\right) \end{aligned}$$

2. Non pas toujours (l'ensemble des matrice inversibles est un ouvert et n'est pas fermé). Le plus simple :

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

qui est une suite de matrice inversible qui converge vers la matrice nulle. (En dimension p on prend $A_n = \frac{1}{n} I_p$).

3. Dans cette question, on sait que $\left(A_n^{-1}\right)$ converge vers une matrice notée B et que la suite (A_n) converge vers A. Alors, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n^{-1}A_n = I_p$$

or $\left(A_n^{-1}A_n\right)$ converge vers BA (avec la question 1) d'où $BA = I_p$, d'où A est inversible et son inverse est B.

Exercice 25 Soit A une matrice de $M_p(\mathbb{R})$ telle que (A^n) converge vers L. Montrer que L est une matrice de projecteur.

Correction : Il faut montrer que $L^2 = L$.

D'une part, la suite $\left(A^{2n}\right)$ converge vers L (car extraite de (A^n)).

D'autre part : la fonction $\varphi : A,B \longmapsto AB$ est continue car bilinéaire sur un EVN de dimension fini $(M_p(\mathbb{R}))$ donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n\infty} A^nA^n =& \lim_{n\infty} \varphi(A^n,A^n) = \varphi\left(\lim_{n\infty} A^n, \lim_{n\infty} An\right) \\ =& \varphi(L,L) = L^2 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\left(A^{2n}\right)$ converge vers L^2. L'unicité de la limite permet de conlure.

⭑ Continuité sur une partie

Exercice 26

1. Montrer que l'application :

$$f : (x,y,z) \longmapsto (x^2+y^2, \sin xy, z-2x) \text{ est continue sur } \mathbb{R}^3$$

2. Montrer que l'application :

$$g : (x,t) \longmapsto \frac{t^n e^{tx}}{1+t^2+x^2} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2 \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

3. Montrer que l'application :

$$h : (x,y) \longmapsto y^x \text{ est continue sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

4. Montrer que l'application :

$$j : (x,y) \longmapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2$$

5. Montrer que l'application :

$$p : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\ln(1+xy) & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{est continue sur son ensemble de définition.}$$

Correction :

1. On passe par les coordonnées :

$$\begin{aligned}
&(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2 \text{ est continue car polynôme} \\
&(x,y,z) \longmapsto \sin(xy) \text{ continue comme composée de } (x,y,z) \mapsto xy \text{ et } t \mapsto \sin(t) \\
&(x,y,z) \longmapsto z-2x \text{ est continue car polynôme}
\end{aligned}$$

2. L'argument clé est : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, 1+t^2+x^2 \neq 0$.
3. Il faut passer par la forme exponentielle :

$$(x,y) \longmapsto \exp(x\ln(y))$$

4. Il y a un problème en $(0,0)$, on peut écrire :

$$\forall (x,y) \neq (0,0), \ \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leqslant (x^2+y^2)$$

   D'où la continuité.
5. Déjà l'ensemble de définition est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy > -1\}$.
   Cet ensemble doit être dessiné.
   Ici on a un problème en tout point de la forme $(0,y)$. On considère donc un y quelconque. On a :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \text{ suffisamment petit, } \frac{1}{h}\ln(1+h(y+k)) \leqslant y+k$$

   donc :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \text{ suffisamment petit, } \left|\frac{1}{h}\ln(1+h(y+k)) - y\right| \leqslant |k|$$

   En particulier :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(0+h, y+k) = f(0,y)$$

   ce qui montre que la fonction f est continue en $(0,y)$, et donc qu'elle est continue sur son ensemble de définition.

⋆ **Fonctions lipschitziennes**

Exercice 27

Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On considère f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$.
   Montrer que f est lipschitzienne sur $[a,b]$
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Prouver que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f' est bornée sur $\mathbb{R}$
3. On suppose que f et g sont bornées et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que fg est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que le produit de deux applications lipschitzienne n'est pas toujours lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
5. On suppose que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant A|x| + B$.

Correction : le principe est de relier le théorème des accroissements finis et les fonctions k lipschitzienne. C'est l'inégalité des accroissements finis.

1. f' est continue sur le segment, on peut donc appliquer le théorème « continue sur un segment » à f'. On en déduit :
   $$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a,b],\ \left|f'(x)\right| \leqslant M$$
   et donc si on fixer $(x,y) \in [a,b]$, avec $x < y$, on a :
   $$\forall c \in]a,b[,\ f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$$
   ce qui donne :
   $$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$
2. Si f' est borné, on procède comme à la question précédente. Si on suppose f k-lipschitzienne, alors on écrit :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R},\ \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant k$$
   ce qui montre que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant k$$
3. Il suffit d'écrire :
   $$(fg)(x) - (fg)(y) = f(x)\left(g(x) - g(y)\right) + g(y)\left(f(x) - f(y)\right)$$
   Puis de majorer.
4. Le plus simple est de prendre le produit de $x \mapsto x$ avec lui-même.
5. On écrit pour $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} |f(x)| \leqslant& |f(x) - f(0)| + |f(0)| \\ \leqslant& k|x| + |f(0)| \end{aligned}$$

Exercice 28 Applications aux suites récurrentes

Soit :

- (E,N) un espace vectoriel normé de dimension finie,
- f une application k-lipschitzienne de (E,N) dans (E,N),
- α un vecteur de E tel que : $f(\alpha) = \alpha$
- et (u_n) une suite de vecteurs de E définie par $u_0 \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ N(u_n - \alpha) \leqslant k^n N(u_0 - \alpha)$.
2. Que peut-on dire dans le cas où $|k| < 1$?

Correction :

1. on applique la relation de lipschitz avec $x = u_n$ et $y = \alpha$. Cela donne :

$$N(f(u_n) - f(\alpha)) \leqslant kN(u_n - \alpha)$$
$$\text{cad : } N(u_{n+1} - \alpha) \leqslant kN(u_n - \alpha)$$

on finit par récurrence.
2. Dans ce cas (u_n) converge vers α.

Exercice 29 On veut montrer que :

$$f : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\max(1,\|x\|)} \end{cases} \quad \text{est lipschitzienne de rapport 2}$$

C'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant 2\|x - y\|$$

1. Montrer que la relation est valable dans le cas de vecteur de $B_o(0,1)$:

$$\forall (x,y) \in (B_o(0,1))^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant 2\|x - y\|$$

2. On suppose dans cette question que $x \in B_o(0,1)$ et $y \notin B_o(0,1)$.
   (a) Calculer $f(x)$ et $f(y)$.
   (b) Montrer la relation :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\| + \left\| y - \frac{1}{\|y\|} y \right\|$$

   (c) Montrer la relation :

$$\left\| y - \frac{1}{\|y\|} y \right\| \leqslant \|x - y\|$$

   (d) En déduire que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant 2\|x - y\|$
3. On suppose maintenant que $x \notin B_o(0,1)$ et $y \notin B_o(0,1)$.
   (a) Montrer :

$$\|f(x) - f(y)\| = \frac{\big\| \|y\|x - \|x\|y \big\|}{\|x\|\,\|y\|}$$

   (b) Montrer :

$$\big\| \|y\|x - \|x\|y \big\| \leqslant 2\|y\|\|x - y\|$$

   (c) En déduire que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant 2\|x - y\|$
4. Conclure.

Correction :

1. Dans ce cas on a $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Ainsi $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
2. On suppose donc $x \in B_o(0,1)$ et $y \notin B_o(0,1)$.
   (a) Clairement : $f(x) = x$ et $f(y) = \frac{1}{\|y\|} y$.
   (b) On calcule puis on applique l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \left\| x - \frac{1}{\|y\|} y \right\| \\ &= \left\| x - y + y - \frac{1}{\|y\|} y \right\| \\ &\leqslant \|x - y\| + \left\| y - \frac{1}{\|y\|} y \right\| \end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\left\| y - \frac{1}{\|y\|} y \right\| &= \left\| \frac{\|y\|-1}{\|y\|} y \right\| \\
&= \|y\| - 1 \\
&\leqslant \|y\| - \|x\| && \text{car } \|x\| < 1 \\
&\leqslant \big| \|y\| - \|x\| \big| && \text{car } \|x\| < \|y\| \\
&\leqslant \|x-y\| && \text{inégalité triangulaire renversée.}
\end{aligned}$$

(d) Évident avec ce qui précède.

3. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\| &= \left\| \frac{1}{\|x\|} x - \frac{1}{\|y\|} y \right\| \\
&= \frac{\Big\| \|y\|x - \|x\|y \Big\|}{\|x\|\|y\|}
\end{aligned}$$

(b) On écrit :

$$\|y\|x - \|x\|y = \|y\|(x-y) + (\|y\| - \|x\|)\, y$$

D'où

$$\begin{aligned}
\Big\| \|y\|x - \|x\|y \Big\| &\leqslant \Big\| \|y\|(x-y) + (\|y\| - \|x\|)\, y \Big\| \\
&\leqslant \|y\|\|x-y\| + \big|\|y\| - \|x\|\big|\, \|y\| \\
&\leqslant \|y\|\|x-y\| + \|y-x\|\|y\| \\
&\leqslant 2\|y\|\|x-y\|
\end{aligned}$$

(c) Au final :

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\| &\leqslant \frac{2}{\|x\|}\|x-y\| \\
&\leqslant 2\|x-y\|
\end{aligned}$$

4. La fonction est bien lipschitzienne.

✯ Continuité des applications linéaires et bilinéaires

Exercice 30 On identifie tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ au vecteur colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ contenant ses coordonnées dans la base canonique.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné, on note φ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = X^T A X$$

1. Montrer que φ est continue.
2. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
   En déduire qu'il existe deux réels a et b tels que :
   $$\forall X \in S,\ a \leqslant \varphi(X) \leqslant b \text{ et } \exists (X_1, X_2) \in S^2,\ \varphi(X_1) = a \text{ et } \varphi(X_2) = b.$$
3. Soit λ une valeur propre réelle de A. Montrer que $\lambda \in [a,b]$.

Correction :

1. L'application $(X,Y) \mapsto X^T A Y$ est bilinéaire et donc continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (car de dimension finie). On compose par l'application $X \mapsto (X,X)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (clairement continue). On en déduit que φ est continue.
2. Continuité sur un fermé borné en dimension finie.
3. On sait qu'il existe X tel que $AX = \lambda X$. On normalise en posant :
   $$Y = \frac{1}{\|X\|} X \in S$$
   On a $AY = \lambda Y$, donc $\varphi(Y) = \lambda Y^T Y = \lambda \|Y\|^2 = \lambda$.

Exercice 31

1. Soit l'application :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_q(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_q(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & PAP^{-1} \end{array} \right. \qquad \text{où } P \in GL_q(\mathbb{R})$$

   (a) Montrer que g est continue sur $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$.
   (b) Soit A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$, montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (c) Soit A une matrice diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur son spectre pour que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_q(\mathbb{R}))^2 & \to & \mathscr{M}_q(\mathbb{R}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array} \right.$$

   (a) Expliquer pourquoi f est continue.
   (b) Soit M une matrice fixée telle que la suite (M^n) converge vers une matrice L.
   Montrer que L est la matrice d'un projecteur.
   (c) Soit A et B deux matrices telles que la suite $((AB)^n)$ converge. Montrer que la suite $((BA)^n)$ converge.
3. On considère l'application :

$$d : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_q(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array} \right.$$

   (a) Expliquer pourquoi d est continue.
   (b) En déduire que l'ensemble des matrices inversibles $Gl_q(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$.
   (c) Soit (A_n) une suite de matrice convergeant vers une matrice A et soit z un complexe. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \chi_{A_n}(z) = \chi_A(z)$$

   (d) Soit a un réel, montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z-a| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|$$

   (e) Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^{deg(P)}$$

   (f) En déduire qu'une limite d'une suite de matrices trigonalisables de $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
   (g) Soit la suite de matrice (A_n) définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+e^{-n} & 1 \\ 0 & 1-e^{-n} \end{pmatrix}$$

   montrer que la suite (A_n) est une suite de matrices diagonalisables qui convergent vers une matrice non diagonalisable.
4. Soit (A_n) une suite de matrice inversible qui converge vers une matrice A.
   (a) As-t-on A inversible ?
   (b) On suppose A inversible, montrer que $\left(A_n^{-1}\right)$ converge.
   (c) Si on considère maintenant (A_n) une suite de matrice qui converge vers une matrice A inversible. Montrer qu'à partir d'un certain rang A_n est inversible.

Correction :

1. (a) g est la composé de deux applications $\mathscr{M}_q(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$:

$$f_1 : A \mapsto PA \qquad \text{et} \qquad f_2 : A \mapsto AP^{-1}$$

   REM : $g = f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, les deux applications f_1 et f_2 commutent, c'est l'associativité.

L'application f_1 est linéaire et $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc f_1 est continue. De même pour f_2, ainsi par composée, g est continue.

Autre rédaction : g est linéaire en dimension finie donc continue.

(b) On note P telle que $B = PAP^{-1}$ On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B^n = PA^nP^{-1} = g(A^n)$$

Comme g est continue, on voit que si $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L, alors $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Précisément :

$$\lim_{n\infty} B^n = \lim_{n\infty} g(A^n) = g\left(\lim_{n\infty} A^n\right) = g(L) = PLP^{-1}.$$

Pour la réciproque, il suffit d'écrire : $A = P^{-1}BP$ et donc d'appliquer ce qui précède en remplaçant la fonction $g : A \longmapsto PAP^{-1}$ par la fonction $h : B \longmapsto P^{-1}BP$ (qui est aussi une fonction continue).

(c) Soit A une matrice diagonale et D une matrice diagonale et P une matrice de passage telle que $A = PDP^{-1}$.
On a vu que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_q^n \end{pmatrix} \qquad \text{avec } SP(A) = \left\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\right\} \text{ non nécessairement distincts.}$$

La suite (D^n) ne peut converger que si ses termes diagonaux vérifient :

$$\forall i \in [\![1,q]\!],\ |\lambda_i| < 1 \qquad \text{ou } \lambda_i = 1$$

Au final, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si tous les éléments de son spectre sont soit de valeur absolue / module strictement inférieur à 1, soit égaux à 1.

REM : la suite (A^n) converge alors vers :

$$L = P \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(le 1 est écrit autant de fois que dans D, les autres termes diagonaux sont nuls)

2. (a) L'application f est bilinéaire et $(\mathscr{M}_q(\mathbb{R}))^2$ est de dimension finie. Donc f est continue.

(b) On a d'un côté :

$$\lim_{n\infty} M^{2n} = L$$

de l'autre :

$$\begin{aligned} \lim_{n\infty} M^{2n} &= \lim_{n\infty} (M^nM^n) = \lim_{n\infty} f(M^n, M^n) \\ &= f\left(\lim_{n\infty} M^n, \lim_{n\infty} M^n\right) && \text{par continuité de } f \\ &= f(L,L) = L^2 \end{aligned}$$

(c) On note $C = \lim_{n\infty}(AB)^n$
L'idée est la même que la question précédente :

$$\begin{aligned} \lim_{n\infty}(BA)^n &= \lim_{n\infty} B \times (AB)^{n-1} \times A \\ &= B \times \lim_{n\infty}(AB)^{n-1} \times A = BCA \end{aligned}$$

en utilisant deux fois la continuité du produit.

3. (a) L'application d est q-linéaire et $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Ou simplement le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice.

(b) Par définition :

$$Gl_q(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R}) \middle| d(A) \neq 0\right\} = d^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

c'est donc un ouvert car d est continue.

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \chi_{A_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \det(A_n - xI_q) & \\
= \det\left(\lim_{n\to+\infty}(A_n - xI_q)\right) & \qquad \text{par continuité du déterminant} \\
= \det(A - xI_q) & \qquad \text{car } \lim_{n\to+\infty}(A_n - xI_q) = A - xI_q \\
= \chi_A(x) &
\end{aligned}$$

(d) Soit donc $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z-a| \geqslant |\mathrm{Im}(z-a)| \qquad \text{or } \mathrm{Im}(z-a) = \mathrm{Im}(z)$$

(e) Supposons que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, on écrit alors :

$$P = \prod_{i=1}^{q}(X-a_i)^{\alpha_i} \qquad (a_i) \text{ les racines réelles, d'ordres respectifs } (\alpha_i)$$

Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$, on a alors :

$$|P(z)| = \prod_{i=1}^{q}|z-a_i|^{\alpha_i} \geqslant \prod_{i=1}^{q}|\mathrm{Im}(z)|^{\alpha_i} = |\mathrm{Im}(z)|^{deg(P)}$$

Réciproquement, supposons que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^{deg(P)}$$

et montrons que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. On le décompose dans $\mathbb{C}[X]$ (où il est scindé) :

$$P = \prod_{i=1}^{q}(X-a_i)^{\alpha_i} \qquad (a_i) \text{ les racines complexes, d'ordres respectifs } (\alpha_i)$$

Il faut donc montrer que les racines sont toutes réelles.
Montrons que a_1 est réelle. Pour cela, on a :

$$|P(a_1)| \geqslant |\mathrm{Im}(a_1)|^{deg(P)} \text{ or } P(a_1) = 0$$

d'où $\mathrm{Im}(a_1) = 0$ et $a_1 \in \mathbb{R}$. C'est le même raisonnement pour toutes les racines.

(f) Soit une suite de matrice (A_n) trigonalisable qui converge vers une limite L.
Notons χ_n leur polynôme caractéristique de A_n. On a que χ_n est scindé pour toute valeur de n. On sait que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\infty} \chi_n(x) = \chi_L(x)$. Ce résultat étant vrai pour $x \in \mathbb{R}$, il est aussi vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Comme χ_n est scindé, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ |\chi_n(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^q$$

on fixe $z \in \mathbb{C}$ quelconque, puis on fait tendre n vers $+\infty$, ce qui donne donc :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |\chi_L(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^q$$

donc χ_L est scindé, et donc L est trigonalisable (puisqu'elle annule χ_L qui est scindé).

(g) Pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice A_n est diagonalisable, car son spectre est : $\{1+e^{-n}, 1-e^{-n}\}$, et donc elle a deux valeurs propres distinctes or elle est de taille 2. Donc toutes les matrices de la suite sont diagonalisables.
La matrice limite $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

4. (a) Clairement non. Un contre exemple tout simple : $A_n = \frac{1}{n} I_q$ de limite nulle.
   (b) **Méthode (hors-programme) :** l'application :

$$i : \begin{cases} GL_q(\mathbb{R}) & \to & GL_q(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{-1} = \frac{1}{det(M)} Com(M)^T \end{cases}$$

est continue puisque chaque coefficient de la commatrice est un déterminant et donc une application polynomiale des coefficients de M. La déterminant aussi et il est non nul. Ainsi, on peut écrire :

$$\lim_{n\infty} A_n^{-1} = \lim_{n\infty} i(A_n) = i\left(\lim_{n\infty} A_n\right) = i(A) = A^{-1}$$

Méthode 2 : on sait que A_n^{-1} est un polynôme en A_n.
On reprend la démonstration de ce résultat pour déterminer l'expression de ce polynôme :

$$\chi_n(A_n) = 0 \text{ s'écrit : } \frac{1}{\chi_n(0)} (\chi_n - \chi_n(0))(A_n) = I_q$$

et donc :

$$A_n \left(\frac{1}{\chi_n(0)} \left(\frac{\chi_n - \chi_n(0)}{X} \right) (A_n) \right) = I_q$$

$$A_n^{-1} = P_n(A_n) \text{ où } P_n = \frac{1}{\chi_n(0)} \left(\frac{\chi_n - \chi_n(0)}{X} \right)$$

(P_n est un polynôme car X divise $\chi_n - \chi_n(0)$).
Il reste à passer à la limite. On doit étudier la limite de la suite de polynôme P_n.
On a vu que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\infty} \chi_n(x) = \chi_A(x)$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\infty} P_n(x) = P_A(x) \text{ avec } P_A = \frac{1}{\chi_A(0)} \left(\frac{\chi_A - \chi_A(0)}{X} \right)$$

REM : c'est la convergence simple, on aimerait montrer que cela implique la convergence dans l'ensemble des polynômes, ie la convergence des coefficients. Ici, c'est simple car il s'agit de polynôme de degré fixé q. Donc comme $\mathbb{R}_q[X]$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
On choisit par exemple comme norme de polynôme dans $\mathbb{R}_q[X]$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_q[X],\ \|P\|_1 = \sum_{k=0}^{q} |P(k)|$$

C'est clairement une norme. De plus,

$$\lim_{n\infty} \|P_n - P_A\|_1 = \sum_{k=0}^{q} |P_n(k) - P_a(k)| = 0$$

et donc P_n converge vers P_A. **REM :** on vient de prouver que la convergence simple implique la convergence dans $\mathbb{R}_q[X]$ et donc pour tout norme.
Considérons maintenant une autre norme pour $\mathbb{R}_q[X]$, liée aux coefficients :

$$\forall P = \sum_{k=O}^{a} a_k X^k \in \mathbb{R}_q[X],\ \|P\|_2 = \max_{k=0\ldots q} |a_k|$$

C'est une norme équivalente, et donc P_n converge vers P_A signifie que chaque coefficients de P_n converge vers le coefficient de P_A.
On décompose en coefficient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \sum_{k=0}^{q} \alpha_{k,n} X^k \text{ et } P_A = \sum_{k=0}^{q} \beta_k X^k$$

et on a :

$$\forall k \in [\![0,q]\!]\,,\ \lim_{n\infty} \alpha_{k,n} = \beta_k$$

Maintenant la relation $A_n^{-1} = P_n(A_n)$ s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n^{-1} = \sum_{k=0}^{q} \alpha_{k,n} A_n^k$$

Fixons $k \in [\![0,q]\!]$ et regardons la limite de $\left(\alpha_{k,n}A_n^k\right)$. On a $\lim_{n\infty} \alpha_{k,n} = \beta_k$ et $\lim_{n\infty} A_n^k = A^k$ (par continuité du produit matriciel) et donc :

$$\lim_{n\infty} \alpha_{k,n} A_n^k = \beta_k A^k$$

par somme de limite, on peut donc écrire :

$$\lim_{n\infty} P_n(A_n) = \lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{q} \alpha_k^n A_n^k = \sum_{k=0}^{q} \beta_k^n A = P(A)$$

Ainsi, $\left(A_n^{-1}\right)$ converge et sa limite est $P(A)$ cad A^{-1}.

(c) Cela revient à dire que $GL_q(\mathbb{R})$ est un ouvert : comme $A \in GL(\mathbb{R})$, il existe une boule de rayon $r > 0$, de centre A incluse dans $GL(\mathbb{R})$. Au bout d'un certain rang, les éléments de la suit (A_n) sont dans cette boule.
Pour une démonstration directe : On a : $\lim_{n\infty} \det(A_n) = \det(A)$. Posons $\varepsilon = \frac{|\det(A)|}{3}$. Comme le déterminant est continu, il existe un $\alpha > 0$, tel que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R}),\ |M - A\| \leqslant \alpha \implies |\det(M) - \det(A)| \leqslant \varepsilon$$

avec la valeur choisie de ε, cela assure que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R}),\ |M - A\| \leqslant \alpha \implies \det(M) \neq 0$$

et donc :

$$\forall M \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R}),\ |M - A\| \leqslant \alpha \implies M \in GL_q(\mathbb{R})$$

Maintenant, comme $\lim_{n\infty} A_n = A$, on est sûr que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |A_n - A\| \leqslant \alpha$$

et donc :

$$\forall n \geqslant n_0,\ A_n \in GL_q(\mathbb{R})$$

10 — Calcul différentiel

I Équations différentielles linéaires scalaires

Le but de cette section est de reprendre ce qui a été vu en première année en prolongeant un tout petit peu vers le cas des coefficients non constants.

La lettre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ désigne le corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Définition I.1 On appelle équation différentielle linéaire scalaire du second ordre sur l'intervalle I une équation du type :

$$(E) \qquad y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où a, b et c sont des fonctions $I \to \mathbb{K}$ continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

La fonction y est dite solution de (E) sur I si elle est deux fois dérivable sur I et :

$$\forall t \in I,\ y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

L'équation homogène associée est :

$$(H) \qquad y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

⋆ Écriture sous la forme d'un système d'ordre 1

Soit (E) l'équation : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$, on note :

$$A : t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \qquad B : t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

et on considère le système différentiel $(F) : X' = A(t)X + B(t)$. On a alors le résultat suivant :

Proposition I.1 Si la fonction (scalaire) y est solution de (E) alors la fonction (vectorielle) $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ est solution de (F).

Réciproquement, si la fonction (vectorielle) $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est solution de (F), alors $y' = z$ et y est solution de (E).

C'est l'écriture de l'équation différentielle d'ordre 2 sous la forme d'un système d'ordre 1.

Démonstration. Supposons y est solution, alors on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in I,\ X'(t) &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ -a(t)y'(t) - b(t)y(t) + c(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \\ &= A(t)X + B(t) \end{aligned}$$

Ainsi X est solution.

Réciproquement, supposons X solution, et notons $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ on a alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in I,\ X'(t) &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \\ &= A(t)X + B(t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z(t) \\ -a(t)z(t) - b(t)y(t) + c(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où $y' = z$ et y est solution de (E). ■

▪ **Exemple I.1** Comme vu en IPT : écrire $y'' + \frac{g}{l}y = 0$ sous la forme d'un système d'ordre 1, on écrit :

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

D'où le système :

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} X \qquad \text{avec } X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

▪

I.1 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition I.2 Soit f une solution particulière de l'équation (E) sur I et y une fonction $I \to \mathbb{K}$.

La fonction y est solution de (E) si et seulement si elle s'écrit $y = f + z$ où z est solution de (H).

Démonstration. Même démonstration que d'habitude. ■

Théorème I.3 — Théorème de Cauchy linéaire. Soit a, b et c trois applications continues sur un intervalle I, t_0 un point fixé de I et (y_0, y_0') un couple d'éléments de $\mathbb{K}$ fixé.

Alors il existe une unique fonction solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = & c(t) \\ y(t_0) = & y_0 \\ y'(t_0) = & y_0' \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy linéaire au système d'ordre 1 associé. ■

Corollaire I.4 — Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène. Considérons (H) l'équation homogène d'ordre 2, avec a et b continues.

Alors $\mathscr{S}_H$ est un sous-espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{K}^2$.

En particulier, $\dim(\mathscr{S}_H) = 2$.

Démonstration. C'est la dimension de l'ensemble des solutions de $X' = A(t)X$ avec A de taille 2 ! ■

$\mathscr{S}_H$ est un plan dans l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

Définition I.2 On appelle système fondamental de solutions de l'équation homogène toute base (f_1, f_2) de $\mathscr{S}_H$.

I.2 Cas des coefficients constants

Dans cette partie, on considère le cas de l'équation :

$$(E): \qquad y'' + ay' + by = c(t)$$

où a et b sont deux éléments de $\mathbb{K}$ et c une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

C'est le cas étudié en première année.

Pour commencer, on va chercher à l'écrire sous la forme d'un système d'équation différentielle du premier ordre. On pose donc :

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

et on a :

$$X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ c(t) - ay' - by \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

✯ Équation homogène

On peut commencer par retrouver le résultat sur les solutions de l'équation homogène vu en première année.

$$(H) : y'' + ay' + b'y = 0$$

Ce qui est équivalent à l'équation : $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

On doit diagonaliser la matrice A, on calcule alors $\chi_A = X^2 + aX + b$.

CAS 1 : Si χ_A a deux racines r_1 et r_2, alors A est diagonalisable. On écrit alors :

$$A = PDP^{-1}, \qquad \text{avec } D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

On pose alors $Y = PX$ pour obtenir que $Y' = DY$, puis que :

$$Y : t \longmapsto \begin{pmatrix} C_1 e^{r_1 t} \\ C_2 e^{r_2 t} \end{pmatrix} \qquad \text{pour un certain couple } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Puisque $X = PY$, on écrit :

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{et donc } X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{r_1 t} \\ C_2 e^{r_2 t} \end{pmatrix}$$

En regardant la première ligne de X (ie la solution y), on obtient bien le résultat d'existence de (α, β) tels que :

$$y : t \longmapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$$

pour des valeurs de (α, β) à déterminer (par exemple avec les conditions initiales).

✎ On aurait pu aussi constater que $t \longmapsto e^{r_1 t}$ et $t \longmapsto e^{r_2 t}$ sont deux fonctions de $\mathscr{S}_H$ qui forme une famille libre, donc une base de $\mathscr{S}_H$.

Cas 2 : Si χ_A admet une racine double, notée r, alors A n'est pas diagonalisable (car sinon A serait égal à rI_2) mais trigonalisable (puisque χ_A est scindé).

On écrit :

$$A = PTP^{-1} \qquad \text{avec } T = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

On note alors $Y = PX$, et on obtient : $Y' = TY$.

On résout par remontée ce système du premier ordre :

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$y_2' = ry_2$, d'où $y_2 = Ce^{rt}$ pour une certaine valeur de C. Puis :

$$y_1' = ry_1 + Ce^{rt}$$

on a une équation d'ordre 1 les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto Ke^{rt}$, puis il reste à trouver une solution particulière, sous la forme $t \mapsto \lambda te^{rt}$ (résonance). On obtient alors $\lambda = C$. D'où $y_1 : t \mapsto Cte^{rt} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$ (le C est celui choisi pour y_2).

On voit alors que Y s'écrit :

$$Y : t \longmapsto \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 t)e^{rt} \\ C_2 e^{rt} \end{pmatrix}$$

puis comme $X = PY$, on en déduit comme précédemment que la première composante y s'écrit sous la forme :

$$y : t \longmapsto (\alpha + \beta t)\, e^{rt} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

✎ Ici aussi on peut procéder à l'envers : on constate que les fonctions $\longmapsto e^{rt}$ et $t \longmapsto te^{rt}$ sont solutions et comme elle forme une famille libre, c'est une base de $\mathscr{S}_H$.

Cas 3 : Dans le cas où χ_A n'a pas de racine réelle, on est obligé de passer par les complexes. On a deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ de l'équation caractéristique, ce qui donne deux fonctions solutions :

$$\varphi : t \longmapsto e^{\alpha t} e^{i\beta} \quad \text{et} \quad \overline{\varphi} : t \longmapsto e^{\alpha t} e^{-i\beta}$$

Ces deux solutions sont une base de l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation homogène.

Si une fonction réelle f est solution, alors nécessairement elle s'écrit :

$$f = C\varphi + D\overline{\varphi} \text{ avec } (C, D) \in \mathbb{C}^2.$$

puis comme f est réelle, on en déduit que $\overline{C} = D$, on constate alors que f s'écrit sous la forme :

$$f : t \longmapsto e^{\alpha t}\, (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$$

✎ Même remarque ici.

✯ Cas d'un second membre

Pour trouver une solution particulière de l'équation $(E) : y'' + ay' + by = c(t)$, il n'y a pas dans le programme de méthode à connaître (en particulier, pas de variation de la constante).

Les deux seuls cas particuliers au programme sont :

- Si $c(t)$ est de la forme : Ae^{rt}, alors on cherche une solution sous la forme :

$$\begin{array}{ll} t \longmapsto Be^{rt} & \text{si } r \text{ n'est pas solution de l'équation caractéristique} \\ t \longmapsto Bte^{rt} & \text{si } r \text{ est racine d'ordre 1 de l'équation caractéristique} \\ t \longmapsto Bt^2e^{rt} & \text{si } r \text{ est racine d'ordre 2 de l'équation caractéristique} \end{array}$$

  On retrouve le phénomène de résonance évoqué en première année.
- si $c(t)$ est de la forme $A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$, on cherche une solution sous la forme :

$$t \longmapsto B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$$

On peut ajouter le cas où c est un polynôme (on cherche alors un polynôme du même degré).
Comme technique à connaître, on a aussi le principe de superposition des solutions et le passage aux complexes.

I.3 Exemples

■ **Exemple I.2** Résoudre : $y'' + y' - 2y = \cos(2x) + 3e^{-2x}$

Le polynôme caractéristique est $X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$.

On cherche tout d'abords une solution à $y'' + y' - 2y = \cos(2x)$ sous la forme $y : x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$.

On calcule :

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x) \\ y'(x) &= 2\beta\cos(2x) - 2\alpha\sin(2x) \\ y''(x) &= -4\alpha\cos(2x) - 4\beta\sin(2x) \end{aligned}$$

en faisant $l_3 + l_2 - 2l_1$, cela donne :

$$\cos(2x) = (2\beta - 6\alpha)\cos(2x) + (-6\beta - 2\alpha)\sin(2x)$$

On trouve un système 2×2 :

$$\begin{cases} 2\beta - 6\alpha = 1 \\ -6\beta - 2\alpha = 0 \end{cases}$$

de solution $\alpha = -\frac{3}{20}$ et $\beta = \frac{1}{20}$.

On cherche ensuite une solution à $y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$. Il faut chercher une solution sous la forme $y : x \mapsto \alpha x e^{-2x}$. On dérive deux fois :

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha x e^{-2x} \\ y'(x) &= \alpha(1 - 2x)e^{-2x} \\ y''(x) &= \alpha(-2 - 2 + 4x)e^{-2x} \\ &= \alpha(-4 + 4x)e^{-2x} \end{aligned}$$

on fait $l_3 + l_2 - 2l_1$, pour obtenir $\alpha = -1$.

On obtient :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : t \longmapsto -\frac{3}{20}\cos(2x) + \frac{1}{20}\sin(2x) + (\lambda - x)e^x + \mu e^{-2x} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

■

■ **Exemple I.3** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{3}{t^2}y = -1 + \frac{3}{t^2}$$

L'énoncé indique : chercher une solution sous la forme d'une fonction polynomiale.

On écrit donc l'équation sous la forme (c'est plus simple pour voir les polynômes) :

$$t^2y'' - 3ty' + 3y = -t^2 + 3$$

On regarde donc en première le degré du polynôme et le terme dominant.

On écrit :

$$y : t \mapsto a_n t^n + \dots$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall t > 0,\ y(t) =& a_n t^n + \dots \\ y'(t) =& n a_n t^{n-1} + \dots \\ y''(t) =& n(n-1)a_n t^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Ainsi avec $t^2 l_3 - 3tl_2 + l_1$:

$$\begin{aligned} t^2y''(t) - 3ty'(t) + 3y(t) =& a_n\Big(n(n-1) - 3n + 3\Big)t^n + \dots \\ =& a_n(n^2 - 4n + 3)t^n + \dots \end{aligned}$$

or on veut que : $t^2y''(t) - 3ty'(t) + 3y(t) = -t^2 + 3$, il faut donc que $n = 2$ ou que $n^2 - 4n + 3 = 0$, ie $n = 1$ ou $n = 3$.

On a donc obtenu : le degré de y est inférieur ou égal à 3.

Donc y s'écrit :

$$y : t \mapsto at^3 + bt^2 + ct + d$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y :& t \mapsto at^3 + bt^2 + ct + d \\ y' :& t \mapsto 3at^2 + 2bt + c \\ y'' :& t \mapsto 6at + 2b \end{aligned}$$

et donc toujours avec $t^2 l_3 - 3tl_2 + l_1$:

$$\begin{aligned} t^2y''(t) - 3ty(t) + 3y(t) =& at^3(6 - 9 + 3) + bt^2(2 - 6 + 3) + ct(-3 + 3) + 3d \\ =& -bt^2 + d \end{aligned}$$

on veut donc : $\forall t > 0,\ -bt^2 + 3d = -t^2 + 3$. Ainsi, $b = 1$ et $d = 1$, les valeurs de a et c sont libres.

On a obtenu que toute fonction de la forme :

$$t \longmapsto at^3 + t^2 + bt + 1$$

est solution quelque soit les valeurs de a et b dans $\mathbb{R}$. Il faut ensuite se demander si il existe d'autres solutions (qui pourraient ne pas être polynomiale), et là c'est le théorème de Cauchy linéaire qui donne la réponse. La fonction $t \longmapsto t^2 + 1$ est solution (particulière) de l'équation. Les fonctions $t \longmapsto t^3$ et $t \longmapsto t$ sont solutions de l'équation homogène (on peut le vérifier rapidement), comme elles forment une famille libre, il est clair que c'est un système fondamental de solution, ie une base de $\mathscr{S}_H$. Toute solution de (H) s'écrit donc sous la forme $t \longmapsto at^3 + bt$.

On en déduit donc bien obtenu l'ensemble des solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \lambda t^3 + t^2 + \mu t + 1 \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

■

II Dérivabilité des fonctions vectorielles

Extrait du programme :

L'objectif de cette section est de généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique.

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

II.1 Interprétation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ comme courbe paramétrée

Extrait du programme :

L'étude et le tracé d'arcs paramétrés sont hors programme.

On fixe dans ce chapitre un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan et un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace. Avec ce repère, on identifie les points M du plan (resp. de l'espace) avec les éléments de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$).

✯ Définitions

Définition II.1 Soit $1 \leqslant k$ ou $k = +\infty$.

Un arc paramétré (ou courbe paramétrée) de classe $\mathscr{C}^k$ du plan est la donnée d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On parle d'arc paramétré de l'espace, lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Le point de paramètre t noté $M(t)$ est le point de coordonnées $f(t)$ dans le repère choisi.

On considère aussi le support de l'arc paramétré :

$$\Gamma = \left\{ M(t) \middle| t \in I \right\}$$

Le couple (I, f) avec I l'intervalle et f la fonction est un paramétrage de Γ.

Physiquement, cela s'interprète comme la trajectoire du point mobile.
Souvent on note

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \ldots \\ y(t) = \ldots \end{cases} \qquad t \in I,$$

$$\text{cela corresponds à : } f : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{cases}$$

Un même support peut être défini par plusieurs paramétrage. Par exemple le cercle peut être paramétré par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & \left(\cos\theta, \sin\theta\right) \end{cases} \qquad f : \begin{cases} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & \left(\sin\theta, \cos\theta\right) \end{cases}$$

et le quart de cercle peut être paramétré par :

$$g : \begin{cases} [-1, 1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, \sqrt{1-t^2}) \end{cases}$$

Ce dernier exemple montre qu'une courbe représentative d'une fonction réelle de la variable réelle $y = f(x)$ corresponds en fait à l'arc paramétré : $x \longmapsto (x, f(x))$. La différence entre un arc paramétré est la courbe représentative d'une fonction est qu'il peut y avoir plusieurs points avec la même abscisse.

⋆ Tangente aux points réguliers

Définition II.2 — Point régulier, point stationnaire. Le point $M(t) = f(t)$ est régulier lorsque $f'(t)$ n'est pas le vecteur nul. Dans le cas contraire, le point $M(t)$ est irrégulier ou stationnaire.

L'arc paramétré est dit régulier lorsque tous ses points sont réguliers.

Physiquement : un point stationnaire $M(t)$ corresponds à un temps où le point mobile dont on regarde la trajectoire a une vitesse nulle. En particulier, si il y a des points stationnaires, la courbe peut avoir des coins.

Définition II.3 — Tangente. Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré et $t_0 \in I$.

On dit que la courbe paramétrée Γ admet en $M(t_0)$ une tangente si

$$\text{le vecteur unitaire } \frac{1}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|}\left(\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\right) \quad \text{admet une limite lorsque } t \to t_0$$

Autrement dit si :

$$\frac{1}{\|f(t) - f(t_0)\|}\left(f(t) - f(t_0)\right) \quad \text{admet une limite lorsque } t \to t_0$$

La tangente est alors la droite passant par $M(t)$ est dirigé par ce vecteur limite.

On distingue parfois les deux demi tangente comme la limite à droite et à gauche de $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|}$ lorsque t tends vers t_0.

Proposition II.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré et $t_0 \in I$. Si $M(t_0)$ est un point régulier (ie si $f'(t_0) \neq 0$), alors la courbe paramétrée Γ admet une tangente en $M(t_0)$ qui est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $f'(t_0)$.

Démonstration. Admis. ∎

Ainsi, une fonction $f : I \to \mathbb{R}^2$ s'interprète comme la trajectoire d'un point mobile $M(t)_{t\in I}$.
Le vecteur dérivée $f'(t_0)$ s'interprète comme le vecteur vitesse au point $M(t_0)$.

II.2 Dérivabilité en un point

⋆ Rappel sur les limites des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$ un point de I ou un bords de I et $l \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\lim_{x\to a} f(x) = l$, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \Longrightarrow\ \|f(x)-l\| \leqslant \varepsilon.$$

en particulier, pour $a \in I$, f est continue en a lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, ce qui s'écrit donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \Longrightarrow\ \|f(x)-f(a)\| \leqslant \varepsilon.$$

A priori, ces définitions dépendent de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$. En fait, comme on est en dimension finie, on verra que cela ne dépends pas de la norme choisie. On peut donc prendre n'importe quelle norme de $\mathbb{R}^n$, en particulier, on choisit souvent la norme canonique.

Avec ces définition, pour deux fonctions f et $g : I \to \mathbb{R}^n$, on peut définir par exemple :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Si :

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x)-g(x)\right) = 0$$

On peut aussi dire que $\underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$ désigne $(x-a)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction vérifiant $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Enfin, la limite de la fonction est la limite des applications coordonnées : si $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de R^n et $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les applications coordonnées de f relativement à cette base, ie $\forall x \in I,\ f(x) = \Big(f_1(x),\ldots,f_n(x)\Big)_{\mathscr{B}}$. Si on note $l = (l_1,\ldots,l_n)_{\mathscr{B}}$. Alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lim_{x\to a} f_i(x) = l_i$$

Définition II.4 — Dérivabilité en un point. On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable en $a \in I$ si, et seulement si, l'application **taux d'accroissement en** a :

$$T_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-a}\left(f(x) - f(a)\right) \end{cases}$$

admet un vecteur L de $\mathbb{R}^n$ pour limite en a.

Le vecteur L est alors le vecteur dérivée de f au point a et ce vecteur est noté $f'(a)$.

Lorsque le taux d'accroissement n'admet qu'une limite à droite (resp. gauche), on parle de dérivée à droite (resp. gauche) notée $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Notation II.1. *On note le vecteur dérivé : $f'(a)$, $Df(a)$ ou encore $\frac{df}{dx}(a)$. Pour les dérivées à droite / gauche, on note : $f'_d(a)$, $Df(a^+)$ ou encore $\frac{df}{dx}(a^+)$.*

R C'est bien : $\dfrac{1}{x-a}\left(f(x) - f(a)\right)$ (scalaire $\times$ vecteur).

Écrire $\lim\limits_{x \to a} T_a(x) = L$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x \in]a-\alpha, a+\alpha[\Longrightarrow \|T_a(x) - L\| \leqslant \varepsilon)$$

Ici, $\|\cdot\|$ désigne la norme dans $\mathbb{R}^n$, ($\|T_a(x) - L\|$ désigne donc la distance). On peut choisir la norme canonique ou une autre norme.
Comme on le verra dans le chapitre sur les espaces normées que cela ne dépends pas du choix de la norme.

Si a n'est pas une extrémité de I (on dit que a est un point intérieur à I), alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Physiquement, c'est le vecteur vitesse du point mobile.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ est en fait la donné de n fonctions $(f_1, \dots, f_n)$ de I dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \Big(f_1(x), \dots, f_n(x)\Big)$$

La proposition suivante montre que l'étude de la dérivabilité de f peut se ramener à l'étude de la dérivabilite des n fonctions $\Big(f_1(x), \dots, f_n(x)\Big)$.

Proposition II.2 — Caractérisation par la dérivabilité des applications coordonnées. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $(f_i)_{i \in [1,n]}$ les applications coordonnées de f relativement à cette base, ie $\forall x \in I,\ f(x) = \Big(f_1(x), \dots, f_n(x)\Big)_{\mathscr{B}}$.

On a alors : f est dérivable en a si et seulement si ses applications coordonnées sont dérivables en a.

Dans ce cas, on a : $f'(a) = \left(f_1'(x), \ldots, f_n'(x)\right)_{\mathscr{B}}$.

Démonstration. On va faire la démonstration dans le cas $n = 2$ pour faciliter les notations.

Commençons par un rappel : si $f : I \to \mathbb{R}^2$ et $L = (L_1, L_2) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = L$ est équivalent à $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$ et $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$.

Notons T_a^1 le taux d'accroissement en a de f_1 et T_a^2 le taux d'accroissement en a de f_2.

On vérifie alors :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I \setminus \{a\} T_a(x) =& \frac{1}{x-a}\left(f(x) - f(a)\right) \\
=& \frac{1}{x-a}\left((f_1(x), f_2(x)) - (f_1(a), f_2(a))\right) \\
=& \left(\frac{1}{x-a}\left(f_1(x) - f_1(a)\right), \frac{1}{x-a}\left(f_2(x) - f_2(a)\right)\right) \\
=& \left(T_a^1(x), T_a^2(x)\right)
\end{aligned}$$

Autrement dit : T_a est le taux d'accroissement de la fonction vectorielle f, on constate que la première composante de T_a corresponds au taux d'accroissement de la première composante de f. Idem pour la deuxième.

Ainsi en appliquant le rappel à T_a :

$$\lim_{x\to a} T_a(x) = (L_1, L_2) \iff \left(\lim_{x\to a} T_a^1(x) = L_1 \text{ et } \lim_{x\to a} T_a^2(x) = L_2\right)$$

ce qui signifie que f est dérivable en a si et seulement f_1 et f_2 sont dérivable en a et dans ce cas on a bien $f'(a) = (f_1'(a), f_2'(a))$. ■

Essentiellement, on dérive donc composante par composante dès que cela est possible. L'idée est la même que la continuité vue en première année : augmenter la dimension dans l'espace d'arrivée n'est pas un problème on se ramène à l'étude de chaque composante.
par contre, augmenter la dimension dans l'espace de départ est compliqué (pas de résultat au programme).

La proposition suivante fait le lien avec les développements limités.

Proposition II.3 — Dérivabilité et existence d'un DL à l'ordre 1. La fonction f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.

Autrement dit, si il existe $L \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)L + \underset{x\to a}{o}(x-a)$$

De plus, dans ce cas $L = f'(a)$.

Démonstration. Comme dans le cas de fonctions à valeurs réelles, c'est une simple ré-écriture de la définition :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+(x-a)L+\underset{x\to a}{o}(x-a) \\ \text{signifie } &\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)}(f(x)-f(a)-(x-a)L)=0 \\ \text{ce qui s'écrit aussi : } &\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)}(f(x)-f(a))-L=0 \\ \text{ou encore : } &\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)}(f(x)-f(a))=L \end{aligned}$$

On a donc clairement une équivalence entre les deux propositions. ∎

R Ici aussi, on écrit : $(x-a)L$ et non $L(x-a)$: c'est scalaire $\times$ vecteur.

Corollaire II.4 Si f est dérivable en a alors f est continue en a

Démonstration. Ici encore, il s'agit juste de voir que :

$$\left(f(x)=f(a)+(x-a)L+\underset{x\to a}{o}(x-a)\right) \Longrightarrow \left(f(x)=f(a)+\underset{x\to a}{o}(1)\right)$$

∎

II.3 Dérivabilité sur un intervalle

Définition II.5 Une fonction est dérivable sur un intervalle lorsqu'elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

Notation II.2. *On note alors f' ou Df ou $\frac{df}{dx}$ la fonction dérivée.*

Proposition II.5 Soit f et g dérivable sur I et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors $f+\alpha g$ est dérivable sur I.
Et $(f+\alpha g)'=f'+\alpha g'$

Autrement dit : l'ensemble des fonctions dérivables sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et la dérivée est une application linéaire.

II.4 Dérivabilité et composition

On rappelle que l'on manipule les fonctions de $I\to\mathbb{R}^n$. On ne peut donc pas faire de produit ni de composée de telles fonctions.

On peut composer de deux manières : soit à droite par une fonction de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ou à gauche par une fonction de $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$. On rappelle que l'on ne sait pas dériver une fonction de $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$.

⋆ Cas d'une application linéaire

Proposition II.6 — Composée application linéaire et d'une application dérivable. Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $a \in I$. On a alors :

- Si f est dérivable en a, alors $u \circ f$ est dérivable en a avec :

$$(u \circ f)'(a) = \left(u \circ f'\right)(a)$$

- Si f est dérivable sur I , alors $u \circ f$ est dérivable sur I

$$(u \circ f)' = u \circ f'$$

Démonstration. On montre la première proposition , la deuxième en est clairement une conséquence.

On note T le taux d'accroissement en a de $u \circ f$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in I \setminus \{a\}\ T(x) = & \frac{1}{x-a}\left(u(f(x)) - u(f(a))\right) \\ = & u\left(\frac{1}{x-a}\left(f(x) - f(a)\right)\right) \end{aligned}$$

en exploitant la linéarité de u.

On admet le résultat suivant : u étant une application linéaire, elle est continue.

Comme on a $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x-a}\left(f(x) - f(a)\right) = f'(a)$, on obtient :

$$\lim_{x \to a} T(x) = u\left(f'(a)\right)$$

■

✯ Cas d'une application bilinéaire / multilinéaire

On rappelle qu'une application est bilinéaire si elle est linéaire par rapport à chaque composante :

Définition II.6 Une application B de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ est dite bilinéaire lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} &\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall u \in \mathbb{R}^p, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ B(x+\alpha y, u) = B(x,u) + \alpha B(y,u) \\ &\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall (u,v) \in (\mathbb{R}^p)^2, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ B(x, u+\alpha v) = B(x,u) + \alpha B(x,v) \end{aligned}$$

Proposition II.7 Soit B une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, f une fonction $I \to \mathbb{R}^n$ et g une fonction $I \to \mathbb{R}^p$. Enfin, soit $a \in I$.

On définit alors $B(f,g)$ par :

$$\forall x \in I,\ B(f,g)(x) = B(f(x), g(x)).$$

On a alors :

- Si f et g sont dérivables en a, alors $B(f,g)$ est aussi dérivable en a, avec :

$$(B(f,g))'(a) = B(f'(a),g(a)) + B(f(a),g'(a))$$

- Si f et g sont dérivables sur I, alors $B(f,g)$ est aussi dérivable sur I, avec :

$$(B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g')$$

Démonstration. Ici encore, on se contente de démontrer la première relation, la deuxième est une conséquence directe.

On note T le taux d'accroissement associé à $B(f,g)$, et on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I \setminus \{a\},\ T(x) =& \frac{1}{x-a}\left(B(f(x),g(x)) - B(f(a),g(a))\right)\\
=& \frac{1}{x-a}\left(B(f(x),g(x)) - B(f(a),g(x))\right)\\
&+ \frac{1}{x-a}\left(B(f(a),g(x)) - B(f(a),g(a))\right)\\
=& B\left(\frac{1}{x-a}(f(x)-f(a)),g(x)\right) + B\left(f(a),\frac{1}{x-a}(g(x)-g(a))\right)
\end{aligned}$$

On admet le résultat suivant : la fonction B est continue car elle est bilinéaire.

On a alors :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}(f(x)-f(a)) = f'(a) \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = g(a)\\
\text{donc } &\lim_{x\to a} B\left(\frac{1}{x-a}(f(x)-f(a)),g(x)\right) = B(f'(a),g(a))
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}(g(x)-g(a)) = g'(a) \text{ donc}\\
&\lim_{x\to a} B\left(f(a),\frac{1}{x-a}(g(x)-g(a))\right) = B(f(a),g'(a))
\end{aligned}$$

■

Si on considère l'application $B : (x,y) \mapsto xy$ c'est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont deux fonctions $I \to \mathbb{R}$, alors $B(f,g) = fg$ est le produit. On vient donc de retrouver :

$$(fg)' = B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g') = f'g + fg'.$$

Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $\alpha : I \to \mathbb{R}$, alors

$$(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'$$

En effet l'application $B : (\lambda,x) \longmapsto \lambda x$ est bilinéaire de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et $(\alpha f) = B(\alpha,f)$

■ **Exemple II.1 Dérivée du produit scalaire** Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}^n$ dérivables sur I, on considère la fonction $h =< f,g >$ définie donc par :

$$\forall x \in I,\ h(x) =< f(x), g(x) >$$

Comme le produit scalaire est bilinéaire, on a h est dérivable sur I avec :

$$\forall x \in I,\ h'(x) =< f'(x), g(x) > + < f(x), g'(x) >$$

En particulier, si $f = g$, on a $h = \|f\|^2$ et :

$$\forall x \in I,\ \left(\|f\|^2\right)'(x) = 2 < f'(x), f(x) >$$

■

On a aussi la généralisation de la propriété précédente :

Définition II.7 Soit $p \geqslant 2$. et M une fonction :

$$M : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^p = \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^q \\ (u_1,\ldots,u_p) & \longmapsto & M(u_1,\ldots,u_p) \end{array} \right.$$

La fonction M est dite multilinéaire si elle est linéaire en chacune de ses entrées. Autrement dit si :

- à $u_2,\ldots,u_n$ fixé, elle est linéaire en u_1,
- à $u_1,u_3\ldots,u_n$ fixé, elle est linéaire en u_2, etc.
- à $u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}$ fixé, elle est linéaire en u_n.

Proposition II.8 Soit $p \geqslant 2$.

On considère une fonction M définie sur $(\mathbb{K}^n)^p$ multilinéaire et $f_1,\ldots,f_p$ p fonctions de I dans $\mathbb{K}^n$, on peut ainsi construire la composée :

$$B(f_1,\ldots,f_p) : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^q \\ t & \longmapsto & B(f_1(t),\ldots,f_p(t)) \end{array} \right.$$

On a alors :

- Si toutes les fonctions $(f_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ sont dérivables en a, alors $B(f_1,\ldots,f_p)$ est dérivable en a et :

$$\begin{aligned}(B(f_1,\ldots,f_p))'(a) =& B\left(f_1'(a), f_2(a)\ldots,f_p(a)\right) \\ &+ B\left(f_1(a), f_2'(a), f_3(a)\ldots,f_p(a)\right) \\ &+ \ldots B\left(f_1(a), f_2(a),\ldots,f_{p-1}(a), f_p'(a)\right)\end{aligned}$$

- Si toutes les fonctions $(f_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ sont dérivables sur I, alors $B(f_1,\ldots,f_p)$ est dérivable en a et :

$$\begin{aligned}(B(f_1,\dots,f_p))' =& B\left(f_1', f_2\dots,f_p\right)\\ &+B\left(f_1,f_2',f_3\dots,f_p\right)\\ &+\dots B\left(f_1,f_2,\dots,f_{p-1},f_p'\right)\end{aligned}$$

■ **Exemple II.2** Le cas le plus important est celui du déterminant.
Soit f_1, f_n, n fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on définit alors :

$$g : t\in I \longmapsto \det(f_1(t),\dots,f_n(t))$$

si $(f_1,\dots,f_n)$ sont des fonctions dérivables, alors g est dérivable et :

$$\begin{aligned}\forall t\in I,\ g'(t) =& \det\left(f_1'(t), f_2(t),\dots,f_n(t)\right)\\ &+\det\left(f_1(t),f_2'(t),f_3(t),\dots,f_n(t)\right)\\ &+\det\left(f_1(t),f_2(t),f_3'(t),f_4(t)\dots,f_n(t)\right)\\ &+\dots+\det\left(f_1(t),f_2(t),\dots,f_{n-1}(t),f_n'(t)\right)\end{aligned}$$

■

⋆ Composée à droite par une fonction réelle

On peut aussi composer à droite par une fonction réelle de la variable réelle :

Proposition II.9 Soit φ une application réelle de la variable réelle avec $\varphi : J\to I$ et $f : I\to\mathbb{R}^n$ et soit $a\in J$. On peut alors composer $f\circ\varphi$.

On a alors :

- Si φ est dérivable en a et f est dérivable en $\varphi(a)$ alors $f\circ\varphi$ est dérivable en a avec :

$$(f\circ\varphi)'(a) = \varphi'(a)\left(f'\circ\varphi\right)(a)$$

- Si φ est dérivable sur J et f est dérivable sur I $f\circ\varphi$ est dérivable sur J avec :

$$(f\circ\varphi)' = \varphi'\left(f'\circ\varphi\right)$$

Démonstration. heuristique De la même manière, on démontre la première partie.
On note T le taux d'accroissement de $f\circ\varphi$

$$\forall x\in I\setminus\{a\},\ T(x) = \frac{1}{x-a}\left(f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))\right)$$

On a pour $x\neq a$ tel que $\varphi(x)\neq\varphi(a)$:

$$T(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\,\frac{1}{\varphi(x)-\varphi(a)}\left(f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))\right)$$

On fait tendre x vers a. Pour le premier terme, on a :

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} = \varphi'(a) \qquad \text{car } \varphi \text{ est dérivable en}$$

Pour le deuxième, il faut faire un changement de variables :

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varphi(x)-\varphi(a)}\left(f(\varphi(x))-f(\varphi(a))\right)=\lim_{y\to\varphi(a)}\frac{1}{y-\varphi(a)}\left(f(y)-f(\varphi(a))\right)$$
$$=f'(\varphi(a))$$

On admet que l'on peut justifier ce calcul même dans le cas où on ne peut pas faire tendre x vers a en gardant $\varphi(x)\neq\varphi(a)$. ■

II.5 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition II.8 — Fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Soit k un entier naturel.

On définit les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I par récurrence de la manière suivante : une fonction $f:I\to\mathbb{R}^n$ est dite

- de classe $\mathscr{C}^0$ si elle est continue,
- de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ si elle est dérivable et si sa dérivée f' est de classe $\mathscr{C}^k$

Enfin, une fonction $f:I\to\mathbb{R}^n$ est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour toute valeur de $k\in\mathbb{N}$.

Notation II.3. *On note $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ ou simplement $\mathscr{C}^k$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.*

On a : $\mathscr{C}^{k+1}\subset\mathscr{C}^k$, ainsi que par définition : $f\in\mathscr{C}^k \iff f'\in\mathscr{C}^{k-1}$.

Définition II.9 — Dérivées successives. Soit $f\in\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$, on définit la dérivée k-ième de f sur I par récurrence :

$$f^{(0)}=f \qquad \text{et} \qquad \forall i\in[\![1,k]\!],\ f^{(i)}=\left(f^{(i-1)}\right)'$$

Par exemple si $f(t)$ est la trajectoire d'un point mobile, $f'(t)$ est le vecteur vitesse, tandis que $f''(t)$ est le vecteur accélération.

Proposition II.10 L'ensemble $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des application $I\to\mathbb{R}^n$.

La dérivée k-ième est une application linéaire sur cet ensemble.

Conformément au programme, on se contente d'une brève extension des résultats précédents.

Proposition II.11 Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$, on note $(f_1,\dots,f_n)$ les application coordonnées, ie les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x\in I,\ f(x)=\Big(f_1(x),\dots,f_n(x)\Big)_{\mathscr{B}}$$

L'application f est alors de classe $\mathscr{C}^k$ si et seulement si les n applications $(f_1,\dots,f_n)$ sont de classe $\mathscr{C}^k$.

De plus :

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \forall x \in I,\ f^{(j)}(x) = \left(f_1^{(j)}(x), \dots, f_n^{(j)}(x)\right)_{\mathscr{B}}$$

En particulier, $f \in \mathscr{C}^\infty$ si et seulement si $(f_1, \dots, f_n)$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Pour montrer qu'une fonction $I \to \mathbb{R}^n$ est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$, on le montre donc pour toutes ces composantes.

Proposition II.12 Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^k$.
L'application composée $u \circ f$ est alors de classe $\mathscr{C}^k$ sur I avec :

$$\forall j \in [\![0,k]\!],\ (u \circ f)^{(j)} = u \circ f^{(j)}$$

En particulier, si $f \in \mathscr{C}^\infty$, on a $u \circ f$ de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Proposition II.13 — Formule de Leibniz. Soit B une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^p$ deux applications de classe $\mathscr{C}^k$.
L'application composée $B(f,g)$ est alors de classe $\mathscr{C}^k$ et on a la formule :

$$\forall j \in [\![0,k]\!],\ B(f,g)^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} B\left(f^{(i)}, g^{(j-i)}\right)$$

En particulier, si $f \in \mathscr{C}^\infty$ et $g \in \mathscr{C}^\infty$, on a $B(f,g)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$.

On retrouve bien sûr la formule de la dérivée j-ième d'un produit.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur j en appliquant le cas $j = 1$ vu à la précédente section.

C'est la même démonstration que celle vue en première année pour le produit. ■

Proposition II.14 Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to J$ et $f : J \to \mathbb{R}^n$, on considère alors la composée $f \circ \varphi$.
Si $f \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R}^n)$ et si $\varphi \in \mathscr{C}^k(I,J)$ alors $f \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathscr{C}^k$.
En particulier, Si $f \in \mathscr{C}^\infty(J, \mathbb{R}^n)$ et si $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(I,J)$ alors $f \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$.

R Il n'y a pas de formule explicite pour $(f \circ \varphi)^{(j)}$ dans ce cas.

III Fonctions de plusieurs variables

Extrait du programme : Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de $p \geqslant 2$ variables.
L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées,

cette section se consacre à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas $p = 2$ ou $p = 3$.

Dans ce chapitre, on considère une application $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

✯ Représentation d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Pour représenter une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on a trois choix :

- Utiliser une surface :
$$\left\{ (x,y,f(x,y)) \,\middle|\, (x,y) \in U \right\}$$
- Utiliser une image : le point (x,y) est clair/rouge si $f(x,y)$ est élevé, noir/bleu sinon.
- Utiliser les lignes de niveau.

Physiquement, on peut penser à le représentation de la température dans un plan. Voir la figure 10.1.

P En python, cela corresponds aux fonctions `plot_surface`, `matshow` et `contour`.

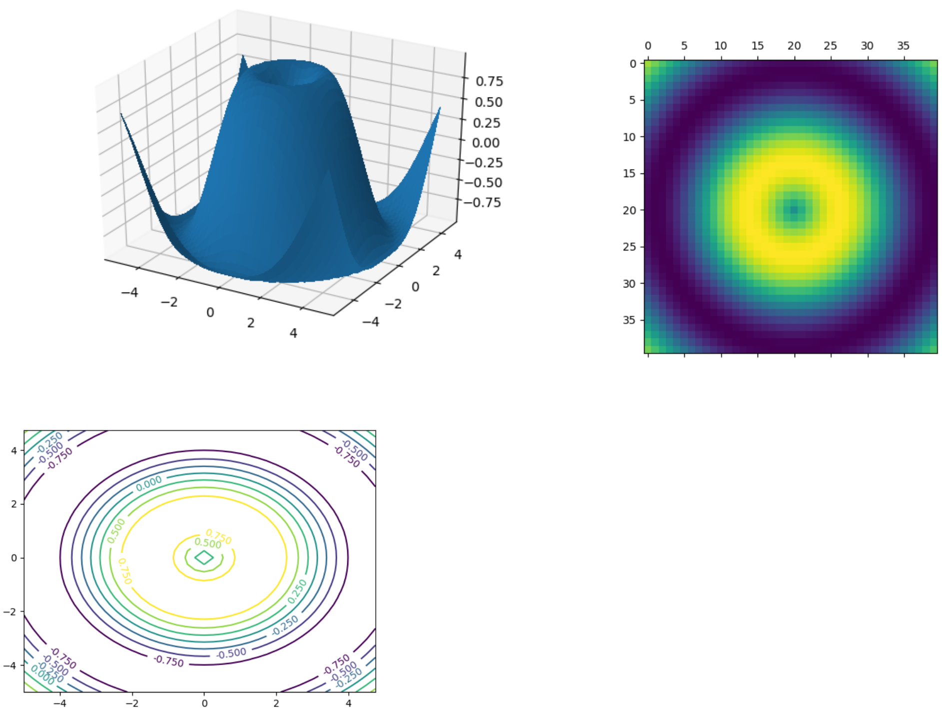


FIGURE 10.1 – Exemples de représentation d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

R Pour une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, il n'y a pas vraiment de techniques, sauf de considérer des applications partielles en un point.

III.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

⋆ Dérivées selon un vecteur

Définition III.1 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $v = (v_1, v_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, soit $a = (a_1, a_2) \in U$.

On dit que f est dérivable en a selon le vecteur v lorsque l'application :

$$\varphi_v : t \longmapsto f(a+tv) = f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2)$$

est dérivable en 0.

La dérivée de cette fonction φ_v est alors la dérivée de f en a selon v

Notation III.1. *On note alors $D_v(f)$.*

✎ Comme U est un ouvert, il existe $r > 0$, tel que $B_o(a,r) \subset U$. Ainsi, la fonction φ_v est définie sur $]-r,r[$ (on prends la boule pour la norme infinie et donc un carré).

■ **Exemple III.1** Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ avec : $f(x,y) = 1$ si $y > x^2$ ou si $y < -x^2$, 0 si $x = 0$. Cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$, pourtant elle est dérivable selon toutes les directions. ■

Il y a bien sûr des directions favorisées : c'est les axes liés à la base.

Définition III.2 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $a = (a_1, a_2) \in U$.

On dit que la fonction f admet une dérivée partielle d'ordre 1 et a par rapport à la première variable si f est dérivable selon le vecteur e_1.

On meut aussi considérer :

$$\varphi_1 : t \longmapsto f(a_1 + t, a_2) = f(a + te_1)$$

et on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 et a par rapport à la première variable lorsque φ_1 est dérivable en 0.

On pose alors :

$$\partial_1 f(a) = \varphi_1'(0)$$

$$\text{ou encore} \quad \partial_1 f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_1) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+t, a_2) - f(a)}{t}$$

On définit de même :

Définition III.3 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $a = (a_1, a_2) \in U$.

L'application partielle :

$$\varphi_2 : t \longmapsto f(a_1, a_2 + t) = f(a + te_2)$$

et la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable :

$$\partial_2 f(a) = \varphi_2'(0)$$

$$\text{ou encore} \quad \partial_2 f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_2)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2+t)-f(a)}{t}$$

Dans le cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, on peut définir de la même manière : $\partial_3 f(a)$.

✎ Ces applications partielles dépendent de la base choisie (de la manière dont on choisir de « couper » la surface représentative). Évidement, la plupart du temps, on choisit la base canonique, mais il faut comprendre que les dérivées partielles sont définies à partir de la base, donc les dérivées partielles dépendent de la base.

Notation III.2. *Cette dérivée partielle peut être notée :*

$$\partial_1 f(a) \textit{ déconseillé} \qquad \textit{ou} \qquad D_1 f(a) \qquad \textit{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} f(a)$$

⋆ Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition III.4 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On dit que la fonction f **est de classe** $\mathscr{C}^1$ sur U si elle admet une dérivée partielle par rapport à ses deux variables en tout point de U et si ces applications dérivées partielles sont continues.

On définit alors les applications dérivées partielles sur U par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \partial_i f(x) \end{cases}$$

Dans le cas d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on a trois dérivées partielles et donc trois applications dérivées partielles.

✎ En pratique pour calculer les dérivées partielles, on dérive par rapport à une variable en considérant les autres comme des constantes.
La continuité des applications dérivées partielles est la continuité des applications de U (ouvert de $\mathbb{R}^2$) dans $\mathbb{R}$.

⋆ Cas des fonctions vectorielles

Dans cette partie, on étudie rapidement le cas de fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Définition III.5 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$.

On note $f_1, \ldots, f_n$ les applications de $U \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in U,\ f(x) = \Big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\Big)_{\mathscr{B}}.$$

On dit que la fonction f admet une dérivée partielle d'ordre 1 en $a \in U$ par rapport à la i-ième variable si les n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ admettent une dérivée partielle d'ordre 1 en a.

Dans ce cas la dérivée en a par rapport à la i-ième variable est le vecteur :

$$\partial_i f(a) = (\partial_i f_1(a), \dots, \partial_i f_n(a))$$

D'après ce que l'on a vu sur les limites d'une fonction vectorielle (qui se ramène à l'étude des fonctions coordonnées), on a aussi :

$$\partial_i f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (f(a+he_i) - f(a))$$

Bien retenir ce concept : l'étude des fonctions de plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ se ramène à l'étude des applications coordonnées.

Pour la dérivation (comme pour la continuité), les difficultés proviennent de la dimension de l'espace de départ et non de l'espace d'arrivée.

III.2 Propriétés

Proposition III.1 — Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a :

$$f+g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } U \text{ avec } \partial_i(f+g) = \partial_i f + \partial_i g$$
$$\alpha f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } U \text{ avec } \partial_i(\alpha f) = \alpha \partial_i f$$

Ainsi, $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et la première dérivée par rapport à la i-ième variable est une application linéaire.

On a aussi le produit

$$fg \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } U \text{ avec } \partial_i(fg) = (\partial_i f)\, g + f\,(\partial_i g)$$

Et l'inverse : si f ne s'annule pas sur U, alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, avec :

$$\partial_i \left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\partial_i f}{f^2}$$

On peut aussi faire le quotient de deux fonctions (toujours dans le cas où f ne s'annule pas sur U) :

$$\frac{g}{f} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } U \text{ avec } \partial_i \left(\frac{g}{f}\right) = \frac{(\partial_i g)f - g(\partial_i f)}{f^2}$$

Si φ est une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I tel que $f(U) \subset I$ (ainsi $\varphi \circ f$ est bien définie sur U), alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \partial_i(\varphi \circ f) = \varphi' \circ f \cdot \partial_i f$$

En conséquence immédiate : les applications polynomiales (en plusieurs variables) sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$. On retrouve bien sûr les résultats bien connus des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Il s'agit essentiellement des même démonstration que dans le cas des fonction réelle de la variable réelle.

Notons en particulier qu'une fois montré l'existence des dérivées partielles, leur continuité provient des résultats du chapitre sur les espaces vectoriels normés.

Les premiers résultats découlent directement de la linéarité de la limite.

Pour le produit, on peut travailler sur les applications partielles : Si on note ϕ la première application partielle de fg en a et f_1 et g_1 les applications partielles de f et g en a.

On a :

$$\phi(t) = fg(a+te_1) = f(a+te_1)g(a+te_1) = f_1(t)g_1(t)$$

Ainsi en utilisant les propriétés de dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\phi'(0) = f_1'(0)g_1(0) + f_1(0)g_1'(0)$$

ce qui s'écrit :

$$\partial_1(fg)(a) = (\partial_1 f(a))\, g(a) + f(a)\,(\partial_i g(a))$$

Pour le quotient, c'est la même technique :

$$\phi(t) = \frac{1}{f(a+te_1)} = \frac{1}{f_1(t)}$$

toujours en notant ϕ l'application partielle de $\frac{1}{f}$. Ainsi :

$$\phi'(0) = -\frac{f_1'(0)}{f_1^2(0)}$$

ce qui donne le résultat.

Pour la composée, on note ϕ l'application partielle de $\varphi \circ f$, et on a :

$$\phi(t) = \varphi(f(t+ae_1)) = \varphi(f_1(t))$$

Ainsi :

$$\phi'(0) = f_1'(0)\varphi'(f_1(0))$$

ce qui donne bien le résultat.

■

III.3 Développement limité à l'ordre 1 et différentielle

Proposition III.2 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit $a = (a_1, a_2)$ un point quelconque de U, alors on a :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in U,$$
$$f(x) = f(a) + (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + (x_2 - a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \|x-a\|\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.
Pour une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, on a de même :

$$\begin{aligned}\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in U,\ f(x)=&f(a)+(x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\\ &+(x_2-a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\\ &+(x_3-a_3)\frac{\partial f}{\partial x_3}(a)+\|x-a\|\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Notation III.3. *On note aussi :*

$$f(x)\underset{x\to a}{=}f(a)+(x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+(x_2-a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)+o(x-a)$$

La notation : $o(x-a)$ désigne $\|x-a\|\varepsilon(x)$ où ε est une fonction réelle (de plusieurs variables) qui tends vers 0 en a.

Proposition III.3 Une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est continue sur U.

Démonstration. Évident avec l'écriture :

$$\begin{aligned}f(x)&\underset{x\to a}{=}f(a)+(x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+(x_2-a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)+o(x-a)\\ &\underset{x\to a}{=}f(a)+o(1)\end{aligned}$$

■

Définition III.6 — Différentielle en un point. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, on appelle différentielle de f au point $a\in U$, noté df_a l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$df_a:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}\\ (h_1,h_2)&\longmapsto&h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\end{array}\right.$$

On écrit naturellement :

$$\forall(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2,df_a(h)=(h_1,h_2)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)$$

Cette application linéaire s'interprète ainsi comme un produit scalaire, on note alors $df_a(h)=df_a\cdot h$.
La même définition est valable pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

✎ La différentielle est donc une application linéaire : en chaque point a on a une application linéaire tel que la fonction f est égale à la fonction : $f(a)+df_a$ (une constante plus une application linéaire) à l'ordre 1. On a en effet :

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\|h\|\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tends vers 0.

✎ Le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)$ est le gradient en a (défini plus loin) noté $\nabla f(a)$. On a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^2,\ df_a(h) = \nabla f(a) \cdot h$$

III.4 Règle de la chaîne

⋆ Cas général

On souhaite dériver la fonction f le long d'une trajectoire : physiquement, on dispose d'un point mobile $(x_1(t), x_2(t))$, qui se déplace au cours du temps et on mesure donc la température en ce point.

On a donc une fonction :

$$g : t \longmapsto f(x_1(t), x_2(t))$$

On cherche à dériver g, on part de dérivée le long d'un chemin ou le long d'une trajectoire.

> **Proposition III.4 — Règle de la chaîne.** Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, x_1 et x_2, deux fonctions réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I telles que :
>
> $$\forall t \in I,\ (x_1(t), x_2(t)) \in U.$$
>
> Ainsi, la fonction $g : t \longmapsto f(x_1(t), x_2(t))$ est définie sur U.
>
> La fonction g est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :
>
> $$\forall t \in I,\ g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1(t), x_2(t))x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1(t), x_2(t))x_2'(t)$$

On a le même résultat pour une fonction de trois variables : si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^3$, si x_1, x_2 et x_3 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et telle que la fonction $g : t \longmapsto f(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ est définie sur U. Alors la fonction g est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec :

$$\forall t \in I,\ g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}x_2'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}x_3'(t)$$

où les dérivées partielles sont évaluées en $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$.

✎ Il faut faire une interprétation graphique : la dérivée de g en t est proportionnelle au produit scalaire entre le vecteur vitesse $(x_1'(t), x_2'(t))$ au point $(x_1(t), x_2(t))$ et le gradient $\nabla f(x_1(t), x_2(t))$ en ce même point.

Démonstration. ADMIS

■

Dans la proposition précédente, on a noté (x_1, x_2) la trajectoire et $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielles, pour éviter de confondre la variable x et la fonction x. Si l'on accepte cette écriture et que l'on note $(x(t), y(t))$ la trajectoire, alors on peut écrire rapidement :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

il est alors sous entendu que l'on évalue les dérivées partielles en $(x(t), y(t))$ et les dérivées (droites) des fonctions (x, y) en t.

⋆ Applications aux fonctions constantes sur un ouvert convexe

Proposition III.5 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$).

Alors f est constante si et seulement si ses dérivées partielles sont nulles sur U.

Démonstration. Si la fonction est constante, ces dérivées partielles sont clairement nulles.

Supposons que les dérivées partielles soient nulles. Soit x et y deux points de U.

Considérons la fonction : $g : t \longmapsto f(tx + (1-t)y)$. Comme U est une convexe, la fonction g est définie sur $[0, 1]$. On a :

$$\forall t \in [0, 1],\ g'(t) = 0$$

Ainsi, la fonction g est constante et par suite $g(0) = g(1)$ et donc $f(x) = f(y)$. Comme x et y sont quelconques, la fonction f est donc constante. ■

✎ On rappelle le résultat : une fonction définie sur une intervalle est constante sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée est nulle.
L'hypothèse convexe a autant d'importance que l'hypothèse intervalle dans le résultat des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On voit aussi que l'on peut préciser cette hypothèse : si x et y sont deux points quelconques et si il existe une trajectoire g tel que $g(0) = x$ et $g(1) = y$, alors $f(x) = f(y)$.

⋆ Applications aux changements de variables

Proposition III.6 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soient x et y deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, telle que :

$$\forall (u, v) \in V,\ (x(u, v), y(u, v)) \in U$$

On peut alors définir la fonction :

$$g : (u, v) \longmapsto f\left(x(u, v), y(u, v)\right) \text{ sur l'ouvert } V$$

La fonction g est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur V, avec :

$$\forall (u, v) \in V,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(u, v), y(u, v)\right)\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(u, v), y(u, v)\right)\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

et :

$$\forall (u,v) \in V, \ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

L'idée est de faire un changement de variable $(u,v) \longmapsto (x,y)$. Le même résultat est bien sûr valable pour les fonctions de trois variables.

Démonstration. Considérons $(u_0,v_0) \in V$, on regarde l'application partielle

$$\begin{aligned}\varphi : t \longmapsto g(u_0+t,v_0) &= f(x(u_0+t,v_0),y(u_0+t,v_0)) \\ &= f(\psi_1(t),\psi_2(t))\end{aligned}$$

ou $\psi_1 : t \longmapsto x(u_0+t,v_0)$ et $\psi_2 : t \longmapsto y(u_0+t,v_0)$.

L'idée est que ces applications partielles consiste à se déplacer dans V selon l'axe horizontal par $t \mapsto (u_0+t,v_0)$, l'image par (x,y) consiste alors à se déplacer selon une courbe paramétrée dans U par $t \longmapsto (\psi_1(t),\psi_2(t))$.

On applique la règle de la chaîne :

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(u_0,v_0)\psi_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(u_0,v_0)\psi_2'(0)$$

Or ψ_1 et ψ_2 sont les applications partielles de x et de y respectivement, donc $\psi_1'(0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\psi_2'(0) = \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)$.

On obtient bien le résultat. ■

⋆ Cas particulier des coordonnées en polaire

Soit les fonctions :

$$x : (r,\theta) \longmapsto r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y : (r,\theta) \longmapsto r\sin\theta$$

Ces fonctions sont clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Considérons une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction :

$$g : (r,\theta) \longmapsto f(x(r,\theta),y(r,\theta)) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

alors on a pour toute valeur de (r,θ) :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot\sin\theta$$

et :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot(r\cos\theta)$$

IV Applications géométriques

IV.1 Gradient

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure d'espace euclidien.

Définition IV.1 — Gradient de f en un point. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

Le gradient de f au point $a \in U$ est le vecteur tel que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^2,\ df_a \cdot h = \nabla f(a) \cdot h$$

ce vecteur a donc pour coordonnées dans la base canonique :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

On a la même définition pour une application à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, le gradient a alors pour coordonnées :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a), \frac{\partial f}{\partial z}(a)\right)$$

Notation IV.1. *On note $\nabla f(a)$ le gradient en un point a.*

✎ Le gradient dépends du point, il indique la direction où il faut se déplacer pour « augmenter » f (interprétation en physique : gradient de température).
Si $g : t \longmapsto f(x(t), y(t))$, la règle de la chaîne s'interprète ainsi :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t) \\ &= \nabla f(x(t), y(t)) \cdot v'(t) \end{aligned}$$

où $v'(t)$ est le vecteur vitesse (qui dirige la tangente à la courbe paramétrée) : $v'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.
Ainsi, si le point mobile $(x(t), y(t))$ se déplace vers le gradient, $g(t)$ va augmenter, si il se déplace perpendiculairement au gradient alors $g(t)$ ne va pas être modifié (au premier ordre).

IV.2 Ligne de niveau

⋆ Rappel de géométrie

Une droite D du plan passant par le point (x_0, y_0), admet une équation cartésienne de la forme :

$$D : a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Un vecteur normal à la droite est alors le vecteur (a, b), un vecteur directeur est $(-b, a)$.

Pour une courbe paramétrée $t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe $\mathscr{C}^1$ et une valeur t_0, tel que $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq 0$ (point régulier), alors la tangente à la courbe est dirigé par $(x'(t_0), y'(t_0))$.

Définition IV.2 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La **ligne de niveau λ de f** est l'ensemble :

$$\left\{(x,y) \in U \middle| f(x,y) = \lambda\right\}$$

✎ Interprétation : courbe d'isotempérature.
Les lignes de niveaux sont un moyen de représenter les fonctions. Il ne s'agit pas toujours de ligne (par exemple, la température peut être nulle sur toute une zone).

La proposition suivante exprime que si le gradient est non nul en un point, alors localement autour de ce point, on a une « vraie courbe ». De plus, on peut calculer la tangente en ce point.

Proposition IV.1 Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

Soit Γ la courbe de niveau 0 de f. On considère un point $M_0(x_0,y_0) \in \Gamma$, ie $f(x_0,y_0) = 0$ vérifiant $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$.

Alors :

- Localement, Γ est une courbe plane qui peut être paramétrée sous la forme :

$$\begin{cases} x(t) = \dots \\ y(t) = \dots \end{cases} \qquad t \in I$$

- Le point M_0 est un point régulier de la courbe Γ, et la courbe Γ admet donc une tangente en ce point.
- La tangente à Γ est la droite passant par M_0 et de vecteur normal $\nabla f(x_0,y_0)$. Cette tangente a donc pour équation :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

- Ainsi, en un point régulier, $\nabla f(x_0,y_0)$ est orthogonal à la courbe et dirigé vers les valeurs croissantes.

✎ Dessin à faire et à comprendre. C'est la même chose pour toute les courbes de niveaux (pas uniquement celle de niveau 0).
Le résultat permet ainsi de donner de l'information sur des courbes implicites (du type $f(x,y) = 0$).

✎ Une courbe est régulière si et seulement si tous ces points sont réguliers. Dans le cas où le gradient de f ne s'annule pas sur U, alors toutes les courbes de niveaux admettent un paramétrage.

Démonstration. Si on suppose l'existence d'un paramétrage $\Big(x(t),y(t)\Big)$ (localement autour du point (x_0,y_0)) et que ce paramétrage est dérivable, alors on a :

$$\big(x'(t),y'(t)\big) \cdot \nabla f\,(x(t),y(t)) = 0$$

Ainsi, le vecteur $\nabla f\,(x(t),y(t))$ est normal au vecteur vitesse, et donc à la tangente.

Un point (x,y) appartient donc à la tangente si et seulement si :

$$\Big((x,y)-(x_0,y_0)\Big)\cdot\nabla f\left(x(t),y(t)\right)=0$$

On obtient ainsi la tangente. ■

IV.3 Surface de niveau

⋆ Rappels de géométrie

Un plan Π de l'espace passant par (x_0,y_0,z_0) admet une équation cartésienne de la forme :

$$\Big\{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Un vecteur normal au plan est alors (a,b,c).

Définition IV.3 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

La surface de niveau λ de f est l'ensemble :

$$\Big\{(x,y,z)\in U\,\Big|\,f(x,y,z)=\lambda\Big\}$$

Proposition IV.2 Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathscr{S}$ la courbe de niveau 0 de f. On considère un point $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$, ie $f(x_0,y_0,z_0)=0$ vérifiant $\nabla f(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0)$.

Alors : Le point M_0 est un point régulier de la surface $\mathscr{S}$ au sens où la surface admet en ce point un plan tangent.

le plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ est le plan passant par M_0 et de vecteur normal $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$. Ce plan a donc pour équation :

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0)=0$$

Ainsi, en un point régulier, $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ est orthogonal à la surface de niveau et dirigé vers les valeurs croissantes.

✎ Là aussi on a de l'information sur une surface implicite : le plan tangent.
En particulier, c'est ce résultat qui permet au logiciel de tracer des surfaces implicites avec des petits carrés reliés.

⋆ Courbe tracée sur une surface

Définition IV.4 — Courbe tracée sur une surface de niveau. Considérons $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Soit une fonction :

$$\varphi: t\longmapsto\Big(x(t),y(t),z(t)\Big)\text{ de classe }\mathscr{C}^1\text{ sur un intervalle }I\text{ de }\mathbb{R}$$

vérifiant :

$$\forall t \in I,\ \Big(x(t), y(t), z(t)\Big) \in U \text{ et } f\Big(x(t), y(t), z(t)\Big) = 0$$

alors φ est une courbe (de l'espace) tracée sur la surface de niveau 0 de f.

On peut généraliser à une courbe tracée sur une surface de niveau λ.
On sait étudier φ : par exemple la tangente à la courbe φ en un point $\Big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\Big)$.
est : $\Big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\Big)$.
Bien en tendu l'idée est que f représente l'énergie d'un système et est donc constante au cours du temps. $\varphi(t)$ représente l'évolution du système à énergie constante.

Proposition IV.3 Considérons $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^3$.
Soit φ une courbe tracée sur la surface de niveau 0 de f et $t_0 \in I$, on suppose que $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ est un point régulier de cette surface de niveau.
On a alors : la tangente à la courbe φ est incluse dans le plan tangent.

Démonstration. On dérive

$$t \longmapsto f\,(x(t), y(t), z(t)) \text{ qui est une fonction constante}$$

ce qui donne :

$$x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

Ainsi, le vecteur vitesse est orthogonal au gradient.
La tangente à φ est donc dans le plan tangent à la surface $\mathscr{S}$. ■

Dessin à faire et à comprendre.

V Fonction de classe $\mathscr{C}^2$

Définition V.1 Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.
On suppose que la fonction f admet une dérivée première par rapport à la variable x notée $\frac{\partial f}{\partial x}$. On suppose ensuite que cette application dérivée partielle admet elle-même une dérivée première par rapport à la variable x.
On définit alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Si on suppose maintenant que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et que cette application admet une dérivée partielle par rapport à y, alors on définit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

On définit de même si existence :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Attention à l'ordre dans $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ c'est l'ordre naturel de la dérivation. (ceci dit, le théorème suivant assure que l'ordre n'a pas d'importance)
Pour une fonction de trois variables, on définit de même :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \text{etc.}$$

Ces dérivées peuvent être définies localement (en un point $a \in U$) ou globalement (en tout point de U).
Si l'on veut définir $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $a \in U$, il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}$ soit définie autour de a.

Notation V.1. *On note aussi* $\partial_{1,2} f$ *pour* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Définition V.2 — Fonction de classe $\mathscr{C}^2$. L'application f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et lorsque ses dérivées partielles sont aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Les opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sont les mêmes que sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$: la somme et le produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ est $\mathscr{C}^2$, la composée (quand elle est définie) de fonction de classe $\mathscr{C}^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$. En particulier, l'inverse d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$.

Théorème V.1 — Théorème de Schwarz. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ alors en tout point $a \in U$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

De même pour une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

Ainsi, l'ordre de dérivation n'a pas d'importance !

Définition V.3 — Matrice hessienne. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et soit $a \in U$.

On appelle matrice hessienne de f en a la matrice $H_f(a) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![1,p]\!], \ (H_f(a))_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Ainsi, pour $p = 2$, la matrice hessienne est dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$\mathscr{M}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Idem pour $p = 3$.

La matrice $H_f(a)$ dépend du point a

En application du théorème de Schwarz, on a :

Proposition V.2 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et soit $a \in U$.

Alors $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

Proposition V.3 — Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et soit $a \in U$.

On a alors :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o\left(\|h\|^2\right)$$

Démonstration. ADMIS conformément au programme. ■

Avec des produit scalaire cela s'écrit :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a) \cdot h \rangle + \frac{1}{2} \langle h \cdot H_f(a) h \rangle + o\left(\|h\|^2\right)$$

On rappelle que ce DL à l'ordre 2 signifie qu'il existe une $\varepsilon : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie pour h sur une boule de rayon $\varepsilon > 0$ centrée en 0 (puisque $a \in \mathring{U}$), telle que :

$$\forall h \in B_o(0,\varepsilon), \ f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a) \cdot h \rangle + \frac{1}{2} \langle h \cdot H_f(a) h \rangle + \varepsilon(h) \|h\|^2$$

avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

On peut écrire :

$$\langle h \cdot H_f(a) h \rangle \text{ ou } \langle H_f(a) h \cdot h \rangle$$

Puisque $H_f(a)$ est symétrique.

VI Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Définition VI.1 — Extremum local ou global. Soit f une fonction réelle définie sur une partie Δ de $\mathbb{R}^p$.

On dit que f admet au point a un maximum global si :

$$\forall x \in \Delta,\ f(x) \leqslant f(a).$$

On définit de même la notion de minimum global en a si :

$$\forall x \in \Delta,\ f(x) \geqslant f(a).$$

Dans les deux cas, on dit que a est un extremum global.

On dit que f admet au point a un maximum local si :

$$\exists r > 0, \forall x \in B_o(a,r) \cap \Delta,\ f(x) \leqslant f(a).$$

ie la restriction de f à $B_o(a,r)$ admet un maximum.

On dit que f admet au point a un minimum local si :

$$\exists r > 0, \forall x \in B_o(a,r) \cap \Delta,\ f(x) \geqslant f(a).$$

ie la restriction de f à $B_o(a,r)$ admet un minimum.

Dans les deux cas, on dit que a est un extremum local.

Si on ne précise pas c'est un extremum global.

Définition VI.2 — Point critique. Un point en lequel le gradient de f s'annule est appelé un point critique de f.

Proposition VI.1 — Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert. Si f est une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U et si f atteint un extremum local en un point a de U alors a est un point critique.

Démonstration. Si on prends les applications partielles f_1 et f_2 elles admettent un extremum en 0, donc leurs dérivées sont nulles. ∎

La proposition explique que pour chercher les extremums, on peut se contenter d'étudier les points où le gradient s'annule. Attention : c'est une condition nécessaire et non suffisante (penser à la forme d'une selle de cheval).

Sur un ensemble qui n'est pas un ouvert, attention aux bords !

On rappelle que $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices S symétriques positives, c'est à dire telle que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T S X \geqslant 0$$

et $\mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices S symétriques définies positives, c'est à dire telle que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0 \implies X^T S X > 0$$

ie que l'on a l'inégalité ci-dessus (avec égalité uniquement lorsque $X = 0$).

On rappelle aussi la caractérisation pour une matrice S symétrique :

$$S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff Sp(S) \subset \mathbb{R}^+ \text{ et } S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff Sp(S) \subset \mathbb{R}_*^+$$

Proposition VI.2 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f.

On a alors :
- Si $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un minimum local strict en a.
- Si $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'a pas de minimum en a.

Démonstration. On suppose $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, on a alors pour h proche de 0 :

$$\begin{aligned} f(a+h) =& f(a) + \langle \nabla f(a) \cdot h \rangle + \frac{1}{2} \langle h \cdot H_f(a) h \rangle + \underset{h \to 0}{o} \|h\|^2 \\ =& f(a) + \frac{1}{2} \langle h \cdot H_f(a) h \rangle + \underset{h \to 0}{o} \|h\|^2 \end{aligned}$$

on devine alors que pour h non nul, on a donc $f(a+h) - f(a) > 0$.

La démonstration consiste à écrire qu'il existe $\alpha > 0$ et une fonction ε de limite nulle en 0 :

$$\forall h \in B_o(0, \alpha),\ f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} \langle h \cdot H_f(a) h \rangle + \varepsilon(h) \|h\|^2$$

On écrit alors :

$$H_f(a) = PDP^T \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

on suppose de plus que :

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p$$

On note alors $\tilde{h} = P^T h$. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle h \cdot H_f(a) h \rangle =& h^T PDP^T h \\ =& \tilde{h}^T D \tilde{h} \\ =& \tilde{h}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix} \tilde{h} \\ =& \sum_{i=1}^p \lambda_i \tilde{h}_i^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^p \tilde{h}_i^2 \\ \geqslant& \lambda_1 \|\tilde{h}\|^2 \end{aligned}$$

Mais comme la matrice P est orthogonale, on a :

$$\|\tilde{h}\|^2 = \|h\|^2$$

On a donc obtenu :

$$\begin{aligned}\forall h \in B_o(0,\alpha),\ f(a+h)-f(a) =& \frac{1}{2}\left\langle h \cdot H_f(a)h\right\rangle + \varepsilon(h)\|h\|^2 \\ \geqslant& \|h\|^2\left(\frac{1}{2}\lambda_1 + \varepsilon(h)\right)\end{aligned}$$

comme ε est de limite nulle et que $\lambda_1 > 0$, on peut trouver un $r > 0$, tel que :

$$\forall h \in B_o(0,\alpha),\ \frac{1}{2}\lambda_1 + \varepsilon(h) > 0$$

et donc :

$$\forall h \in B_o(0,\alpha),\ f(a+h)-f(a) \geqslant 0 \text{ avec égalité ssi } h = 0.$$

On suppose maintenant que $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^+(\mathbb{R})$, on prend alors x_1 vecteur propre de $H_f(a)$ associée à une valeur propore $\lambda_1 < 0$.

On a alors pour t petit :

$$\begin{aligned}f(a+tx_1) =& f(a) + t\left\langle \nabla f(a)\cdot x_1\right\rangle + \frac{1}{2}t^2\left\langle x_1 \cdot H_f(a)x_1\right\rangle + \varepsilon(tx_1)t^2\|x_1\|^2 \\ =& f(a) + \frac{\lambda_1}{2}t^2\|x_1\|^2 + \varepsilon(tx_1)t^2\|x_1\|^2 \\ =& f(a) + t^2\|x_1\|^2\left(\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon(tx_1)\right)\end{aligned}$$

Pour t suffisamment petit, on a $\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon(tx_1) < 0$ et donc on peut trouver t non nul aussi petit que l'on veut et tel que $f(a+tx_1) < f(a)$. Ainsi, a n'est pas un minimum. ■

> Ainsi, on a une méthode simple pour déterminer les extremums locaux d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:
>
> - on commence par chercher les points critiques, pour cela, on dérive la fonction et on cherche les points où les dérivées partielles s'annulent.
> - En chacun de ses points a, on regarde les valeurs propres de la matrices hessienne.
>   - Si les valeurs propres sont strictement positives, alors a est un minimum local strict,
>   - Si l'un des valeurs propres est strictement négative, alors a n'est pas un minimum,
>   - si les valeurs propres sont toutes négatives, alors a est un maximum local strict.
>   - Si une valeur propre est strictement positive et une autre strictement négative alors ce n'est pas un extremum (point selle).
>   - Si une valeur propre est nulle mais les autres strictement positives, alors on ne sait pas conclure.
> - On n'oublie pas les bords : on les traite en étudiant la valeur de la fonction en suivant les bords. Souvent cela revient à regarder une fonction d'une seule

variable.

- Pour chercher les maximums globaux :
  - Si on veut montrer que f n'admet pas un maximum, on peut montrer que f n'est pas majorée en prenant des chemins particuliers. Attention : ce n'est pas parce que f est majorée qu'elle admet un maximum (la borne supérieure n'est pas nécessairement atteinte).
  - Ce n'est pas parce qu'il n'y a qu'un point critique et que c'est un maximum local, que c'est un maximum global.
  - Pour montrer que f admet un maximum en (x_0, y_0), on doit montrer que :

    $$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$$

    Généralement, on montre que :

    $$\forall (h,k) \in U,\ f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \leqslant 0$$

    on factorise donc : $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$. Il faut penser à la forme canonique (comme pour les produits scalaires).

Dans le cas d'une matrice 2×2, on peut utiliser la trace et le déterminant :

- si l'une des valeur propres est nulle, alors cela signifie que le déterminant est nul. Donc on ne sait rien.
- Si le déterminant est strictement négatif, alors l'une des valeurs propres est strictement positive, l'autre strictement négatif. Dans ce cas, c'est un point selle.
- Si le déterminant est positifs négatif, alors on regarde la trace (somme des valeurs propres), si la trace est strictement positive, alors c'est un minimum, si la trace est strictement négative, alors c'est un maximum.

Calcul différentiel

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Équations différentielles linéaires

Voir aussi les exercices des feuilles précédentes sur les équations différentielles en particulier changement de variables, problème de recollement et utilisation des développements en série entière.

Exercice 1 Soit le système différentiel :

$$(E) \qquad \begin{cases} u'(t) = & -tu(t)+v(t)+1 \\ v'(t) = & (1-t^2)u(t)+tv(t)+1 \end{cases}$$

où u et v sont des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

1. Écrire ce système sous forme matricielle.
2. On note :

$$Y_1 : t \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad Y_2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}$$

   Vérifier que Y_1 et Y_2 sont solutions du système homogène associé (H). En déduire les solutions de (H).
3. Rechercher une solution particulière de (E) sous la forme $Y = aY_1 + bY_2$ où a et b sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Écrire la solution générale de (E).

Correction :

1. On pose $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et on écrit :

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} -t & 1 \\ (1-t^2) & t \end{pmatrix}}_{A(t)} X + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B(t)}$$

2. On a :

$$Y_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A(t)Y_1 = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ (1-t^2) & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   de même pour Y_2.
   Comme $\mathscr{S}_H$ est un SEV de dimension 2, et que (Y_1, Y_2) est une famille libre. On en déduit que :

$$\mathscr{S}_H = Vect(Y_1, Y_2)$$

   c'est-à-dire :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ t \mapsto a\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. on dérive donc pour $t \in \mathbb{R}$ en utilisant $Y_1'(t) = A(t)Y_1(t)$ (idem pour Y_2) !

$$\begin{aligned} Y'(t) =& a'(t)Y_1(t) + A(t)a(t)Y_1(t) + b'(t)Y_2(t) + A(t)b(t)Y_2(t) \\ =& a'(t)Y_1(t) + b'(t)Y_2(t) + A(t)Y(t) \end{aligned}$$

   on veut donc que :

$$a'(t)Y_1(t) + b'(t)Y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} a'(t) + tb'(t) = 1 \\ ta'(t) + (t^2+1)b'(t) = 1 \end{cases}$$

on cherche donc (a,b) solution. Pour cela, on fait : $tl_1 - l_2$

$$-b'(t) = t - 1$$

d'où $b'(t) = -t+1$ et $b(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t$ (nb : on n'a besoin d'une solution).
Ensuite, on remplace pour avoir :

$$a'(t) = 1 + t^2 - t \text{ et donc } a(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t$$

On vérifie ensuite que :

$$Y_o : t \mapsto \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t\right)\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}t^2 + t\right)\begin{pmatrix}t\\t^2+1\end{pmatrix}$$

est solution particulière de l'équation.

4. On obtient l'ensemble des solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t + a\right)\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}t^2 + t + b\right)\begin{pmatrix}t\\t^2+1\end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 2 Soit le système différentiel :

$$(E) : \quad \begin{cases} x'(t) = & 2tx(t) - y(t) + t\cos(t) \\ y'(t) = & x(t) + 2ty(t) + t\sin(t) \end{cases}$$

d'inconnues (x,y) définies sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer le plan vectoriel $\text{Vect}(X_1, X_2)$ des solutions du système linéaire homogène (H) associé à (E) en utilisant le changement d'inconnues

$$\begin{cases} u(t) = & x(t)e^{-t^2} \\ v(t) = & y(t)e^{-t^2} \end{cases}$$

2. Rechercher une solution de (E) sous la forme $X = aX_1 + bX_2$ avec a et b deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Écrire la solution générale de (E).

Correction :

1. On considère donc (x,y) solution du système (H) et on pose (u,v) comme dans l'énoncé.
On a alors :

$$u'(t) = \left(x'(t) - 2tx(t)\right)e^{-t^2} = -y(t)e^{-t^2} = -v(t)$$
$$v'(t) = \left(y(t) - 2ty(t)\right)e^{-t^2} = x(t)e^{-t^2} = u(t)$$

Ainsi, (u,v) est solution du système :

$$(H') : \quad \begin{cases} u' = & -v \\ v' = & u \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ u(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t) \text{ et } v(t) = \alpha\sin(t) - \beta\cos(t)$$

On constate que :

$$t \mapsto e^{t^2}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto e^{t^2}\begin{pmatrix}\sin(t)\\ -\cos(t)\end{pmatrix}$$

sont solutions. Il s'agit d'une famille libre donc une base de $\mathscr{S}_H$.
Ce qui donne :

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}: t\mapsto \alpha e^{t^2}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}+\beta e^{t^2}\begin{pmatrix}\sin(t)\\ -\cos(t)\end{pmatrix}$$

On note donc :

$$X_1 : t\longmapsto e^{t^2}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}\qquad X_2 : t\longmapsto e^{t^2}\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$$

On a :

$$\mathscr{S}_H\subset Vect(X_1,X_2)$$

et l'égalité des dimensions donne l'égalité des espaces.

2. On cherche donc une solution particulière sous la forme :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}: t\longmapsto a(t)e^{t^2}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}+b(t)e^{t^2}\begin{pmatrix}\sin(t)\\ -\cos(t)\end{pmatrix}$$

avec (a,b) deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
On écrit :

$$\begin{aligned}X' =&a'X_1+aX_1'+b'X_2+bX_2'\\ =&a'X_1+a\begin{pmatrix}2t & -1\\ 1 & 2t\end{pmatrix}X_1+b'X_2+b\begin{pmatrix}2t & -1\\ 1 & 2t\end{pmatrix}X_2\\ =&a'X_1+b'X_2+\begin{pmatrix}2t & -1\\ 1 & 2t\end{pmatrix}X\end{aligned}$$

On veut que :

$$X'=\begin{pmatrix}2t & -1\\ 1 & 2t\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}t\cos(t)\\ t\sin(t)\end{pmatrix}$$

Il faut donc que :

$$a'(t)X_1(t)+b'(t)X_2(t)=\begin{pmatrix}t\cos(t)\\ t\sin(t)\end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}e^{t^2}\cos(t)a'(t)+e^{t^2}\sin(t)b'(t)=t\cos(t)\\ e^{t^2}\sin(t)a'(t)-e^{t^2}\cos(t)b'(t)=t\sin(t)\end{aligned}$$

On fait $\cos(t)l_1+\sin(t)l_2$, cela donne :

$$e^{t^2}a'(t)=t\qquad\text{et donc on peut prendre : } a(t)=-\frac{1}{2}e^{-t^2}$$

On fait ensuite : $\sin(t)l_1-\cos(t)l_2$, cela donne :

$$e^{t^2}b'(t)=0\qquad\text{et donc on peut prendre : } b(t)=0$$

On en déduit une solution particulière de (E) :

$$X : t\longmapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$$

3. L'ensemble des solutions est :

$$\left\{t\longmapsto\left(\alpha e^{t^2}-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}+\beta e^{t^2}\begin{pmatrix}\sin(t)\\ -\cos(t)\end{pmatrix}\middle|(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

⋆ **Dérivation des fonctions vectorielles**

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to E$ avec E $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

On suppose que f est dérivable en 0 et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$$

Montrer que f est linéaire.

Correction : $f(0) = 0$. Soit $x \in E$, par récurrence facile :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Cela donne :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{\frac{x}{2^n}} \to f'(0)$$

D'où $f(x) = f'(0)x$.

Exercice 4 On considère le déterminant dans la base canonique, $< \cdot, \cdot >$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et (f, g, h, k) des applications de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que $\langle f, \det(g, h)k\rangle \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que $\det\left(f, \det(g, h)k\right) \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et calculer sa dérivée.

Correction : il faut utiliser les propriétés de dérivation des fonctions bilinéaires.

Pour le premier, la dérivée est

$$\det(g, h) < f', k > + \left(\det(g', h) + \det(g, h')\right) < f, k > + \det(g, h) < f, k' >$$

pour le deuxième, la dérivée est :

$$\det(g, h)\det(f', k) + def(g, h)\det(f, k') + \det(g', h)\det(f, k) + \det(g, h')\det(f, k)$$

Exercice 5 Soit $f : x \longmapsto \left(x, \sin(x^2), \cos(2x + 3)\right)$ et $g : t \mapsto e^{-t}$.

Montrer que $f \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.

Correction : Il faut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (f \circ g)' = g'(t) f'\left(g(t)\right)$$

Ce qui donne :

$$e^{-t}\left(1, 2e^{-t}\cos\left(x^{-2t}\right), -2\sin\left(2e^{-t} + 3\right)\right)$$

Exercice 6 On considère une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}^n$ dérivable. Montrer que l'application :

$$\varphi : t \longmapsto \det_{\mathscr{B}}\Big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\Big) \text{ est dérivable sur } I$$

et donner la valeur de $\varphi'(t)$ pour $t \in I$.

2. Pour $n \geqslant 2$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

et l'application $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$D_n : t \longmapsto \begin{vmatrix} e^{a_1 t} & a_1 e^{a_1 t} & \cdots & a_1^{n-1} e^{a_1 t} \\ e^{a_2 t} & a_2 e^{a_2 t} & \cdots & a_2^{n-1} e^{a_2 t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{a_n t} & a_n e^{a_n t} & \cdots & a_n^{n-1} e^{a_n t} \end{vmatrix}$$

En utilisant la dérivabilité de D_n calculer Δ_n.

Correction :

1. C'est du cours car le déterminant est multilinéaire. Pour $t \in I$:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathscr{B}} \Big(f_1(t), \ldots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t) \ldots, f_n(t) \Big)$$

2. D_n est dérivable chacune des fonctions :

$$f_i : t \longmapsto \left(a_1^{i-1} e^{a_1 t}, \ldots, a_n^{i-1} e^{a_n t} \right)$$

est dérivable.
On dérive D_n avec la formule de la question 1 :

$$D_n'(t) = \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 e^{a_1 t} & a_1 e^{a_1 t} & \cdots & a_1^{n-1} e^{a_1 t} \\ a_2 e^{a_2 t} & a_2 e^{a_2 t} & \cdots & a_2^{n-1} e^{a_2 t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n e^{a_n t} & a_n e^{a_n t} & \cdots & a_n^{n-1} e^{a_n t} \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} e^{a_1 t} & a_1^2 e^{a_1 t} & \cdots & a_1^{n-1} e^{a_1 t} \\ e^{a_2 t} & a_2^2 e^{a_2 t} & \cdots & a_2^{n-1} e^{a_2 t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{a_n t} & {a_n}^2 e^{a_n t} & \cdots & a_n^{n-1} e^{a_n t} \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$+ \ldots$$

$$+ \begin{vmatrix} e^{a_1 t} & a_1 e^{a_1 t} & \cdots & a_1^{n} e^{a_1 t} \\ e^{a_2 t} & a_2 e^{a_2 t} & \cdots & a_2^{n} e^{a_2 t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{a_n t} & a_n e^{a_n t} & \cdots & a_n^{n} e^{a_n t} \end{vmatrix}$$

Chacun des termes est de la forme :

$$\det \left(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \ldots, f_n(t) \right)$$

Comme :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], f_i'(t) = f_{i+1}(t)$$

on en déduit que chacun des ces déterminants est nuls (car deux colonnes sont identiques), ainsi les $n-1$ premiers termes sont nuls. Et donc :

$$D_n'(t) = \begin{vmatrix} e^{a_1 t} & a_1 e^{a_1 t} & \cdots & a_1^{n-2} e^{a_1 t} & a_1^{n} e^{a_1 t} \\ e^{a_2 t} & a_2 e^{a_2 t} & \cdots & a_2^{n-2} e^{a_2 t} & a_2^{n} e^{a_2 t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ e^{a_n t} & a_n e^{a_n t} & \cdots & a_n^{n-2} e^{a_n t} & a_n^{n} e^{a_n t} \end{vmatrix}$$

En particulier, $D_n'(0) = \Delta_n$. D'un autre côté, en factorisant chacune des lignes par $e^{a_i t}$, on a facilement que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ D_n(t) = e^{\sum_{i=1}^{n} a_i t} V(a_1, \ldots, a_n)$$

et donc en dérivant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ D_n'(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) e^{\sum_{i=1}^{n} a_i t} V(a_1, \dots, a_n)$$

et au final :

$$D_n'(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) V(a_1, \dots, a_n)$$

Ce qui donne la valeur de Δ_n.

Exercice 7 Pour tout réel x, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & (0) \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que D_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $D_n'(x)$.
2. En déduire la valeur de $D_n(x)$.

Correction :

1. La fonction :

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x & 1 & & & (0) \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{pmatrix}$$

est dérivable car chacune des ses coordonnées est un polynôme. On compose avec le déterminant (multilinéaire). On note $C_i(x)$ la colonne précédente, et on constate que $C_i'(x) = C_{i+1}$, ainsi :

$$\begin{aligned} D_n'(x) &= \det(C_1'(x), C_2(x), \dots, C_n(x)) + \det(C_1(x), C_2'(x), C_3(x) \dots, C_n(x)) + \dots + \det(C_1(x), C_2(x), \dots, C_{n-1}(x), C_n'(x)) \\ &= \det(C_1(x), C_2(x), \dots, C_{n-1}(x), C_n'(x)) \end{aligned}$$

$C_n'(x)$ ne contient que un seul 1 dans la dernière ligne.
En développant par rapport à la dernière colonne ce dernier déterminant , on obtient :

$$D_n'(x) = D_{n-1}(x)$$

2. On calcule alors par récurrence la valeur de $D_n(x)$ et on obtient :

$$D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Ne pas oublier l'argument $D_n(0) = 0$ qui assure que la constante est nulle en intégrant.

Exercice 8 Soit $f : [0,1] \to E$ dérivable en 0 et telle que : $f(0) = 0$.

On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Déterminer la limite de S_n.

Correction :
On écrit :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0.
Et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1,n]\!],\ f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2}f'(0) + \frac{k}{n^2}\varepsilon(\frac{k}{n^2})$$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_n =& \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kf'(0) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon(\frac{k}{n^2}) \\ =& \frac{n(n+1)}{2n^2}f'(0) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon(\frac{k}{n^2}) \end{aligned}$$

Le premier terme tends vers $\frac{f'(0)}{2}$. On va montrer que le reste tend vers 0.
On peut donc majorer :

$$\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon(\frac{k}{n^2})\right| \leqslant \frac{1}{n^2}\sup_{x\in\left]0,\frac{1}{n}\right]}|\varepsilon(x)|\sum_{k=1}^{n} k$$

(cette borne sup existe car comme ε est de limite nulle en 0 elle est bornée).
Il reste à vérifier que pour tout $\alpha > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, on a $\sup_{x\in\left]0,\frac{1}{n}\right]}|\varepsilon(x)| \leqslant \alpha$.
Pour cela, on écrit que :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in [0,1], x \leqslant \delta \implies |\varepsilon(x)| \leqslant \alpha$$

Soit maintenant n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, \frac{1}{n} \leqslant \delta$ et soit $n \geqslant n_0$. On a alors $\left[0,\frac{1}{n}\right] \subset [0,\delta]$:

$$\forall x \in \left[0,\frac{1}{n}\right], |\varepsilon(x)| \leqslant \alpha$$

donc :

$$\sup_{x\in\left]0,\frac{1}{n}\right]}|\varepsilon(x)| \leqslant \alpha$$

On obtient donc :$\lim_{n\infty} S_n = \frac{f'(0)}{2}$

Exercice 9 Soit u, v et w trois fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$.
On suppose :

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0$$

Correction : on considère :

$$f : x \longmapsto \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u(x) & v(x) & w(x) \end{vmatrix}$$

On a alors f dérivable et :

$$f' : x \longmapsto \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(x) & v'(x) & w'(x) \end{vmatrix}$$

$f(a) = 0$, $f(b) = 0$ donc Thm de Rolle assure qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que $f'(d) = 0$.
L'hypothèse assure que $f'(a) = 0$ et donc thm de Rolle encore assure que il existe c tel que $f''(c) = 0$.

R Bien dériver selon les lignes, c'est plus simple ici, sinon on se retrouve avec la somme de trois déterminants.

⋆ Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Exercice 10 Soit la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3+2xy^2+3x^2y^2}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles selon les deux variables en $(0,0)$.
2. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Correction :

1. Il s'agit de regarder la dérivabilité des applications partielles locales :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t,0) = \begin{cases} \frac{t^3}{t^2} = t & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = t \end{cases}$$

et :

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(0,t) = 0 \end{cases}$$

Ces deux applications sont dérivables en 0 donc f est différentiable (ie admet des dérivées partielles selon x et y), et plus précisément :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f_1'(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f_2'(0) = 0$$

2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a pour la première dérivée :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =& \frac{3x^2+2y^2+6xy^2}{x^2+2y^2} - (x^3+2xy^2+3x^2y^2)(2x)\frac{1}{(x^2+2y^2)^2} \\
=& \frac{3x^2+2y^2+6xy^2}{x^2+2y^2} - \frac{2x^4+4x^2y^2+6x^3y^2}{(x^2+2y^2)^2} \\
=& \frac{1}{(x^2+2y^2)^2}\left((3x^2+2y^2+6xy^2)(x^2+2y^2) - 2x^4 - 4x^2y^2 - 6x^3y^2\right) \\
=& \frac{1}{(x^2+2y^2)^2}\left(x^4+4x^2y^2+4y^4+12xy^4\right) \\
=& \frac{1}{(x^2+2y^2)^2}\left((x^2+2y^2)^2+12xy^4\right) \\
=& 1 + 12\frac{xy^4}{(x^2+2y^2)^2}
\end{aligned}$$

et pour la deuxième :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =& \frac{4xy+6x^2y}{x^2+2y^2} - (x^3+2xy^2+3x^2y^2)(4y)\frac{1}{(x^2+2y^2)^2} \\
=& \frac{4xy+6x^2y}{x^2+2y^2} - (4yx^3+8xy^3+12x^2y^3)\frac{1}{(x^2+2y^2)^2} \\
=& \frac{1}{(x^2+2y^2)^2}\left(\left(4xy+6x^2y\right)(x^2+2y^2) - (4yx^3+8xy^3+12x^2y^3)\right) \\
=& \frac{1}{(x^2+2y^2)^2}\left(6x^4y\right) \\
=& 6\frac{x^4y}{(x^2+2y^2)^2}
\end{aligned}$$

Il faut ensuite regarder si :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Pour le premier :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 1\right| =& 12\frac{|x|y^4}{(x^2+2y^2)^2} \\
\leqslant& 3|x|\frac{4y^4}{4y^4} \text{ car } y^4 \leqslant 4y^4+x^4+4x^2y^4 \\
\leqslant& 3|x|
\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$$

Pour le deuxième :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant& 6\frac{x^4|y|}{(x^2+2y^2)^2} \\
\leqslant& 6|y|\frac{x^4}{x^4} \text{ car } x^4 \leqslant 4y^4+x^4+4x^2y^4 \\
\leqslant& 6|y|
\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Ainsi, on constate que f est $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.

Exercice 11 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$f : (x,y) \longmapsto \varphi(x+y) \qquad g : (x,y) \longmapsto \varphi\left(x^2+y^2\right)$$

$$h : (x,y) \longmapsto \varphi(xy) \qquad k : (x,y) \longmapsto \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)dt$$

Correction : en regardant les composées, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi'(x+y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi'(x+y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x\varphi'(x^2+y^2) \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y\varphi'(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = y\varphi'(xy) \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = x\varphi'(xy)$$

Pour la dernière il faut écrire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ k(x,y) = \Psi(x+y) - \Psi(x-y) \text{ avec } \Psi \text{ une primitive de } \varphi$$

Ainsi :

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = \varphi(x+y) - \varphi(x-y) \qquad \frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y)$$

⋆ Interprétation géométrique

Exercice 12 Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $z^3 = xy$.

Déterminer les plans tangents à $\mathscr{S}$ en un point régulier, contenant la droite Δ d'équation :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$$

Correction : On note $f : (x,y,z) \mapsto z^3 - xy$. Ainsi $\mathscr{S}$ est la surface de niveau 0 de f.
Soit $(x_0,y_0,z_0) \in \mathscr{S}$, on a alors :

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} -y_0 \\ -x_0 \\ 3z_0^2 \end{pmatrix}$$

Si $(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$, alors le point (x_0,y_0,z_0) est régulier et le plan tangent à pour équation :

$$\Pi : \qquad -y_0(x-x_0) - x_0(y-y_0) + 3z_0^2(z-z_0) = 0$$

en utilisant la relation $z_0^3 = x_0 y_0$, on obtient :

$$\Pi : \qquad -y_0 x - x_0 y + 3z_0^2 z - z_0^3 = 0$$

On cherche alors $(x_0,y_0,z_0) \in \mathscr{S}$ tels que $\Delta \in \Pi$.
On écrit :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \Delta &\iff (x,y,z) = (2, 3z-3, z) \\ &\iff (x,y,z) = (2,-3,0) + z(0,3,1) \end{aligned}$$

Le plan Π a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} -y_0 \\ -x_0 \\ 3z_0^2 \end{pmatrix}$, ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta \in \Pi &\iff (2,-3,0) \in \Pi \text{ et } (0,3,1) \perp (-y_0,-x_0,3z_0^2) \\ &\iff -2y_0 + 3x_0 - z_0^3 = 0 \text{ et } -3x_0 + 3z_0^2 = 0 \\ &\iff 3x_0 - z_0^3 = 2y_0 \text{ et } x_0 = z_0^2 \\ &\iff 3z_0^2 - z_0^3 = 2y_0 \text{ et } x_0 = z_0^2 \end{aligned}$$

Supposons $\Delta \in \Pi$ et $z_0 = 0$, on a alors $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$, ce qui est impossible. Ainsi, $z_0 \neq 0$.
On utilise alors les deux relations : $x_0 = z_0^2$ et $y_0 x_0 = z_0^3$ (cette relation reste vraie) pour obtenir $y_0 = z_0$. Ainsi, on a obtenu :

$$\begin{aligned} \Delta \in \Pi &\iff 3z_0^2 - z_0^3 = 2z_0 \text{ et } y_0 = z_0 \text{ et } x_0 = z_0^2 \\ &\iff z_0^2 - 3z_0 + 2 = 0 \text{ et } y_0 = z_0 \text{ et } x_0 = z_0^2 \\ &\iff \Big(z_0 = 1 \text{ ou } z_0 = 2\Big) \text{ et } y_0 = z_0 \text{ et } x_0 = z_0^2 \end{aligned}$$

Au final, on a donc deux solutions $A = (1,1,1)$ et $B = (4,2,2)$. Il ne reste plus qu'à écrire les plans correspondants :

$$\begin{aligned} \Pi_A : &\quad -x - y + 3z - 1 = 0 \\ \Pi_B : &\quad -4x - 2y + 12z - 8 = 0 \text{ ie } -2x - y + 6z - 4 = 0 \end{aligned}$$

Exercice 13 Tangente en point d'une conique

Soient a et b deux réels strictement positifs, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathscr{C}$ et T_0 la tangente en M_0.

1. Donner l'équation de T_0.
2. Trouver les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est perpendiculaire à T_0

Correction :

1. On considère la fonction : $f:(x,y)\mapsto \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$
   Soit (x_0,y_0) un point de $\mathscr{C}$. On a alors :

$$\nabla f(x_0,y_0)=2\begin{pmatrix}\frac{x_0}{a^2}\\ \frac{y_0}{b^2}\end{pmatrix}\neq 0 \text{ car } (x_0,y_0)\neq(0,0) \text{ puisque } (0,0)\notin\mathscr{C}$$

   Ainsi, tout point (x_0,y_0) de $\mathscr{C}$ est régulier. On connaît donc la tangente au point (x_0,y_0) :

$$\begin{aligned} T_0: \quad & \frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)=0\\ & b^2x_0x+a^2y_0y-b^2x_0^2-a^2y_0^2=0\end{aligned}$$

   On peut utiliser la relation : $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$ pour obtenir :

$$T_0: \quad b^2x_0x+a^2y_0y-a^2b^2=0$$

   Un vecteur normal non nul à T_0 est $\begin{pmatrix}b^2x_0\\ a^2y_0\end{pmatrix}$.

2. On cherche $(x,y)\in\mathscr{C}$, tels que :

$$T_0\perp T \text{ où } T \text{ est la tangente à } T_0$$

   Cela équivaut à l'orthogonalité des vecteurs normaux, qui s'écrit donc :

$$\begin{aligned} T_0\perp T &\iff \begin{pmatrix}b^2x_0\\ a^2y_0\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}b^2x\\ a^2y\end{pmatrix}\\ &\iff b^4xx_0+a^4y_0y=0\end{aligned}$$

   (x,y) appartiennent donc à la droite D d'équation $b^4xx_0+a^4y_0y=0$. Il reste à trouver les points d'intersection de cette droite avec $\mathscr{C}$.
   Supposons (x,y) solution avec $y\neq 0$, on a alors les relations :

$$b^4xx_0+a^4y_0y=0 \text{ et } b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \text{ et } b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$$

   Il faut vérifier qu'il n'y a que deux points solutions :
   - La première relation donne y en fonction de x, x_0, y_0, a et b :

$$y=-\frac{b^4x_0}{a^4y_0}x$$

   - On injecte dans la deuxième qui donne x^2 en fonction de x_0, y_0, a et b :

$$\begin{aligned} b^2x^2+a^2\frac{b^8x_0^2}{a^8y_0^2}x^2 &=a^2b^2\\ b^2x^2+\frac{b^8x_0^2}{a^6y_0^2}x^2 &=a^2b^2\\ a^6b^2y_0^2x^2+b^8x_0^2x^2 &=a^8b^2y_0^2\\ \left(a^6y_0^2+b^6x_0^2\right)x^2 &=a^8y_0^2\end{aligned}$$

On prend la racine :

$$x = \pm \frac{a^4 y_0}{\sqrt{a^6 y_0^2 + b^6 x_0^2}}$$

il y a donc deux valeurs pour x

- On en déduit la valeur pour y :

$$y = \mp \frac{b^4 x_0}{\sqrt{a^6 y_0^2 + b^6 x_0^2}}$$

(**NB :** il n'y a que deux solutions. Si c'est un $+$ pour x c'est un $-$ pour y et réciproquement). Au final :

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{a^4 y_0}{\sqrt{a^6 y_0^2 + b^6 x_0^2}}, \frac{b^4 x_0}{\sqrt{a^6 y_0^2 + b^6 x_0^2}} \right), \right.$$
$$\left. \left(-\frac{a^4 y_0}{\sqrt{a^6 y_0^2 + b^6 x_0^2}}, -\frac{b^4 x_0}{\sqrt{a^6 y_0^2 + b^6 x_0^2}} \right) \right\}$$

il reste à faire le cas où $y = 0$, dans ce cas $a = \pm b$.

Exercice 14 Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Donner l'équation du plan Π tangent à $\mathscr{S}$ au point Ω de coordonnées $(1,0,0)$.
2. Généraliser en donnant l'équation du plan $\Pi_{(x_0,y_0,z_0)}$ tangent à $\mathscr{S}$ au point de coordonnées (x_0,y_0,z_0).
3. Déterminer, en fonction de (x_0,y_0,z_0) les coordonnées du projeté orthogonal de O sur le plan $\Pi_{(x_0,y_0,z_0)}$.

Correction :

1. on calcule les dérivées partielles de $f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 - 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2z$$

Ainsi, le point $(1,0,0)$ est régulier puisque $\nabla f(1,0,0) = (2,0,0)$.
L'équation du plan tangent est donc :

$$2(x-1) = 0 \text{ ie } x = 1.$$

2. On reprend le cas d'un point quelconque (x_0,y_0,z_0) de $\mathscr{S}$. On constate que c'est un point régulier (puisqu'il est dans $\mathscr{S}$, donc il n'est pas nul). On a donc l'équation du plan tangent :

$$\Pi : x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - z_0(z - z_0) = 0$$

Ce qui s'écrit : $x_0 x + y_0 y - z_0 z - 1 = 0$ car $(x_0,y_0,z_0) \in \mathscr{S}$.
Le vecteur normal au plan est (le gradient) : $(x_0,y_0,-z_0)$.

3. On cherche le projeté de 0 sur ce plan. Le projeté est un point (x,y,z) vérifiant :

$$(x,y,z) \in \Pi \text{ et } (x,y,z) \text{ est colinéaire à} (x_0,y_0,-z_0)$$

D'où on cherche λ tel que :

$$(x,y,z) = \lambda(x_0,y_0,-z_0)$$

sachant que :

$$x_0 x + y_0 y - z_0 z - 1 = 0 \text{ ce qui s'écrit : } \lambda x_0^2 + \lambda y_0^2 + \lambda z_0^2 = 1$$

d'où :

$$\lambda = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

et donc :

$$(x,y,z) = \frac{1}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}(x_0,y_0,-z_0)$$

Le projeté de 0 sur le plan tangent à un point (x_0,y_0,z_0) de $\mathscr{S}$ est donc :

$$\frac{1}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}(x_0,y_0,-z_0)$$

Exercice 15 Déterminer les points de la surface $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $x^2-y^2+z^2=1$ dont le plan tangent est parallèle au plan Π d'équation $2x+y-z=0$.

Correction : On note $f:(x,y,z)\mapsto x^2-y^2+z^2-1$, ainsi $\mathscr{S}$ est la surface de niveau 0 de f.
On considère un point (x_0,y_0,z_0) de $\mathscr{S}$ et on calcule le gradient de f en ce point :

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ -2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, puisque $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$ (car $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$), on en déduit que le point (x_0,y_0,z_0) est régulier et qu'en ce point la surface $\mathscr{S}$ admet un plan tangent de vecteur normal $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$. Ce plan a pour équation :

$$\begin{aligned} P(x_0,y_0,z_0): \quad & x_0(x-x_0)-y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0 \\ & x_0x-y_0y+z_0z-1=0 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$.

Maintenant il s'agit de trouver (x_0,y_0,z_0) pour que le plan $P(x_0,y_0,z_0)$ soit parallèle au plan Π d'équation : $2x+y-z=0$. Il suffit pour cela d'avoir le vecteur normal à Π ie $(2,1,-1)$ qui est colinéaire au vecteur normal à P c'est-à-dire à $(x_0,-y_0,z_0)$. On doit donc avoir :

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\ (x_0,-y_0,z_0)=\lambda(2,1,-1) \text{ ie } x_0=2\lambda,\ y_0=-\lambda,\ z_0=\lambda$$

mais il faut aussi que $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$, ce qui donne :

$$\lambda^2 4-\lambda^2+\lambda^2=1$$

D'où $\lambda=\pm\frac{1}{2}$, et donc il y a deux solutions pour (x_0,y_0,z_0) :

$$\mathscr{S} = \left\{\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\ \left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

⋆ Recherche d'extremums

Exercice 16 Soit la fonction :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x^3+6xy-3y^2+2 \end{array}\right.$$

1. Déterminer les extréma relatifs (locaux) de la fonction f.
2. La fonction f a-t-elle des extremas globaux ?
3. Représenter le segment de droite L défini par

$$L=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\leqslant x\leqslant 0 \text{ et } y=x+1\right\}$$

et déterminer les extrémas globaux de la restriction de f à L en précisant en quels points de L ils sont atteints.

Correction :

1. On cherche les points critiques, qui sont solutions de

$$\begin{cases} x^2+y=0 \\ 6x-6y=0 \end{cases}$$

Les points critiques sont : $(0,0)$ (point selle) et $(-1,-1)$ (maximum local).
On calcule les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-6$$

Les matrices hessiennes asssociées sont :

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Pour la première le déterminant est négatif, donc les valeurs propres sont de signe contraire, c'est un point selle.
Pour le deuxième le déterminant est positif et la trace négative, on a un maximum local.

2. On a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,0)=\pm\infty$, donc f n'est ni minorée ni majorée. On peut aussi voir que $\lim\limits_{y\to+\infty} f(0,y)=-\infty$.
Ou alors : si min global alors min local impossible. Si max global alors max local donc c'est $(-1,-1)$, mais en fait $f(2,0)>f(-1,-1)$ donc pas de max global.

3. On a :

$$L=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | -2\leqslant x\leqslant 0 \text{ et } y=x+1\right\}=\{(t,t+1)|t\in[-2,0]\}$$

C'est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et f est continue donc f admet un minimum et un maximum sur cette partie.
La restriction s'écrit :

$$f_L : t\longmapsto 2t^3+3t^2-1$$

On étudie cette fonction. Dérivée : $t\longmapsto 6t(t+1)$. change de signe en -1. On crée le tableau des variations.
-2 minimum (valeur -5), -1 maximum valeur 0.
Donc la restriction de f à L admet un minimum global en $(-2,-1)$ (valeur -5) et un maximum global en $(-1,0)$ (valeur 0).

Exercice 17 soit $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On suppose de plus que les $x_1,\dots,x_n$ ne sont pas tous égaux.

1. On note $V(x)=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$.
Vérifier qu'avec ces hypothèses, $V(x)>0$.
2. Déterminer le minimum de :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2 \end{cases}$$

On utilisera les notations suivantes :

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \qquad \overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$cov(x,y)=\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y} \qquad V(x)=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$$

Interprétation : droite de régression linéaire, minimisation des erreurs quadratiques.
Correction : On calcule les dérivées partielles pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,b) =&2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i \\ =&2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right) \\ =&2n\left(a\overline{x^2}+b\overline{x}-\overline{xy}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial b}(a,b) =& 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)\\ =& 2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn-\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\\ =& 2n\left(a\overline{x}+bn-n\overline{y}\right)\end{aligned}$$

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} a\overline{x^2}+b\overline{x}=\overline{xy}\\ a\overline{x}+b=\overline{y}\end{cases}$$

Ce qui donne après $l_1-\overline{x}l_2$:

$$a=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2}=\frac{cov(x,y)}{V(x)}$$

et :

$$b=\overline{y}-\overline{x}\frac{cov(x,y)}{V(x)}$$

On n'a donc qu'un seul extremum candidat.
Il reste à vérifier que c'est bien un extremum.
Méthode par majoration.
On note (a,b) ces valeurs, et on calcule pour tout (h,k) :

$$\begin{aligned}\varphi(a+h,b+k) =& \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i+hx_i+b+k-y_i\right)^2\\ =& \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i+b-y_i+hx_i+k\right)^2\\ =& \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i+b-y_i\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(hx_i+k\right)^2+\sum_{i=1}^{n}2\left(ax_i+b-y_i\right)\left(hx_i+k\right)\\ =& \varphi(a,b)+2h\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i+b-y_i\right)x_i}_{=0}+k\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i+b-y_i\right)}_{=0}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(hx_i+k\right)^2}_{\geqslant 0}\end{aligned}$$

Méthode par matrice hessienne : ce n'est pas ce qui est demandé ici puisqu'on veut un minimum global.
Ceci dit, on peut essayer.
On peut calculer la matrice hessienne en ce point :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b)&=2n\overline{x^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}(a,b)&=2n\overline{x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b)&=2n^2\end{aligned}$$

D'où la matrice Hessienne :

$$H=\begin{pmatrix}2n\overline{x^2} & 2n\overline{x}\\ 2n\overline{x} & 2n^2\end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned}\det(H)=&4n^4\overline{x^2}-4n^4\left(\overline{x}\right)^2\\ =&4n^4\left(\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2\right)=4n^2V(x)\end{aligned}$$

On peut vérifier que $V(x) \geqslant 0$. Pour cela, on peut faire :

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \times \frac{1}{n} = \left| \left\langle (|x_1|, \dots, |x_n|) \cdot \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \right\rangle \right| \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}} \\
&\leqslant \sqrt{noverlinex^2} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{overlinex^2}
\end{aligned}$$

Donc $\det(H) \geqslant 0$.

Ce qui ne permet donc pas de conclure puisque le déterminant peut être égal à 0.

Exercice 18 Soit la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^2 + xy + x - y \end{array} \right.$$

1. Montrer que f n'admet pas de maximum global.
2. Montrer que f admet un minimum global.
3. Soit les ensembles :

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \|(x,y)\|_2 \leqslant 1 \right\} \qquad \text{et} \qquad F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \|(x,y)\|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

Montrer que f admet un minimum et un maximum sur E et sur F.

Correction :

1. Il faut vérifier que f n'est pas majorée. Par exemple, on peut regarder :

$$f(t,t) = 3t^2 \to +\infty$$

Ainsi, f n'est pas majorée donc ne peut pas admettre de maximum.

2. Comme la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, il faut déterminer les extremums candidats. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =& 2x + y + 1 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =& 2y + x - 1
\end{aligned}$$

On résout donc :

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

ce qui donne : $x = -1$ et $y = 1$ est l'unique solution.
il faut ensuite calculer :

$$f(-1+h, 1+k) - f(-1,1) = h^2 + k^2 + hk = \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \geqslant 0$$

ainsi $(-1,1)$ est un minimum global.

3. E et F sont des fermés bornés et dimension finie. Comme f est continue, elle admet sur E et F un maximum et un minimum. Comme f est $\mathscr{C}^1$, si un extremum est à l'intérieur, alors les dérivées partielles s'annulent en ce point.
E est le cercle unité. Il n'y a pas de points critique à l'intérieur, il faut chercher les extremums sur le bords. Pour cela, on paramètre le bord : On regarde donc :

$$\begin{aligned}
\varphi : t \mapsto & f(\cos(t), \sin(t)) = 1 + \cos(t)\sin(t) + \cos(t) - \sin(t) \\
\mapsto & 1 + \frac{1}{2}\sin(2t) + \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Il faut étudier les variations de cette fonction :

$$\varphi'(t) = \cos(2t) - \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

On trace alors le tableau des variations.
Pour F on n'a déjà le minimum global en $(-1,1)$. Il faut ensuite paramétrer le bord (c'est un carré).

Exercice 19 Soit C le carré $[0,2]\times[-1,0]$ de $\mathbb{R}^2$.

Rechercher sur C les extremums globaux de la fonction :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc} C & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2-2x+xy+y^2 \end{array}\right.$$

Correction : Déjà, c'est une fonction continue sur un fermé bornée donc elle est bornée et atteint ses bornes.
On travaille déjà en cherchant un extremum global sur l'ouvert.
On cherche les points critiques qui sont solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} 2x_0-2+y_0=0 \\ x_0+2y_0=0 \end{cases}$$

On trouve comme unique solution $\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ C'est le seul extremum candidat.
On considère donc la fonction :

$$\varphi:(h,k)\longmapsto f\left(\frac{4}{3}+h,-\frac{2}{3}+k\right)-f\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

on trouve :

$$\varphi(h,k)=h^2+k^2+hk=\left(h+\frac{1}{2}k\right)^2+\frac{3}{4}k^2\geqslant 0$$

On en déduit que f admet un minimum global en $\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ sur l'ouvert et il vaut $-\frac{4}{3}$.
Il faut ensuite regarder le bord, que l'on décompose en quatre parties. Cela revient à étudier les fonctions :

$$\begin{aligned} a_1 &: t\in[0,2]\mapsto f(t,-1)=t^2-3t+1 \\ a_2 &: t\in[0,2]\mapsto f(t,0)=t^2-2t \\ a_3 &: t\in[-1,0]\mapsto f(0,t)=t^2 \\ a_4 &: t\in[-1,0]\mapsto f(2,t)=2t+t^2 \end{aligned}$$

Il s'agit de fonctions polynomiale, il est ainsi simple de déterminer les extremums globaux (on fait rapidement le tableau de variation si besoin) :

- a_1 est décroissante pour $t\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$, croissante ensuite. $a_1(0)$ est un maximum égal à 1 et $a_1\left(\frac{3}{2}\right)$ est un minimum local égal à $-\frac{5}{4}$ (mais ce minimum n'est en aucun cas un minimum global de f puisqu'on a trouvé un minimum égal à $-\frac{4}{3}$).
- a_2 est maximal en 0 (valeur 0), maximal en 2 (valeur 0) et minimal en $\frac{1}{2}$ (valeur -1 que l'on ne conservera pas comme minimum global).
- a_3 est maximal en -1 (valeur 1) et minimal en 0 (valeur 0 que l'on ne conservera pas comme minimum global)
- a_4 est minimal en -1 (valeur -1 que l'on ne conservera pas comme minimum global) et maximal en 0 (valeur 0).

On constate donc que la valeur trouvée est en fait le minimum sur le fermé : f admet un minimum global en $\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ et il vaut $-\frac{4}{3}$.

Il reste ensuite à regarder le maximum global. On sait que f admet un maximum global, cela ne peut pas être un point à l'intérieur, c'est donc un point du bord, et cela ne peut être que le point $(0,-1)$ (pour lequel la valeur est 1).

En conclusion :

- Le minimum global est située en $\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ et il vaut $-\frac{4}{3}$.
- Le maximum global est située en $(0,-1)$ et il vaut 1.

Exercice 20 **CCINP 2021 PSI**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Expliciter des points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y)<0$.
   Expliciter de même des points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y)>0$.
   La fonction f admet-elle en $(0,0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

   On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$: $\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=f(1+u,1+v)-f(1,1)$.
3. Calculer, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $g(u,v)$ puis, pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, $g(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

4. Prouver que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geqslant 3r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}r\right)$.
   Que peut-on en conclure ?
5. Obtenir ce résultat avec la matrice Hessienne.
6. La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

Correction :

1. On a :

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (1,1)$$

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x,0) = x^3 < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x,0) > 0$.
   On en déduit que f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$. On peut aussi prendre des suites avec $f\left(-\frac{1}{n}, 0\right)$.
3. $g(u,v) = 3u^2 + 3v^2 - 3uv + u^3 + v^3$ puis

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3r^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + \frac{r}{3}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right)$$

4. On a :

$$1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) \geqslant \frac{1}{2}$$

   et

$$\cos^3\theta + \sin^3\theta \geqslant -2$$

   donc

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geqslant 3r^2\left(\frac{1}{2} - 2\frac{r}{3}\right)$$

   Lorsque $0 \leqslant r \leqslant \frac{3}{4}$, $g(u,v) \geqslant 0$ donc f admet un minimum local en $(1,1)$.
5. **Autre méthode :** On calcule la matrice hessienne en $(1,1)$:

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

   Le déterminant est $45 > 0$ donc deux racines positives et la trace est 12 donc toutes positives on a un minimum local.
6. Global implique local donc le seul extremum possible est en $(1,1)$ et c'est un minimum. Mais $f(-2,0) = -8 < -1 = f(1,1)$ donc f n'admet pas d'extremum global.
   Ou encore, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$ donc f n'est ni minorée ni majorée.

☆ Lien avec le théorème spectral

Exercice 21 Soit A une matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On note :

$$f : \begin{cases} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & X^T A X \end{cases}$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Montrer que si $Sp(f) \subset \mathbb{R}^+$, alors f est minimale en ces points critiques.

Correction :

1. **Calcul du gradient méthode 1 :**

On note $X = (x_1, \dots, x_n)$, et on a :

$$\begin{aligned}
f(x_1,\dots,x_n) &= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + \sum_{i=1}^n a_{i1}x_i \\
\partial_2 f(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + \sum_{i=1}^n a_{i2}x_i \\
&\vdots \\
\partial_n f(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j + \sum_{i=1}^n a_{in}x_i
\end{aligned}$$

Ainsi, un point critique $(x_1,\dots,x_n)$ vérifie :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + \sum_{i=1}^n a_{i1}x_i = 0 \\
&\sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + \sum_{i=1}^n a_{i2}x_i = 0 \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j + \sum_{i=1}^n a_{in}x_i = 0
\end{aligned}$$

Cela s'écrit : $AX + A^TX = 0$. ou encore : $2AX = 0$

Calcul du gradient méthode 2 : Considérons un X quelconque, un H petit et calculons :

$$\begin{aligned}
f(X+H) =& (X+H)^T A(X+H) \\
=& X^TAX + H^TAX + X^TAH + H^TAH \\
=& X^TAX + H^TAX + H^TA^TX + H^TAH && \text{car } X^TAH \text{ est un réel} \\
=& X^TAX + \left\langle H \cdot (AX + A^TX) \right\rangle + H^TAH
\end{aligned}$$

Il reste à démontrer que :

$$H^TAH = \underset{H\to 0}{o}(H)$$

Une fois cela fait, on a :

$$\begin{aligned}
f(X+H) =& X^TAX + + \left\langle H \cdot AX + A^TX \right\rangle + \underset{H\to 0}{o}(H) \\
=& f(X) + df_X(H) + \underset{H\to 0}{o}(H)
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'assurer que :

$$\begin{aligned}
df_X(H) &= \langle \nabla f(X) \cdot H \rangle \\
&= \left\langle H \cdot AX + A^TX \right\rangle
\end{aligned}$$

et donc :

$$\nabla f(X) = AX + A^T X = 2AX$$

Pour démontrer :

$$H^T AH \underset{H\to 0}{=} o(H)$$

il y a plusieurs méthodes, la plus simple consiste à écrire :

$$(X,Y) \longmapsto X^T AY$$

est bilinéaire donc :

$$\exists k \in \mathbb{R},\ |X^T AY| \leqslant k\|X\|\|Y\|$$

et donc :

$$|H^T AH| \leqslant k\|H\|^2$$

une autre méthode consiste à écrire que :

$$\begin{aligned} |H^T AH| &= |\langle H \cdot AH\rangle| \\ &\leqslant \|H\|\|AH\| && \text{par Cauchy-Schwartz} \end{aligned}$$

on continue alors en utilisant la continuité de $H \longmapsto AH$ (on peut même alors obtenir : $\|AH\| \leqslant |||A|||\|H\|$).
Fin de la question : Les points critiques sont donc les $X \in \ker(A)$. Il n'y a donc que les éléments de $E_0(A)$

2. Soit $X \in \ker(A)$, on a alors $f(X) = 0$ et pour H petit :

$$\begin{aligned} f(X+H) - f(X) &= (X+H)^T A(X+H) \\ &= X^T AX + \langle H \cdot (AX + A^T X)\rangle + H^T AH \\ &= H^T AH \end{aligned}$$

On écrit alors $A = P^T DP$ avec D diagonale et à coefficients positifs (puisque c'est les valeurs propres). On a :

$$f(X+H) = H^T P^T DPH = \langle PH \cdot DPH\rangle$$

Il reste à vérifier que cette quantité est positive. Considérons un vecteur X quelconque, on a :

$$\langle X, DX\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$$

avec $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Donc $f(X+H) \geqslant 0$ et donc f est minimale en X.

⋆ **Exemple de résolution d'équations aux dérivées partielles**

Exercice 22

Un résultat à savoir démontrer et à connaître : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, produit cartésien de deux intervalles de $\mathbb{R}$.

On suppose :

$$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

Montrer alors qu'il existe une fonction C réelle de la variable réelle de classe $\mathscr{C}^1$, telle que :

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = C(y)$$

Ce résultat sert à résoudre des équations aux dérivées partielles, dont l'inconnue est une fonction et qui fait apparaître la fonction et ses dérivées partielles.

Voici quelques exemples :

1. (a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

On pose :

$$\tilde{f} : (u,v) \mapsto f(u, v+2u)$$

Dériver $\tilde{f}$ par rapport à u et v.

(b) En déduire qu'il existe une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \frac{x^2}{2} + C(-2x+y)$$

Indication : vérifier que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \tilde{f}(x, -2x+y)$$

(c) Conclure sur l'ensemble des fonctions qui vérifient la relation.

2. (a) On considère $U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x > 0 \right\}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall (x,y) \in U,\ -y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

On pose alors :

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ (\rho, \theta) & \longmapsto & f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array} \right.$$

Dériver $\tilde{f}$ par rapport à ρ et à θ.

(b) En déduire qu'il existe une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f : (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

(c) Conclure sur l'ensemble des fonctions qui vérifient la relation.

Correction : Fixons $x_0 \in I$ et $(x,y) \in U$. On va montrer que : $f(x,y) = f(x_0, y)$.

Pour cela, on considère l'application partielle par rapport à la deuxième variable :

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t,y) \end{array} \right.$$

Cette fonction réelle de la variable réelle vérifie

$$\forall t \in I,\ f_2'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) = 0 \text{ ce qui s'écrit } f_2' = 0$$

Sa dérivée est donc nulle sur un intervalle, elle est donc constante sur l'intervalle I. Ainsi : $f(x,y) = f(x_0,y)$. Comme (x,y) sont quelconques, on en déduit :

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = \varphi(y) \qquad \text{où } \varphi : y \longmapsto f(x_0, y).$$

1. On a alors : pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u, v+2u) + 2\frac{\partial f}{\partial t}(u, v+2u) \\ &= x && \text{avec les anciennes variables} \\ &= u && \text{avec les nouvelles variables} \end{aligned}$$

ainsi :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) = u$$

il existe C de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \tilde{f}(u,v) = \frac{u^2}{2} + C(u)$$

ce qui donne :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \tilde{f}(x, -2x+y) = \frac{x^2}{2} + C(-2x+y)$$

2. on note $V =]0, +\infty[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   On a pour $(\rho, \theta) \in V$:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(\rho,\theta) = -\rho\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \rho\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

   L'équation différentielle vérifiée par f indique que :

$$\forall (\rho,\theta) \in V,\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(\rho,\theta) = \rho$$

   Ainsi :

$$\forall (\rho,\theta) \in V,\ f(\rho,\theta) = \rho\theta + C(\rho)$$

   où $C : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
   En revenant aux anciennes variables, on obtient l'écriture de f :

$$f : (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Problème de recollement

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Considérons l'équation :

$$(E): \qquad \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x),$$

avec α, β et γ des fonctions définies et continues sur I à valeurs réelles.

Une solution de cette équation est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que :

$$\forall x \in I, \quad \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x).$$

Contrairement au cours, CETTE ÉQUATION N'EST PAS RÉSOLUE.

Si la fonction α s'annule sur I, on ne peut pas diviser et retrouver la forme du cours. En pratique, on découpe l'intervalle I en deux (ou plus) intervalles où α ne s'annule pas, notés I_1 et I_2. On résout l'équation différentielle sur I_1 et I_2.

On essaie ensuite de raccorder les solutions en cherchant une solution sur I entier. Généralement, on passe par une analyse/synthèse : on suppose qu'une solution existe sur I entier, on connaît alors sa forme sur I_1 et I_2, et on regarde si on peut choisir les paramètres pour obtenir une solution sur I entier.

Soit l'équation différentielle

$$(E): \qquad 3xy'(x) - 4y(x) = x$$

On sait résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ mais aucun résultat du cours ne s'applique à la résolution sur $\mathbb{R}$.

⋆ **Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$**

Sur $\mathbb{R}_+^*$, (E) s'écrit aussi

$$(E, \mathbb{R}_+^*) \qquad y'(x) - \frac{4}{3x}y(x) = \frac{1}{3}$$

Une primitive de $x \mapsto -\frac{4}{3x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto -\frac{4}{3}\ln(x)$

On peut donc appliquer le cours, qui donne l'ensemble des solutions homogènes :

$$\mathscr{S}_{(H),\mathbb{R}_+^*} = \left\{ y : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x^{\frac{4}{3}} \end{array} \right. \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On remarque que

$$y : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{array} \right. \text{ est solution particulière de } (E, \mathbb{R}_+^*).$$

D'où l'ensemble des solutions :

$$\mathscr{S}_{(E),\mathbb{R}_+^*} = \left\{ y : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x^{\frac{4}{3}} - x \end{array} \right. \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

R Bien écrire que les fonctions considérées ici sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$

⋆ **Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$**

Sur $\mathbb{R}_-^*$, mêmes raisonnements.

Une primitive de $x \mapsto -\frac{4}{3x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x \mapsto -\frac{4}{3}\ln(-x)$

On trouve :

$$\mathscr{S}_{(E),\mathbb{R}_-^*} = \left\{ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu(-x)^{\frac{4}{3}} - x \end{array} \right. \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

! La résolution sur le deuxième ensemble ne demande généralement pas de calculs mais attention aux signes.

★ **Existence de solutions sur $\mathbb{R}$**

Analyse

On suppose l'existence d'une telle solution f solution sur $\mathbb{R}$.

La fonction f (ou plus exactement sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$) est en particulier solution sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc on a :

$$\exists\lambda \in \mathbb{R},\ \forall x > 0, f(x) = \lambda x^{\frac{4}{3}} - x$$

De même,

$$\exists\mu \in \mathbb{R},\ \forall x < 0, f(x) = \mu(-x)^{\frac{4}{3}} - x$$

On cherche la valeur de $f(0)$ et les conditions éventuelles sur λ et μ, pour que f soit continue et dérivable en 0 et vérifie l'équation en ce point.

Comme $\lim\limits_{0^+} f(x) = 0$, et que la fonction f doit être continue en 0, on a : $f(0) = 0$.

Regardons maintenant si elle est dérivable en 0.

On va regarder la limite à gauche et à droite du taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \lambda x^{\frac{1}{3}} - 1 = -1 \qquad \text{dérivée à droite}$$

$$\text{de même : } \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} -\mu(-x)^{\frac{1}{3}} - 1 = -1 \qquad \text{dérivée à gauche}$$

Ainsi, on constate donc que la fonction est dérivable en 0 quelque soit le choix de λ et de μ avec $f'(0) = -1$.

Enfin, on sait déjà que la restriction de la fonction f à $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ est solution de l'équation (E). Ainsi :

$$\forall x \neq 0, \quad 3xf'(x) - 4f(x) = x$$

Pour $x = 0$, on a :

$$3 \times 0 \times f'(0) - 4\underbrace{f(0)}_{=0} = 0.$$

La relation est donc bien vérifiée en 0.

Synthèse

Soit λ et μ deux réels quelconque.

Considérons la fonction :

$$f \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \lambda x^{\frac{4}{3}} - x & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mu(-x)^{\frac{4}{3}} - x & \text{pour } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

La fonction f est continue à gauche et à droite en 0, donc continue en 0. Elle est continue ailleurs, donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable en 0 et sur $\mathbb{R}$ d'après le calcul fait dans l'analyse.

La relation différentielle est vérifiée en tout point de $\mathbb{R}^*$ et en 0 (calcul fait dans l'analyse). On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3xf'(x) - 4f(x) = x$$

La relation est ainsi vérifiée partout. Au total, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

★ **Conclusion**

$$\mathscr{S}_{(E),\mathbb{R}} : \left\{ f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \lambda x^{\frac{4}{3}} - x & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mu(-x)^{\frac{4}{3}} - x & \text{pour } x < 0 \end{cases} \end{array} \right. \ \middle|\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Toutes les solutions vérifient $f(0)=0$, il n'y a pas d'unicité au problème de Cauchy.

✯ Un deuxième exemple

On veut résoudre :

$$(E) \qquad ty' + y = 1$$

cette équation (E) est valable sur $\mathbb{R}$. On cherche donc *a priori* des fonctions solutions y définies sur $\mathbb{R}$.

Pour retrouver la forme classique du cours, on doit diviser par t et donc découper l'intervalle en deux parties : $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

On a alors deux équations :

$$\begin{array}{lll} (E_1) & y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t} & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \\ \text{et } (E_2) & y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t} & \text{sur } \mathbb{R}^{-*}. \end{array}$$

Pour résoudre (E_1), on procède classiquement en résolvant (H) :

$$(H) \qquad y' + \frac{1}{t}y = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}$$

On trouve (puisqu'on est sur la partie $t>0$) :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_H &= \left\{ y : t > 0 \mapsto \lambda e^{-\ln(t)} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y : t > 0 \mapsto \lambda \frac{1}{t} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de variation de la constante, qui donne ici :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\lambda(t)}{t} \\ y'(t) &= \frac{\lambda'(t)t - \lambda(t)}{t^2} \\ y'(t) + \frac{1}{t}y(t) &= \frac{\lambda'(t)}{t} = \frac{1}{t} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda'(t) = 1$ et $\lambda(t) = t$. On obtient donc une solution : $y_0 : t \mapsto 1$ (ce qui aurait pu être trouvé directement).

D'où l'ensemble des solutions de (E_1) :

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ y : t > 0 \mapsto 1 + \frac{\lambda}{t} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour (E_2) on procède de même. L'équation (H) s'écrit de la même manière, mais cette fois-ci la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est$t \mapsto \ln(-t)$ (puisque $t<0$).

Cela donne :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_H &= \left\{ y : t < 0 \mapsto \lambda e^{-\ln(-t)} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y : t < 0 \mapsto \frac{-\lambda}{t} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y : t < 0 \mapsto \frac{\lambda}{t} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

En effet, ces deux derniers ensembles de solutions sont les mêmes lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

R Souvent, comme ici, on trouve la même écriture de l'ensemble des solutions (à justifier soigneusement).

On cherche alors une solution particulière sous la même forme que précédemment et les calculs sont exactement les mêmes pour obtenir : $y \mapsto 1$ est solution particulière (on peut aussi tester directement cette solution).

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) :

$$\mathscr{S}_2 = \left\{ y : t < 0 \mapsto 1 + \frac{\lambda}{t} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Notre problème est de trouver les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
Analyse : On considère alors y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ ty'(t) + y(t) = 1.$$

Ainsi, la fonction :

$$y_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) \end{array} \right. \text{ ie la restriction de la fonction } y \text{ à } \mathbb{R}^{+*}$$

est solution de (E_1). On en déduit donc qu'il existe λ_1 tel que :

$$\forall t > 0,\ y(t) = 1 + \frac{\lambda_1}{t}.$$

En procédant de même sur l'autre intervalle, on obtient au final :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \neq 0,\ y(t) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda_1}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 + \frac{\lambda_2}{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Il faut alors trouver les valeurs de (λ_1, λ_2) qui permettent d'assurer que y est continue et dérivable en 0 et vérifie (E) en 0.
Si $\lambda_1 \neq 0$, alors la fonction y n'est pas continue en 0, puisque dans ce cas $\lim_{x \to 0^+} = \pm\infty$. On en déduit qu'il est nécessaire que λ_1 soit nul. De même, il est nécessaire que λ_2 est nul.
Ainsi, la seule solution candidate à (E) est la fonction $y : t \mapsto 1$.
Synthèse : Il reste à vérifier que cette fonction est bien solution.
On constate que cette fonction est dérivable et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, ty'(t) + y(t) = t \times 0 + 1 = 1.$$

Ainsi, l'équation est vérifiée en tout point.
Au final il y a une unique solution :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : t \longmapsto 1 \right\}.$$

Exercice 1

1. Résoudre $y' - \frac{x}{1-x} y = \frac{x}{1-x} e^{-x}$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
2. Rechercher les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(1-x)y' - xy = xe^{-x}$.

Correction : Sur $]-\infty, 1[$ Une primitive de

$$x \mapsto -\frac{x}{1-x} = 1 + \frac{1}{1-x}$$

est :

$$x \mapsto x + \ln(1-x).$$

Ainsi, l'ensemble des solutions homogènes est les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \frac{e^{-x}}{1-x} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution avec la variation de la constante :

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda(x) \frac{e^{-x}}{1-x} \\ y'(x) &= \lambda'(x) \frac{e^{-x}}{1-x} + \lambda(x) \frac{x}{1-x} \frac{e^{-x}}{1-x} \\ \hline y' - \frac{x}{1-x} y &= \lambda'(x) \frac{e^{-x}}{1-x} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\lambda'(x) = x \text{ et } \lambda(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Une solution particulière est ainsi : $x \mapsto \frac{x^2}{2}\frac{e^{-x}}{1-x}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : x \longmapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right) \frac{e^{-x}}{1-x} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Sur $]1, +\infty[$ Une primitive de

$$x \mapsto -\frac{x}{1-x} \text{ est } x \mapsto x + \ln(x-1).$$

Ainsi, l'ensemble des solutions homogènes est les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \frac{e^{-x}}{x-1} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

On obtient le même ensemble de solutions. On a la même solution particulière et donc le même ensemble de solutions.

On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$. Soit y solution sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{2} + \lambda_1\right) \frac{e^{-x}}{1-x} & \text{si } x > 1 \\ \left(\frac{x^2}{2} + \lambda_2\right) \frac{e^{-x}}{1-x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Si $\lambda_1 \neq -\frac{1}{2}$, alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$, ainsi, la seule solution candidate est :

$$x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{e^{-x}}{1-x} = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}$$

Synthèse, on considère la fonction $y \mapsto -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$y'(x) = -\frac{1}{2}(1 - x - 1)e^{-x} = \frac{x}{2}e^{-x}$$

On constate :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - \frac{x}{x-1}y(x) = \frac{x}{1-x}e^{-x}.$$

Notions sur les fonctions convexes

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Pour illustrer le théorème des accroissements finis on démontre ici quelques propriétés des fonctions convexes. Un seul résultat est au programme : une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes.

Définition VI.3 On dit que la fonction f est convexe sur un intervalle I, si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Ainsi, la courbe représentative d'une fonction convexe est **en dessous de toutes ses cordes**.

Définition VI.4 On dit que la fonction f est concave sur un intervalle I, si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Ainsi, la courbe représentative d'une fonction concave est **au dessus de toutes ses cordes**.

- On voit que f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.
- La notion de convexité n'est utile que si f est définie sur un intervalle : il faut que $(\lambda x + (1-\lambda)y)$ soit élément de l'ensemble de définition de f.
- Dans la définition, on peut toujours supposer que $x \leqslant y$, et même $x < y$.

■ **Exemple VI.1**
- une fonction affine est convexe et concave,
- $x \mapsto x^2$ est convexe,
- ln est concave, alors que e^x est convexe.

■

✯ Lien avec la dérivée

Dans le cas où f est dérivable, la dérivée est alors croissante.

Proposition VI.3 Soit f dérivable sur un intervalle I. On a alors :

$$f \text{ est convexe sur } I \iff f' \text{ est croissant sur } I$$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose f convexe et soit $x < y$ deux éléments de I. On va comparer $f'(x)$ et $f'(y)$ au taux de variation entre x et y, *i.e.* à : $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. On a :

$$f'(x) = f'_d(x) = \lim_{z \to x^+} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{\lambda x + (1-\lambda)y - x}$$

En posant $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, *i.e.* $\lambda = \dfrac{z-y}{x-y}$.

On a puisque f est convexe :

$$\begin{aligned}
\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{\lambda x + (1-\lambda)y - x} &= \frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} \\
&\leqslant \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} \\
&= \frac{(1-\lambda)(f(y)-f(x))}{(1-\lambda)(y-x)} \\
&= \frac{f(y)-f(x)}{y-x}
\end{aligned}$$

ainsi, $f'(x) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Tandis que :

$$f'(y) = f'_g(x) = \lim_{z \to y^-} \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = \lim_{\lambda \to 1^-} \frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(y)}{\lambda x + (1-\lambda)y - y}$$

On a puisque f est convexe :

$$\begin{aligned}\frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(y)}{\lambda x+(1-\lambda)y-y} &= \frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(y)}{\lambda(x-y)}\\ &\geqslant \frac{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-f(y)}{\lambda(x-y)}\\ &= \frac{\lambda(f(x)-f(y))}{\lambda(x-y)}\\ &= \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y).$$

Ce qui prouve que f' est une fonction croissante.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f' croissante soit $x,y \in I$, et $\lambda \in [0,1]$. La propriété est évidente pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$, on suppose donc $\lambda \in]0,1[$. De même le cas $x = y$ n'est pas intéressant, on suppose donc $x < y$.

Soit $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On a d'après le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned}\exists c \in]x,z[,\ f(z) =& f(x)+f'(c)(z-x) = f(x)+f'(c)(1-\lambda)(y-x)\\ \exists d \in]z,y[,\ f(z) =& f(y)+f'(d)(z-y) = f(y)-f'(d)\lambda(y-x)\end{aligned}$$

f' est croissante, donc on a $f'(c) \leqslant f'(d)$, donc en faisant $\lambda l_1 + (1-\lambda)l_2$.

$$\begin{aligned}f(z) =& \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\lambda(1-\lambda)(y-x)\underbrace{\left[f'(c)-f'(d)\right]}_{\leqslant 0}\\ \leqslant& \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\end{aligned}$$

Et donc f est convexe. ■

⋆ Cas d'une fonction deux fois dérivable

Proposition VI.4 Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors f convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$ sur I.
De la même manière f est concave si et seulement si $f'' \leqslant 0$ sur I.

Démonstration. Puisque f est deux fois dérivable, f' est croissant si et seulement si $f'' \geqslant 0$. ■

⋆ Position de la courbe par rapport à la tangente

Une autre manière de voir : si f est une fonction convexe **la courbe représentative** $\mathscr{C}_f$ est **au dessus de la tangente** :

Proposition VI.5 Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe, si et seulement si :

$$\forall (a,x) \in I^2,\ f(x) \geqslant f(a)+(x-a)f'(a)$$

i.e. f est au-dessus de sa tangente en a pour tout a.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f convexe et soit x et a éléments de I.

On sait que f' est croissant, et on sait que $\exists c \in]a,x[$, ou $]x,a[$ $f(x) = f(a)+f'(c)(x-a)$.

Si $x > a$, on peut alors majorer $f'(c)$ par $f'(a)$ (car f' est croissant), comme $(x-a) \geqslant 0$, on obtient :

$$f(x) \geqslant f(a)+(x-a)f'(a).$$

Si $a > x$ on a alors $f'(c) < f'(a)$ et $(x-a) \leqslant 0$, et donc on obtient de nouveau : $f(x) \geqslant f(a)+(x-a)f'(a)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit x et y éléments de I, avec $x < y$ on va démontrer que $f'(x) \leqslant f'(y)$, *i.e.* la croissance de f'.

On a : $f(x) \geqslant f(y)+(x-y)f'(y)$ donc : $f'(y) \geqslant \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ et : $f(y) \geqslant f(x)+(y-x)f'(x)$ donc : $f'(x) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

D'où

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y).$$

■

⋆ **Conclusion**

Ainsi, pour une fonction f dérivable sur I et sa courbe représentative $\mathscr{C}$, est équivalent :

(1) f convexe,
(2) $\mathscr{C}$ est en dessous de ces cordes,
(3) $\mathscr{C}$ est au dessus de ses tangentes,
(4) f' est croissant,
(5) f'' est positive (si deux fois dérivable).

Autre manière de voir : si f est $\mathscr{C}^2$, on peut appliquer Taylor-Lagrange à l'ordre 2. On obtient alors :

$$\forall a \in I,\ \forall x \in I,\ \exists c \in I,\ f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(c)}{2}.$$

Donc si f'' est positive, on est sûr que $(x-a)^2 f''(c) \geqslant 0$ et donc : $f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a)$. On retrouve le fait que si $f'' \geqslant 0$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Comme application de la convexité il y a les approximations que l'on peut obtenir en comparant la courbe à ses tangentes et/ou à ses cordes.

Exercice 1 Étudier la concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi]$, et en déduire que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

On a aussi la définition :

Définition VI.5 Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle I, et a un élément de I, qui n'est pas une extrémité de I. On dit que le point $(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de la courbe représentative de f si f'' s'annule et change de signe en a.

L'intérêt est qu'avant a, la fonction est convexe tandis qu'après elle est concave. Donc la courbe $\mathscr{C}$ **traverse sa tangente** au point a.