Exercices de préparation à l'oral

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

I Algèbre

Exercice 1 On considère pour $n \geqslant 3$, la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & & & \\ \vdots & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(les termes non écrits sont nuls).

1. Montrer que A_n est diagonalisable et déterminer son rang.
2. Dans cette question et cette question uniquement, on note $A = A_3$ et on considère la suite $(u_p = Tr(A^p))$.
   (a) Calculer les 15 premiers termes de la suite.
   (b) Calculer $B = A^3 - 2A^2 - A + I$.
   (c) Trouver une relation de récurrence simple pour (u_p).
   Donner un script Python permettant de calculer u_p.
3. (a) Montrer qu'une valeur propre non nulle de A_n est solution de l'équation :

$$f_n(x) = 0 \text{ où } f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n + \frac{d_n}{x-1}$$

   avec (a_n, b_n, c_n, d_n) des réels à déterminer.
   Indication : on s'intéressera au système $A_n X = \lambda X$.
   (b) Montrer que les valeurs propres non nulles de A_n sont racines du polynômes :

$$P_n(X) = X^3 - 2X^2 + (2-n)X + n - 2$$

4. On note $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ les trois valeurs propres distinctes de A_n.
   Montrer que le système :

$$\begin{cases} x + \alpha_n y + \alpha_n^2 z = \alpha_n^4 \\ x + \beta_n y + \beta_n^2 z = \beta_n^4 \\ x + \gamma_n y + \gamma_n^2 z = \gamma_n^4 \end{cases}$$

   n'admet qu'un triplet (x_n, y_n, z_n) comme solution.
   Donner un script Python permettant de résoudre ce système.

Commentaires : exercices longs et avec beaucoup de programmation.

Correction :

1. A_n est symétrique et réelle donc diagonalisable. Son rang est 3.
   (a) Il faut utiliser un script Python. On trouve les valeurs :

```
i:  0 ui:   3.0
i:  1 ui:   2.0
i:  2 ui:   6.0
i:  3 ui:   11.0
i:  4 ui:   26.0
i:  5 ui:   57.0
i:  6 ui:   129.0
i:  7 ui:   289.0
i:  8 ui:   650.0
i:  9 ui:   1460.0
i:  10 ui:   3281.0
i:  11 ui:   7372.0
i:  12 ui:   16565.0
i:  13 ui:   37221.0
i:  14 ui:   83635.0
```

(b) On utilise Python :

```
B [[ 0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.]]
```

(c) On a :$A^3 = 2A^2 + A - I$, donc

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A^{p+3} = 2A^{p+2} + A^{p+1} - A^p$$

en prenant la trace, cela donne :

$$u_{p+3} = 2u_{p+2} + u_{p+1} - u_p$$

On complète alors le script python

2. (a) Soit λ une valeur propre non nulle, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre non nul associé. On a alors les relations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = & \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 = & \lambda x_2 \\ x_1 = & \lambda x_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_1 = & \lambda x_n \end{cases}$$

On multiplie la première ligne par λ et on remplace :

$$x_1 \left(\lambda + \frac{\lambda}{\lambda - 1} + (n-2) \right) = \lambda^2 x_1$$

(il faut vérifier que 1 n'est pas valeur propre). Cela donne :

$$x_1 \left(\lambda^2 - \lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda} + 2 - n \right) = 0$$

et donc en remplaçant $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ par $-1 + \frac{1}{1-\lambda}$:

$$x_1 \left(\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{1-\lambda} + 1 - n \right) = 0$$

on pose donc $a_n = 1$, $b_n = -1$, $c_n = 1 - n$ et $d_n = -1$, ce qui donne :

$$x_1 f_n(\lambda) = 0$$

Il ne reste plus qu'à considérer le cas où x_1 est nul, mais alors $x_3 = \cdots = x_n = 0$ puis $x_2 = 0$ ce qui est une contradiction.

(b) On a donc :

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{1-\lambda} + 1 - n$$

ce qui s'écrit :

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda + 1 - n\right) + 1 = 0$$

ou encore :

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + (n-2)\lambda + 2 - n = 0$$

ou encore :

$$Pn(\lambda) = 0$$

3. Il suffit de l'écrire sous forme de système :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 \\ 1 & \beta_n & \beta_n^2 \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n^4 \\ \beta_n^4 \\ \gamma_n^4 \end{pmatrix}$$

Comme $(\alpha_n, \beta_n \gamma_n)$ sont trois valeurs distinctes, on a une matrice de Van der Monde inversible.
Pour le script Python, on peut utiliser inv ou faire « à la main » une inversion de matrice.

Script Python :

```
from pylab import *

def trace(A):
    """
    entrée: A = 2d array = matrice
    sortie: float = valeur de trace de A
    """
    n, m = shape(A)
    assert n==m, "pb taille"
    return sum([ A[i,i] for i in range(n) ])

def puissance(A, p):
    """
    REM: fonction puissance de matrice
    non obtligatoire mais toujours utile à rappeler
    """
    n,m= shape(A)
    assert n==m, "pb taille"
    if p == 0:
        return eye((n,m))
    elif p == 1:
        return A
    elif p%2 == 0:
        return dot(puissance(A, p//2), puissance(A, p//2))
    else :
        B = dot(puissance(A, p//2), puissance(A, p//2))
        return dot(B, A)


def u(p):
    """
    calcul de la liste des (uk) pour k<=p avec la relation de récurrence:
    u_{p+3} = 3 u_{p+2} + u_{p+1} - u_p
    """
    listU = [0]*(p+1) # liste complète des u
    listU[0] = 3
    listU[1] = 2
    listU[2] = 6
    listU[3] = 11
    for i in range(4,p+1):
        listU[i] = 2 * listU[i-1] + listU[i-2] - listU[i-3]
    return listU



A = array([ [1,1,1], [1,1,0], [1, 0, 0] ])
print("A=", A)

## b)i)
longeurTest = 15
Ai = eye(3) # variable qui va contenir A**i
for i in range(longeurTest):
    ui = trace(Ai)
    print("i: ",i,  "ui: ", ui)
    Ai = dot(Ai, A)
```

```


## b)ii)
I = eye(3)
A2 = dot(A,A)
A3 = dot(A2, A)
B = A3 -2 *A2 - A +I
print("B", B)


#b)iii)
print(u(15))
```

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit p un projectuer de E. Montrer que $tr(p) = rg(p)$.
2. Soit $p_1, \dots, p_k$ des projecteurs de E tels que $p_i \circ p_j = 0$ pour tout i et j distincts.
   Montrer que $p = p_1 + \cdots + p_k$ est un projecteur de E.
3. Soient $p_1, \dots, p_k$ des projecteurs de E.
   On suppose que $p = p_1 + \cdots + p_k$ est un projecteur de E.
   Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_k)$ puis que $p_i \circ p_j = 0$ pour tout i et j distincts.

Sujet : Algèbre linéaire sans réduction. Étude des projecteurs. Décomposition en somme directe.

Barème :

- ☐ Connaît la décomposition $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$.
- ☐ Propose de calculer la trace de la matrice dans une base adaptée à la décomposition précédente.
- ☐ Propose de vérifier si $p \circ p = p$ pour montrer que p est un projecteur.
- ☐ Comprend la réciproque, ne s'embrouille pas entre les questions.
- ☐ Vérifie $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_k)$
- ☐ Pense à égalité des dimensions, et fait le lien avec la trace.
- ☐ Vérifie que la somme est directe.
- ☐ Voit la relation : $\sum_{i=1}^k p_i(x) = \sum_{i=1}^k p_i^2(x) + \sum_{i \neq j} p_j \circ p_i(x)$

Correction :

1. On sait que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$.
   En prenant une base $\mathscr{B}$ adaptée à cette décomposition, et la matrice M de p dans cette base, on constate que M est constitué d'un bloc identité de taille $\mathrm{Rg}(p)$ et de 0 partout ailleurs. Ainsi : $tr(A) = tr(p) = \dim(\mathrm{Im}(p)) = \mathrm{Rg}(p)$.
2. Il faut calculer $p \circ p$:
   $$\begin{aligned} p \circ p &= (p_1 + \cdots + p_k) \circ (p_1 + \cdots + p_k) \\ &= p_1^2 + \cdots + p_k^2 && \text{en utilisant } p_i \circ p_j = 0 \text{ si } i \neq j \\ &= p_1 + \cdots + p_k = p \end{aligned}$$
   Ainsi, p est un projecteur.
3. Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. On sait alors qu'il existe un $x \in E$, tel que :
   $$\begin{aligned} y &= p(x) \\ &= p_1(x) + \cdots + p_k(x) \\ &\in \mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k) \end{aligned}$$
   Ainsi, on a déjà le premier point :
   $$\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k).$$
   Montrons maintenant l'égalité des dimensions :
   $$\dim \mathrm{Im}(p) = \dim \mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \dim \mathrm{Im}(p_k)$$

ou encore montrons que :

$$rg(p) = rg(p_1) + \cdots + rg(p_k)$$

Comme on sait que p est un projecteur on a :

$$\begin{aligned} rg(p = &Tr(p) = Tr(p_1 + \cdots + p_k) \\ &= Tr(p1) + \cdots + Tr(p_k) \\ &= rg(p1) + \cdots + rg(p_k) \end{aligned}$$

On a donc un inclusion et l'égalité des dimensions, donc :

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_k)$$

Soit $x \in E$, on écrit :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x)$$

et donc la relation $p(x) = p \circ p(x)$ s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i^2(x) + \sum_{i \neq j} p_j \circ p_i(x)$$

Comme $p_i^2 = p_i$, cela donne :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \neq j} p_j\left(p_i(x)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \underbrace{p_j\left(\sum_{i \neq j} p_i(x)\right)}_{\in \mathrm{Im}(p_j)} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une décomposition de 0 sous la forme d'une somme d'éléments de $\mathrm{Im}(p_j)$, comme la somme est directe, on en déduit :

$$\forall j \in [\![1,k]\!],\ p_j\left(\sum_{i \neq j} p_i(x)\right) = 0$$

On écrit ensuite la ligne i et la ligne j avec $i \neq j$:

$$p_j\left(\sum_{l \neq j} p_l(x)\right) = 0 p_i\left(\sum_{l \neq i} p_i(x)\right) = 0$$

On fait la différence, qui donne :

$$p_j(p_i(x)) - p_i(p_j(x)) = 0$$

On a une décomposition de 0 en deux : un élément de $\mathrm{Im}(p_j)$ et un élément de $\mathrm{Im}(p_i)$. Les deux sont nuls, donc : $p_j(p_i(x)) = 0$.

Exercice 3 Soit E un espace euclidien eet u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0.$$

Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.

Correction : Comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(u)\cap\ker(u)=\{0\}$.
On considère donc $x\in\mathrm{Im}(u)\cap\ker(u)$, on sait donc que $u(x)=0$ et que x s'écrit sous la forme $x=u(a)$.
On veut montrer que x est nul, on calcule donc :

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \langle x,x\rangle \\
&= \langle u(a),x\rangle \\
&= \langle u(a),x-a\rangle + \underbrace{\langle u(a),a\rangle}_{=0} \\
&= \langle u(a-x),x-a\rangle + \underbrace{\langle u(x),x-a\rangle}_{=0} \\
&= -\langle u(a-x),a-x\rangle = 0
\end{aligned}$$

Exercice 4 Soient A et U deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $rg(U)=1$.
Montrer que $\det(A+U)\det(A-U)\leqslant\det(A)^2$.

Correction : On décompose en colonne :

$$A=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & & C_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \alpha_1 D & \alpha_2 D & & \alpha_n D \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det(A+U)=\begin{vmatrix} | & | & & | \\ C_1+\alpha_1 D & C_2+\alpha_2 D & & C_n\alpha_n D \\ | & | & & | \end{vmatrix}$$

en utilisant la multilinéarité, on voit que cela fait n^2 termes :

- $\det(A)$,
- $\alpha_i\det(A_i)$ pour $i\in[\![1,n]\!]$ où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la colonne i de A par D :

$$A_i=\begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ C_1 & C_2 & & C_{i-1} & D & C_{i+1} & & C_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

- des déterminants de matrices où deux colonnes sont égales à D, qui sont donc nuls.

Ainsi :

$$\det(A+U)=\det(A)+\sum_{i=1}^n \alpha_i\det(A_i)$$

On obtient de même :

$$\det(A-U)=\det(A)-\sum_{i=1}^n \alpha_i\det(A_i)$$

Ainsi :

$$\det(A+U)\det(A-U)=(\det(A))^2-\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\det(A_i)\right)^2\leqslant(\det(A))^2$$

✯ Polynômes

Exercice 5 Soient P l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{0,1,2\}$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, a_n le nombre de polynômes $R\in P$ tels que $R(2)=n$.

1. Déterminer a_0, a_1, a_2 et a_3.
2. Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $a_{2n+1}=a_n$ et $a_{2n}=a_{n-1}+a_n$.
3. Écrire une fonction Python qui retourne la valeur de a_n. On vérifiera que $a_{534}=39$.
4. Montrer que $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.
5. Donner une expression simple de a_n.

Commentaire : sujet sur les dénombrements, il est important de bien comprendre le sujet. Pensez à revoir le travail sur la relation de Pascal à partir des dénombrements.

Correction :

On note $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des polynômes $R \in P$ vérifiant $R(2) = n$. Ainsi, $card(\mathscr{A}_n) = a_n$.

1. Soit $R \in \mathscr{A}_0$. On écrit $R = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et donc $R(2) = 0$ s'écrit : $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 2^k = 0$, c'est une somme de termes positifs qui est nulle, donc nécessairement $R = 0$. Le polynôme nul est donc l'unique élément de $\mathscr{A}_0$, ce qui donne : $a_0 = 1$.
   Soit maintenant $R \in \mathscr{A}_1$, avec les mêmes notations : $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 2^k = 1$, comme $a_k 2^k > 1$ si $k > 0$, on a donc $a_0 = 1$, et $\forall k > 1, a_k = 0$. On en déduit que $\mathscr{A}_1 = \{1\}$, et donc que $a_1 = 1$.
   Soit maintenant $R \in \mathscr{A}_2$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 2^k = 2$, toujours le même argument : $a_k 2^k > 2$ si $k > 1$, on a donc deux coefficients à trouver et a_0 et a_1. On voit que l'on a $\mathscr{A}_2 = \{X, 2\}$, ainsi $a_2 = 2$
   Enfin, soit $R \in \mathscr{A}_3$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 2^k = 3$, de nouveau : $a_k 2^k \geqslant 4$ si $k > 1$, on a donc deux coefficients à trouver et a_0 et a_1. Par imparité, $a_0 = 1$, donc $\mathscr{A}_3 = \{X+1\}$ et $a_3 = 1$.
   NB : justifier l'existence de a_n c'est montrer que $\mathscr{A}_n$ est fini.
   Soit $R \in \mathscr{A}_n$, alors $R(2) = n$. Cela s'écrit : $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 2^k = n$. Or pour $k > \log_2(n)$, on a $2^k > n$, et donc $a_k = 0$. Ainsi, le degré de R est strictement inférieur à $\lfloor \log_2(n) \rfloor$. ainsi, $\mathscr{A}_n$ n'est constitué que de polynôme de degré strictement inférieur à $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ et donc :
   $$a_n \leqslant 3^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}$$
2. **NB :** pour montrer une égalité de cardinaux, il faut construire des bijections entre les ensembles. Considérons un polynôme $R \in \mathscr{A}_{2n+1}$.
   On écrit : $R = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. On a : $R(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k 2^k = 2n+1$, ainsi par imparité : $a_0 = 1$, on constate alors que :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^k = 2n \text{ et donc que } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{k-1} = n$$
   On pose donc le polynôme $S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^{k-1}$, et on a que $S \in \mathscr{A}_n$ (bien vérifier que $S(2) = n$ mais aussi que ses coefficients sont dans $\{0, 1, 2\}$). On a donc construit une application :
   $$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{A}_{2n+1} & \to & \mathscr{A}_n \\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k & \longmapsto & \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^{k-1} \end{array} \right.$$
   L'application réciproque est :
   $$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{A}_n & \to & \mathscr{A}_{2n+1} \\ \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k & \longmapsto & 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^{k+1} \end{array} \right.$$
   Il est assez clair que ψ et φ sont inverses l'une de l'autre, par contre, il faut bien vérifier que ψ est bien définie en particulier que si $S \in \mathscr{A}_n$, alors $\psi(S) \in \mathscr{A}_{2n+1}$, ie $\psi(S)$ est à coefficients dans $\{0, 1, 2\}$ et $\psi(S)(2) = 2n+1$.
   On a donc construit une bijection entre $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{A}_{2n+1}$, ce qui permet d'assurer que $a_n = a_{2n+1}$.
   On travaille maintenant sur $\mathscr{A}_{2n}$. Soit $R = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. On a : $R(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k 2^k = 2n$, ainsi, $a_0 = 0$ ou $a_0 = 2$. On a donc une disjonction des cas. Notons B l'ensemble des polynômes de $\mathscr{A}_n$ tels que $a_0 = 0$, et C l'ensemble des polynômes de $\mathscr{A}_n$ tels que $a_0 = 2$.
   On a clairement $\mathscr{A}_n = B \cup C$ (union disjointe). et donc $a_n = card(B) + card(C)$.
   On suppose que $R \in B$, alors : $R = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^k$, on pose donc $S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^{k-1}$, on a alors S qui est bien un polynôme à coefficients dans $\{0, 1, 2\}$ et $S(2) = n$. On a donc construit une application :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^k \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^{k-1}$$
   de B dans $\mathscr{A}_n$. Il est facile de constater que l'application inverse est :
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^{k+1}$$
   Ainsi, B est en bijection avec $\mathscr{A}_n$ et donc $card(B) = a_n$.
   On suppose maintenant que $R \in C$, alors : $R = 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^k$, avec $R(2) = 2n$, on peut donc écrire :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{k-1} = n - 1$$

ce qui donne l'idée de poser $S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^{k-1}$, qui est bien un polynôme de $\mathscr{A}_{n-1}$. On a donc construit l'application :

$$R = 2 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \longmapsto S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^{k-1}$$

qui va bien de C dans $\mathscr{A}_{n-1}$, et l'application réciproque est :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \longmapsto 2 + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^{k+1}$$

ce qui montre que $card(C) = a_{n-1}$
on a donc $a_{2n} = a_{n-1} + a_n$.

3. Voici par exemple une version récursive :

```

def a(n):
    """
    entrée: n = int
              = rang de la suite
    sortie: valeur de an

    version récursive
    """
    if n == 0:
        return 1
    elif n == 1:
        return 1
    elif n%2 == 0:
        return a(n//2 -1) + a(n//2)
    else:
        return a( (n-1)//2 )

# for i in range(50):
#     print("i= ",i,"ai =", a(i))
# print("a534 = ", a(534))

N = 1000
L = [0]*N;
for i in range(N):
    L[i] = a(i)
plot(range(N), L)
show()
```

(ce n'est pas optimal pour le temps de calcul, mais le code est assez facile à écrire).

4. Il s'agit d'une série entière à coefficients positifs.
Il faut utiliser des estimations.
Montrons déjà la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant n$. Pour cela, on procède par récurrence forte pour $n \geqslant 1$. On note $\mathscr{P}(k) : a_k \leqslant k$ c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$, ainsi $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies (**NB :** ces deux cas sont à faire).
Considérons un $n > 1$ fixé, tel que $\forall k < n, \mathscr{P}(k)$ est vraie.
Supposons n impair et notons $k = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, ainsi, $n = 2k+1$. On a alors : $a_n = a_k$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Par hypothèse $\mathscr{P}(k)$ est vraie et donc $a_n \leqslant k \leqslant n$.
Supposons n pair et notons $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, ainsi, $n = 2k$. On a alors : $a_n = a_{k-1} + a_k$ et $k \in 0n-1$ donc : $a_n \leqslant (k-1) + k \leqslant 2k = n$. Dans les deux cas, $a_n \leqslant n$ et on a donc l'hérédite.
On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
On va montrer que (a_n) ne tends pas vers 0. On constate sur les exemples que $a_{2^m} = m+1$. On va donc le démontrer.
Considérons $m \in \mathbb{N}$, on note $n = 2^m$, et on dénombre les polynômes R de P tels que : $R(2) = 2^m$ Avec les notations précédentes, cela donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 2^k = 2^m$$

déjà, il faut que le degré soit inférieur ou égal à m. On peut donc écrire :

$$a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_m 2^m = 2^m$$

$a_m = 2$ est impossible.
Si $a_m = 1$ tous les autres coefficients sont nuls.
Si $a_m = 0$, alors a_{m-1} peut valoir 2 et tous les autres termes sont nuls ou 1. En effet, $a_{m-1} = 0$ est impossible, puisque :

$$\sum_{k=0}^{m-2} a_k 2^j \leqslant \sum_{k=0}^{m-2} 2^{j+1} = 2\frac{1-2^{m-1}}{1-2} = 2\left(2^{m-1}-1\right) = 2^m - 2 < 2^m$$

Si $a_{m-1} = 1$, alors on a :

$$\sum_{k=0}^{m-2} a_k 2^j + 2^{m-1} = 2^m \text{ et donc } \sum_{k=0}^{m-2} a_k 2^j = 2^{m-1}$$

On est donc amené à décomposer 2^{m-1} sous la forme d'un polynôme de degré $m-2$. Idem alors : si le dernier terme est 2, alors les autres sont nuls et le dernier terme ne peut pas valoir 0. Si le dernier terme vaut 1, alors on est ramené à décomposer 2^{m-2} sous la forme d'un polynôme de degré $m-3$, etc.
Au final : on en déduit qu $a_{2^m} = m+1$.
(**à voir :** est-ce que l'on peut faire une récurrence ? ou parler d'unicité de la décomposition en base 2 ?).
NB : on peut aussi voir que pour $m \in \mathbb{N}$, $a_{2^m-1} = 1$, c'est une autre piste (on doit y arriver par récurrence alors).
Au final, on a $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant 1$ et (a_n) ne tend pas vers 0, donc le rayon est 1.

5. **Question non aboutie. L'énoncé doit être incomplet ou il s'agit d'une question ouverte dans laquelle, on attend de voir quelles sont les idées du candidat.** En observant le graphique, on voit des régularités entre chaque puissance de 2
Il semble que si on écrit : $n = 2^k - 1 + r$, où $r \in \left[\left[1, 2^{k-1}\right]\right]$, alors $a_n = ka_r$.
On peut aussi penser utiliser la relation entre les termes dans le développement en série entière.

Exercice 6 Centrale

Existe-t-il un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = e^t$$

Correction : très classique.
Par l'absurde, on suppose qu'un tel polynôme existe, on note alors

$$P(t) = a_n t^n + \cdots +$$

avec n le degré et donc $a_n \neq 0$.

Ainsi, $P(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} a_n t^n$ et donc $e^t \underset{t\to+\infty}{\sim} a_n t^n$ ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n e^{-t} = \dfrac{1}{a_n}$. C'est une contradiction avec les croissances comparées.

On peut aussi dériver ou regarder la limite en $-\infty$. Dernier point, on peut aussi utiliser Taylor et dire que si P existe, alors :

$$P = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n$$

Exercice 7 Navale Soit les polynômes :

$$A = X^4 + 1 \qquad B = X^4 + X$$

et soit f l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 8 Centrale

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$$

Montrer qu'il existe Q et R appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = Q^2 + R^2$.

Indication : On pourra vérifier que si deux polynômes P_1 et P_2 s'écrivent sous la forme d'une somme de deux polynômes au carré alors leur produit aussi.

Correction :

Pour l'indication, c'est la relation :

$$\begin{aligned}(Q_1^2+R_1^2)(Q_2^2+R_2^2) =& Q_1^2Q_2^2+Q_1^2R_2^2+R_1^2Q_2^2+R_1^2R_2^2 \\ =& (Q_1Q_2-R_1R_2)^2+(Q_1R_2+R_1Q_2)^2\end{aligned}$$

Soit P un tel polynôme, on décompose P dans $\mathbb{C}[X]$, on a :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{r_i}\prod_{j=1}^{q}(X-\beta_j)^{s_j}\left(X-\overline{\beta_j}\right)^{s_j}$$

Où on a écrit :

- λ le coefficient dominant (nécessairement positif car $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x^n$).
- $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ les racines réelles avec r_i leurs ordres.
- $\beta_1,\dots,\beta_q$ les racines complexes non réelles de P avec s_j leurs ordres. Comme P est un polynôme réel, on peut regrouper ces racines deux à deux puisque ces racines complexes sont conjuguées.

Montrons que les r_i sont pairs, supposons par l'aburde que r_1 est impair, comme α_1 est racine d'ordre r_1, on a alors :

$$P = (X-\alpha_1)^{r_1}Q$$

où Q est un polynôme qui ne s'annule pas en α_1. Comme r_1 est impair, on a :

$$\begin{aligned}&\forall x>\alpha_1,\ P(x)\geqslant 0 \text{ et } (x-\alpha_1)^{r_1}>0 \text{ donc } Q(x)>0\\ &\forall x<\alpha_1,\ P(x)\geqslant 0 \text{ et } (x-\alpha_1)^{r_1}<0 \text{ donc } Q(x)<0\end{aligned}$$

Ceci n'est pas possible car $Q(x)$ est continue en α_1. On a donc une contradiction et donc tous les r_i sont pairs.

On peut donc écrire :

$$P = \left(\sqrt{\lambda}\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{\frac{r_i}{2}}\right)^2\prod_{j=1}^{q}(X-\beta_j)^{s_j}\left(X-\overline{\beta_j}\right)^{s_j}$$

On travaille ensuite sur les polynômes

$$(X-\beta)\left(X-\overline{\beta}\right) = X^2-2Re(\beta)X+|\beta|^2$$

où β est un complexe non réel.

On note X^2+aX+b ce polynôme qui est sans racines réelles, et on utilise la décomposition canonique :

$$X^2+aX+b = \left(X+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{4b-a^2}{4}$$

Le discriminant $\Delta = a^2-4b$ est négatif, on continue donc :

$$\begin{aligned}X^2+aX+b &= \left(X+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{-\Delta}{4}\\ &= \left(X+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{-\Delta}{2}}\right)^2\end{aligned}$$

On note donc $Q = X+\frac{a}{2}$ et $R = \sqrt{\frac{-\Delta}{2}}$ et on a :

$$(X-\beta)\left(X-\overline{\beta}\right) = Q^2+R^2$$

Ainsi, un polynôme de la forme : $(X-\beta)\left(X-\overline{\beta}\right)$ avec β complexe non réel s'écrit sous la forme Q^2+R^2 avec Q et R deux polynômes réels.

Considérons maintenant deux complexes non nécessairement distincts : β_1 et β_2. On forme le produit :

$$(X-\beta_1)\left(X-\overline{\beta_1}\right)(X-\beta_2)\left(X-\overline{\beta_2}\right)$$

On sait que l'on peut écrire :

$$(X-\beta_1)\left(X-\overline{\beta_1}\right)=P_1^2+Q_1^2$$
$$(X-\beta_2)\left(X-\overline{\beta_2}\right)=P_2^2+Q_2^2$$

cela donne :

$$\begin{aligned}(X-\beta_1)\left(X-\overline{\beta_1}\right)(X-\beta_2)\left(X-\overline{\beta_2}\right)&=\left(P_1^2+Q_1^2\right)\left(P_2^2+Q_2^2\right)\\&=P_1^2P_2^2+Q_1^2P_2^2+P_1^2Q_2^2+Q_1^2Q_2^2\\&=(P_1Q_2+Q_1P_2)^2+(P_1P_2-Q_1Q_2)^2\end{aligned}$$

Ainsi, $(X-\beta_1)\left(X-\overline{\beta_1}\right)(X-\beta_2)\left(X-\overline{\beta_2}\right)$ s'écrit aussi sous la forme Q^2+R^2. En conséquence, le polynôme

$$\prod_{j=1}^{q}(X-\beta_j)^{s_j}\left(X-\overline{\beta_j}\right)^{s_j}$$

s'écrit sous la forme Q^2+R^2 En écrit alors :

$$P=\left(\underbrace{\sqrt{\lambda}\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{\frac{r_i}{2}}}_{A}\right)^2\left(Q^2+R^2\right)$$

On remplace Q par AQ et R par AR pour avoir le résultat (R est un polynôme réel).

Autre méthode : après avoir prouvé que les r_i sont pairs, on écrit :

$$P=\left(\sqrt{\lambda}\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{\frac{r_i}{2}}\prod_{j=1}^{q}(X-\beta_j)^{s_j}\right)\left(\sqrt{\lambda}\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{\frac{r_i}{2}}\prod_{j=1}^{q}\left(X-\overline{\beta_j}\right)^{s_j}\right)$$

En notant :

$$R=\sqrt{\lambda}\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{\frac{r_i}{2}}\prod_{j=1}^{q}(X-\beta_j)^{s_j}$$

R est un polynôme complexe et on a $P=R\times\overline{R}$. On peut écrire : $R=Q+iR$ avec Q et R deux polynômes réels, et on obtient :

$$P=(Q+iR)(Q-iR)=Q^2+R^2.$$

Exercice 9 Centrale

1. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists! P_n\in\mathbb{R}_n[X],\ \forall t\in\mathbb{C}^*,\ P_n\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^n+\frac{1}{t^n}$$

2. Donner une relation liant P_n, P_{n+1} et P_{n+2}.
3. Proposer un algorithme en Python permettant de calculer les coefficients du polynôme P_n.
4. Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.
5. Déterminer les racines de P_n (on pourra chercher des racines sous la forme $2\cos(\theta)=e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}$).

Correction :

1. Commençons par l'unicité : par l'absurde, supposons qu'il existe deux polynôme P_n et Q_n vérifiant la relation, on a alors :

$$\forall t \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(t+\frac{1}{t}\right) = Q_n\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

En étudiant la fonction $f : t \longmapsto t + \frac{1}{t}$, on voit qu'elle prends une infinité de valeurs (il faut dessiner le tableau de variations sur $\mathbb{R}^{+*}$, on voit que $f\left(\mathbb{R}^{+*}\right) = [2, +\infty[$ ou appliquer le théorème des valeurs intermédiaires).
Ainsi, les fonctions polynomiales P_n et Q_n sont égales sur une infinité de valeurs donc les polynômes sont égaux. D'où l'unicité.
Pour l'existence, on procède par récurrence double :

$$\mathscr{P}_n : \exists P_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall t \in \mathbb{R}^*,\ P_n\left(t+\frac{1}{t}\right) = t^n + \frac{1}{t^n}$$

Pour l'initialisation, on pose $P_0 = 2$ et $P_1 = X$, on a bien :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ P_0\left(t+\frac{1}{t}\right) = 2 = t^0 + \frac{1}{t^0} \qquad \text{et} \qquad P_1\left(t+\frac{1}{t}\right) = t + \frac{1}{t}$$

On a bien l'initialisation.
Pour l'hérédité, considérons n fixé, tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vrai.
On a alors pour $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} t^{n+2} + \frac{1}{t^{n+2}} &= \left(t^{n+1} + \frac{1}{t^{n+1}}\right)t + \left(t^{n+1} + \frac{1}{t^{n+1}}\right)\frac{1}{t} - \frac{1}{t^n} - t^n \\ &= \left(t^{n+1} + \frac{1}{t^{n+1}}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right) - \left(\frac{1}{t^n} + t^n\right) \\ &= P_{n+1}\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right) - P_n\left(t+\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

On pose donc :

$$P_{n+2} = P_{n+1}X - P_n$$

Il s'agit bien d'un polynôme. Son degré est au plus $n+2$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^*,\ P_{n+2}\left(t+\frac{1}{t}\right) &= P_{n+1}\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right) - P_n\left(t+\frac{1}{t}\right) \\ &= t^{n+2} + \frac{1}{t^{n+2}} \end{aligned}$$

D'où l'hérédité. et la conclusion : la suit de polynôme existe et est unique.
2. On a vu :

$$P_{n+2} = P_{n+1}X - P_n$$

3. Si on note :

$$P_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} a_k X^k \qquad P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} b_k X^k \text{ et } P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$$

alors :

$$P_{n+2} = P_{n+1}X - P_n$$

donne :

$$\sum_{k=0}^{n+2} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n+2} b_{k-1} X^k - \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$$

et donc :

$$\forall k \in [\![1, n+2]\!], a_k = b_{k-1} - c_k \text{ et } a_0 = c_0$$

On peut par exemple écrire :

```
def recurrenceDouble(Pn, Pnp1) :
  """
  entrée: Pn = list  de taille n+1 = coefficients de Pn
          Pnp1 = liste  de taille n+2 = coefficients de Pn+1
  sortie: Pnp2 =  liste  de taille n+3 = coefficients de Pn+2
  """
  n = len(Pn) - 1 # n = degré
  Pnp2 = [0] * (n+3)
  # les coefficients de Pnp1 sont décalés multiplier par X
  for i in range(n+2) :
    Pnp2[i+1] = Pnp1[i]
  # on ajoute les coefficients de -Pn:
  for i in range(n+1):
    Pnp2[i] -= Pn[i]
  return Pnp2
```

4. On montre par récurrence double la propriété : $\mathscr{P}(n) : P_n = X^n + \dots$ pour $n \geqslant 1$ (**NB :** sauf pour $n = 0$).
   Il n'y a pas de difficulté particulière.
5. On fixe $n \in \mathbb{N}$.
   On a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P_n\left(e^{it} + e^{-it}\right) = e^{int} + e^{-int}$$

Ce que l'on peut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P_n\left(2\cos(t)\right) = 2\cos(nt)$$

Ainsi, on cherche déjà les racines de P_n sous la forme $2\cos(t)$. On résout donc : $\cos(nt) = 0$. Cela donne :

$$t = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}, \qquad \text{pour } k \in \mathbb{Z}.$$

On note $\theta_k = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$ On a ainsi trouvé des racines de P_n, les réels :

$$c_k = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) = \cos(\theta_k) \qquad \text{pour } k \in \mathbb{Z}.$$

Il reste à déterminer combien de ces racines sont distinctes. On peut facilement vérifier que $c_n = c_{n-1}$.
On a pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$0 < \frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{2n} + (n-1)\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$$

Autrement dit :

$$0 < \theta_0 < \theta_1 \cdots < \theta_{n-1} < \frac{\pi}{2}$$

Par injectivité de la fonction cosinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que les valeurs $(c_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ sont distinctes. On a donc trouvé n racines à P_n, comme $deg(P_n) = n$, on en déduit qu'il n'y en a pas d'autres. Ainsi :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

Exercice 10 Soit $P = X^3 - X + 1$.

1. Montrer que P a trois racines simples a, b et c.
2. Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $a^7 + b^7 + c^7$.

Corrrection :

1. Il suffit de dériver.
   $P' = 3x^2 - 1$. Et donc les racines de P' sont $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Or ces valeurs ne sont pas racines de P.
   On constate que P a une unique racine réelle notée a.
   Il y a donc deux racines complexes (non réelles) b et c. Puisque P est à coefficients réels, b et $c = \overline{b}$ sont conjuguées, et comme elles ne sont pas réelles, $b \neq \overline{b}$.
   Cela fait donc que (a, b, c) sont distinctes.

2. On a :

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)$$

ce qui donne :

$$a+b+c=0 \qquad ab+ac+bc=-1 \qquad abc=-1$$

On calcule alors :

$$0=(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

ce qui donne la valeur de $a^2+b^2+c^2$.
On fait ensuite la division euclidienne de X^7 par P et on applique à a, b puis c. Ce qui donne $a^7+b^7+c^7$ en fonction de $a^2+b^2+c^2$ et $a+b+c$.

⋆ Algèbre linéaire

Exercice 11 Trigonaliser :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction : On cherche les valeurs propres de A. On a $\chi_A = X(X-1)^2$. On écrit donc :

$$A = PUP^{-1} \text{ avec } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

α est non nul. On cherche un vecteur $u \in E_0$: On a $C_1 - 2c_2 = 0$, donc on peut prendre $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ on cherche un vecteur v dans E_1 : on peut prendre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ On cherche ensuite un vecteur w et un réel α non nul tel que $f(w)-w=\alpha v$. Ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut prendre $\alpha = 1$ et $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Ce qui donne :

$$A = PUP^{-1} \text{ avec } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 12 On donne la matrice A par :

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in [\![1, n-1]\!] \text{ et } j = i+1 \\ 1 & \text{si } i = n \text{ et } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Diagonaliser A.

Correction : Déjà il faut écrire la matrice correspondante par exemple en taille 5 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

À partir de là il y a différentes idées. calculer directement χ_A ou chercher un polynôme annulateur.

Pour le polynôme annulateur, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé, et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, on a :

$$u(e_1) = e_n, u(e_2) = e_1, \dots, u(e_n) = e_{n-1}$$

donc :

$$u^2(e_1) = e_{n-1}, u^2(e_2) = e_n, u^2(e_3) = e_1 \dots, u(e_n) = e_{n-2}$$

donc on voit que $u^n = Id$.

Pour le calcul de χ_A, on a :

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}$$

On peut faire :

$$l_n \leftarrow l_n + X l_{n-1} + X^2 l_{n-2} + \dots + X^{n-1} l_1$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) =& \det \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & -1 \\ X^n - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ =& (-1)^{n+1} \times (X^n - 1) \times (-1)^{n-1} = X^n - 1 \end{aligned}$$

D'où A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (même pas trigonalisable car χ_A non scindé). Sur $\mathbb{C}$ elle est diagonalisable avec SEP de dimension 1. Les valeurs propres sont les racines n-ième de l'unité :

$$Sp(A) = \left\{ \exp\left(ik\frac{2\pi}{n} \right) \middle| k \in [\![0, n-1]\!] \right\} = \left\{ \xi^k \middle| k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

On considère $k \in [\![0, n-1]\!]$ et on cherche le SEP associé à ξ^k.

On a :

$$\xi^k I_n - A = \begin{pmatrix} \xi^k & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi^k & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \xi^k \end{pmatrix}$$

D'après ce que l'on sait sur les matrices compagnons, on a envie de faire : $C_1 + \xi^k C_2 + \xi^{2k} C_3 + \dots + \xi^{(n-1)k} C_n$ et cela donne la colonne nulle. Donc :

$$E_{\xi^k}(A) = Vect\left(\left(1, \xi^k, \dots, \xi^{(n-1)k} \right) \right)$$

Au final :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \xi & & & \\ & & \xi^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \xi^{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^{(n-1)} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \dots & \xi^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \xi^{(i-1)(j-1)} & & \\ 1 & \xi^{n-1} & \xi^{2(n-1)} & \dots & \xi^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Exercice 13 Soit :

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & Tr(M)I_n + M \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Déterminer son noyau et son rang.
3. Trouvez un polynôme annulateur de φ de degré 2.
4. φ est-elle diagonalisable ? Déteminer les éléments propres.
5. L'application φ est-elle bijective ? Si oui, calculez φ^{-1} ?

Correction :

1. Il faut vérifier la linéarité.
2. On commence par le noyau : Soit M telle que $\varphi(M) = 0$, ie $M = -Tr(M)I_n$. On rapplique la trace : $Tr(M) = -nTr(M)$. D'où $Tr(M) = 0$ et $M = 0$.
   Ainsi le noyau est réduit au vecteur nul et le rang est n^2.
3. On prend une matrice M quelconque, et on a :

$$\begin{aligned}\varphi \circ \varphi(M) =& (Tr(M)n + Tr(M))\, I_n + Tr(M)I_n + M \\ =& Tr(M)(n+2)I_n + M \\ =& (n+2)\varphi(M) - (n+1)M\end{aligned}$$

   Ainsi, φ annule : $X^2 - (n+2)X + (n+1)$.
4. $X^2 - (n+2)X + (n+1) = (X-1)(X-(n+1))$ φ annule un polynôme scindé à racines simples donc diagonalisable.
   1 est valeur propre, avec :

$$E_1(\varphi) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \Big| Tr(M) = 0\}$$

   C'est un hyperplan.
   On constate que $\varphi(I_n) = (n+1)I_n$, donc :

$$E_{n+1}(\varphi) = vect(I_n)$$

   On en déduit :

$$\chi_\varphi = (X-1)^{n^2-1}(X-(n+1))$$

5. φ est un endmorphisme injectif donc bijectif. φ^{-1} se calcule par le polynôme annulateur.

Exercice 14 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle.
On définit :

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & Tr(AM)I_n \end{cases}$$

1. Calculer φ^2.
2. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit diagonalisable. Déterminer alors les sous-espaces propres.

Correction :

1. Soit une matrice M quelconque, on a :

$$\varphi^2(M) = tr(AM)Tr(A)I_n = tr(A)\varphi(M)$$

   Ainsi :

$$\varphi^2 = Tr(A)\varphi$$

2. φ annule $X(X-Tr(A))$
   Si $Tr(A) \neq 0$, alors annule un poly scindé à racines simples donc diagonalisable. Si $Tr(A)=0$, alors son spectre se réduit à 0 or φ n'est pas l'application nulle.
   REM : cela n'est pas évident et peut faire l'objet d'une question. Il suffit de vérifier que

$$\varphi(A^T) = Tr(AA^T)A \neq 0$$

   puisque $Tr(AA^T)$ est la norme de A et $A \neq 0$.
   Ainsi, φ diagonalisable ssi $tr(A) \neq 0$.
   Supposons $tr(A) \neq 0$.
   On considère alors M tel que $\varphi(M)=0$. Cela équivaut à $tr(AM)=0$. Ainsi :

$$E_0(\varphi) = \{M | Tr(AM) = 0\}$$

   C'est un hyperplan. **NB :** idem, $M \longmapsto Tr(AM)$ est non nulle car appliqué à A^T c'est non nul.
   De plus, on a :$\varphi(I_n) = Tr(A)I_n$, d'où :

$$E_{Tr(A)} = Vect(I_n).$$

   Ainsi :

$$\chi_\varphi = (X - Tr(A))X^{n^2-1}$$

Exercice 15 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle.
On définit :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + Tr(AM)A \end{array} \right.$$

Déterminer les éléments propres, la trace et le déterminant de φ.
φ est-elle diagonalisable ?

Correction :
Il y a plusieurs techniques.
Technique 1 : on calcule φ^2. On a pour une matrice M :

$$\begin{aligned}
\varphi(\varphi(M)) =& M + tr(AM)A + Tr(A(M + Tr(AM)A))A \\
=& M + tr(AM)A + Tr(AM)A + Tr(AM)Tr(A^2)A \\
=& M + tr(AM)(2 + Tr(A^2))A \\
=& (2 + Tr(A^2))(M + Tr(AM)A) - (1 + Tr(A^2))M \\
=& (2 + Tr(A^2))\varphi(M) - (1 + Tr(A^2))M
\end{aligned}$$

ainsi, φ annule :

$$X^2 - (2 + Tr(A^2)X + (1 + Tr(A^2))$$

On en déduit que le spectre est inclus dans 1, $1 + Tr(A^2)$.
Pour la valeur propre 1, on a :

$$E_1(\varphi) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | Tr(AM) = 0\}$$

c'est un hyperplan, car $M \longmapsto Tr(AM)$ est forme linéaire non nulle (attention à vérifier non nulle avec la valeur en A^T).
Pour la valeur propre $1 + Tr(A^2)$, une idée simple est de regarder $\varphi(A)$.

$$\varphi(A) = (1 + Tr(A^2))A$$

donc :

$$E_{1+Tr(A^2)}(\varphi) = Vect(A)$$

Technique 2 :

Dans les deux cas : Si $tr(A)$ est non nul φ annule un polynôme scindé à racines simples donc φ est diagonalisable. On en déduit que $Tr(\varphi)$ est la somme des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité, donc :

$$Tr(\varphi) = (n^2-1)+1+Tr(A^2)$$

et le déterminant est le produit, donc :

$$\det(\varphi) = 1+tr(A^2)$$

Si $tr(A)=0$ alors le spectre de φ se réduit à 0, or φ est non nulle (appliquée à A^T on le voit). Ainsi, φ n'est pas diagonalisable.

Exercice 16 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifie la propriété suivante : la matrice de f dans toute base de A est la même matrice noté A.

1. Montrer que :
$$\forall P \in GL_n(\mathbb{R}),\ PA = AP$$
2. Soit $B \in \mathscr{M}_n(R)$, montrer que :
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ B-\lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$$
En déduire que $AB = BA$.
3. Déterminer f.

Correction :

1. une matrice P inversible représente un changement de base, donc $P^{-1}AP = A$ car c'est la matrice de f dans une autre base.
2. On note $sp(B) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ les valeurs propres de B dans $\mathbb{R}$ (rem éventuellement vide), et on prend n'importe quel $\lambda \in \mathbb{R}^*$ qui n'est pas dans $sp(B)$. Par exemple : si $|\lambda_1| < \cdots < |\lambda_p|$
REM on peut même construire une suite (λ_i) de valeurs non nulles de limites 0, tel que $B-\lambda_i I_n$ soit inversible.
On a alors :
$$(B-\lambda I_n)A = A(B-\lambda I_n) \text{ et donc en développant : } BA = AB.$$
3. Il faut prendre pour B les $E_{i,j}$:
$$E_{i,j}A = AE_{i,j}$$
et on en déduit que $A = \lambda I_n$ et donc que $f = \lambda Id$.

Exercice 17 Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Donner le rang de B en fonction du rang de A.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:
$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0)\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$
3. On suppose que A est diagonalisable. En déduire que B est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Correction :

1. $rg(A) = rg(B)$ (car c'est le rang des colonnes).
2. On regarde d'abords B^k :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B^k = \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

attention faux pour $k=0$: $B^0 = I_{2n}$ Par linéarité, cela donne :

$$\begin{aligned}
P(B) &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_k A^k & \sum_{k=1}^n a_k A^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_0 I_{2n} \\
&= \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - P(0) \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) I_{2n} \\
&= \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. Supposons que A soit de rang n, alors on note : $P = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X-\lambda)$. On sait alors que $P(A) = 0$, on note $Q = XP$. Q est scindé à racines simples, $Q(0) = 0$ et $Q(A) = 0$. En appliquant ce qui précède, on obtient : $Q(B) = 0$. D'où B est diagonalisable car annule un poly scindé à racines simples..
   Si A n'est pas de rang n, alors : $P = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X-\lambda)$. vérifie déjà $P(0) = 0$ et $P(A) = 0$, ainsi $P(B) = 0$ et B est diagonalisable car annule un poly scindé à racines simples.
   Si $\lambda \in Sp(A)$, et $AX = \lambda X$, alors :
   $$B \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Ainsi $sp(B) \supset sp(A)$, et comme B annule $\prod_{\lambda \in Sp(A)} (X-\lambda)$ ou $X \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X-\lambda)$, on voit : $sp(B) = Sp(A) \cup \{0\}$.

Exercice 18 Soit φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par X^4-1.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que φ est diagonalisable. Donner ses valeurs propres et ses vecteur propres.
3. Est-ce que φ est inversible ? si oui donner son inverse.

Correction :

1. Déjà si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ alors $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ car son degré est strictement inférieur à 4.
   Ensuite, considérons P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ et α un réel, on a alors l'existence de Q_1 et Q_2 tels que :
   $$\begin{aligned} X^2P_1 &= (X^4-1)Q_1 + \varphi(P_1) \\ X^2P_2 &= (X^4-1)Q_2 + \varphi(P_2) \end{aligned}$$
   Cela donne donc :
   $$X^2(P_1 + \alpha P_2) = (X^4-1)(Q_1 + \alpha P_2) + \varphi(P_1) + \alpha\varphi(P_2)$$
   Comme $\varphi(P_1) + \alpha\varphi(P_2)$ est un polynôme de degré au plus 3, c'est bien le reste de la division euclidienne, ce qui assure que :
   $$\varphi(P_1 + \alpha P_2) = \varphi(P_1) + \alpha\varphi(P_2)$$
   Ainsi, φ est linéaire.
2. Il y a plusieurs techniques possibles :
   - Chercher un polynôme annulateur en calculant $\varphi(\varphi(P))$.
   - Déterminer une matrice de φ en l'appliquant sur une base (par ex. la base canonique).

   On a :
   $$\begin{aligned}
   \varphi(1) &= X^2 \text{ car } X^2 = 0(X^4-1) + X^2 \\
   \varphi(X) &= X^3 \text{ car } X^3 = 0(X^4-1) + X^3 \\
   \varphi(X^2) &= 1 \text{ car } X^4 = 1(X^4-1) + 1 \\
   \varphi(X^3) &= X \text{ car } X^5 = X(X^4-1) + X
   \end{aligned}$$
   On obtient donc :
   $$Mat(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il faut alors déterminer le spectre. Une technique consiste à calculer directement χ_A, une autre à essayer des valeurs, une encore à chercher un polynôme annulateur.
REM : A est diagonalisable car symétrique réelle.
On a :

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve que $A - I_4$ est de rang 2 donc 1 est dans le spectre avec :

$$E_1 = Vect((1,0,1,0),(0,1,0,1))$$

On a aussi :

$$A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve que $A + I_4$ est de rang 2 donc -1 est dans le spectre avec :

$$E_{-1} = Vect((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$$

3. φ est inversible puisque 0 n'est pas dans le spectre. On a

$$A^{-1} = PD^{-1}P \text{ et donc on constate que } A^2 = A$$

ce que l'on peut vérifier par un calcul direct. Ainsi, $\varphi^{-1} = \varphi$.

Exercice 19 Pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note

$$C(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) | MA = AM\}$$

le **commutant** de A.
1. Donner le commutant de I_n.
2. Écrire un programme Python qui étant donnée deux matrices A et B détermine si elles commutent.
3. Montrer que $C(A)$ est un SEV de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Donner une base de $C(A)$ si A est diagonale à coefficients deux à deux distincts.
5. Soit deux matrices A et B semblables. P une matrices inversibles telles que : $B = P^{-1}AP$ Et X une autre matrice. Montrer que :

$$X \in C(A) \iff P^{-1}XP \in C(B)$$

6. Soit A une matrice avec n valeurs propres distinctes. Déterminer la dimension de $C(A)$.

Correction :
1. Toute matrice commute avec I_n.
2. pas de difficulté.

```
def commute(A, B):
    """
    entrée: A, B = deux array 2d nxn = deux matrices
    sortie: booleen = True si commutent
    """
    # version rapide:
    # return dot(A,B) == dot(B,A)

    n, m = shape(A)
    for i in range(n) :
        for j in range(m) :
```

```
      ABij = 0
      BAij = 0
      for k in range(n) :
        ABij += A[i,k]*B[k,j]
        BAij += B[i,k]*A[k,j]
      if ABij != BAij :
        return False
  return True
```

3. $C(A)$ contient bien 0, et si B et C sont dans $C(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$(B+\lambda C)A = BA+\lambda CA = AB+\lambda AC = A(B+\lambda C)$$

4. On note donc $A = diag(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, on voit déjà que si B est diagonale, alors $AB = BA$ (deux matrices diagonales commutent toujours). On note donc $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices diagonales, et on a donc $\mathscr{D} \subset C(A)$.
Il reste à vérifier la réciproque. Soit B une matrice qui commutent avec A. On fait un produit par bloc : AB fait les opérations sur B : $l_1 \leftarrow \alpha_1 l_1$ ... $l_n \leftarrow \alpha_n l_n$ et BAfait les opérations sur B : $C_1 \leftarrow \alpha_1 C_1$ ... $C_n \leftarrow \alpha_n C_n$.
Soit (i,j) avec $i \neq j$. Ainsi :

$$[AB]_{i,j} = \alpha_i B_{i,j} \qquad \text{et} \qquad [AB]_{i,j} = \alpha_j B_{i,j}$$

Comme $\alpha_i \neq \alpha_j$, c'est donc que $B_{i,j} = 0$. Donc B est diagonale. La base est donc l'ensemble des $(E_{i,i})$ pour $i \in [\![1,n]\!]$.

5. On suppose donc $B = P^{-1}AP$.
Soit $X \in C(A)$. On a alors :

$$\begin{aligned} P^{-1}XPB =& P^{-1}XPP^{-1}AP = P^{-1}XAP \\ =& P^{-1}AXP \\ =& P^{-1}APP^{-1}XP \\ =& BP^{-1}XP \end{aligned}$$

donc $P^{-1}XP \in C(B)$.
Sot maintenant X tel que $P^{-1}XP \in C(B)$. On a alors :

$$\begin{aligned} XA =& XPBP^{-1} = PP^{-1}XPBP^{-1} \\ =& PBP^{-1}XPP^{-1} \\ =& AX \end{aligned}$$

6. Soit A une telle matrice, alors elle est semblable à une matrice diagonale avec des coefficients deux à deux distincts sur la diagonale noté D. On note P telle que $D = PAP^{-1}$.
On a $X \in C(A)$ si et seulement si $P^{-1}XP \in C(D)$ mais $C(D) = Vect\,(E_{11},\dots,E_{nn})$ et un calcul facile montre que :

$$\begin{aligned} P^{-1}XP \in Vect\,(E_{11},\dots,E_{nn}) &\iff \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n \; P^{-1}XP = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{i,i} \\ &\iff \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n \; X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P E_{i,i} P^{-1} \\ &\iff X \in Vect\left(PE_{11}P^{-1},\dots,PE_{nn}P^{-1}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, On a une famille génératrice de n vecteurs :

$$\left(PE_{11}P^{-1},\dots,PE_{nn}P^{-1}\right)$$

il faut ensuit vérifier que cette famille est libre. Pour cela, on considère l'équation :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i PE_{ii}P^{-1} = 0$$

on mulitplie à gauche par P^{-1} à droite par P, ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{ii} = 0$$

et tous les (α_i) sont nuls. Ainsi, $\left(PE_{11}P^{-1},\dots,PE_{nn}P^{-1}\right)$ est une base de $C(A)$.

Exercice 20 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et Φ_A l'application définie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même par $\Phi_A(M) = AM$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que Φ_A soit bijective.

Correction : Supposons Φ_A bijective, alors I_n a un antécédent, donc il existe B tel que $A = I_n$. Ainsi, A est inversible.

Si A est inversible alors on vérifie facilement $\Phi_A^{-1} = \Phi_{A^{-1}}$ ou que $ker(\Phi_A) = 0$.

Exercice 21 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et φ une forme linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (*i.e.* une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$).

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\varphi(A)$ pour que l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M - \varphi(M)A \end{array} \right.$$

soit bijective de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même.

Correction : Déjà si φ est nulle ou si A est nulle, alors f est bijective.

On se place donc dans le cas où A est non nulle.

Sinon on calcule $f(A) = (1 - \varphi(A))A$, comme il faut que $f(A) \neq 0$, on constate que l'on doit avoir $\varphi(A) \neq 1$.

Supposons $\varphi(A) \neq 1$, Montrons que f est injective. Soit $M \in \ker(f)$, alors $M = \varphi(M)A$, de plus, $\varphi(M) = \varphi(M)\varphi(A)$, ainsi comme $\varphi(A) \neq 1$, $\varphi(M) = 0$, donc $M = 0$ et f est injective. On en déduit que f est bijective.

Exercice 22 Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = Tr(AM)$$

Correction : Comme φ est une forme linéaire, alors il existe B tel que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = < B, M > = Tr(B^T M)$$

d'où le résultat en posant $A = B^T$.

Cela peut être une question de cours à re-démontrer. Il faut passer par les matrices $(E_{i,j})$ de l'exercice suivant.

Exercice 23 Soit :

$$H = \text{Vect}\left(\left\{AB - BA \middle| A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right\}\right)$$

1. Montrer que l'application trace Tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que $Tr(AB) = Tr(BA)$ pour tout couple de matrices.
2. On note $\left(E_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $E_{i,j}E_{i,i}$ et $E_{i,j}E_{i,j}$ si $i \neq j$.
3. Soit φ une forme linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout couple de (A, B) de matrices $\varphi(AB) = \varphi(BA)$. Montrer que la famille (φ, Tr) est liée.
4. Montrer que $H = \ker(Tr)$.
5. Trouver une supplémentaire de H.

Correction :

1. Cette question est du cours. Pour la linéarité, il suffit de vérifier que $Tr(A + \alpha B) = Tr(A) + \alpha Tr(B)$, tout simplement parce que $(A + \alpha B)_{ii} = A_{ii} + \alpha B_{ii}$.
2. D'une manière générale :

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ E_{il} \text{ si } j = k. \end{cases}$$

R Il faut revoir les propriétés de cette base : les coordonnées sont les coefficients, cette base est orthonormée pour le produit scalaire canonique $(A, B) \mapsto Tr(A^T B)$.

3. On commence par regarder la valeur de φ sur la base précédente.
On a pour $i \neq j$:

$$E_{ij} = E_{ij}E_{jj} \text{ et } E_{jj}E_{ij} = 0$$

Ainsi :

$$\varphi\left(E_{ij}\right) = \varphi\left(E_{ij}E_{jj}\right) = \varphi\left(E_{jj}E_{ij}\right) = \varphi(0) = 0$$

Ainsi, $\varphi(E_{ij})$ est nul si $i \neq j$.
On a aussi :

$$E_{ii} = E_{i1}E_{1i} \text{ et } E_{1i}E_{i1} = E_{11}$$

Ainsi : $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{11})$ (on peut dire que $\varphi(E_{ii})$ ne dépends pas de i.
Soit maintenant une matrice M quelconque, on décompose dans la base :

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}E_{ij}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(M) =& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\varphi(E_{ij}) && \text{par linéarité} \\
=& \sum_{i=1}^{n} m_{ii}\varphi(E_{ii}) && \text{en utilisant} \varphi(E_{ij}) = 0 \text{ si } i \neq j \\
=& \varphi(E_{11})\sum_{i=1}^{n} m_{ii} && \text{en utilisant} \varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{11}) \\
=& \alpha Tr(M) && \text{avec } \alpha = \varphi(E_{11}).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi = \alpha Tr$ et donc la famille (φ, Tr) est liée (famille de forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).
4. On procède par double inclusion :
Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors clairement $Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$. Ainsi, l'application Tr est nulle sur la famille génératrice de H, donc $H \subset \ker(Tr)$. D'où l'inclusion.

R H est défini comme l'ev engendré par une famille infinie de matrices. Toute matrice de H s'écrit comme une somme finie de telle matrice, ainsi si $M \in H$, alors il existe un $m \in \mathbb{N}$ et m matrices (A_i), m matrices (B_i) et m réels (α_i) tels que :

$$M = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(A_iB_i - B_iA_i)$$

D'un autre côté, considérons $M \in \ker(Tr)$.
On décompose M dans la base :

$$\begin{aligned}
M =& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}E_{ij} \\
=& \sum_{i\neq j} m_{ij}E_{ij} + \sum_{i=1}^{n} m_{ii}E_{ii} && \text{on met les termes diagonaux à part} \\
=& \sum_{i\neq j} m_{ij}E_{ij} + \sum_{i=2}^{n} (m_{ii} - m_{11})E_{ii} && \text{car } Tr(M) = 0
\end{aligned}$$

On va donc travailler sur les vecteurs de la base. Si $i \neq j$, on a :

$$\begin{aligned}
E_{ij} &= E_{ij}E_{jj} \text{ et } E_{jj}E_{ij} = 0 \\
\text{donc } E_{ij} &= E_{ij}E_{jj} - E_{jj}E_{ij} \in H
\end{aligned}$$

Ainsi $E_{ij} \in H$ pour $i \neq j$.
Pour les termes diagonaux si $i > 1$:

$$\begin{aligned}
E_{ii} &= E_{i1}E_{1i} \text{ et } E_{1i}E_{i1} = E_{11} \\
\text{donc } E_{ii} - E_{11} &= E_{i1}E_{1i} - E_{1i}E_{i1} \in H
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_{ii} - E_{11} \in H$ pour $i > 1$. Au final,on en déduit que $M \in H$ et donc l'inclusion réciproque.

5. Déjà, on a $rg(Tr) = 1$ (c'est une forme linéaire non nulle), donc par théorème du rang : $\dim(\ker(Tr) = n^2 - 1$, ainsi son supplémentaire est de dimension 1.
   Notons $G = \text{Vect}(I_n)$, G est bien un SEV de dimension 1. Montrons que $G \oplus H = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Déjà, on a la bonne relation pour les dimension. Il reste donc à montrer que $G \cap H = \{0\}$. Considérons un élément $M \in G \cap H$, on alors : M s'écrit sous la forme $M = \lambda I_n$, et donc $Tr(M) = \lambda n$, d'un autre côté, $M \in H$, donc $Tr(M) = 0$
   On en déduit que $\lambda n = 0$, et donc que $\lambda = 0$ et donc que $M = 0$.
   On peut aussi le vérifier en écrivant :
   $$M = \alpha_1(A_1B_1 - B_1A_1) + \cdots + \alpha_p(A_pB_p - B_pA_p)$$
   Au final, $G \cap H = \{0\}$ et $G \oplus H = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 24 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathscr{L}(E)$ tels que : $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$.
Montrer que $E = \ker(f) + \ker(g)$.

Correction méthode 1 (semble ne pas aboutir) : Soit x dans E, on doit montrer qu'il existe $a \in \ker(f)$ et $b \in \ker(g)$ tel que $x = a + b$.

Analyse : on suppose que a et b existent.

on a alors :
$$(f+g)(x) = g(a) + f(b)$$
Or $(f+g)(x) \in \text{Im}(f+g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$, donc une telle décomposition existe et est unique.

Synthèse :, on considère $(f+g)(x)$, c'est un élément de $\text{Im}(f+g)$ et donc un élément de $\text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$. On a donc :
$$\exists!(u,v) \in \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g), \ (f+g)(x) = u + v$$
Comme $u \in \text{Im}(f)$, on sait qu'il existe $b \in E$, tel que $u = f(b)$ et de même, on a l'existence de a tel que $v = g(a)$.

Il reste donc à montrer que $x = a + b$ et que $a \in \ker(f)$ et que $b \in \ker g$. On a la relation :
$$f(x) + g(x) = f(b) + g(a)$$
On a donc deux décompositions d'un élément de $\text{Im}(f+g)$ sous la forme d'une somme d'un élément de $\text{Im}(f)$ et d'un élément de $\text{Im}(g)$. Ainsi : $f(x) = f(b)$ et $g(x) = g(a)$, donc $x - a \in \ker(g)$ et $x - b \in \ker(f)$.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que $a + b = x$ pour avoir le résultat.

Méthode 2 : Puisque $E \supset \ker(f) + \ker(g)$ et que l'on est en dimension finie, on va montrer l'égalité des dimensions. Pour cela, on écrit :
$$\dim(\ker(f) + \ker(g)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim\left(\ker(f) \cap \ker(g)\right)$$
Il reste donc à calculer la dimension de l'intersection.

Théorème du rang sur $f + g$:
$$\dim(E) = \text{Rg}(f+g) + \dim(\ker(f+g))$$
Mais $\ker(f+g) = \ker(f) \cap \ker(g)$ en effet l'inclusion $\supset$ est évidente.

Si $x \in \ker(f+g)$, alors $(f+g)(x) = 0$ donc $f(x) + g(x) = 0$. On a donc une décomposition de 0 en une somme d'un élément de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Im}(g)$, donc $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$. On peut donc dire que $x \in \ker(f) \cap \ker(g)$ ce qui donne l'inclusion réciproque.

ainsi, on peut écrire :
$$\begin{aligned}
\dim(E) =& \text{Rg}(f+g) + \dim\left(\ker(f) \cap \ker(g)\right) \\
=& \text{Rg}(f) + \text{Rg}(g) + \dim\left(\ker(f) \cap \ker(g)\right) \\
=& \dim(E) - \dim(\ker(f)) + \dim(E) - \dim(\ker(g)) + \dim\left(\ker(f) \cap \ker(g)\right) \\
=& 2\dim(E) - \dim\left(\ker(f) + \ker(g)\right)
\end{aligned}$$
On en déduit que $\dim\left(\ker(f) + \ker(g)\right) = \dim(E)$. D'où l'égalité des dimensions.

Exercice 25 Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $rg(AB - BA) = 1$.
Déterminer $(AB - BA)^2$.

Correction : On peut écrire :$AB - BA = CL$ avec C une colonne et L une ligne. Ainsi : $(AB - BA)^2 = tr(AB - BA)(AB - BA) = 0$.

Exercice 26 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^3 = id$.

1. Montrer que $E = \ker(f - id) \oplus \mathrm{Im}(f - id)$.
2. Montrer que $\ker(f - id) = \mathrm{Im}(f^2 + f + id)$
3. Montrer que $\ker(f^2 + f + id) = \mathrm{Im}(f - id)$.

Correction :

1. On montre d'abords que l'intersection est réduite à $\{0\}$. Soit $x \in \ker(f - id) \cap \mathrm{Im}(f - id)$. On sait $f(x) = x$ et il existe $t \in E$, tel que : $x = f(t) - t$. On a alors :
$$\begin{aligned} x &= f(t) - t \\ x &= f^2(t) - f(t) \\ x &= t - f^2(t) \end{aligned}$$
Ainsi $3x = 0$ et $x = 0$.
En dimension finie, on applique le théorème du rang.
En dimension infinie, on fait une analyse synthèse pour l'existence. On considère $x \in E$. On suppose qu'il existe $(u, v) \in \ker(f - id) \times \mathrm{Im}(f - id)$. On écrit $v = f(t) - t$ On a alors :
$$\begin{aligned} x &= u + f(t) - t \\ f^2(x) &= u + f^2(t) - f(t) \\ f^3(x) &= u + t - f^2(t) \end{aligned}$$
Ainsi, $3u = x + f(x) + f^2(x)$. Ce qui donne u et $v = x - u$.
Pour la synthèse, on pose u et v comme ci-dessus. On a alors, $x = u + v$, et $u \in \ker(f - id)$. Il reste $v \in \mathrm{Im}(f - id)$. Pour cela, on écrit :
$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{3}f^2(x) - \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}x \\ &= f\left(-\frac{2}{3}x\right) - \left(-\frac{2}{3}x\right) \\ &\quad + f\left(-\frac{1}{3}f(x)\right) - \left(-\frac{1}{3}f(x)\right) \end{aligned}$$
On pose donc
$$t = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}f(x)$$
2. On procède par double inclusion. Soit $x \in \ker(f - id)$. On a alors $f(x) = x$. On pose $u = \frac{x}{3}$, on a alors :
$$f^2(u) + f(u) + u = x$$
D'où $x \in im(f^2 + f + id)$ et l'inclusion.
Soit $y \in im(f^2 + f + id)$, on sait :
$$\exists a \in E,\ y = f^2(a) + f(a) + a$$
On a alors $f(y) = a + f^2(a) + f(a) = y$ d'où $y \in \ker(f - id)$ et l'inclusion réciproque.
3. On procède de nouveau par double inclusion.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f - id)$, il existe alors $x \in E$, tel que $y = f(x) - x$. On vérifie alors que :
$$\begin{aligned} y &= f(x) - x f(y) = & f^2(x) - f(x) \\ f^2(y) &= x - f^2(x) \end{aligned}$$

et donc $y+f(y)+f^2(y)=0$, ie $y\in\ker(f^2+f+id)$ et l'inclusion.
En dimension fini, on peut faire avec le théorème du rang et la question précédente pour prouver l'égalité des dimensions.
Soit $x\in\ker(f^2+f+id)$. On a alors :

$$\begin{aligned}x=&-f(x)-f^2(x)\\ =&f(-f(x))-(-f(x))-2f(x)\\ =&f(-f(x))-(-f(x))+f(-2x)-(-2x)+2x\end{aligned}$$

D'où

$$3x=f(-f(x)-2x)-(-f(x)-2x)$$

On pose donc $u=\frac{1}{3}(-f(x)-2x)$ et on a bien $x=f(u)-u$.

Exercice 27

1. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{P(t)}{\sqrt{1-t}}dt$ converge.
2. Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P,Q\in E$, on pose :

   $$\langle P,Q\rangle=\int_0^1\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}}dt$$

   Montrer que cette application est un produit scalaire de E.
3. Soit $A\in E$.
   On considère l'application f_A qui à $P\in E$ associe le reste de la division euclidienne de P par A.
   Montrer que f_A est un projecteur de E.
   Déterminer son image et son noyau.

Correction :

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$ converge, car elle est égale à l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{u}}du$. Et on a :

   $$\forall k\geqslant 1,\ \frac{t^k}{\sqrt{1-t}}\underset{t\to1}{\sim}\frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

   Donc par comparaison des fonctions positives au voisinage de 1, on obtient que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t}}dt$ converge. Par combinaison linéaire, $\displaystyle\int_0^1\frac{P(t)}{\sqrt{1-t}}dt$ converge pour tout polynôme.
2. Déjà l'intégrale converge car $P(t)Q(t)$ est un polynôme. La symétrie et la bilinéarité ne pose pas de problème. L'intégrale d'une fonction continue par morceaux et positive est positive et n'est nulle que si la fonction est nulle.
3. Soit $P\in E$, on a :

   $$\exists!(Q,R)\in(\mathbb{R}[X])^2,\ P=AQ+R\qquad\text{avec } deg(R)<deg(A).$$

   Dans cette écriture, on a donc $R=f_A(P)$.
   Clairement, $f_A(f_A(P))=f_A(R)=R$ Ainsi, f_A est un projecteur.

   R La dernière question n'a pas de rapport à priori avec les deux précédentes.

Exercice 28 Soit $E=\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.
Pour $f,\ g\in E$, on pose

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1\big(f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\big)\,dt$$

1. Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur E.
2. On note U l'ensemble de $f\in E$ vérifiant $f(0)=f(1)=0$ et V l'ensemble des $f\in E$ vérifiant $f''=f$.
   Montrer que U et V sont des sous-espaces vectoriels de E, orthogonaux pour le produit scalaire précédent.

3. A-t-on $U \oplus V = E$?

Correction :

1. Cours.
2. Soit $f \in U$ et $g \in V$, on calcule en utilisant une ipp (crochet nul car $f \in U$) :

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle = \int_0^1 (fg + f'g') \\ &= \int_0^1 fg + \int_0^1 f'g' \\ &= \int_0^1 fg + [fg']_0^1 - \int_0^1 fg'' \\ &= \int_0^1 fg - \int_0^1 fg = 0\end{aligned}$$

NB : On a juste monté que $U^{\perp} \subset V$.
Il faut faire la réciproque.

3. **Attention :** pas de dimension finie !
Soit f dans E, il s'agit de trouver $g \in U$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t \in [0,1],\ f(t) = g(t) + \alpha \mathrm{ch}(t) + \beta \mathrm{sh}(t)$$

On prend la valeur en 0 et en 1 pour trouver (α, β).

Exercice 29 Centrale - Supélec

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $I_k = \mathrm{Im}\left(f^k\right)$ et $N_k = \ker\left(f^k\right)$.

1. Montrer que les I_k et les N_k sont stables par f.
2. Montrer que $N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n$ et que ces inclusions sont strictes.
3. Donner les dimensions de I_k et N_k.
4. Quels sont les sous-espaces de E stables par f ?
5. Y-a-t-il des couples (i,j) tels que $I_i = N_j$? Si oui les donner.

Correction :

1. Soit $k \in [\![0,n]\!]$ et $x \in N_k$, alors $f^k(x) = 0$ donc $f^k(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in N_k$. N_k est stable. Soit $k \in [\![0,n]\!]$ et $y \in I_k$, alors il existe $x \in E$, tq $f^k(x) = y$ donc $f^k(f(x)) = f(y)$ et donc $f(y) \in I_k$. I_k est stable.
2. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$, montrons que $N_k \subset N_{k+1}$. Soit $x \in N_k$ alors $f^k(x) = 0$ donc $f^{k+1}(x) = 0$.
Montrons que $I_{k+1} \subset I_k$. Soit $y \in I_{k+1}$, alors il existe $x \in E$, $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) \in I_k$.
Supposons maintenant par l'absurde que $N_k = N_{k+1}$. Déjà, avec le théorème du rang, on obtient $dim(I_k) = dim(I_{k+1})$ et donc $I_k = I_{k+1}$
Ensuite, on montre que $N_{k+1} = N_{k+2}$. On a déjà une inclusion, on considère donc $x \in N_{k+2}$, alors $f(x) \in N_{k+1} = N_k$, donc $x \in N_{k+1}$.
D'où dès qu'un des k vérifie $N_k = N_{k+1}$ les suivants sont automatiquement égaux, et donc $N_k = N_n = E$ ce qui signifie $f^k = 0$ contradiction.
3. La suite des dimensions de (N_k) est une suite d'entiers strictement croissante de $[\![0,n]\!]$, donc $N_k = k$ et $I_k = n-k$.
4. Soit F stable par f, on note $k = \dim(F)$ et on veut montrer que $F = N_k$.
On considère $x \in F$ et on note j l'ordre de x, c'est-à-dire l'entier tel que $f^j(x) = 0$ et $f^{j-1}(x) \neq 0$.
Un raisonnement classique montre alors que $\left(x, f(x), ;f^{j-1}(x)\right)$ est une famille libre de F : En effet, on écrit :

$$\sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i f^i(x) = 0$$

on compose par f^{j-1}, cela donne $\alpha_0 = 0$, puis on compose par f^{j-2}, etc.
On obtient donc que $j \leqslant k$, donc $F \subset N_j$ et on a égalité des dimensions.
5. Soit $i \in [\![0,n]\!]$, on a I_i stable et de dimension $n-i$, donc $I_i = N_{n-i}$

Exercice 30 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont supplémentaires dans E.
2. Justifier que $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f)$.

Correction :

1. Attention pas de dimension finie.
   On considère $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$, et on sait donc que $g(x) = 0$ et que x s'écrit $x = f(a)$ pour un certain $a \in E$. On a donc :
   $$g \circ f(a) = 0$$
   et donc $f \circ g \circ f(a) = 0$ et donc $f(a) = 0$ et donc $x = 0$.
   Soit maintenant $x \in E$ quelconque, on cherche (u, v) tel que :
   $$u \in \mathrm{Im}(f), \quad v \in \ker(g), \quad x = u + v$$
   Analyse : on a donc $g(x) = g(u)$ et u s'écrit $u = f(a)$, et donc $g(x) = g(f(a))$. On rapplique f et donc $f(g(x)) = f(a)$ et donc on peut prendre $a = g(x)$ et donc $u = f(g(x))$ puis $v = x - f(g(x))$. **NB :** ce n'est absolument pas clair qu'il y ait unicité ! l'analyse donne juste une idée de la valeur à poser.
   Synthèse : on pose donc $u = f(g(x))$ puis $v = x - f(g(x))$. on a clairement $u \in \mathrm{Im}(f)$ et $u + v = x$ le point important est de montrer que $v \in \ker(g)$. On calcule donc $g(v) = g(x) - g(f(g(x))) = 0$.
2. on procède par double inclusion. $f(\mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Im}(f)$ est évident. On considère maintenant $y \in \mathrm{Im}(f)$. On a donc : $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$, et donc : $y = f(g(f(x)))$ on $g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g)$ et donc y admet un antécédent par f qui est dans $\mathrm{Im}(g)$, d'où $y \in f(\mathrm{Im}(g))$ et l'inclusion réciproque.

Exercice 31 Pour tout réel α, on note f_α l'élément de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par :

$$f_\alpha : x \longmapsto \exp(\alpha x)$$

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des réels deux à deux distincts.
Montrer que la famille $\left(f_{\alpha_i}\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est libre.

Correction : exercice classique d'algèbre linéaire.

On peut faire une récurrence en posant $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout choix de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ réels deux à deux distincts, la famille $\left(f_{\alpha_i}\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est libre. »

Pour l'initialisation, on considère $\alpha \in \mathbb{R}$, et comme la fonction f_α n'est pas identiquement nulle, la famille (f_α) est libre.

Pour l'hérédité, soit n fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et considérons $n+1$ réels distincts deux à deux que l'on ordonne par ordre croissant :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha_{n+1}$$

On considère alors une combinaison linéaire nulle :

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \dots \lambda_{n+1} f_{\alpha_{n+1}} = 0$$
$$\text{ie } \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \exp(\alpha_1 x) + \dots + \lambda_n \exp(\alpha_n x) + \lambda_{n+1} \exp(\alpha_{n+1} x) = 0$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \underbrace{\exp((\alpha_1 - \alpha_{n+1})x)}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} + \dots + \lambda_n \underbrace{\exp((\alpha_n - \alpha_{n+1})x)}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} + \lambda_{n+1} = 0$$

En prenant la limite en $+\infty$, on obtient $\lambda_{n+1} = 0$. Ainsi, on se ramène à la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \exp(\alpha_1 x) + \dots + \lambda_n \exp(\alpha_n x) = 0$$

qui par hypothèse de récurrence donne $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. D'où l'hérédité.

Puis la conclusion.

R Éventuellement, on peut « cacher la récurrence » : on considère une relation du type : $\lambda_1 f_{\alpha_1} + \dots \lambda_n f_{\alpha_n} = 0$, on montre $\lambda_n = 0$, on procède de même avec λ_{n-1}, etc.

Exercice 32 CCP

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \text{à coefficients non nuls.}$$

1. Quel est le rang de A ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.
3. On revient au cas général et on pose $B = 2A - Tr(A)I_n$.
   Calculer le déterminant de B
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.
5. Calculer B^2. Calculer B^{-1} dans le cas où B est inversible.

Correction :

1. Le rang de A est 1 car toutes les colonnes sont égales.
2. On regarde si $A^2 = A$.
   On calcule donc A^2. On a :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

   Donc :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= SA \qquad\qquad \text{où } S = \sum_{i=1}^{n} a_i = Tr(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi, $A^2 = A$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.
3. La matrice de B est :

$$\begin{pmatrix} 2a_1 - S & 2a_1 & \dots & 2a_1 \\ 2a_2 & 2a_2 - S & \dots & 2a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ 2a_n & 2a_n & \dots & 2a_n - S \end{pmatrix} \text{ avec } S = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

   On fait l'opération $l_1 \leftarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} l_k$, ce qui donne :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} S & S & \dots & S \\ 2a_2 & 2a_2 - S & \dots & 2a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ 2a_n & 2a_n & \dots & 2a_n - S \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2a_2 & 2a_2 - S & \dots & 2a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ 2a_n & 2a_n & \dots & 2a_n - S \end{vmatrix}$$

puis avec $l_i \leftarrow l_i - 2a_i l_1$ (pour $i > 1$), on obtient :

$$\det(B) = S \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -S & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -S \end{vmatrix}$$

Au final :

$$\det(B) = (-1)^{n-1} S^n$$

4. B est donc inversible si et seulement si $S \neq 0$.
5. On a :

$$\begin{aligned} B^2 =& (2A - SI_n)^2 \\ =& 4A^2 - 4SA + S^2 I_n \end{aligned}$$

On a vu que $A^2 = SA$. Ainsi, $B^2 = S^2 I_n$, et donc on retrouve que B est inversible si et seulement si $S \neq 0$ puis que dans ce cas $B^{-1} = \frac{1}{S^2} B$.

✯ Algèbre linéaire - réduction

Exercice 33 Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donner la matrice de passage.

Commentaire : exercice de trigonalisation, qui normalement n'est pas au programme (au sens où aucune technique n'est attendue particulièrement).

Correction :

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et il s'agit donc de trouver une base (e_1, e_2, e_3) telle que :

$$\begin{aligned} f(e_1) =& 2e_1 \\ f(e_2) =& 2e_2 + e_1 \\ f(e_3) =& 2e_3 \end{aligned}$$

On doit donc prendre e_1 et e_3 comme vecteur propre. On regarde donc le noyau de $A - 2I_3$:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit donc que :

$$E_2(f) = Vect\left((0,1,0),(1,0,1)\right)$$

On devra donc prendre e_1 et e_3 dans cet ensemble, mais il faut aussi choisir e_2, or, on constate que si on prend $e_1 = (0,1,0)$, alors l'équation : $(A - 2I_3)X = e_1$ n'admet pas de solution. Le vecteur e_1 doit être pris aussi dans l'image de $f - 2Id$ pour que l'on puisse choisir e_2.

On doit donc avoir

$$e_1 \in \mathrm{Im}(f - 2Id) = Vect\left((1,-1,1)\right)$$

comme $(1,-1,1)=(1,0,1)-(0,1,0)\in\ker(f-2id)$, on peut prendre $e_1=(1,-1,1)$ Ce qui donne $e_2=(1,0,0)$ pour avoir $(A-2I_3)e_2=e_1$ et $e_3=(1,0,1)$ (ou $e_3=(0,1,0)$, au choix, il faut juste que e_3 soit dans $E_2(f)$ et forme une famille libre avec e_1). On obtient alors la matrice de passage :

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Exercice 34 Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension n et $u\in\mathscr{L}(E)$. On suppose que $Sp(u)=\{1,2,\ldots,n\}$.

1. Soit $v\in\mathscr{L}(E)$ qui commute avec u. Montrer que v est diagonalisable.
2. Déterminer tous les endomorphismes qui commutent avec u.

Commentaire : exercice classique de diagonalisation simultanée (voir compléments sur le réduction). On pourrait avoir juste l'hypothèse que le spectre de u est constituée de n valeurs distinctes.

Correction :

1. Soit v qui commutent avec u.
   Les sous-espaces propres de u sont stables par v (c'est le point important), or c'est des droites donc cela donne des vecteurs propres pour v.
   Avec les détails : u est diagonalisable et ces sous-espaces propres sont des droites (puisque u a n valeurs propres distinctes).
   On note $\mathscr{B}=(e_i)$ une base de vecteurs propres de u, telle que :
   $$E_i(u)=Vect(e_i)$$
   Soit $i\in[\![1,n]\!]$, l'espace $E_i(u)$ est une droite stable par v, donc le vecteur e_i qui engendre cette droite est aussi vecteur propre de v associée à une valeur propre notée α_i. Ainsi :
   $$\forall i\in ii1n,\ \exists\alpha_i\in\mathbb{K},\ v(e_i)=\alpha_i e_i$$
   Et donc $\mathscr{B}=(e_i)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de v. Ainsi, v est diagonalisable.
   NB : c'est la même base (e_i) qui diagonalise u et v !
2. On a vu à la question précédente que si v commute avec u, alors v est aussi diagonalisable dans la base $\mathscr{B}=(e_i)$. Réciproquement, supposons que v soit diagonalisable dans la base $\mathscr{B}$ et donc que :
   $$\forall i\in[\![1,n]\!],\ \exists\alpha_i\in\mathbb{K},\ v(e_i)=\alpha_i e_i$$
   On doit maintenant vérifier que $u\circ v=v\circ u$.
   Il y a deux techniques :
   - Sur les endomorphismes, on a pour toute valeurs de i :
     $$u\circ v(e_i)=u(\alpha_i e_i)=\alpha_i u(e_i)=i\alpha_i e_i$$
     $$v\circ u(e_i)=v({}_ie_i)=iv(e_i)=i\alpha_i e_i$$
     Ainsi, les endomorphismes, $u\circ v$ et $v\circ u$ coïncident sur une base donc sont égaux.
   - Sur les matrices :
     $$Mat_{\mathscr{B}}(u\circ v)=Mat_{\mathscr{B}}(u)Mat_{\mathscr{B}}(v)=diag(1,\ldots,n)diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=diag(\alpha_1,\ldots,n\alpha_n)$$
     $$Mat_{\mathscr{B}}(v\circ u)=Mat_{\mathscr{B}}(v)Mat_{\mathscr{B}}(u)=diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)diag(1,\ldots,n)=diag(\alpha_1,\ldots,n\alpha_n)$$
     les endomorphismes ont les mêmes matrices donc sont égaux.

Exercice 35 Soit E un espace de dimension finie n.

On considère f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f\circ g=0\qquad\text{et}\qquad f+g\in GL(E)$$

Montrer que :

1. $\mathrm{Im}(f+g)\subset\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$.
2. En déduire $E=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$.

Correction :

1. Ce résultat est direct : si $y \in \mathrm{Im}(f+g)$, alors il existe $x \in E$, tel que $y = (f+g)(x) = f(x)+g(x)$, ainsi $y \in Im(f)+Im(g)$.
2. On a $\mathrm{Im}(f+g) = E$ car $f+g$ est inversible (donc surjective). On en déduit donc que $E \subset \mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$, l'autre inclusion est évidente car $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont des SEV de E.

Exercice 36 **ESM 2019** Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$, avec $A \neq 0$.

On suppose que $A^2 \neq 0$.

Montrer que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction : On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On cherche donc une base $\mathscr{B} = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on voit donc que $y = f(x)$ et $z = f(y) = f^2(x)$. On est donc ramené à construire un vecteur x (le premier vecteur de la base), tel que $\left(x, f(x), f^2(x)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $A^2 \neq 0$, on sait qu'il existe $x \in E$, tel que $f^2(x)$ est non nul.

On montre donc que $\left(x, f(x), f^2(x)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on regarde l'équation :

$$\alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x) = 0$$

on compose par f^2 pour avoir $\alpha = 0$ puis par f pour avoir $\beta = 0$.

La famille $\left(x, f(x), f^2(x)\right)$ est ainsi libre et donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est bien la matrice A' demandée. On en déduit que A et A' sont semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme.

REM : c'est une résultat assez classique : si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme nilpotent d'ordre n où n est la dimension de l'espace E. C'est-à-dire si $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$, alors en prenant x tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$, alors :

$$\mathscr{B} = \left(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\right)$$

est une famille libre (même démo qu'au dessus) donc une base de E. De plus, la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de f est une sous-diagonale de 1.

Voir aussi l'exercice sur les noyaux itérés : par exemple, $\left(f(x), \dots, f^{n-1}(x)\right)$ est une base de l'image de f tandis que : $f^{n-1}(x)$ est une base du noyau. De même : $\left(f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\right)$ est une base de l'image de f^2 et $\left(f^{n-2}(x), f^{n-1}(x)\right)$ est une base du noyau de f^2.

Exercice 37 Soit $P = X^3 + X + 1$. On note α, β et γ les racines complexes de P.

1. Calculer $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.
2. En exploitant la division euclidienne du polynôme X^4 par P, calculer $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$.

Correction : relation coefficient / racines :

$$\begin{aligned} P =& (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \\ =& X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma &= 1 \\ \alpha\beta\gamma &= -1 \end{aligned}$$

on élève ensuite au carré :

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 0$$

ce qui s'écrit :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=0$$

donc :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2$$

Ensuite :

$$\alpha^3=-\alpha-1 \text{ idem pour } \beta \text{ et } \gamma$$

et donc :

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-(\alpha+\beta+\gamma)-3=-3$$

Enfin, on a :

$$X^4=X(X^3+X+1)-X^2-X$$

et donc :

$$\alpha^4=-\alpha^2-\alpha \text{ idem pour } \beta \text{ et } \gamma$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4+\gamma^4&=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha+\beta+\gamma)\\&=+2\end{aligned}$$

Exercice 38 (avec Python)

1. Écrire une fonction prenant en argument une matrice M et renvoyant un booléen indiquant si M est la matrice d'une homothétie.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathscr{L}(E)$.
   Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x\in E$, $f(x)$ et x sont colinéaires.
3. Déterminer les homothéties de trace nulle.
4. Écrire une fonction prenant en argument deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ et renvoyant un booléen indiquant si x et y sont colinéaires.
5. Montrer qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Correction :

1. Il faut vérifier que les termes non diagonaux sont nuls et les termes diagonaux sont tous égaux au premier.

```
def estHomo(M):
  """
  entrée: M = matrice
  sortie: booléen : True si M est homothétie
  """
  (n,m) = shape(M)
  if n != m :
    return False
  for i in range(M):
    for j in range(M):
      if i == j and M[i,i] != M[0,0] :
        return False
      elif M[i,i] != 0 :
        return False
  return True
```

2. Supposons que f soit une homothétie, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$, en conséquence, x et $f(x)$ sont liés.
   Supposons maintenant que pour tout $x \in R$, x et $f(x)$ soient liés. On a alors :

   $$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K},\ f(x) = \lambda_x x$$

   (la difficulté est que le λ dépends de x).
   Considérons x et y linéairement indépendant. On a alors :

   $$f(x) = \lambda_x x \text{ et } f(y) = \lambda_y y$$

   d'où clairement :

   $$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

   On en déduit comme la famille (x,y) est libre que $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$. Ainsi, λ_x ne dépend pas de x.
   On en déduit qu'en fait :

   $$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ f(x) = \lambda x$$

   et donc que f est une homothétie.
3. Soit f une homothétie de trace nulle, alors $f = \lambda Id$ et $Tr(f) = n\lambda$ (où n est la dimension de l'espace). Ainsi, $\lambda = 0$ et donc f est nulle.
4. Il y a plusieurs techniques, la plus simple consiste à chercher un k tel que $x_k \neq 0$, puis à poser $\lambda = \frac{y_k}{x_k}$, puis à vérifier que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda x_i = y_i$. Si k n'existe pas c'est que x est nul et donc que (x,y) sont colinéaires.

```python
def rechNonNul(x):
  """
  entrée: x = array taille n
  sortie: k =  entier  de [|0, n-1|] ou (-1)
              tel que x[k] != 0
              (-1) si x est nul
  """
  n = len(x)
  for k in range(n):
    if x[k] != 0:
      return k
  return -1

def  sontColineaires(x,y):
  """
  entrée: (x,y) = 2 array de même taille
  sortie: booléen True si x et y colinéaires.
  """
  k = rechNonNul(x)
  if k == -1:
    return True
  lam = y[k] / x[k]
  n = len(x)
  for k in range(n):
    if abs(x[k] - lam*y[k])> 10**(-15):
      return False
  return True
```

5. Le résultat se démontre par récurrence sur n (taille de la matrice).
   On note donc :

   $\mathscr{P}(n)$: " toute matrice de taille n de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

   Pour $n = 2$, soit une matrice A de taille nulle. On note f l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice A
   On a alors deux choix : Soit A est la matrice d'une homothétie et puisque sa trace est nulle, elle est en fait nulle (en particulier de diagonale nulle).

Soit il existe x non nul, tel que $(x, f(x))$ est libre, et donc c'est une base de $(x, f(x))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et donc la matrice A est semblable à :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & *1 & * \end{pmatrix}$$

mais comme sa trace est nulle, on a nécessairement $B = \begin{pmatrix} 0 & *1 & 0 \end{pmatrix}$ d'où l'initialisation.
Considérons n fixé, tel quel $\mathscr{P}(n)$ est vraie. et A une matrice de taille $n+1$, et f l'endomorphisme canoniquement associé.
Idem, si A est une homothétie.
Sinon, on peut encore trouver x non nul, tel que $(x, f(x))$ est libre, et donc on peut compléter cette famille pour avoir une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ et donc la matrice A est semblable à :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 1 & * & \dots & * \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \text{ notons : } B = \begin{pmatrix} 0 & L \\ v & A_1 \end{pmatrix}$$

où A_1 est la matrice de taille $n \times n$ extraite, v le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et L le vecteur ligne $\begin{pmatrix} * & \dots & * \end{pmatrix}$

On a alors la trace de A_1 qui est nulle. Donc il existe une matrice $P_1 \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice B_1 de taille n telle que :

$$B_1 = P_1 B_1 P_1^{-1} \text{ avec } B_1 \text{ de diagonale nulle.}$$

et donc :

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 0 & L \\ v & P_1 B_1 P_1^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ v & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On note alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & L \\ v & B_1 \end{pmatrix}$$

On constate alors que $PBP^{-1} = A$ et que B est à diagonale nulle.

Exercice 39 On définit l'ensemble E des triplets de suite tel que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -v_n - w_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ W_{n+1} &= -2u_n - v_n - w_n \end{aligned}$$

1. On pose :

   $$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

   Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que E est un sev de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^3}$.
3. Programmer en Python une fonction qui renvoie les valeurs de (u_n, v_n, w_n).
4. Donner $\dim(E)$.
5. Trouver χ_A.
6. Diagonaliser A avec Python.
7. Exprimer u_n en fonction des conditions initiales.

Exercice 40 Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ & & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{n}{2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Python : écrire une fonction qui à partir de n permet de calculer M.
La matrice M est-elle inversible ?
Déterminer M^{-1}

Exercice 41 Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $A(x)$ la matrice de taille n :

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & & & & \\ 1 & x & 1 & & & \\ & 1 & x & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & x & 1 \\ & & & & 1 & x \end{pmatrix}$$

1. Soit pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\Delta_n = \det(A(2\cos(\theta)))$.
   Montrer que :
   $$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \geqslant 3,\ \Delta_n = a\Delta_{n-1} + b\Delta_{n-2}$$
   Expliciter a et b.
2. Montrer que $\Delta_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.
3. Montrer que $A(x)$ est diagonalisable.
4. Donner les valeurs propres de $A(x)$.

Correction :

1. On fait un développement selon la première ligne. Cela donne :

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \begin{vmatrix} x & 1 & & & & \\ 1 & x & 1 & & & \\ & 1 & x & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & x & 1 \\ & & & & 1 & x \end{vmatrix} & \text{dvlpt ligne 1} \\ = & x\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & x & 1 & & & \\ & 1 & x & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & x & 1 \\ & & & & 1 & x \end{vmatrix} & \text{dvlpt colonne 1} \\ = & x\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} & \end{aligned}$$

   On trouve $a = x$ et $b = -1$.
2. Soit on fait une récurrence double, soit on utilise le fait que Δ_n est suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Pour la récurrence double, on pose :

$$\mathscr{P}(n) : \text{"}\Delta_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}\text{"}$$

$$\Delta_1 = 2\cos\theta \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 = 4\cos^2\theta - 1$$

On considère $n \geqslant 1$ fixé, tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vrai, on montre alors $\mathscr{P}(n+2)$:

$$\begin{aligned}\Delta_{n+2} =& 2\cos\theta\Delta_{n+1} - \Delta_n \\ =& 2\cos\theta\frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} \\ =& \frac{1}{\sin\theta}\left(!\cos\theta\sin((n+2)\theta) - \sin((n+1)\theta)\right)\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que :

$$2\cos\theta\sin((n+2)\theta) - \sin((n+1)\theta) = \sin((n+3)\theta)$$

Ce qui peut être fait par :

$$\begin{aligned}\sin((n+3)\theta)) &= \cos\theta\sin((n+2)\theta)) + \cos((n+2)\theta))\sin\theta \\ \sin((n+1)\theta)) &= \sin((n+2-1)\theta)) \\ &= \cos\theta\sin((n+2)\theta)) - \cos((n+2)\theta))\sin\theta\end{aligned}$$

Pour la deuxième technique, il faut remarque que (Δ_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est : $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = 0$ qui admet pour racine $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.
Et donc que l'on peut écrire :

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \alpha\cos n\theta + \beta\sin n\theta$$

Vu la forme attendue, on peut plutôt utiliser le fait que (Δ_{n-1}) est aussi une suite récurrente linéaire d'ordre 2. et donc que l'on peut écrire :

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \alpha\cos(n+1)\theta + \beta\sin(n+1)\theta$$

On calcule (α,β) avec les premiers termes :

$$\begin{aligned}\Delta_1 = 2\cos\theta =& \alpha\cos(2\theta) + \beta\sin(2\theta) \\ \Delta_2 = 4\cos^2\theta - 1 =& \alpha\cos(3\theta) + \beta\sin(3\theta)\end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{\sin\theta}$ est solution du système. Ce qui consiste juste à vérifier que :

$$\begin{aligned}2\cos\theta =& \frac{1}{\sin\theta}\sin(2\theta) \\ 4\cos^2\theta - 1 =& \frac{1}{\sin\theta}\sin(3\theta)\end{aligned}$$

La première est évidente, la seconde provient de :

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= -\sin^3\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta && \text{avec la formule de Moivre} \\ &= \sin\theta\left(-1 + \cos^2\theta + 3\cos^2\theta\right) \\ &= \sin\theta\left(-1 + 4\cos^2\theta\right)\end{aligned}$$

3. Pour toute valeur de x, $A(x)$ est symétrique réelle et donc diagonalisable.

4. Soit un x fixé, on calcule

$$\chi(\lambda) = det\left(\lambda I_n - A(x)\right) = (-1)^n \det\left(A(x) - \lambda I_n\right) = (-1)^n \det\left(A(x-\lambda)\right)$$

Il s'agit donc de trouver les valeurs de λ qui annule $\det(A(x-\lambda))$.
Or on a vu que si $\sin\theta$ est non nul, alors : $\Delta_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.
En particulier pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\theta = \frac{k\pi}{(n+1)}$ est tel que $\sin(\theta) \neq 0$, et que $\Delta_n = 0$.
Ainsi, on pose :

$$\lambda_k = x - 2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right) \text{ pour } k \in [\![1,n]\!]$$

il s'agit de n valeurs distinctes (car le cosinus est décroissant strictement sur $]0,\pi[$) et

$$\begin{aligned}\chi(\lambda_k) =& (-1)^n \det\left(A\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right)\right)\\ =& (-1)^n \sin(k\pi) \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)} = 0\end{aligned}$$

Donc les (λ_k) sont les valeurs propres de $A(x)$.

Exercice 42 Étudier la diagonalisabilité de $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\\4&4&4&4\end{pmatrix}$

Correction : matrice de rang 1. 0 valeur propre d'ordre 3, 10 valeur propre d'ordre 1.
On obtient :

$$PDP^{-1} \qquad \text{avec } P = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&0&0&2\\0&-1&0&3\\0&0&-1&4\end{pmatrix} \text{ et } D = diag(0,0,0,10)$$

Exercice 43 Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que cette suite converge vers une certaine matrice A.

La matrice A est-elle alors forcément diagonalisable ?

Correction : Question ouverte donc exercice qui n'est pas facile.
Déjà aucun résultat du cours n'affirme ce résultat.

Dans le cours, la matrice la plus simple non diagonalisable est : $A = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ car son spectre est $\{1\}$ et que A n'est pas l'identité. D'un autre côté, les matrices diagonalisables les plus simples sont les matrices avec des valeurs propres distinctes. En particulier les matrices triangulaires supérieures avec des termes distincts sur la diagonale.

On va donc construire une suite de matrice dont les valeurs propres sont distinctes qui converge vers A.

On considère ainsi la suite de matrices :

$$A_p = \begin{pmatrix}1&1\\0&1-\frac{1}{p}\end{pmatrix} \text{ pour } p \in \mathbb{N}^*$$

Pour chaque p, A_p est diagonalisable, car elle a deux valeurs propres distinctes 1 et $1-\frac{1}{p}$, mais la limite de la suite A_p est la matrice A non diagonalisable.

Exercice 44 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix}0&1&a\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ cette matrice est-elle diagonalisable ?

Correction : on commence par calculer le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}\chi_M(X) &= \det(XI_3 - M)\\ &= \begin{vmatrix} X & -1 & -a\\ -1 & X & 0\\ 0 & -1 & X\end{vmatrix}\\ &= (-1)^{3+2}(-1)\begin{vmatrix} X & -a\\ -1 & 0\end{vmatrix} + (-1)^{3+3}X\begin{vmatrix} X & -1\\ -1 & X\end{vmatrix}\\ &= -a + X(X^2-1) = X^3 - X - a\end{aligned}$$

On va regarder si il peut y avoir des valeurs propres multiples.

Considérons λ une valeur propre double de M.

On a alors $\chi_M'(\lambda) = 0$, et donc $3\lambda^2 - 1 = 0$. Ainsi, on obtient :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } \lambda = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Or $\chi_M(\lambda) = 0$, ce qui donne :

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - a = 0 \text{ ou } -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - a = 0$$

D'où :

$$a = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ ou } a = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

On obtient ainsi un premier résultat : si $a \neq -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et $a \neq \frac{2}{3\sqrt{3}}$, alors la matrice a trois valeurs propres distinctes et donc elle est diagonalisable.

Considérons maintenant le cas $a = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, cela donne :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{2}{3\sqrt{3}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \chi_M(\lambda) = X^3 - X - \frac{2}{3\sqrt{3}} = \left(X + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(X - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

χ_M admet deux racines distinctes : $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ est racine double de χ_M, par produit ou somme des racines, on en déduit que l'autre racine est $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (racine simple).

La dimension du sous-espace propre associé à $\frac{2}{\sqrt{3}}$ est 1 car c'est une racine simple. Il reste à déterminer la dimension du sous-espace propre associé à $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. On a :

$$M + \frac{1}{\sqrt{3}}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{2}{3\sqrt{3}}\\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

On réduit la matrice pour calculer le rang :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3\sqrt{3}}\\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}l_2\\ l_2\\ l_3\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1\\ l_2\\ l_3 - l_1\end{matrix}$$

Le rang est 2 donc la dimension du noyau est 1, on en déduit que la dimension du sous-espace propre est 1 et donc que la matrice n'est pas diagonalisable.

Même raisonnement pour $a = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 45 Mines PC

Soit la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(t) & \sin(2t) \\ \sin(t) & 0 & \sin(2t) \\ \sin(2t) & \sin(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de t cette matrice est-elle diagonalisable ?

Correction : On commence par écrire :

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(t) & 2\sin(t)\cos(t) \\ \sin(t) & 0 & 2\sin(t)\cos(t) \\ 2\sin(t)\cos(t) & \sin(t) & 0 \end{pmatrix} = \sin(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\cos(t) \\ 1 & 0 & 2\cos(t) \\ 2\cos(t) & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\sin(t) = 0$, alors $M(t) = 0$ est donc diagonalisable.

Notons $A(t)$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\cos(t) \\ 1 & 0 & 2\cos(t) \\ 2\cos(t) & 1 & 0 \end{pmatrix}$ si $\sin(t) \neq 0$, il est clair que $M(t)$ est diagonalisable si et seulement si $A(t)$ est diagonalisable.

R Ce point est éventuellement à détailler un peu : si $A = PDP^{-1}$, alors $M = P\left(\frac{1}{\sin(t)}D\right)P^{-1}$. On peut aussi voir qu'un vecteur de propre de M est vecteur propre de A et que si λ est valeur propre de M, alors $\sin(t)\lambda$ est valeur propre A. Le tout uniquement si $\sin(t) \neq 0$

On a alors :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - \lambda\left(1 + 2\cos(t) + 4\cos^2(t)\right) - 2\cos(t) - 4\cos^2(t)$$

-1 est racine évidente. On écrit :

$$\chi_A = (X+1)\left(X^2 - X - 2\cos(t) - 4\cos^2(t)\right)$$

Le discriminant du polynôme de degré 2 est $\Delta = (1 + 4\cos(t))^2$. ainsi :

$$\begin{aligned} \chi_A &= (X+1)(X - (1 + 2\cos(t)))(X + 2\cos(t)) \\ \mathrm{Sp}(A) &= \Big\{-1, 1 + 2\cos(t), -2\cos(t)\Big\} \text{ non nécessairement distinctes} \end{aligned}$$

Comme on est dans le cas $\sin(t) \neq 0$, on sait que $1 + 2\cos(t) \neq -1$.

Dans le cas $\sin(t) \neq 0$, $\cos(t) \neq -\frac{1}{4}$ et $\cos(t) \neq 12$, on a trois racines distinctes, donc $M(t)$ est diagonalisable.

Dans le cas $\cos(t) = -\frac{1}{4}$, deux racines sont confondues. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Sp(A) = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

$$\chi_A = (X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)^2$$

La valeur propre -1 est d'ordre de multiplicité algébrique et géométrique 1. On calcule :

$$\begin{aligned} rg\left(A - \frac{1}{2}I_3\right) &= rg\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi, la dimension du sous-espace propre est 1 et donc $M(t)$ n'est pas diagonalisable.

Il reste le cas $\cos(t) = \frac{1}{2}$. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$Sp(A) = \left\{-1, 2\right\}$$
$$\chi_A = (X+1)^2(X-2)$$

La valeur propre 2 est d'ordre de multiplicité algébrique et géométrique 1.
On calcule :

$$rg\,(A+I_3) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Ainsi, la dimension du sous-espace propre est 2 et donc $M(t)$ est diagonalisable.

✯ Nombres complexes

Exercice 46 Soit $\omega = \exp\left(i\frac{2\pi}{7}\right)$. On pose $S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Calculer $S+T$ et ST.
2. En déduire S et T.

Correction : Déjà ω est racine 7ième de l'unité.

$$S+T = \sum_{n=1}^{6} \omega^i = -1 \text{ car } \sum_{n=0}^{6} \omega^i = \frac{1-\omega^7}{1-\omega} = 0$$

Pour le produit cela se calcule :

$$\begin{aligned} ST =& \left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right)\left(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6\right) \\ =& \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10} \\ =& \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega^3 \\ =& 3 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 2 \end{aligned}$$

S et T sont racines de $(X-S)(X-T) = X^2 - (S+T)X + ST$. et donc de $X^2 + X + 2 = 0$. On trouve alors les racines de ce polynômes. Le discriminant vaut : $1 - 8 = -7 = \left(i\sqrt{7}\right)^2$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{7}i\right) \text{ et } x_2 = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{7}i\right)$$

Il faut déterminer lequel est S et lequel est T. Pour cela, il faut vois le signe de la partie imaginaire :

$$S = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right) - i\left(\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right)$$

On constate que :

$$\begin{aligned} & \left(\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right) \\ =& \left(\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) > 0 \end{aligned}$$

Donc la partie imaginaire de S est strictement positive. Donc :

$$S = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{7}i\right) \text{ et } T = x_2 = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{7}i\right)$$

II Analyse

Exercice 47 Soient $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0$$

1. Trouver les 25 premiers termes de la suite (a_n)
2. Montrer que $\sum a_n x^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
3. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{e^x+1}$

Correction :

```
from pylab import *

def factList(n):
    """
    entrée: n = int = nbr de termes à calculer
    sortie: L = list =  liste des valeurs de factorielles.
    """
    L = [0 for i in range(n) ]
    L[0] = 1
    for i in range(1, n):
        L[i] = i*L[i-1]
    return L


def aList(n):
    """
    entrée: n = int = nbr de termes à calculer
    sortie: A = list = liste des termes
    """
    A = [0 for i in range(n) ]
    facto = factList(n)
    print(facto)
    A[0] = 1
    for i in range(1, n):
        A[i] = - 0.5* sum([ A[i-k]/facto[k] for k in range(1,i+1)])
    return A


def serieEnt(A,x):
    """
    entrée: A = list de float
              = liste des coefficients de la séries entières
            x = float
              = point où on calcule la série entière
    sortie: S = float
              = valeur de la série entière en x
    """
    n = len(A)
    return sum( [ A[i]*x**i for i in range(n)] )

print("liste des 25 premières valeurs")
taille = 25
A = aList(taille)
print(A)

print("vérification de l’égalité")
nbrPoints = 200
X = linspace(-1,1, 200)
Y = [serieEnt(A, x) for x in X]
Y2 = 2/ (exp(X)+1)
plot(X,Y, color='red')
```

```
plot(X,Y2, color='green')
show()
```

1. Il y a plusieurs solutions pour calculer les factorielles. Ici on choisit ce qui est le plus rapide : calculer les factorielles dans une liste à part.
2.
3. On note R le rayon de convergence de la série entière : $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Pour $x \in]-R,R[$, on peut utiliser le produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}
f(x)\left(1+e^x\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right) x^n \\
&= a_0 + a_0 = 2
\end{aligned}$$

puisqu'il ne reste que le terme pour $n=0$.

R Il semble que la convergence de la série soit assez lente, cela est sûrement dû à des problèmes d'approximation numérique : lorsque n est grand le $n!$ « écrase » la valeur de a_{n-k}.

Exercice 48 On pose $a_0 = b_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{n!}, \qquad b_n = \sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{(-1)^j}{k(n-k)!\,j!}$$

Soit $f : x \mapsto \sum a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de f.
2. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f.
   En déduire une expression intégrale de f.
3. Écrire une fonction `Python` renvoyant a_n. Afficher les ia_i pour $i \in [\![0,10]\!]$.
   Conjecture ? Prouver cette conjecture.
4. Écrire une fonction `Python` renvoyant b_n. Afficher les (a_i, b_i) pour $i \in [\![0,20]\!]$.
   Conjecture ?

Correction :

1. On a $\frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant 1$, donc $R = 1$.
2. On dérive pour $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

   Or $na_n = 1 + a_{n-1}$ D'où $f'(x) = \frac{1}{1+x} + f(x)$.
3.

Exercice 49 Soit $\psi : x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$.

1. Montrer que ψ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Afficher son graphe sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que ψ est développable en série entière. Montrer avec Python que cela semble en accord.
4. On note $J = \psi(\pi)$. Montrer que J est strictement positif.
   Avec Python, donner une valeur approchée de J.

Correction :

1. Il suffit de vérifier qu'elle est continue en 0.

2. On peut faire :
3. Il faut linéariser. On trouve alors le DSE, en Python il faut programmer la somme.
4. C'est l'intégrale d'une fonction positive et continue. Avec Python, c'est le calcul approché d'une intégrale.

Exercice 50 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

On suppose que f est contractante (c'est-à-dire lipchitzienne de rapport a avec $a \in [0,1[$).
Montrer que f admet un unique point fixe.
Montrer que tout suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.
Que peut-on dire pour $a = 1$?

Exercice 51 Dévélopper $f(x) = \dfrac{1}{2+x-x^2}$ en série entière.

Exercice 52 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$.
Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction : il est important de remarquer que :

$$\forall x \in [0,1],\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4} \text{ avec égalité que si } x = \frac{1}{2}$$

Supposons déjà que (u_n) converge vers l, alors $l(1-l) \geqslant \frac{1}{4}$ et donc $l = \frac{1}{2}$.

Il reste à vérifier que (u_n) converge. Déjà (u_n) ne peut être ni nul (sauf peut-être le premier terme) ni égal à 1. On passe donc au quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{4(u_n)(1-u_n)}$$

or $4u_n(1-u_n) \leqslant \frac{1}{4}$, ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, ainsi u_n est croissante et majorée donc converge.

Exercice 53 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose (lorsque cela est défini) :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t-1}dt$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Pour tout $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
4. En déduire l'écriture de f sous forme d'une série.
5. Proposer une autre méthode pour décomposer f en une série.

Correction :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est une intégrale doublement généralisée.
   En 0, on a : $\dfrac{te^{-tx}}{e^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} 1$ ainsi, l'intégrale est faussement généralisée et converge (pour toute valeur de x).
   En $+\infty$, on a :
   $$\frac{te^{-tx}}{e^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} te^{-t(x+1)}e^t - 1$$
   cette fonction est $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ dès que $x > -1$. Ainsi, $\mathscr{D}_f =]-1,+\infty[$.
2. On doit utiliser le thm de convergence dominée sur une suite quelconque.
   Soit (x_n) une suite de limite $+\infty$ quelconque. On va juste la supposer strictement positive.
   On note alors :
   $$f_n : t \longmapsto \frac{te^{-tx_n}}{e^t-1}$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leqslant \frac{t}{e^t - 1} \text{ domination par une fonction intégrable}$$

La suite de fonction f_n cv simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_*^+$ et donc :

$$\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx_n}}{e^t - 1} dt = 0$$

comme (x_n) est une suite quelconque, on en déduit que :

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt = 0$$

ie $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3. On a :

$$\begin{aligned} f(x-1) - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}e^t}{e^t - 1} dt - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt \\ = \int_0^{+\infty} te^{-tx} dt \\ = \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

après calcul par ipp.

4. On considère N dans $\mathbb{N}$ et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} f(x+k-1) - f(x+k) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(x+k)^2} \\ &= f(x) - f(N+k) \end{aligned}$$

Lorsque l'on fait tendre N vers $+\infty$ en utilisant le résultat $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ cela donne :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

5. On peut écrire :

$$\frac{te^{-tx}}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} te^{-tx}e^{-kt}$$

on note donc $f_k : t \longmapsto te^{-tx}e^{-kt}$, on a que la série $\sum f_k$ converge simplement vers $S : t \longmapsto \dfrac{te^{-tx}}{e^t - 1}$.
On veut appliquer le thm d'intégration termes à termes, donc on regarde :

$$\begin{aligned} I_k = \int_0^{+\infty} |f_k(t)| dt = \int_0^{+\infty} te^{-t(x+k)} dt \\ = \frac{1}{(x+k)^2} \end{aligned}$$

d'après le calcul fait précédemment (ipp). On peut donc écrire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_k(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) dt$$

ie :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = f(x)$$

Exercice 54 Soit la suite définie par $u_0 \in \mathbb{C}^*$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(|u_n| + u_n\right)$$

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite en fonction de u_0.

Correction :

Un dessin montre que la suite converge. Voici un exemple de script Python :

```
from pylab import *

def suite(un):
    """
    entrée: un = complex
                = n-ième valeur de la suite
    sortie: unp1 = complex
                 = (n+1) ième valeur de la suite
    """
    rho = abs(un)
    return 0.5*( rho + un)


def dessin(L):
    """
    entrée: L = list de complex
              = valeur de [u0, u1, ... un-1]
    sortie: rien
    graphique des valeurs
    """
    for un in L:
        a, b =real(un), imag(un)
        plot(a,b,"o")
    show()


def listeUn(u0,n ):
    """
    entrée: un = complex
                = n-ième valeur de la suite
            n = int
              = nbr de termes à calculer
    sortie: L = list de complex
              = valeur de [u0, u1, ... un]
    """

    L = [u0]
    u = u0
    for i in range(n):
        u = suite(u)
        L.append(u)
    return L

## code
u0 = 5+3J
n = 15
L = listeUn(u0, 15)
for i in range(n+1):
    print("i=",i, "ui=", L[i], "|ui|", abs(L[i]))

dessin(L)
```

Déjà si u_n converge vers une limite $l \in \mathbb{C}$, alors :

$$l = \frac{1}{2}(l + |l|),$$

et donc $l = |l|$ est un réel positif.

On peut penser écrire $u_n = a_n + ib_n$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} a_{n+1} =& \frac{1}{2}\left(a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\right) \\ b_{n+1} =& \frac{1}{2} b_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{b_0}{2^n}$ en particulier b_n converge vers 0.

On peut aussi considérer la suite $\rho_n = |u_n|$, l'inégalité triangulaire donne alors :

$$\rho_{n+1} \leqslant \rho_n$$

et donc la suite ρ_n est décroissante et minorée par 0 donc converge vers une limite notée ρ. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

et donc $a_n^2 = \rho_n^2 - b_n^2$, ce qui montre que la suite a_n^2 converge vers ρ^2.

On a :

$$\frac{1}{2}(a_n + |a_n|) \leqslant a_{n+1}$$

comme $a_n + |a_n| \geqslant 0$, on en déduit que pour $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 0$, en particulier (a_n) converge vers ρ. (ce qui montre que la suite (u_n) converge vers un réel positif).

On peut aussi écrire que $\frac{1}{2}(a_n + |a_n|) \geqslant a_n$, ainsi (a_n) est décroissante et minorée (par $-\rho_0$ ou par 0).

Pour avoir la valeur exacte, il faut écrire :

$$u_n = \rho_n e^{i\theta_n}$$

en prenant l'argument principal $\theta_n \in]-\pi, \pi]$, on a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} =& \frac{1}{2}\rho_n\left(e^{i\theta_n} + 1\right) \\ =& \rho_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{i\frac{\theta_n}{2}} \end{aligned}$$

Or $\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \geqslant 0$ (puisque $\theta_n \in]-\pi, \pi]$.

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} =& \rho_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \\ \theta_{n+1} =& \frac{\theta_n}{2} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\rho_n = \rho_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

$$\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$$

ce qui donne donc que (u_n) converge vers :

$$\rho_0 \prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

Exercice 55 Navale Calculer $\int_0^1 \arcsin\left(\sqrt{t}\right) dt$.

Correction : C'est une intégrale sur un segment d'une fonction continue.

On peut faire un chgt de variable ; $u = \sqrt{t}$:

$$I = \int_0^1 2u \arcsin(u) du$$

puis on fait une ipp :

$$\begin{aligned} I &= \left[u^2 \arcsin(u)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \end{aligned}$$

On calcule la première en posant $u = \sin(v)$

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2} du = \ldots$$

La deuxième intégrale fait :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = [\arcsin u]\, 0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 56 ESM 2019

Soit f définie par $f : x \longmapsto x^2 - 2$.

L'objectif est de calculer la valeur exacte de $\sqrt{2}$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2. Avec Python, calculer α avec la méthode de Newton.
3. Montrer que l'on obtient alors une suite (x_n) qui vérifie la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$
On prendra $x_0 = 1$.
4. Montrer que cette suite est bien définie et qu'elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 1$.
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|x_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2^{2^n}}$$
6. Définir le nombre de décimales exactes que l'on peut obtenir en explicitant x_5 et x_{10}.
7. Mondifier le programme afin de prendre en compte la variable m qui permet d'obtenir la valeur de α à 10^{-m} près avec la méthode de Newton.

1. Corollaire du théorème des valeur intermédiaire.
2. Question de cours. Refaire le dessin pour retrouver la relation.
3. La relation est :
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \\ &= \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \end{aligned}$$
4. Par récurrence : on vérifie que l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+2}{2x}$. il y a plusieurs méthodes, le plus simple est d'écrire :
$$\frac{x^2+2}{2x} - 1 = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x} = \frac{(x-1)^2 + 1}{2x}$$

5. **Commentaire :** question qui manque d'indications surtout par rapport aux précédentes assez simples.

Exercice 57 **ESM 2019** On considère l'équation (E) : $\tan x = x$.

1. Montrer que (E) admet une unique solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ notée x_n.
2. Écrire une fonction Python `sol(n,e)` qui donne par dichotomie,la valeur de x_n à une précision $e > 0$ près.
3. Représenter pour $n \in [\![100, 120]\!]$ les termes y_n avec $y_n = x_n - n\pi$.
4. Démontrer la conjecture suivante :

$$\lim_{n\infty} x_n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\infty} y_n = \frac{\pi}{2}$$

Commentaire : voir la fiche suites implicites.

1. On applique le théorème des valeurs intermédiaires su $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ à la fonction $x \longmapsto \tan x - x$.
2. On peut par exemple faire :

```
def sol(n,e):

  def f(x) :
    return tan(x) - x

  eps = 10**(-10) # écart aux points problématiques
  a = - pi/2 + n*pi + eps
  b = + pi/2 + n*pi - eps

  while b-a > e :
    c = (a+b)/2
    if f(a) * f(c) > 0 :
      a = c
    else :
      b = c

  return (a+b)/2
```

3. On peut faire :

```
na, nb = 100, 120 # intervalle des n
listeX = [0] * (nb-na)
listeY = [0] * (nb-na)
e = 10**(-3)
for i in range(na,nb) :
  listeX[i] = sol(i, e)
  listeY[i] = listeX[i] - i *pi
plot( range(na,nb), listeY)
```

4. Déjà $x_n > n\pi - \frac{\pi}{2}$, donc x_n tend vers $+\infty$.
   On a aussi :

$$\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$$

   or $x_n \in I_n$, donc $x_n - n\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Et donc on peut écrire :

$$x_n - n\pi = \arctan(x_n)$$

   c'est-à-dire :

$$y_n = \arctan(x_n)$$

   et donc :

$$\lim_{n\infty} y_n = \lim_{n\infty} \arctan(x_n) = \frac{\pi}{2} \text{ puisque } \lim_{n\infty} y_n = +\infty$$

Exercice 58 ESM 2019

On considère l'équation différentielle :

$$(E): \qquad \left(x-e^{-x}\right)y' + \left(1+e^{-x}\right)y = 1$$

On pose $g : x \mapsto x - e^{-x}$.

1. Montrer que g s'annule en un unique point que l'on notera α.
2. Écrire un programme Python pour trouver α à 10^{-4} près.
   On note (a,b) des réels tels que $a < \alpha < b$ et $|b-a| \leqslant 10^{-4}$. On note aussi $I_1 = [0,a]$ et $I_2 = [b,1]$
3. Sur Python représenter la solution de (E) sur I_1 sachant que $y(0) = 1$.
4. De même sur I_2 avec y avec $y(1) = 1$.
5. Déterminer une solution de (E) sur $]\alpha, +\infty[$.

Correction :

1. On dérive :
$$g' : x \mapsto 1 + e^{-x}$$
donc g est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ de limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. (tableau de variation). Donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et s'annule une et une seule fois.
2. C'est une application de la dichotomie ou de Newton. On peut vérifier que $g(0) = -1$ et $g(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$.
3. Il faut utiliser la méthode d'Euler. On a classiquement l'approximation :
$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta} \approx f(x_i, y_i)$$
où (x_i) sont les points de la discrétisassions et on obtient l'instruction :
$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta f(X_i, Y_i)$$
4. On peut encore utiliser la méthode d'Euler mais cette fois-ci à l'envers (puisque l'on connaît la dernière valeur). On utilise alors :
$$\frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{\Delta} \approx f(x_i, y_i)$$
et donc :
$$Y_{i-1} = Y_i - \Delta f(X_i, Y_i)$$
5. Il s'agit de résoudre l'équation :
$$y' + \frac{1+e^{-x}}{x-e^{-x}}y = \frac{1}{x-e^{-x}}$$
sur $]\alpha, +\infty[$ une primitive de $x \mapsto \frac{1+e^{-x}}{x-e^{-x}}$ sur $]\alpha, +\infty[$ est : $x \longmapsto \ln(g(x))$ (forme $\frac{u'}{u}$ et après vérification du signe). On a donc les solutions de l'équation homogène :
$$x \mapsto \frac{\lambda}{x-e^{-x}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
On utilise ensuite la méthode de variations de la constante :
$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\lambda(x)}{x-e^{-x}} && l_1 \\ y'(x) &= \frac{\lambda'(x)\left(x-e^{-x}\right) - \lambda(x)\left(1+e^{-x}\right)}{\left(x-e^{-x}\right)^2} && l_2 \\ 1 &= \lambda'(x) && (1+e^{-x})l_1 + \left(x-e^{-x}\right)l_2 \end{aligned}$$
D'où $\lambda(x) = x$.

Au final l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ x \longmapsto \frac{x+\lambda}{x-e^{-x}} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

En particulier, la fonction de la question précédente est la fonction :

$$x \longmapsto \frac{x-e^{-1}}{x-e^{-x}}$$

Voici un exemple de code

```
from pylab import *


def dichotomie(eps):
    """
    entrée: eps = float = précision
    sortie: apha solution de x - exp(-x)= 0
    à eps près
    """
    a,b = 0, 1
    fa, fb = a - exp(-a), b-exp(-b)
    while (b-a)> eps :
        c = (b+a) / 2
        fc = c - exp(-c)
        if fa*fc >0:
            a=c
        else :
            b=c
    return (b+a) / 2

def newton(eps):
    """
    entrée: eps = float = précision
    sortie: apha solution de x - exp(-x)= 0
    on arrête les itérations lorsque
    abs(xn -xnp1)< eps
    """
    xn = 0 # valeur de départ
    fxn = xn-exp(-xn) # f(xn)
    fpxn = 1+exp(-xn) # f'(xn)
    xnp1 = xn - fxn /fpxn
    while abs(xnp1 - xn)> eps :
        xn = xnp1
        fxn = xn-exp(-xn) # f(xn)
        fpxn = 1+exp(-xn) # f'(xn)
        xnp1 = xn - fxn /fpxn
    return xnp1

def f(x, y):
    """
    entrée: x = float
            y = float
    sortie: f(x) = float
    """
    gx = x - exp(-x)
    dgx = 1 + exp(-x)
    return ( 1  - dgx*y )/gx




print("valeur de alpha par dichotomie:", dichotomie(10**(-5)))
print("valeur de alpha par newton:", newton(10**(-5)))
```

```

alpha = 0.5671


## résolution sur I1
print("--- sur I1: ---")
a = 0.5671
nbrPoints = 100
X = linspace(0, a, nbrPoints)
Y = [0]*nbrPoints
Y[0] = 1
delta = a/(nbrPoints - 1)
for i in range(nbrPoints -1):
    Y[i+1] = Y[i] + delta * f ( X[i], Y[i])
plot(X, Y)
show()

## résolution sur I2
print("--- sur I2: ---")
b = 0.5672
nbrPoints = 100
X = linspace(b, 1, nbrPoints)
Y = [0]*nbrPoints
Y[-1] = 1
delta = (1-b)/(nbrPoints - 1)
for i in range(nbrPoints -1, 0, -1):
    Y[i-1] = Y[i] - delta * f ( X[i], Y[i])
plot(X, Y)

## on montre aussi la vraie fonction:
Y = (X - exp(-1)) / (X - exp(-X))
plot(X, Y)
ylim(0, 35)# pour correction des axes
show()
```

Exercice 59 Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, on note

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f,g\rangle = \int_0^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{t}}dt$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien défini.
2. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
3. Écrire une fonction Python `pdtScal(f,g,n)` qui calcule $\langle f,g\rangle$ par la méthode des trapèzes.

Exercice 60 On considère l'équation différentielle :

$$u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \qquad (E) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - 2x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

1. Soit $\varphi : (x,y) \longmapsto \left(x, y-x^2\right)$. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ bijective et montrer que φ^{-1} est aussi $\mathscr{C}^1$.
2. Montrer l'équivalence suivante : u solution de $(E) \iff v = u\circ\varphi$ solution de $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.
3. Montrer l'équivalence suivante : u solution de $(E) \iff$ il existe $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $u(x,y) = w(y+x^2)$.
4. Python : tracer les lignes de niveaux d'une solution de 1.

Correction :

1. φ est $\mathscr{C}^1$ car $(x,y) \longmapsto x$ et $(x,y) \longmapsto y-x^2$ sont des applications polynomiales.

On résout le système (non linéaire) :

$$\begin{cases} a = x \\ b = y - x^2 \end{cases}$$

On obtient : $x = a$ et $y = b + a^2$. Il y a une unique solution. L'application φ est donc bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Ainsi : $\varphi^{-1} : (a,b) \longmapsto (a, b+a^2)$. Cette application est de classe $\mathscr{C}^1$ (pour les mêmes raisons).

2. Soit u solution de (E). On considère alors $v = u \circ \varphi$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ v(x,y) = u(x, y-x^2)$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y-x^2) - 2x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y-x^2) = 0$$

Ainsi, v est bien solution de $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.
Supposons maintenant que v soit solution de l'équation $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. On a alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ u(x,y) = v \circ \left(\varphi^{-1}\right)(x,y) = v(x, y+x^2)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) =& \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}(x,y+x^2)}_{=0} + 2x\frac{\partial v}{\partial y}(x,y+x^2) \\ =& 2x\frac{\partial v}{\partial y}(x,y+x^2) \end{aligned}$$

et :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y+x^2)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - 2x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

et donc que u est solution de (E).

3. On a donc u solution de (E) si et seulement si $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.
Comme on est sur $\mathbb{R}^2$ (ie un ouvert convexe), cela équivaut à v est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de la deuxième variable. Ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ v(x,y) = w(y) \qquad \text{où } w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

On en déduit que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ u(x,y) = v(x,y+x^2) = w(y+x^2)$$

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la courbe de niveau λ d'une solution u de (E) est donc l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $u(x,y) = \lambda$, ce qui s'écrit donc $w(y+x^2) = \lambda$. On note $\mathscr{C}_\lambda$
On ne connaît pas la fonction w, mais on sait que si il n'existe pas de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $w(\alpha) = \lambda$, alors cette courbe de niveaux $\mathscr{C}_\lambda$ est vide. Sinon, on considère un α tel que $w(\alpha) = \lambda$ et on note :

$$E_\alpha = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y + x^2 = \alpha \right\}$$

on a alors :

$$\forall (x,y) \in E_\alpha,\ (x,y) = \lambda$$

et donc $E_\alpha \subset \mathscr{C}_\lambda$.
Réciproquement, si $(x,y) \in \mathscr{C}_\lambda$, en notant $\alpha = y + x^2$, alors $w(\alpha) = \lambda$ et $(x,y) \in E_\alpha$.

NB : plusieurs valeurs de α peuvent par contre correspondre au même λ, puisque w n'est pas nécessairement bijective. Au final il s'agit donc de tracer les courbes :

$$y + x^2 = \alpha$$

pour différentes valeurs de α.
Il suffit donc de tracer des courbes représentatives de fonctions $x \mapsto \alpha - x^2$ pour différentes valeurs de α. Voici par exemple un script qui fait cela :

```
from pylab import *

x = linspace(-10, 10, 100)
for alpha in [-50, -15, -10, 0, 10, 15, 50]:
    y = alpha - x**2
    plot(x,y)
show()
```

Exercice 61 Nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$.

Correction : comparaison série / intégrale.
La convergence de la série est équivalente à la convergence de l'intégrale :

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}dt$$

Pour savoir si cette intégrale converge, il faut faire un changement de variable. (ou voir la forme $\frac{u'}{u}$).

$$\forall A > 3,\ \int_3^A \frac{1}{t\ln(t)}dt = \int_{\ln 3}^{\ln A} \frac{1}{u}du = \ln(\ln A) - \ln(\ln 3)$$

L'intégrale diverge donc et donc la série diverge.

Exercice 62

1. Trouver un exemple de fonction continue mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Trouver un exemple de fonction de classe $\mathscr{C}^k$ mais pas de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $[0,1]$.

Exercice 63 (avec Python)

1. Écrire une fonction `trapeze(f,a,b,N)` qui calcule $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ pour une fonction f quelconque par la méthode des trapèzes avec N trapèzes.
2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}dt$. Tracer la suite (I_n) pour $0 \leqslant n \leqslant 100$. (On prendra $N = 1000$).
3. Conjecturer la limite de la suite (I_n) puis prouver la conjecture.
4. Conjecturer un équivalent de I_n pour le prouver (chercher un lien entre I_n et I_{n+1}.

Correction : On peut faire :

```
from pylab import *

def trapeze(f,a,b,N):
    """
    entrée: f = fct R -> R
            (a,b) = float
            N = int
    sortie: float = valeur de intégrale de a à b de f
            calcul par trapeze
    """
    t = linspace(a,b, N)
    delta = (b-a)/(N-1)
```

```python
    I = ( f(t[0]) + f(t[N-1]) ) /2
    for i in range(1, N-1):
        I += f(t[i])
    return delta*I


def calculeI(n):
    """
    entrée: n = int
    sortie: list de float = valeur de I(n)
            calculé par les trapèzes
    """
    N = 1000


    I = [0 for i in range(n)]
    for i in range(n):
        def f(x):
            return x**i *exp(-x)
        I[i] = trapeze(f, 0, 1, N)

    return I

n = 100
I = calculeI(n)
plot(range(n), I, "o")
show()

nI = [ i*I[i] for i in range(n)]
plot(range(n), nI, "o")
show()
```

1. Bien comprendre la formule :

$$\int_a^b f(t)dt = \Delta\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)\right)$$

2. On a codé avec une fonction dans une fonction, il y a d'autres possibilités.
3. La suite (I_n) semble tendre vers 0 en étant décroissante.
   La décroissance se montre en intégrant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^{n+1}e^{-t} \leqslant t^n e^{-t}$$

   Pour la limite, on note $f_n : t \longmapsto t^n e^{-t}$, f_n est une suite de fonctions continues par morceaux qui converge simplement vers la fonction nulle. Il reste à trouver une domination :$t \longmapsto e^{-t}$ convient.
   Sinon on put aussi écrire :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^n e^{-t} \leqslant t^n$$

   et donc :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

4. On cherche une relation entre I_n et I_{n+1} :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 t^{n+1}e^{-t}dt \\ &= \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^1 + (n+1)I_n \\ &= -e^{-1} + (n+1)I_n \end{aligned}$$

   On peut donc écrire par exemple :

$$nI_n = -I_n + e^{-1} + I_{n+1}$$

Comme I_n tend vers 0, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{e}$, et donc que :

$$nI_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{e} \qquad \text{ou encore } I_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{ne}$$

Exercice 64 (avec Python) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = 2\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\dbinom{n}{k}$.

1. Programmer en python le calcul de I_n avec une complexité en $O(n)$ (sans importer aucune bibliothèque).
2. Afficher nI_n^2 en fonction de n et donner sans démonstration un équivalent de I_n en $+\infty$.
3. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt$.
4. Donner une relation liant I_n et I_{n+1} puis en déduire un équivalent de I_n en $+\infty$.

Correction :

1. Le problème est sur la calcul des coefficients binomiaux, il faut utiliser la formule :

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

On peut par exemple faire :

```python
"""
I_n= 2 \sum_{k=0}^n \dfrac{(-1)^k }{2k+1} \binom n k
"""

def binomialLigne(n):
    """
    entrée: n = int
    sortie: list de taille (n+1)
              = aleur des k parmi n
    """
    L = [ 0 for i in  range(0, n+1)]
    L[0]= 1
    for k in range(1, n+1):
        L[k] = (n-k+1)/k* L[k-1]
    return L

def I(n):
    """
    entrée: n = int
    sortie: float = valeur de In
    """

    binom = binomialLigne(n)
    S = 0
    for k in range(0, n+1):
        S += (-1)**k /(2*k+1)*binom[k]
    return S

def recurence(n):
    """
    entrée: n = int
    sortie: L = list de longueur n
               = valeurs des Ii pour i<n
    """
    L = [0 for i in range(n)]
    L[0] = 1
    for i in range(1,n):
        L[i] = (2*i)/(2*i+1) *L[i-1]
    return L

print("test du calcul des binomiaux")
```

```
print(binomialLigne(6))
print("Calcul de I(n):")
for i in range(0, 10):
    print("n:",i, "In:" ,I(i))

print("Calcul de I(n) par récurrence:")
L = recurence(10)
for i in range(0, 10):
    print("n:",i, "In:" ,L[i])



print("Recherchce d'un équivalent:")
for i in range(2, 10):
    print("n:",i, "nIn**2:" ,i*(I(i))**2)
```

2. Il semble que nI_n^2 converge et donc que $I_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{l}{\sqrt{n}}$ avec $l \approx 0.7$.
3. On utilise Newton : pas de problème pour inverser car on est sur un segment et avec une somme finie.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt &= \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \binom{n}{k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_{-1}^{1} t^{2k} dt \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}\end{aligned}$$

4. On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= (1-t^2)^{n+1} & u'(t) &= (n+1)(-2t)(1-t^2)^n \\ v'(t) &= 1 & v(t) &= t \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n+1} dt \\ &= \left[t(1-t^2)^{n+1}\right]_{-1}^{1} + 2(n+1)\int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)^n dt \\ &= 2(n+1)\int_{-1}^{1} \left(t^2-1+1\right)(1-t^2)^n dt \\ &= 2(n+1)\left(-I_{n+1}+I_n\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$$

Il faut ensuite en déduire l'équivalent. Pour cela, on écrit :

$$I_{n+2} \leqslant I_n \leqslant I_{n+1}$$

Exercice 65 f continue de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$.

Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$, tel que $f(x) = x$.

Correction : TVI sur $x \longmapsto f(x) - x$

Exercice 66 Soit $f : [-1,1]^3 \to \mathbb{R}_*^+$. Montrer qu'il existe $c > 0$, tel que $\forall x \in [-1,1]^3, f(x) > c$.

Correction : continuité sur un fermé borné.

★ **Topologie**

Exercice 67 Soit :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{\arctan(xyz)}{1+(xyz)^2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

Donner l'équation du plan tangent en $(1,1,1)$ à la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$.

Exercice 68 Montrer que le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$? un ouvert ? Est-il borné ?

Correction : Par définition, on a :

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | M^T M = I_n \text{ et } \det(M) = 1\}$$

On note donc la fonction de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : M \longmapsto ||M^T M - I_n||$$

φ est continue car $M \longmapsto M^T M$ est continue (de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) et $M \longmapsto ||M||$ est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | \varphi(M) = 0\} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | M^T M = I_n\}$$

est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Ensuite la fonction $f : M \longmapsto det(M) - 1$ est continue car $M \longmapsto det(M)$ est un polynôme en les coefficients de M. Ainsi :

$$\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | \det(M) = 1\}$$

Il reste à démontrer que l'intersection de fermé est un fermé.

Soit F_1 et F_2 deux fermés Montrons que $F_1 \cap F_2$ est fermé avec la caractérisation séquentielle.. Soit donc $x \in \overline{F_1 \cap F_2}$, et donc il existe une suite (x_n) de $F_1 \cap F_2$ de limite x. La suite (x_n) est une suite de F_1 qui est fermé donc $x \in F_1$, de même $x \in F_2$ Ainsi $F_1 \cap F_2$ est fermé.

Soit $M \in 0_n(\mathbb{R})$, alors $M^T M = I_n$. En conséquence :

$$Tr\left(M^T M\right) = n$$

et donc M est sur le cercle de centre la matrice nulle et de rayon $\sqrt{n}$ pour la norme usuelle dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $A \longmapsto ||A| = \sqrt{Tr(A^T A)}$.

En particulier $O_n(\mathbb{R})$ est borné et donc $SO_n(\mathbb{R})$ aussi.

Exercice 69 Montrer que l'application :

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 |x+ty| dt \end{cases}$$

est une norme.

Donner la forme de la boule unité.

Correction : Il est facile de vérifier que N est définie positive, et homogène. Pour l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,1], \ |(x+x') + t(y+y')| &= |(x+ty) + (x'+ty')| \\ &\leqslant |x+ty| + |x'+ty'| \end{aligned}$$

en intégrant sur $[0,1]$, on obtient le résultat.

Pour la forme de la boule unité, on cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tels que : $N(x,y) = 1$.

Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, on obtient :

$$N(x,y) = \int_0^1 |x+ty| dt = \int_0^1 (x+ty) dt = x + \frac{y}{2}$$

Ainsi, $N(x,y)=1$ équivaut à $2x+y=2$, on trouve donc un segment de droite sur la partie « NE ».

Par symétrie, on traite le cas $x\leqslant 0$ et $y\leqslant 0$.

Considérons maintenant le cas où $x\leqslant 0$ et $y>0$.

Le signe de $x+ty$ est alors négatif si $t\leqslant -\frac{x}{y}$ et positif sinon. Il faut voir si cette valeur est dans $[0,1]$.

Considérons dans un premier temps le cas où $y\leqslant -x$, ie $-\frac{x}{y}\geqslant 1$. On a alors :

$$\forall t\in[0,1],\ x+ty\leqslant 0$$

et donc :

$$N(x,y)=\int_0^1|x+ty|dt=-\int_0^1(x+ty)dt=-x-\frac{y}{2}$$

sur cette partie du plan, $N(x,y)=1$ équivaut donc à $-2x-y=2$, ie $y=-2x-2$. (en particulier, on peut repérer le point d'intersection de $y=-x$ et de $y=-2x-2$ qui a pour coordonnée : $B=(-2,2)$.

Considérons donc le sous cas où $y\geqslant -x$, ie $-\frac{x}{y}\leqslant 1$. On a donc un changement de signe de $|x+ty|$ sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned}N(x,y)&=\int_0^1|x+ty|dt=-\int_0^{-\frac{x}{y}}(x+ty)dt+\int_{-\frac{x}{y}}^1(x+ty)dt\\&=-\left[xt+\frac{y}{2}t^2\right]_0^{-\frac{x}{y}}+\left[xt+\frac{y}{2}t^2\right]_{-\frac{x}{y}}^1\\&=-\left(-x\frac{x}{y}+\frac{y}{2}\frac{x^2}{y^2}\right)+x\left(1+\frac{x}{y}\right)+\frac{y}{2}\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\\&=\frac{x^2}{y}-\frac{x^2}{2y}+x+\frac{x^2}{y}+\frac{y}{2}-\frac{x^2}{2y}\\&=x+\frac{x^2}{y}+\frac{y}{2}=\frac{1}{2y}(2xy+2x^2+y^2)\end{aligned}$$

ainsi, sur cette partie du plan, on a :

$$N(x,y)=1\iff 2xy+2x^2+y^2=2y$$

c'est une conique. Il y a deux idées : regarder la forme canonique ou étudier la courbe implicite ainsi définie.

Pour la forme canonique :

$$\begin{aligned}N(x,y)=1&\iff\left(\sqrt{2}x+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{y^2}{2}+y^2=2y&&\text{forme canonique}\\&\iff\left(\sqrt{2}x+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{y^2}{2}-2y=0\\&\iff\left(\sqrt{2}x+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^2-2=0\\&\iff\left(\sqrt{2}x+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^2=2\\&\iff\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}-1\right)^2=1\end{aligned}$$

Pour la courbe implicite : on considère $f:(x,y)\mapsto 2xy+2x^2+y^2-2y$ et $N(x,y)=1\iff f(x,y)=0$. On a donc une courbe niveau 0 de f, avec :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \nabla f=\begin{pmatrix}2y+4x\\2x+2y-2\end{pmatrix}$$

On a deux points particuliers : $A=(0,2)$ et $B=(-2,2)$.

Au point A, la courbe est régulière avec $\nabla f=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ on a donc l'équation de la tangente à la courbe $N(x,y)=1$ en A sous la forme : $2x+(y-2)=0$, ie $y=2-2x$

Au point $B=(-2,2)$, la courbe est régulière avec $\nabla f=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ on a donc l'équation de la tangente à la courbe $N(x,y)=1$ en B sous la forme : $-2(x+2)-(y-2)=0$, ce qui donne $y=-2x-2$

Par symétrie, on trace la fin de la courbe.

⋆ Équations différentielles

Exercice 70 Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf(x) = 2\int_0^x f(t)dt$$

Correction : C'est une équation fonctionnelle. **Analyse :** On considère donc f solution de cette équation.

On voit alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{2}{x}\int_0^x f(t)dt$$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, on dérive :

$$\forall x > 0,\ xf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

cela donne : $\forall x > 0,\ f(x) + xf'(x) = 2f(x)$

Ainsi, la fonction f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de :

$$f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = 0$$

On trouve alors les solutions de cette équation différentielle : il existe $\lambda \in R$ vérifiant :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \lambda x$$

On travaille de même sur $\mathbb{R}^{-*}$, ce qui donne :

$$\forall x < 0,\ f(x) + xf'(x) = 2f(x)$$

et donc $\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall x < 0,\ f(x) = \mu x$

Enfin, par continuité en 0, on a : $f(0) = 0$.

Synthèse : On considère donc une fonction f de la forme :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \lambda x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mu x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

Clairement la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x > 0,\ 2\int_0^x f(t)dt = 2\int_0^x \lambda t dt = \lambda x^2 = xf(x)$$

idem pour $x < 0$. Ainsi, la fonction f est solution.

On en déduit l'ensemble des solutions.

Exercice 71 Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Résoudre l'équation différentielle

$$xy' + y = g.$$

On précisera s'il existe des solutions sur $\mathbb{R}$.

Correction : Volontairement un sujet ouvert !

On se place sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'équation est :

$$y' + \frac{1}{x}y = g$$

L'équation homogène est :

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

La solution générale est :

$$y : x \longmapsto \frac{\lambda}{x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour avoir une solution particulière, on fait la variation de la constante :

$$y(x) = \frac{\lambda(x)}{x} \text{ avec } \lambda \text{ une fonction infinie}$$

On obtient $\lambda' = g$, et donc on peut prendre $\lambda = G$ la primitive de g qui s'annule en 0 (cela simplifie les calculs pour la suite).

On obtient alors les solutions sont les fonctions de la forme :

$$y : x \longmapsto \frac{\lambda + G(x)}{x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sur $\mathbb{R}_*^-$ c'est pareil.

Il reste le problème de recollement en 0.

Pour cela, on considère y solution du problème sur $\mathbb{R}$. On a alors la forme de y :

$$y : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\lambda + G(x)}{x} \text{ si } x > 0 \\ g(0) \text{ si } x = 0 \\ \frac{\mu + G(x)}{x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Pour avoir λ continue en 0, il faut $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, la seule solution candidate est la fonction :

$$y : x \longmapsto \begin{cases} \frac{G(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Il reste à vérifier que cette fonction (continue par construction) est solution.

Il faut regarder si y est dérivable en 0 On peut appliquer le théorème de limite de la dérivée ou la limite du taux d'accroissement.

Dans les deux cas, On doit chercher :

$$\lim_{x \to 0} \frac{G(x) - xg(0)}{x^2}$$

Il faut suppose g de classe $\mathscr{C}^1$ et faire un DL :

$$g(x) \underset{x \to 0}{=} g(0) + xg'(0) + o(x)$$

$$G(t) \underset{x \to 0}{=} tg(0) + \frac{t^2}{2}g'(0) + o\left(t^2\right) \text{ car } G(0) = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to 0} \frac{G(x) - xg(0)}{x^2} = \frac{g'(0)}{2}$$

On en déduit que y est dérivable.

Enfin y est solution sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathbb{R}_*^-$ et aussi en 0 (dernier point).

Exercice 72 On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \qquad x^2 y''(x) + y(x) = 0$$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $x = e^t$.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. On considère donc y solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et on note :

$$z : t \longmapsto y(e^t) \qquad \text{ie } \forall x > 0,\ y(x) = z(\ln t)$$

La fonction z est dérivable et on a :

$$\begin{aligned} z(t) &= y(e^t) \\ z'(t) &= e^t y'(e^t) \\ z''(t) &= e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) \end{aligned}$$

Comme on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{2t} y''(e^t) + y(e^t) = 0$$

cela donne :

$$z''(t) - z'(t) + z(t) = 0$$

ainsi, z est solution de $z'' - z + z = 0$. On trouve alors la forme de z :

$$z : t \longmapsto e^{\frac{t}{2}} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)\right)$$

ce qui donne la forme de y :

$$y : x \longmapsto \sqrt{x} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right)\right)$$

Il faut ensuite vérifier que ces fonctions sont bien solutions.

2. On procède de même en posant :

$$z : t \longmapsto y(-e^t) \qquad \text{ie } \forall x > 0,\ y(x) = z(\ln(-t))$$

On trouve la même forme pour y :

$$y : x \longmapsto \sqrt{-x} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(-x)\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(-x)\right)\right)$$

> **R** On peut aussi voir que si y est solution sur $\mathbb{R}_*^+$, alors $x \longmapsto y(-x)$ est aussi solution sur $\mathbb{R}_*^-$.

3. On considère ensuite y solution sur $\mathbb{R}$. On sait alors que y est solution sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathbb{R}_*^-$, et en 0, ainsi :

$$y : x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{x}\left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{-x}\left(\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(-x)\right) + \delta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(-x)\right)\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il faut vérifier que y est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution partout.
Pour la continuité pas de problème. Pour la dérivabilité, on peut faire le taux d'accroissement pour $x > 0$:

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right)\right)$$

On choisit ensuite des suites de réels strictement positifs (x_n) telles que :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x_n) = -n \qquad \text{ie} \qquad x_n = e^{-\frac{2n}{\sqrt{3}}}$$

La suite x_n tends vers 0 et

$$\frac{y(x_n)}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{x_n}} \alpha$$

Ainsi, il faut $\alpha = 0$, idem pour β puis γ et δ. La seule solution est la fonction nulle.

Exercice 73 Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$(E) \qquad x^2y'' + 2x(1+x)y' - 2(1+x)y = 0$$

Indication : poser $y(x) = x^m$.

On obtiendra les solutions en fonction d'une primitive que l'on ne cherchera pas à calculer.

Correction :

On a une équation d'ordre 2 homogène. On cherche des solutions sous la forme $y(x) = x^m$ avec m à déterminer.

Cela donne :

$$\begin{aligned}
y(x) =& x^m \\
y'(x) =& mx^{m-1} \\
y''(x) =& m(m-1)x^{m-2} \\
x^2y'' + 2x(1+x)y' - 2(1+x)y =& m(m-1)x^m + 2m(1+x)x^m - 2(1+x)x^m \\
=& (m(m-1) + 2m(1+x) - 2(1+x))\, x^m = 0
\end{aligned}$$

Comme cela doit être nul pour tout $x > 0$, cela donne :

$$\begin{aligned}
m(m-1) + 2m(1+x) - 2(1+x) =& (2m-2)x + (m(m-1) + 2m - 2) \\
=& 2(m-1)x + \left(m^2 + m - 2\right) \\
=& 0
\end{aligned}$$

et donc on a nécessairement $m = 1$. On constate donc que $y_1 : x \mapsto x$ est solution de l'équation homogène.

Il faut en trouver une autre qui forme une famille libre avec celle-ci.

On peut penser poser :

$$y(x) = \lambda(x)x$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
y(x) =& \lambda(x)x \\
y'(x) =& \lambda'(x)x + \lambda(x) \\
y''(x) =& \lambda''(x)x + 2\lambda'(x)
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
& x^2y'' + 2x(1+x)y' - 2(1+x)y \\
=& \lambda''(x)x^3 + 2\lambda'(x)x^2 + 2(1+x)\left(\lambda'(x)x^2 + \lambda(x)x\right) - 2(1+x)\lambda(x)x \\
=& \lambda''(x)x^3 + 2\lambda'(x)x^2 + 2\lambda'(x)x^2 + 2\lambda'(x)x^3 + 2\lambda(x)x + 2\lambda(x)x^2 - 2\lambda(x)x - 2\lambda(x)x^2 \\
=& \lambda''(x)x^3 + 4\lambda'(x)x^2 + 2\lambda'(x)x^3 \\
=& x\left(\lambda'(x)\,(4+2x) + \lambda''(x)x\right)
\end{aligned}$$

Il faut donc choisir λ' comme une solution de l'équation différentielle : $y' + y\frac{(4+2x)}{x} = 0$. La primitive de $x \mapsto \frac{(4+2x)}{x} = \frac{4}{x} + 2$ est $x \mapsto 4\ln(x) + 2x$ sur $\mathbb{R}_*^+$. et donc les solutions sont les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned}
y : x \longmapsto & A\exp(-4\ln(x) - 2x) \\
=& A\exp(-4\ln(x))\exp(-2x) \\
=& \frac{A}{x^4}e^{-2x}
\end{aligned}$$

ce qui donne que l'on peut choisir λ :

$$\lambda : x \longmapsto \int_1^x \frac{1}{t^4}e^{-2t}dt$$

puis la solution particulière de l'équation est :

$$y_2 : x \longmapsto x \int_1^x \frac{1}{t^4} e^{-2t} dt$$

(on peut vérifier que cela est bien solution).

Il reste à vérifier que (y_1, y_2) forment une famille libre. Pour cela, on constate que si $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, alors en prenant la valeur en 1, on a $\alpha = 0$, et comme y_2 n'est pas la fonction nulle, on a $\beta = 0$.

On a donc bien trouvé toutes les solutions.

⋆ Séries numériques

Exercice 74 Exercice de cours

Citer la règle spéciale des séries alternées en précisant la majoration classique du reste.

Exercice 75 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

convergence et somme de la série de terme général u_n.

Correction : rappel de cours (comparaison série / intégrale) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$$

(à refaire !)

On en déduit :

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Ainsi, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Pour le calcul de la somme, il faut passer par la limite de la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N}, S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{N\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

et :

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\underset{N\infty}{\sim}\ln(N) \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\underset{N\infty}{\sim}\frac{1}{N+1}\ln(N)\xrightarrow[N\infty]{}0$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}=\lim_{N\infty}S_N=\frac{\pi^2}{6}$$

⋆ Suite d'intégrales, convergence dominée

Exercice 76 Soit la suite :

$$I_n=\int_0^1\frac{1}{1+x+\cdots+x^n}dx$$

Montrer que $\lim_{n\infty}I_n=\frac{1}{2}$.

Exercice 77 Soit la fonction :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{(in-1)x}}{\sqrt{1+n^5}}\end{array}\right.$$

Montrer que f est bien définie et $\mathscr{C}^1$.

Exercice 78 CCP PC

1. Pour quelles valeurs de l'entier n l'intégrale :

$$I_n=\int_0^{+\infty}x^2\exp(-nx)dx$$

est-elle convergente ? Comment peut-on la calculer ?

2. Trouver une relation entre :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2\exp(-x)}{1-\exp(-x)}dx \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$$

Correction :

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $x\longmapsto x^2e^{-nx}$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[0,+\infty[$, ainsi I_n est intégrale impropre en $+\infty$. On a de plus : $x^2e^{-nx}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car $x^4e^{-nx}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.
Comme $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge, on a par comparaison des intégrales impropres et positives $\int_1^{+\infty}x^2e^{-nx}dx$ converge.
Ainsi, I_n est convergente pour $n>0$. (par contre I_0 diverge).
Pour la calculer, on peut faire une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll}u(x)=x^2 & u'(x)=2x\\ v'(x)=e^{-nx} & v(x)=-\frac{e^{-nx}}{n}\end{array} \qquad u,v \text{ sont } \mathscr{C}^1$$

On a :

$$\left[x^2\left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right)\right]_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right)=0$$

On peut donc faire l'intégration par parties :

$$I_n=\frac{2}{n}\int_0^{+\infty}xe^{-nx}dx$$

On refait une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-nx} & v(x) = -\frac{e^{-nx}}{n} \end{array} \qquad u, v \text{ sont } \mathscr{C}^1$$

On calcule :

$$\left[x\left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right) = 0$$

Ainsi, on obtient :

$$I_n = \frac{2}{n^2}\int_0^{+\infty} e^{-nx}dx = \frac{2}{n^3}$$

car on retrouve une intégrale du cours.
On obtient :

$$\forall n \geqslant 1,\ I_n = \frac{2}{n^3}$$

2. On a :

$$\forall t \in [0,1[,\ \frac{t}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n$$

donc :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$$

et donc :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ x^2\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2e^{-nx}$$

On considère donc la série de fonction $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ avec $f_n : x \mapsto x^2e^{-nx}$. On a :

- Pour chaque $n \geqslant 1$ la fonction f_n est continue par morceaux. elle est aussi intégrable, puisque :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = I_n = \frac{2}{n^3}$$

- La série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement vers $S(x) = x^2\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ sur $[0,+\infty[$.
- La fonction S est continue par morceaux.
- La série numérique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3} \text{ converge.}$$

D'après le théorème d'intégration termes à termes, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} x^2\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx$$

Ce qui s'écrit :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2\exp(-x)}{1-\exp(-x)}dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$$

Exercice 79 École de l'air PC

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la relation :

$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + I_n$$

3. En déduire l'égalité :

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Correction :

1. On a :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \leqslant \frac{e}{n!}$$

donc :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n!}$$

et ainsi $\lim_{n\infty} I_n = 0$.

2. On fait une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u(t) = \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} & u'(t) = -\frac{(1-t)^n}{n!} \\ v'(t) = e^t & v(t) = e^t \end{array} \quad u \text{ et } v \text{ sont } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,1]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\right]_0^1 + I_n \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} + I_n \end{aligned}$$

3. On peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale.
On l'applique à $x \longmapsto e^x$ sur le segment $[0,1]$, à l'ordre n :

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + I_n \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\infty} I_n = 0$, on en déduit que $e = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.
On peut aussi faire une somme téléscopique. Pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} I_n &= I_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (I_{k+1} - I_k) \\ &= I_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} \\ &= I_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Il reste à calculer $I_0 = \int_0^1 e^t \, dt = e$ et faire tendre n vers $+\infty$.

Exercice 80 Étudier $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)dt$.

Correction : déjà $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leqslant \tan(t) \leqslant 1$. On peut donc en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{4}$, et que la suite (u_n) est décroissante.

En utilisant, la domination :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \ |\tan^n(t)| \leqslant 1$$

avec $t \mapsto 1$ intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on peut appliquer la théorème de convergence dominé, qui donne :

$$\lim_{n\infty} u_n = 0$$

(on pourrait aussi majorer $\tan t$ par un polynôme).

On va ensuite utiliser la relation : $\tan'(x) = 1 + \tan^2(t)$:

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\tan'(t)dt \\ &= \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Il reste à trouver un équivalent. On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n+1} - I_{n+2} && \text{or } I_{n+2} \leqslant I_n \\ \text{donc : } I_n &\leqslant \frac{1}{n+1} - I_n \\ \text{d'où : } I_n &\leqslant \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n-1} - I_{n-2} && \text{or } I_{n-2} \geqslant I_n \\ \text{donc : } I_n &\geqslant \frac{1}{n-1} - I_n \\ \text{d'où : } I_n &\geqslant \frac{1}{2(n-1)} \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{2(n-1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$$

Ainsi : $I_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

R Bien penser à la relation de décroissance pour ce type d'exercice.

✯ Intégrale à paramètres, continuité et dérivation sous le signe intégral

Exercice 81 Soit :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)dt$$

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ' est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer φ' puis φ.

Correction :

1. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. On a une intégrale doublement généralisée avec :

$$\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt) \underset{t\to 0}{\sim} xe^{-t} \text{ donc faussement généralisée en } 0$$
$$\left|\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \text{ et } \frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

2. C'est le théorème de dérivation sous le signe intégral.
   On note :

$$f(x,t) = \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$$

   On a :
   - à $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \longmapsto f(x,t)$ est CM et intégrable.
   - à $t > 0$ fixé, $x \longmapsto \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$ est $\mathscr{C}^1$. Avec :

$$\forall x \in R, \forall t > 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\cos(xt)$$

   - à $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \longmapsto e^{-t}\cos(xt)$ est continue par morceaux.
   - On a :

$$\forall x \in R, \forall t > 0,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|e^{-t}\cos(xt)\right| \leqslant e^{-t}$$

   On pose donc $M : t \longmapsto e^{-t}$ il s'agir d'une fonction intégrable qui domine la dérivée.

   On en déduit que φ est dérivable et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt$$

3. Il reste donc à calculer cette intégrale. Soit double ipp dans le même sens, soit passage en complexe. Par exemple :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t}dt = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$$

   Ainsi, la partie réelle est :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt = \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 82 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose (lorsque cela est défini) :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}dt$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Pour tout $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
4. En déduire l'écriture de f sous forme d'une série.
5. Proposer une autre méthode pour décomposer f en une série.

Correction :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est une intégrale doublement généralisée.
   En 0, on a : $\dfrac{te^{-tx}}{e^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} 1$ ainsi, l'intégrale est faussement généralisée et converge (pour toute valeur de x).
   En $+\infty$, on a :

$$\frac{te^{-tx}}{e^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} te^{-t(x+1)}e^t - 1$$

   cette fonction est $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ dès que $x > -1$. Ainsi, $\mathscr{D}_f =]-1,+\infty[$.

2. On doit utiliser le thm de convergence dominée sur une suite quelconque.
Soit (x_n) une suite de limite $+\infty$ quelconque. On va juste la supposer strictement positive.
On note alors :

$$f_n : t \longmapsto \frac{te^{-tx_n}}{e^t - 1}$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leqslant \frac{t}{e^t - 1} \text{ domination par une fonction intégrable}$$

La suite de fonction f_n cv simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_*^+$ et donc :

$$\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx_n}}{e^t - 1} dt = 0$$

comme (x_n) est une suite quelconque, on en déduit que :

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt = 0$$

ie $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3. On a :

$$\begin{aligned} f(x-1) - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}e^t}{e^t - 1} dt - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt \\ = \int_0^{+\infty} te^{-tx} dt \\ = \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

après calcul par ipp.

4. On considère N dans $\mathbb{N}$ et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} f(x+k-1) - f(x+k) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(x+k)^2} \\ &= f(x) - f(N+k) \end{aligned}$$

Lorsque l'on fait tendre N vers $+\infty$ en utilisant le résultat $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ cela donne :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

5. On peut écrire :

$$\frac{te^{-tx}}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} te^{-tx}e^{-kt}$$

on note donc $f_k : t \longmapsto te^{-tx}e^{-kt}$, on a que la série $\sum f_k$ converge simplement vers $S : t \longmapsto \dfrac{te^{-tx}}{e^t - 1}$.
On veut appliquer le thm d'intégration termes à termes, donc on regarde :

$$\begin{aligned} I_k = \int_0^{+\infty} |f_k(t)| dt = \int_0^{+\infty} te^{-t(x+k)} dt \\ = \frac{1}{(x+k)^2} \end{aligned}$$

d'après le calcul fait précédemment (ipp). On peut donc écrire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_k(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) dt$$

ie :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = f(x)$$

Exercice 83 Soit la fonction :

$$F : x \longmapsto \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$$

on note $\mathscr{D}$ son domaine de définition.

1. Montrer que $]-1,1[\subset \mathscr{D}$.
2. Écrire un programme Python permettant de représenter la fonction F sur $]-1,1[$
3. Montrer que F est développable en série entière sur $]-1,1[$.
4. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et donner une expression simple de F'.
5. Proposer une autre méthode pour montrer le résultat précédent.

Correction :

1. Soit $x \in]-1,1[$, on a alors :

   $$\forall t \in [0,1],\ 1+xt > 0$$

   donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$ n'est généralisée que en 0, et on a :

   $$\frac{\ln(1+xt)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} x$$

   Ainsi, l'intégrale est faussement généralisée (la fonction $t \longmapsto \frac{\ln(1+xt)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0) et donc $F(x)$ est bien définie.
2. Il faut mieux faire la méthode des rectangles à droite (car l'intégrale est généralisée en 0).

```python
from pylab import *
def g(x, t) :
  return log(1+ x*t) # attention: log
def F(x):
  nbrPoints = 200
  t = linspace(0, 1, 200)
  pas = t[1] - t[0]
  integrale = 0
  for  k  in range(1, nbrPoints):
    integrale += g(x, t[k])
  return pas*integrale

eps = 10**(-4)
X = linspace(-1+eps, 1-eps)
Y = [F(x) for x in X ]
plot(X,Y)
```

3. Cela revient à faire une intervertion série / intégrale (thm d'intégration termes à termes). On fixe donc $x \in]-1,1[$. On part de :

   $$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n}$$

   et donc :

   $$\forall t \in]0,1],\ \frac{\ln(1+xt)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^n \frac{t^{n-1}}{n}$$

   On note donc $f_n : t \longmapsto (-1)^{n-1} x^n \frac{t^{n-1}}{n}$ et on souhaite intervertir l'intégrale (généralisée en 0) et la série :

   $$F(x) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$$

   Pour cela, on vérifie que f_n est $\mathscr{CM}$, que $\sum f_n$ converge simplement vers $x \longmapsto \frac{\ln(1+xt)}{t}$ sur $]0,1]$ que

   $$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 x^n \frac{t^{n-1}}{n} = \frac{x^n}{n^2}$$

ainsi f_n est intégrable et surtout $\sum \int_0^1 |f_n(t)|dt$ converge.
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2} \end{aligned}$$

4. F est DSE sur $]-1,1[$ donc dérivable et :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} \text{ dérivation terme à terme} \\ &= \frac{\ln(1+x)}{x} \end{aligned}$$

5. On va échanger dérivation et intégrale. On note donc :

$$g(x,t) = \frac{\ln(1+xt)}{t}$$

on vérifie bien que à x fixé g est CM, qu'à t fixé, on peut calculer la dérivée partielle :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+xt}$$

à x fixé, cette dérivée partielle est bien CM. et le plus important : si on prend a quelconque, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-a,a],\ \forall t \in [0,1],\ \left|\frac{1}{1+xt}\right| &= \frac{1}{1+xt} \\ &\leqslant \frac{1}{1-at} \end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{1-at}$ est bien intégrable sur $]0,1]$ puisque continue sur $[0,1]$ (ici $1-at$ ne s'annule pas). On en déduit que l'on peut intervertir intégrale et dérivation. La fonction F est donc bien $\mathscr{C}^1$ avec :

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+xt} = \left[\frac{\ln(1+xt)}{x}\right]_0^1 = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Exercice 84 Soit $\alpha = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. On note $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha \operatorname{sh}(t)^n dt$.

1. Résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$ d'inconnue x.
2. En déduire la convergence de I_n et la valeur de $\lim_{n\infty} I_n$.

Correction : Soit x solution de $\operatorname{sh}(x) = 1$, alors : $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ On pose donc $Y = e^x$, ce qui donne : $Y^2 - 2Y - 1 = 0$ D'où $Y = 1+\sqrt{2}$ ou $Y = 1-\sqrt{2}$. Comme il faut que $e^x = Y$ la seule solution candidate est $x = \alpha$. Il reste à vérifier !

Convergence dominée.

On note $f_n : t \mapsto \operatorname{sh}(t)^n$, et on sait que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in [0,\alpha[,\ f_n(t) < f_n(\alpha) = 1$$

On a donc convergence simple vers la fonction nulle sur $[0,\alpha[$, et domination puisque :

$$\forall t \in [0,\alpha[,\ (\operatorname{sh}(t)^n) \leqslant 1$$

et donc :

$$\lim_{n\infty} I_n = 0$$

Exercice 85 Soient

$$G : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$$

et

$$F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^x e^{-u^2} du$$

Exprimer $G'(x)$ en fonction de $F(x)$ et de $F'(x)$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Correction : Notons : $g(x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} o$.
à $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \longmapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable car on est sur un segment.
à $t \in [0,1]$ fixé, $x \longmapsto g(x,t)$ est dérivable et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2+1)}$$

à $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux.
On a pour tout $A \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in [-A,A], \forall t \in [0,1], \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = 2|x|e^{-x^2(t^2+1)} \leqslant 2|A|$$

et la fonction $\varphi : t \longmapsto 2|A|$ est donc une fonction dominante (indépendante du paramètre x) sur le segment $[-A,A]$, qui est bien intégrale sur $[0,1]$. On a donc bien trouvé une domination sur tout segment.

Ainsi G est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) &= -2x\int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)}dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}dt \\ &= -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du \\ &= -2e^{-x^2}F(x)\end{aligned}$$

On a donc la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = -2F'(x)F(x)$$

Ce qui donne en intégrant $G(x) = -F(x)^2 + C$ En regardant la valeur en 0, on obtient :

$$G(0) = \frac{\pi}{4} = C$$

Puis donc :

$$F(x)^2 = \frac{\pi}{4} - G(x)$$

On calcule donc la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Il faut utiliser le thm de convergence dominé + la caractérisation séquentielle.

Soit (x_n) une suite quelconque de réels qui tends vers $+\infty$, alors on note $g_n : t \mapsto \dfrac{e^{-x_n^2(t^2+1)}}{t^2+1}$. On a : les fonctions g_n sont continues par morceaux, la suite de fonction g_n converge simplement vers la fonction nulle qui est continue par morceaux. Enfin, on a l'hypothèse de domination :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ \left|\frac{e^{-x_n^2(t^2+1)}}{t^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{t^2+1}$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$. On obtient donc :

$$\lim_{n\infty} G(x_n) = 0$$

Comme (x_n) est une suite quelconque, on en déduit que $\lim_{x\infty} G(x) = 0$, et donc que $\lim_{x\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (car $F(x) \geqslant 0$).

Exercice 86 Étudier la fonction :

$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}dt.$$

Montrer que f est solution d'une équation différentielles que l'on précisera.

Correction : On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale. L'intégrale est impropre en $+\infty$.
À $x > 0$ fixé, $t \longmapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$ est continue par morceaux.
À $t \geqslant 0$ fixé, $x \longmapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, avec comme fonction dérivée :

$$x \longmapsto -t\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$$

On a la majoration pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in \mathbb{R}^+, \left|-t\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\right| \leqslant t\frac{e^{-at}}{\sqrt{1+t}}$$

On note donc $\varphi_a : t \mapsto t\frac{e^{-at}}{\sqrt{1+t}}$ cette fonction est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, elle est intégrable, car $\varphi_a(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\ \frac{1}{t^2}$ (car $a > 0$).

On a donc domination sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} t\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$$

On cherche maintenant une équation différentielle vérifiée par f. On a pour $x > 0$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}dt$$

On utilise une intégration par parties, avec :

$$\begin{array}{lll} u(t) = e^{-xt} & u'(t) = -xe^{-xt} & \\ v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}} & v(t) = 2(1+t)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{1+t} & (u,v) \text{ sont } \mathscr{C}^1. \end{array}$$

cela donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[2\sqrt{1+t}e^{-xt}\right]_0^{+\infty} + 2x\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}e^{-xt}dt \\ &= -2 + 2x\int_0^{+\infty} (1+t)\frac{1}{\sqrt{1+t}}e^{-xt}dt \\ &= -2 + 2x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}dt + 2x\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t}}e^{-xt}dt \\ &= -2 + 2xf(x) - 2xf'(x) \end{aligned}$$

On en déduit que f est solution de l'équation différentielle :

$$(1+2x)f - 2xf' + 2 = 0$$

Exercice 87 On considère la fonction numérique :

$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}dt$$

Donner l'ensemble de définition de f puis étudier sa continuité.
Étudier si f est dérivable. Préciser les limites et un équivalent simple de $f(x)$ quand x tends vers $+\infty$.

Correction :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, on a :

$$t \longmapsto \frac{e^{-t}}{x^2+t^2} \text{ est continue sur } [0,+\infty[$$

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}dt$ est donc généralisée en $+\infty$.

On a de plus :

$$\frac{e^{-t}}{x^2+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et $\frac{e^{-t}}{x^2+t^2} \geqslant 0$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}dt$ est convergente.

Si maintenant $x=0$, la fonction $t \longmapsto \frac{e^{-t}}{t^2}$ n'est plus définie en 0, l'intégrale est donc doublement impropre.

De plus :

$$\frac{e^{-t}}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ diverge, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}dt$ est divergente. Ainsi, f est définie pour $x \neq 0$. Comme elle est paire, on peut l'étudier sur $]0,+\infty[$.

On va maintenant appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}^{+*}$.

Notons : $F : (x,t) \longmapsto \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}$.

À $t \geqslant 0$ fixé, la fonction : $x \longmapsto \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ À x fixé, la fonction : $t \longmapsto \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. Il reste à majorer la fonction $F(x,t)$ indépendamment de x. On a pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in [0,+\infty[, \left|\frac{e^{-t}}{x^2+t^2}\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{a^2+t^2}$$

R L'étude pour $x=0$ dans la question précédente indique qu'il faut se restreindre à un segment de $\mathbb{R}^{+*}$: il faut séparer x et 0.

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{a^2+t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (en fait $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt = f(a)$. Ainsi, on a bien une domination sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ et on peut appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale : la fonction $x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}dt$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

On va maintenant appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}^{+*}$.

À $t \geqslant 0$ fixé, la fonction : $x \longmapsto \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, (ie F admet une dérivée partielle selon x) avec :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -e^{-t}\frac{2x}{(x^2+t^2)^2}$$

À x fixé, la fonction $t \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

Il reste à dominer la fonction F indépendamment de x sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \left|-e^{-t}\frac{2x}{(x^2+t^2)^2}\right| \leqslant \frac{e^{-t}2b}{(a^2+t^2)^4}$$

La fonction : $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}2b}{(a^2+t^2)^4}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On a donc bien la domination sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}^{+*}$.

Ainsi, la fonction f est dérivable et

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -2x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x^2+t^2)^2}$$

Pour la limite, on va utiliser un encadrement. À $x>0$ fixé, on a :

$$\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{x^2+t^2} \leqslant \frac{e^{-t}}{x^2}$$

Ainsi, en intégrant de 0 à $+\infty$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

C'est-à-dire :

$$\forall x > 0,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$$

On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On a de plus pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2} dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{1+u^2}(xdu) \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{1+u^2} du \end{aligned}$$

Exercice 88 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

Correction :

Pour l'existence, l'intégrale est doublement impropre : en 0 et en $+\infty$.

$$f : t \longmapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \text{ est définie et continue sur }]0,+\infty[$$

R Attention au signe : le théorème de comparaison n'est vrai que pour les fonctions positives.

Sur $]0,1]$, $f(t) \leqslant 0$, on va donc montrer la convergence de $\int_0^1 -f(t)dt$ pour montrer la convergence absolue.

$$|f(t)| = -f(t) \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(t)$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0,\ \int_\varepsilon^1 \ln(t)dt &= [t\ln(t) - t + 1]_\varepsilon^1 \\ &= -\varepsilon \ln(\varepsilon) - \varepsilon + 1 \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t)dt$ est convergente, et donc par comparaison des fonctions positives, l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ cv absolument.

Sur $[1,+\infty[$, on a $f(t) \geqslant 0$. On a :

$$f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2} = \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ est convergente (Riemann). donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge. (Comparaison des fonctions positives).

Pour le calcul on passe par :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$$

on fait un chgt de variable :

$$t = \frac{1}{u} \qquad \frac{1}{u} = t \qquad dt = -\frac{du}{u^2}$$

cela donne :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \int_{+\infty}^1 \frac{-\ln(u)}{u^2+1} - du = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}$$

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = 0.$$

Exercice 89 Soit la fonction :

$$f : x \longmapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x \tan\theta) d\theta$$

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est définie est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer son sens de variations.
4. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

En déduire la limite de f en $+\infty$

Correction :

1. Très classique dans le cours de 1ère année : on peut dériver $x \longmapsto \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ ou utiliser $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$.
2. On a une intégrale qui dépends d'une paramètre généralisée en $\frac{\pi}{2}$ (puisque tan n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$).
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall \theta \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ |\arctan(x\tan\theta)| \leqslant \frac{\pi}{2}$$

   Or la fonction constante $t \longmapsto \frac{\pi}{2}$ est intégrale sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (qui est un intervalle borné).
   Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$.
   Pour montrer qu'elle est continue, on a :
   - ⋆ à x fixé, $\theta \longmapsto \arctan(x\tan\theta)$ est continue par morceaux et intégrable.
   - ⋆ à θ fixé, $x \longmapsto \arctan(x\tan\theta)$ est continue.
   - ⋆ on a une domination :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall \theta \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ |\arctan(x\tan\theta)| \leqslant \frac{\pi}{2}$$

   D'où la continuité.
3. Pour montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$, on applique le théorème de dérivation sous la signe intégrale sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.
   À $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\theta \longmapsto \arctan(x\tan\theta)$ est continue par morceaux et intégrable.
   À θ fixé, $g : x \longmapsto \arctan(x\tan\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
   La fonction dérivée est

$$g' : x \longmapsto \frac{\tan\theta}{1 + x^2\tan^2\theta}$$

   On a pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_*^+$:

$$\forall x \in [a,b], \ \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \left|\frac{\tan\theta}{1+x^2\tan^2\theta}\right| \leqslant \frac{\tan\theta}{1+a^2\tan^2\theta}$$

La fonction $\varphi_{a,b} : \theta \mapsto \frac{\tan\theta}{1+a^2\tan^2\theta}$ est continue par morceaux sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a de plus :

$$\frac{\tan\theta}{1+a^2\tan^2\theta} \underset{\theta\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{a^2\tan\theta} \to 0$$

Ainsi, la fonction $\varphi_{a,b}$ est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$. Elle est ainsi intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
On a donc domination sur tout segment de la forme $[a,b]$ par une fonction continue par morceaux et intégrable.
Au final, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour obtenir : f est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan\theta}{1+x^2\tan^2\theta} d\theta$$

On en déduit en particulier que la fonction f est croissante strictement sur $\mathbb{R}$.

R Elle est aussi impaire, et $f(0) = 0$. On peut aussi voir qu'elle est majorée par $\frac{\pi^2}{4}$.

4. Soit $x > 0$, on a :

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x\tan\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(\frac{1}{x}\tan\theta)d\theta$$

dans la deuxième intégrale, on effectue le changement de variable $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x\tan\theta)d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \arctan\left(\frac{1}{x\tan\alpha}\right) d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x\tan\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\left(\frac{1}{x\tan\theta}\right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\arctan(x\tan\theta) + \arctan\left(\frac{1}{x\tan\theta}\right)\right) d\theta \end{aligned}$$

R C'est parce que les deux intégrales convergent que l'on peut utiliser la somme. En particulier la dernière intégrale est doublement impropre : en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.

Comme $\forall\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, x\tan\theta > 0$, on obtient :

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{4}.$$

Comme $f(0) = 0$ et que f est continue en 0, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4} - f(0) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 90 Étudier la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} (\ln(t))^2\, dt$.

Proposer une méthode numérique pour représenter la fonction f à l'aide de Python.

Correction : étude classique de fonction définie par une intégrale.
on note $g : t \mapsto (\ln(t))^2$, clairement g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, on note G une primitive de g, et on a :

$$\forall x > 0,\ f(x) = G(x^2) - G(x)$$

Par composition de $x \mapsto x^2$ et $t \mapsto G(t)$, la fonction $x \mapsto G(x^2)$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme $x \mapsto G(x)$ et donc f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Elle est aussi dérivable et même de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour la même raison. On a :

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ f'(x) =& 2xg(x^2) - g(x) \\ =& 2x\left(4\ln(x)^2\right) - \ln(x)^2 \\ =& (\ln(x))^2 (8x - 1) \end{aligned}$$

Ainsi,la fonction f est décroissante sur $\left]0,\frac{1}{8}\right[$ croissante ensuite. En 1 la dérivée s'annule sans changer de signe. La fonction s'annule en 0.

Pour la limite en $+\infty$, on a :

$$\forall x>1,\ \forall t\in[x,x^2],\ \ln(x)^2\leqslant\ln(t)^2\leqslant 4\ln(x)^2$$
$$\text{par intégration sur } [x,x^2],\ \forall x>1,\ (x^2-x)\ln(x)^2\leqslant f(x)\leqslant 4(x^2-x)\ln(x)^2$$

D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Pour la limite en 0, on a :

$$\forall x<1,\ \forall t\in[x^2,x],\ 2\ln(x)\leqslant\ln(t)\leqslant\ln(x)\leqslant 0$$
$$\text{donc } \forall x<1,\ \forall t\in[x^2,x],\ \ln(x)^2\leqslant\ln(t)\leqslant 4\ln(x)^2$$
$$\text{par intégration sur } [x^2,x],\ \forall x>1,\ (x-x^2)\ln(x)^2\leqslant -f(x)\leqslant 4(x-x^2)\ln(x)^2$$
$$\text{au final } [x^2,x],\ \forall x>1,\ 4(x-x^2)\ln(x)^2\leqslant f(x)\leqslant (x-x^2)\ln(x)^2$$

D'où $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

On peut aussi faire une intégration par parties pour calculer $f(x)$. On note $G(t)=\int_1^t \ln(u)^2 du$

$$\begin{array}{ll} a(u)=\ln(u) & a'(u)=\frac{1}{u} \\ b'(u)=\ln(u) & b(u)=u\ln(u)-u \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} G(t)&=\left[u\ln(u)^2-u\ln(u)\right]_1^t-\int_1^t(\ln(u)-1)\,du \\ &=t\ln(t)^2-t\ln(t)-[u\ln(u)-2u]_1^t \\ &=t\ln(t)\,(\ln(t)-1)-t\ln(t)+2t-2 \\ &=t\ln(t)\,(\ln(t)-2)+2t-2 \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de $f(x)$ avec $f(x)=G(x^2)-G(x)$.

En Python :

```python
from pylab import *
def g(t) :
  return log(t) ** 2
def f(x) :
  n = 200
  t = linspace(x, x**2, n)
  pas = t[1] - t[0] # peut être négatif
  S = ( g(t[0]) + g(t[n-1])  ) / 2
  for k in range(1, n-1) :
    S += g(t[k])
  return pas*S
eps = 10**(-3)
infini = 2 # ne pas hésiter à zoomer pour voir la partie décroissante
nbrPoints = 200
X = linspace (eps, infini, nbrPoints)
Y = [ f(x) for x in X ]
plot(X,Y)
grid()
show()
```

Exercice 91 Étudier suivant α et β dans $\mathbb{R}$ l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x\longmapsto x^\alpha+\ln\left(1+x^\beta\right)$.

Correction : il s'agit donc de regarder l'existence de

$$\int_0^{+\infty}\left(x^\alpha+\ln\left(1+x^\beta\right)\right)dx$$

Cette intégrale est généralisée en $+\infty$ (pour toute valeur de α, β) et généralisée en 0 si α ou β est négatif.

Il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive.

En $+\infty$. Si $\alpha > 0$, alors :

$$x^\alpha + \ln\left(1+x^\beta\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha$$

Or $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ diverge d'où la divergence

Si $\alpha \leqslant 0$ et $\beta > 0$, alors

$$x^\alpha + \ln\left(1+x^\beta\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+x^\beta\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\left(x^\beta\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \beta \ln(x)$$

D'où la divergence.

Si $\alpha \leqslant 0$ et $\beta \leqslant 0$, alors

$$x^\alpha + \ln(1+x^\beta) = x^\alpha + x^\beta + o(x^\beta) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\max(\alpha,\beta)} = \frac{1}{x^{-\max(\alpha,\beta)}}$$

Ainsi : si $-\max(\alpha,\beta) > 1$, ie $\max(\alpha,\beta) < -1$, ie alors l'intégrale converge, sinon non.

Il y a donc convergence en $+\infty$ si et seulement si $\alpha < -1$ et
$beta < -1$

Exercice 92 On pose, pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(t) = \frac{e^t}{1+t^n} \text{ et } \varphi_n : x \longmapsto \int_0^x f_n(t)dt$$

1. Étudier la convergence de la suite de fonction (f_n).
2. Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe un unique $x_n(a) \in \mathbb{R}^+$, tel que $\varphi_n(x_n(a)) = a$.
3. Déterminer la limite de la suite $(x_n(a))$ lorsque $a < e-1$.
4. Déterminer la limite de la suite $(x_n(a))$ lorsque $a > e-1$.

correction :

1. La fonction f_n converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} e^t & \text{si } t < 1 \\ \frac{e}{2} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Il n'y a pas de convergence uniforme puisque les fonctions (f_n) sont toutes continues et que la fonction limite n'est pas continue.
D'après le thm de la double limite, il n'y a pas de convergence uniforme sur $[0,1[$.
Par contre, si on fixe $a \in]0,1[$, alors il y a convergence uniforme sur $[0,a]$, puisque :

$$\forall t \in [0,a],\ \left|f_n(t) - e^t\right| = \left|e^t \frac{-t^n}{1+t^n}\right| \leqslant ea^n \to 0$$

donc convergence uniforme sur tout segment de $[0,1[$.
En utilisant de nouveau le thm de la double limite, il est clair qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]1,+\infty[$.
si on fixe $1 < a < b$, on a :

$$\forall t \geqslant a, |f_n(t)| \leqslant \frac{e^t}{1+t^n} \leqslant \frac{e^b}{1+a^n} \to 0$$

il y a donc convergence uniforme sur tout segment de $]1,+\infty[$.

2. On étudie la fonction $x \longmapsto \varphi_n(x)$. C'est une fonction strictement croissante (puisque $\varphi_n'(x) = f_n(x)$) continue. On a $\varphi_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = +\infty$ var la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, corrolaire du thm des valeurs intermédiaires : $\exists! x_n(a),\ \varphi_n(x_n(a)) = a$. (bien dessiner le tableau de variations).

3. Déjà, il faut comprendre pourquoi $e-1$. L'idée est de calculer $\varphi_n(1)=\int_0^1 f_n(t)dt$. Avec la domination :

$$\left|\frac{e^t}{t+1}\right| \leqslant e^t \text{ intégrable sur } [0,1]$$

on applique le théorème de convergence dominé, et on en déduit que :

$$\lim_{n\infty} \varphi_n(1)=e-1$$

Ainsi, si $a<e-1$, alors à partir d'un certain rang, $x_n(a)<1$.
On a la relation.

$$\int_0^{x_n(a)} \frac{e^t}{1+t^n}dt=a$$

On procède comme une suite implicite.
On calcule $\varphi_n(x_{n+1}(a))$. On a la relation :

$$\int_0^{x_{n+1}(a)} \frac{e^t}{1+t^{n+1}}dt=a$$

or :

$$\forall t\in[0,1],\ \frac{e^t}{1+t^{n+1}} \geqslant \frac{e^t}{1+t^n}$$

On intègre sur $[0,x_{n+1}(a)]\subset[0,1]$, cela donne :

$$a=\varphi_{n+1}(x_{n+1}(a)) \geqslant \varphi_n(x_{n+1}(a))$$

On en déduit que $a \geqslant \varphi_n(x_{n+1}(a))$ (on place ces valeurs dans la tableau de variation de φ_n). On écrit :

$$\varphi_n(x_n(a)) \geqslant \varphi_n(x_{n+1}(a))$$

et donc par stricte croissance de φ_n, cela donne :

$$x_n(a) \geqslant x_{n+1}(a)$$

La suite (x_n) est donc décroissante et minorée par 0 donc converge vers une limite notée $l(a)$.
On veut passer à la limite dans :

$$\int_0^{x_n(a)} \frac{e^t}{1+t^n}dt=a$$

il faut donc considérer :

$$g_n : t \longmapsto \begin{cases} f_n(t) & \text{si } 0\leqslant t\leqslant x_n(a) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors :

$$a=\int_0^{x_n(a)} \frac{e^t}{1+t^n}dt=\int_0^1 g_n(t)dt$$

Cette suite de fonction converge simplement vers la fonction :

$$g : t \longmapsto \begin{cases} e^t & \text{si } 0\leqslant t\leqslant l(a) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a la domination :

$$\forall t\in[0,1],\ |g_n(t)| \leqslant e^t$$

et donc on peut utiliser le thm de convergence dominée :

$$\lim_{n\infty} \int_0^{x_n(a)} \frac{e^t}{1+t^n}dt=\int_0^{l(a)} e^t dt=e^{l(a)}-1$$

D'où la valeur de $l(a)=\ln(1+a)$.

4. Puisque $a > e-1$, on a $x_n(a) > 1$ à partir d'un certain rang.
Supposons que la suite $(x_n(a))$ soit majorée par M. On a alors :

$$a = \int_0^{x_n(a)} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt$$

où g_n est la fonction de la question précédente :

$$g_n : t \longmapsto \begin{cases} \frac{e^t}{1+t^n} & \text{si } t \leqslant x_n(a) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a toujours g_n qui converge vers la fonction

$$g : t \longmapsto \begin{cases} e^t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \frac{e}{2} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il faut ensuite dominer la suite de fonctions :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ |g_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

où :

$$\varphi : t \longmapsto \begin{cases} e^t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est intégrable (puisque M est un réel qui ne dépends pas de n donc en fait on intègre sur un segment).
On obtient :

$$\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \int_0^1 e^t dt$$

ou encore : $a = e-1$, ce qui est impossible.
Ainsi, la suite $(x_n(a))$ n'est pas majorée.
Supposons que $(x_n(a))$ ne tende pas vers $+\infty$. Alors on peut extraite une sous suite $y_n = x_{\psi(n)}(a)$ qui est majorée. En appliquant ce qui précède à (y_n), on a une contradiction.

⋆ Suite et séries de fonctions - intégration termes à termes

Exercice 93 On note :

$$I = \int_0^1 x^x dx \qquad \text{et pour } (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n^p = \int_0^1 x^n \ln(x)^p dx$$

1. Montrer que I et u_n^p sont bien définies.
2. À l'aide d'un programme Python, calculer une valeur approchée de I.
3. Montrer que :

$$\forall x \in]0,1],\ x^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ln(x)^n}{n!}$$

4. Exprimer I en fonction des u_n^p.
5. Exprimer u_n^p en fonction de u_n^{p-1}
6. Exprimer I sans signe intégral.

Correction :

1. Déjà $x^x = e^{x\ln(x)}$, donc l'intégrale I est faussement généralisée, car :

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \text{ donc } \lim_{x\to 0} e^{x\ln(x)} = 1$$

Pour (n,p) fixé, u_n^p est généralisée en 0.

Pour $n>0$, l'intégrale est faussement généralisée, puisque

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln(x)^p = 0$$

Si $n=0$, alors : il faut vérifier la convergence. On fait une ipp :

$$[x\ln(x)^p]_0^1 = 0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_0^p = \int_0^1 1\times \ln(x)^p dx &= -\int_0^1 x\times \frac{p}{x}\ln(x)^{p-1}dx \\ &= -p\int_0^1 \ln(x)^{p-1}dx = -pu_0^{p-1} \end{aligned}$$

au sens où l'une converge si et seulement si l'autre converge.
Or on sait que $u_0^0 = 1$ existe, u_0^1 existe puisque $\int_0^1 \ln(t)dt = -1$. On a vu : si u_0^{p-1} existe, alors u_0^p existe et $u_0^p = -pu_0^{p-1}$.
Cela prouve donc que $u_p = (-1)^p p!$

2. On peut par exemple faire la méthode des trapèzes :

```
def I(nbrInter) :
  """
  entrée: nbriter = int = nbr d'intervalles
  """
  x = linspace(0,1, nbrInter)
  S = (x[0]**x[0] + x[-1]**x[-1])/2
  for i in range(1, nbrInter -1) :
    S += x[i]**x[i]
  return S / nbrInter
```

3. Soit donc x non nul, on a :

$$x^x = \exp\left(x\ln(x)\right)$$

Or on sait :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}$$

On remplace donc simplement t par $x\ln(x)$ pour obtenir :

$$x^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n\ln(x)^n}{n!}$$

4. On cherche à inverser série et intégrale. on note donc $f_n : x \longmapsto \frac{x^n\ln(x)^n}{n!}$. Et on a bien f_n continue par morceaux et intégrable.
On a la série f_n qui converge simplement sur $]0,1]$ vers $f : x\longmapsto x^x$.
La fonction f est continue par morceaux, et surtout :

$$\int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{1}{n!}\int_0^1 \left(-x\ln(x)\right)^n dx$$

La fonction $x\longmapsto -x\ln(x)$ est continue sur $[0,1]$, elle est donc bornée sur $[0,1]$. (on peut vérifier que la plus grande valeur est atteinte en $\frac{1}{e}$, elle est bornée par $\frac{\ln(e)}{e}$). Il existe donc M tel que : $\forall x\in]0,1],\ 0\leqslant -x\ln(x)\leqslant M$
Ainsi :

$$\int_0^1 |f_n(x)|dx \leqslant \frac{M}{n!}$$

ce qui donne donc que $\left(\sum\int_0^1 |f_n(x)|dx\right)$ converge.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x^x dx \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ln(x)^n}{n!} dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)^n}{n!} dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u_n^n
\end{aligned}$$

5. On fait une ipp

$$\begin{aligned}
u_n^p &= \int_0^1 x^n \ln(x)^p dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x)^p \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} p \frac{1}{x} (\ln(x))^{p-1} dx \\
&= -\frac{p}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln(x))^{p-1} dx \\
&= -\frac{p}{n+1} u_n^{p-1}
\end{aligned}$$

6. On en déduit donc par récurrence facile que :

$$u_n^n = -\frac{n}{n+1} u_n^{n-1} = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} u_n^{n-2} = \dots$$

Ainsi :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty}$$

Exercice 94 Soit l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$$

1. Montrer que I existe.
2. Montrer que :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Indication : on admettra que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Correction :

1. En 0 : $\frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$.

   en $+\infty$: $\frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{t} e^{-t} = \underset{t \to +\infty}{o} \frac{1}{t^2}$
2. On commence par écrire :

$$\frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} = \frac{\sqrt{t} e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t} e^{-nt}$$

On pose donc $f_n : t \mapsto \sqrt{t}e^{-nt}$ pour $n \geqslant 1$ et il s'agit d'utiliser le thm d'intégration termes à termes. On a :

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt &= \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \sqrt{nt}e^{-nt} dt = \frac{1}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} (nt)e^{-nt} \frac{n}{2\sqrt{nt}} dt \\
&= \frac{1}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du \qquad \text{en posant } u = \sqrt{nt} \qquad du = \frac{n}{2\sqrt{nt}} dt \\
&= \frac{1}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} u \times u e^{-u^2} du \\
&= \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(\left[u e^{-u^2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-u^2} du \right) \\
&= \frac{1}{2n\sqrt{n}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

On constate que $\sum I_n$ converge, on a donc toutes les hypothèses du théorème, on peut donc écrire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Exercice 95 Donner une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement sur $[0,1]$ vers une fonction non bornée.

Correction : on peut par exemple prendre une fonction affine par morceaux :

- égale à 0 en 0
- égale à n en $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$,
- égale à 0 en $\frac{1}{2}$
- égale à $-n$ en $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$,
- égale à 1 en 1.

Exercice 96 Centrale

Soit la fonction :

$$S : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2 t^2}$$

1. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t) dt$.

   On pourra utiliser la formule suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

Correction : exercice un peu plus difficile : on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration termes à termes, il faut passer par le théorème de convergence dominée.

On note bien sûr :

$$f_n : t \longmapsto \frac{(-1)^n}{1 + n^2 t^2} \qquad \text{et} \qquad S_n : t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{1 + k^2 t^2}$$

1. Déjà les fonctions (f_n) sont bien continues sur $\mathbb{R}^{+*}$. On voit aussi que pour tout compact $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in [a,b], \ |f_n(t)| = \frac{1}{1 + n^2 t^2} \leqslant \frac{1}{1 + n^2 a^2}$$

   Ainsi, la série de fonction $\sum_{n \geqslant 1} f_n(t)$ converge normalement sur tout compact, donc uniformément sur tout compact. donc la fonction S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. On aimerait utiliser le théorème d'intégration termes à termes, mais on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt = &\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+n^2t^2} dt \\ =&\frac{1}{n}\left[\arctan(nt)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2n}\end{aligned}$$

et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. On ne peut donc pas utiliser cette technique.
On voit que le problème vient de la compensation des termes pairs (positifs) et impairs (négatifs).
On va alors utiliser le critère spécial des séries alternées et le théorème de convergence dominée sur les sommes partielles.
Pour $n \geqslant 1$, on note donc S_n la somme partielle (de fonctions).
À t fixé, la série $S(t)$ est alternée et on a :

$$|f_n(t)| = \frac{1}{1+n^2t^2} \geqslant \frac{1}{1+(n+1)^2t^2} = f_{n+1}(t)$$

C'est donc une série alternée.

R Signe inversé, correction à reprendre.

On sait par l'étude des séries alternées :

$$\forall t > 0,\ S_2(t) < S_4(t) < \cdots < S_{2p}(t) < S_{2p+2}(t) < S(t) < S_{2p+3}(t) < S_{2p+1}(t) < \cdots < S_3(t) < S_1(t)$$

On a aussi :

$$\forall t > 0,\ S_2(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+4t^2} \geqslant 0$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n(t)$ est une fonction positive. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(t) = |S_n(t)| \leqslant S_1(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

La suite de fonctions (S_n) est donc dominée par la fonction S_1 qui est intégrable.
On a donc :

- Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction S_n est continue par morceaux,
- On a bien la domination par la fonction S_1 continue par morceaux et intégrable,
- La fonction S est bien continue par morceaux.

Ainsi, chaque fonction S_n est intégrable, la fonction S est aussi intégrable, et on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} S_n(t)dt &= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} S_n(t)dt \\ \text{ou encore : } \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(t)dt &= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(t)dt \\ \text{en inversant les sommes finies : } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} f_k(t)dt &= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(t)dt \\ \text{et donc : } \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_k(t)dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)dt\end{aligned}$$

On a ainsi pu échanger $\sum$ et intégrale.
Comme on l'a vu :

$$\int_0^{+\infty} f_k(t)dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+k^2t^2} dt = (-1)^k \frac{\pi}{2k}$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} S(t)dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{2}(-\ln(2))$$

Exercice 97 Soit la fonction :

$$f : x \longmapsto \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+x}dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Soit $t \in]0,1[$. Exprimer $\dfrac{\ln(t)}{1+t}$ comme somme d'une série.
3. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Calculer $f(1)$.
4. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f(x) = \ln(x) \times \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{1+u}du.$$

Correction :

1. Soit $x > 0$ fixé. L'intégrale est généralisé en 0, $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t+x}dt$ est définie et continue sur $]0,1]$. Notons qu'elle est négative. On a :

$$\left|\frac{\ln(t)}{t+x}\right| = -\frac{\ln(t)}{t+x} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt = -1$ converge.
Ainsi, pour $x > 0$, l'intégrale est absolument convergente.

R Attention au signe (critère de comparaison des fonctions positives !).

2. On a :

$$\forall u \in]-1,1[,\ \ln(1+u) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{u^k}{k}$$

Ainsi :

$$\forall t \in]0,1[,\ \ln(t) = \ln(1+(t-1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{(t-1)^k}{k}$$

et donc :

$$\forall t \in]0,1[,\ \frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{(t-1)^k}{k(t+1)}$$

On peut aussi écrire :

$$\forall t \in]0,1[,\ \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k$$

et donc :

$$\forall t \in]0,1[,\ \frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \ln(t) t^k$$

R On peut aussi penser à un produit de Cauchy (ici il s'agit de série entière donc absolument convergente) :

$$\frac{\ln(t)}{1+t} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{(t-1)^k}{k}\right)$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
f(1) &= \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+1}dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \ln(t) t^k dt
\end{aligned}$$

On note donc $g_k : t \mapsto (-1)^k \ln(t) t^k$.

 ⋆ On a bien que g_k est continue par morceaux sur $]0,1]$,
 ⋆ à t fixé, la série $\sum_{k\geqslant 0} g_k(t)$ converge simplement vers $\frac{\ln(t)}{1+t}$ fonction qui est continue par morceaux sur $]0,1]$.
 ⋆ On calcule $\int_0^1 |g_k(t)|dt$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g_k(t)|dt &= \int_0^1 \ln(t) t^k dt \\
&= \underbrace{\left[\ln(t)\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{t^k}{k+1}dt \\
&= \frac{1}{k+1}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 0} \int_0^1 |g_k(t)|dt$ converge car la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

On peut donc appliquer l'intégration termes à termes qui donne :

$$\int_0^1 \sum_{k\geqslant 0} g_k(t)dt = \sum_{k\geqslant 0} \int_0^1 g_k(t)dt$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+1}dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 \ln(t) t^k dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

On obtient donc $f(1) = \frac{\pi^2}{12}$.

4. Soit $x > 0$ fixé, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+x}dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\frac{t}{x}+1}dt
\end{aligned}$$

on pose donc $u = \frac{t}{x}$, $t = ux$, et donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)+\ln(x)}{u+1}(xdu) \\
&= \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{u+1}du + \ln(x)\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{u+1}du \\
&= \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{u+1}du + \ln(x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 98 f continue de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$.
Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$, tel que $f(x) = x$.

Correction : TVI sur $x \longmapsto f(x) - x$

✯ Analyse : recherche d'extremums

Exercice 99 Rechercher les extrema locaux et globaux de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^3 - 3y - 2$.

Correction : on cherche les extrema candidats.
Comme on cherche les extrema sur un ouvert $\mathbb{R}^2$ et que f est de classe $\mathscr{C}^1$, on résout $\nabla f(x,y) = 0$, ie :

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \qquad (x,y) = (0,1) \text{ ou } (0,-1).$$

On a donc deux extrema candidats. Pour $(0,1)$, on forme la fonction :

$$\varphi : (h,k) \longmapsto f(0+h, 1+k) - f(0,1)$$

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(h,k) =& h^4 + (1+k)^3 - 3(1+k) - 2 + 4 \\ =& h^4 + 3k^2 + k^3 = h^4 + k^2(3+k) \end{aligned}$$

On a :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^3, \ |k| \leqslant 3 \implies \varphi(h,k) \geqslant 0$$

Ainsi, $(0,1)$ est un minimum local.
Pour $(0,-1)$, on forme la fonction :

$$\varphi : (h,k) \longmapsto f(0+h, -1+k) - f(0,-1)$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} \varphi(h,k) =& h^4 + (-1+k)^3 - 3(-1+k) - 2 \\ =& h^4 + k^3 - 3k^2 = h^4 + k^2(k-3) \end{aligned}$$

Le signe n'est pas clair lorsque (h,k) est proche de 0. On constate :

$$\begin{aligned} &\forall h \in \mathbb{R}, \varphi(h,0) = h^4 \geqslant 0 \\ &\forall k \in \mathbb{R}, |k| \leqslant 3 \implies \varphi(0,k) = k^2(k-3) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $(0,-1)$ n'est pas un extermum (point selle).

Exercice 100 Soit :

$$f : (x,y) \longmapsto x\ln(y) - y\ln(x)$$

Déterminer $\mathscr{D}_f$. Rechercher les extremums de f.

Correction :
On a $\mathscr{D}_f = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ c'est un ouvert.
On cherche les points critiques car f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(y) - \frac{y}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{y} - \ln(y)$$

On a alors le système :

$$\begin{cases} x\ln(y) = y \\ y\ln(x) = x \end{cases}$$

Considérons (x,y) solutions, alors déjà $x>1$ et $y>1$ et on a :

$$x = \frac{x}{\ln(x)\ln\left(\frac{x}{\ln x}\right)} \qquad \text{ie } \ln(x)\left(\ln(x) - \ln(\ln x)\right) = 1$$

On pose alors $z = \ln(x)$. On a $z>0$ et :

$$z(z - \ln(z)) = 1$$

on voit que $z=1$ est solution évidente. On regarde si c'est la seule.

On pose :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & z^2 - z\ln(z) - 1 \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} \forall z>0,\ \varphi'(z) =& 2z - \ln(z) - 1 \\ \varphi''(z) =& 2 - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

On voit donc que φ'' est positive pour $z > \frac{1}{2}$. puis $\forall z \in \mathbb{R},\ \varphi'(z) \geqslant \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) > 0$ donc φ est strictement croissante et $z=1$ est l'unique solution de $\varphi(z) = 0$.

Ainsi, $x = e$ et par suite $y = e$ est l'unique point critique (on vérifie bien qu'ils sont solutions du système). On regarde alors le signe de :

$$\psi(h,k) = f(e+h,e+k) - f(e,e) = (e+h)\ln(e+k) - (e+k)\ln(e+h) \text{ pour } (h,k) \text{ petits}$$

On constate que le signe n'est pas clair. On regarde donc :

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{1}{n},0\right) =& e\left(1 - \ln\left(e + \frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n} \\ =& e\left(-\frac{1}{en} + \frac{1}{2e^2n^2} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{n} \\ \underset{n\infty}{\sim}& \frac{1}{2e}\frac{1}{n^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

D'un autre côté :

$$\psi\left(0,\frac{1}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2e}\frac{1}{n^2} \leqslant 0$$

Ainsi ψ change de signe au voisinage de $(0,0)$ et donc (e,e) n'est pas un extremum. f n'a donc pas d'extremum.

III Probabilités

Exercice 101 ESM 2019

On considère 3 boîtes et n boules. Les boules sont lancés de manière équiprobable dans les 3 urnes.

On note X_n le nombre de boîtes avec au moins une boule.

1. Loi de X_n.
2. Espérance de X_n

Correction :

1. Déjà $X_n(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
   On peut par exemple utiliser les dénombrements : un résultats est une liste de longueur n de $[\![1,3]\!]$. le cardinal de $X_n = 1$ est 3 (il n'y a que 3 listes où une seule boîte est non vide). Ainsi :
   $$p(X_n = 1) = \frac{1}{3^{n-1}}$$
   de même le cardinal de $X_n = 2$ est $3 \times (2^n - 2)$: car il faut choisir la boîte vide (unique) puis répartir les boules entre ces deux boîtes sans mettre tout dans une seule (nbr de surjections). Ainsi :
   $$p(X_n = 2) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$$
   On obtient alors :
   $$p(X_n = 3) = 1 - \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1} - 2^n - 1}{3^{n-1}}$$
2. Il suffit de calculer :
   $$E(X_n) = p(X_n = 1) + 2p(X_n = 2) + 3p(X_n = 3)$$

Exercice 102 Urnes d'Ehrenfest

On considère deux urnes A et B. À l'instant initial, la première contient p particules et la deuxième est vide. À chaque instant une particule choisie au hasard passe d'une urne à l'autre.

Soit T la variable aléatoire modélisant l'instant auquel on retourne à l'état initial.

1. Montrer que l'on ne peut revenir à l'instant initial que pour des instants pairs.
   indication : vérifier que le nombre de particules dans B au temps n a la même parité que n.
2. Calculer $p(T = 2)$ et $p(T = 4)$.
3. On modélise l'état des particules par une liste L de longueur p qui contient 1 en position i si la particule i est dans l'urne A et 0 si la particule i est dans l'urne B.
   Écrire une fonction python `Ehrenfest(L)` modélisant le passage de l'instant n à $n+1$.
4. Écrire une fonction python `experience(p)` qui modélise l'expérience avec p particules et renvoie l'instant où l'on revient à l'état initial (ie la valeur de T).
5. Écrire une fonction python `moyenneT(n,p)` qui renvoie la valeur moyenne de T sur n expériences à p particules.
6. Tracer la courbe de `moyenneT(n,p)` en fonction de p. Que peut-on en déduire pour la valeur de T lorsque p tend vers $+\infty$?
7. Quel phénomène thermodynamique est modélisé par cette expérience ?

Commentaire : pas très difficile pour la partie mathématiques, revoir la fiche sur la simulation de VAR pour la partie Python.

Correction :

1. Question de modélisation. On peut procéder par récurrence pour formaliser un peu. On peut noter B_n le nombre de boules dans B_n à l'instant n (c'est donc une VAR).
   $$\mathscr{P}(n) : \text{"la valeur de } B_n \text{ a la même parité que } n\text{"}$$
   (précisément, c'est : pour tout tirage $\omega \in \Omega$, alors $B_n(w)$ et n ont la même parité).
   Pour $n = 0$, $B_0 = 0$ (VAR certaine) d'où l'initialisation.
   Soit n fixé tel que B_n est vraie. Si n est pair, on sait que la valeur de B_n est pair, on note donc $2k$ sa valeur et soit on enlève, soit on ajoute une boule à B, donc $B_{n+1} = 2k+1$ ou $B_{n+1} = 2k-1$ et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. C'est pareil si n est impair.
   D'où la conclusion.
   Enfin, on voit que :
   $$(T = n) \subset (B_{n-1} = 1)$$
   (puisqu'il faut enlever une boule à B à l'instant $n-1$ pour revenir à l'instant initial. et donc que $n-1$ est impair, ie n pair.
   Au final : $T(\Omega) = 2\mathbb{N}^*$

2. On peut noter : U_A^k l'événement on déplace une boule de l'urne A vers B au tirage k, et de même U_B^k
   On a :

$$(T=2) = U_A^1 \cap U_B^2$$

   et donc :

$$\begin{aligned} p(T=2) =& p(U_A^1) p_{U_A^1}\left(U_B^2\right) \\ =& 1 \times \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

   car l'événement : U_A^1 est certain, et sachant U_A^1 on a 1 seule boule dans B sur un total de p boules, donc : $p_{U_A^1}\left(U_B^2\right) = \frac{1}{p}$
   De même :

$$(T=2) = U_A^1 \cap U_A^2 \cap U_B^3 \cap U_B^4$$

   avec les probabilités composées cela donne :

$$\begin{aligned} p(T=2) =& p\left(U_A^1\right) p_{U_A^1}\left(U_A^2\right) p_{U_A^1 \cap U_A^2}\left(U_B^3\right) p_{U_A^1 \cap U_A^2 \cap U_B^3}\left(U_B^4\right) \\ =& 1 \frac{p-1}{p} \frac{2}{p} \frac{1}{p} = \frac{2(p-1)}{p^2} \end{aligned}$$

   REM : toujours bien penser à modéliser.
3. Voilà le type de code que l'on peut écrire :

```
from pylab import *


def Ehrenfest(L) :
    """
    entrée: L  = list
               = étant à l'instant n des  particules
    sortie: L
    """
    p = len(L)

    # on tire une particule au hasard
    # ie un entier dans [|0, p-1|]
    # rappel rand() est dans ]0,1[
    # donc on multiplie par p
    # et on prend la partie entière.
    k = int(rand() *p)

    # on change la position de la particule k
    L[k] = 1-L[k]
    # on peut aussi faire un if
    return L


def experience(p):
    """
    entrée: p = int(!)
              = nbr de particules modélisées
    sortie: k = int
              = nbr de tirages nécessaires pour revenir à l'instant initial
    """
    L = [0]*p

    L = Ehrenfest(L)
    k = 1
    #print("instant: ", k, "état: ", L)

    # pour vérifier le retour à l'instant initial
```

```
    # on peut aussi faire la somme des éléments
    # ou faire une  recherche de termes non nuls
    while L != [0]*p :
        L = Ehrenfest(L)
        k += 1
        # print("instant: ", k, "état: ", L, "nbr de boules dans B:", sum(L))

    return k

def moyenneT(n,p):
    """
    entrée: p = int(!)
              = nbr de particules modélisées
            n = int
              = nbr d'expériences faites
    sortie: T = float
              = valeur moyenne de T
    """
    T = 0
    for exp in range(n):
        T += experience(p)
    return T/n


#  test d'experience
# experience(10)

# test moyenne
n = 100
print("après ", n, " tests, la valeur moyenne de T est:",  moyenneT(n,10))

# tracé:
pmin = 2
pmax = 20
listeX = range(pmin, pmax)
listeY = []
for p in range(pmin, pmax) :
    M = moyenneT(n,p)
    print("pour p= ", p, " la valeur moyenne de T est:",  M)
    listeY.append( M) # NB: même valeur de n à chaque fois
plot(listeX, listeY)
show()
```

On voit que la valeur de T augmente très vite.
Il semble aussi que T soit de l'ordre de 2^p.

4. Question un peu étrange. C'est liée au spin.

Exercice 103 On étudie des tirages de 3 jetons, notés 1, 2 et 3 indépendants et avec remise.

- Soit Y ma variable correspondant au minimum du numéro du tirage pour lequel on obtient un jeton différent du premier tiré.
- soit Z la variable correspondant au numéro du tirage pour lequel on obtient un jeton différent des deux tirés précédemment.

1. Écrire une simulation en Python.
2. Donner la loi de Y.
3. Donner la loi de $Y-1$, l'espérance de Y et la variance de Y.
4. Donner la loi conjointe de Y et Z.
5. Donner la loi de Z et l'espérance de Z.

Correction :

1. On peut par exemple faire :

```
def simul():
```

```python
  jeton = int(rand()*3) +1
  numTirage = 1
  listeJetonsTires = [jeton]

  Y = 0
  while Y == 0 :
    jeton = int(rand()*3) +1
    numTirage += 1
    if jeton in  listeJetonsTires :
      Y = numTirage
    else :
      listeJetonsTires.append(jeton)

   # on recommence:
   Z = 0
   while Z == 0 :
    jeton = int(rand()*3) +1
    numTirage += 1
    if jeton in  listeJetonsTires :
      Z = numTirage
    else :
      listeJetonsTires.append(jeton)

   return Y, Z
```

on peut aussi utiliser la longueur de la liste des jetons tirés. Ou garder en mémoire le premier jeton tiré.

2. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus 2$. pour $k \in Y(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} p(Y=k) =& p\left(T_2 = T_1 \cap \dots T_{k-1} = T_1 \cap T_k \neq T_1\right) \\ =& \frac{1}{3}^{k-2} \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(après utilisation des probas composées ou probas totales avec SCE associé à T_1 ou dénombrements).

3.

$$p(Y-1=k) = p(Y=k+1) = \frac{1}{3}^{k-1} \frac{2}{3}$$

donc $Y-1 \sim \mathcal{G}(\frac{2}{3})$.

4. on calcule pour $l > k$:
5. probas totales

Exercice 104 On considère un jeu où on lance une balle dans un trou de plus en plus loin.

On considère un succès si la boule rentre dans le trou et la La probabilité de succès pour le lancer n est de $\frac{1}{n}$.
Le jeu s'arrête au premier échec. On note X le rang de ce premier échec.

1. Modéliser l'expérience avec Python.
2. Donner la loi de X
3. Avec Python proposer une estimation de $E(X)$.
4. Calculer la fonction génératrice de X.
5. En déduire mathématiquement l'existence et la valeur de $E(X)$ et $V(X)$.

Correction :

1. On peut par exemple faire :

```python
def X():
  n = 1
  while rand() < 1/n :
    n += 1
  return n
```

2. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X=k) =& p\left(S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{n-1} \cap E_n\right)\\
=& p(S_1) p_{S_1}(S_2) p_{S_1 \cap \cdots \cap S_{n-2}}(S_{n-1})\, p_{S_1 \cap \cdots \cap S_{n-1}}(E_n)\\
=& \frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
=& \frac{n-1}{n!}
\end{aligned}$$

3. On peut faire :

```
nbrExp = 1000
for i in range(1000) :
  S += X()
moy = S / nbrExp
```

4. On a pour $t \in]-r, r[$ (r étant le rayon de cv que l'on sait $\geqslant 1$) :

$$\begin{aligned}
G_X(t) =& \sum_{k=1}^{+\infty} p(X=k) t^k\\
=& \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} t^k\\
=& \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} t^k\\
=& \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{k!} t^k - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k\\
=& t \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} - \left(e^t - t - 1\right)\\
=& t\left(e^t - 1\right) - \left(e^t - t - 1\right)\\
=& te^t - e^t + 1
\end{aligned}$$

5. On dérive :

$$\begin{aligned}
G'_X(t) =& (1+t)e^t - e^t\\
G'_X(1) =& e\\
G''_X(t) =& (1+t+1)e^t - e^t\\
G''_X(t) =& 3e - e = 2e
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$E(X) = e \qquad V(X) = 2e + e - e^2 = 3e - e^2$$

Exercice 105 Un parc d'attraction accueille N personnes quotidiennement. N suit une loi de poisson de paramètre. La moyenne du nombre de visiteurs est de 4000.

1. Quel est la loi de N ?
2. Il y a 4 guichets à l'entrée. Chaque personne choisit son guichet indépendamment des autres et au hasard. On note X le nombre de personne qui se présentent au guichet numéro 1.
   (a) Donner $X(\Omega)$.
   (b) Donner $p_{N=n}(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer la loi de X

Correction :

1. $N \hookrightarrow (4000)$.
2. (a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Sachant $N = n$, il s'agit d'une expérience de Bernouilli : succès pour choisir le guichet 1 échec sinon avec n expérience. Ainsi :

$$p_{N=n}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k}\frac{1}{4^k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} & \end{cases}$$

(c) Les probas totales pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p(X = k \cap N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}\frac{1}{4^k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\frac{1}{4^k}\sum_{n=k}^{+\infty}\lambda^n\frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\frac{1}{4^k}\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^{n+k}\frac{1}{n!}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \\ &= e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k e^{\frac{3\lambda}{4}} \\ &= e^{-\frac{1}{4}\lambda}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k \end{aligned}$$

et donc $X \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\frac{\lambda}{4}\right)$

Exercice 106 Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi et indépendantes, telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$p(X_k = 0) = \frac{8}{27} \qquad p(X_k = 1) = \frac{12}{27} \qquad p(X_k = 2) = \frac{6}{27} \qquad p(X_k = 3) = \frac{1}{27}$$

On considère $Z = X_1 + \cdots + X_n$.
Donner la loi de Z.

Correction méthode 1 : Il faut passer par les fonctions génératrices :

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1,1[,\ G_Z(t) &= (G_{X_1}(t))^n \\ &= \left(\frac{8}{27} + t\frac{12}{27} + t^2\frac{6}{27} + t^3\frac{1}{27}\right)^n \\ &= \frac{1}{(27)^n}\left(8 + 12t + 6t^2 + t^3\right)^n \\ &= \frac{1}{(27)^n}\left((t+2)^3\right)^n \\ &= \frac{1}{(27)^n}(t+2)^{3n} \\ &= \frac{1}{(27)^n}\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}t^k 2^{3n-k} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p(Z = k) &= \frac{1}{(27)^n}\binom{3n}{k}2^{3n-k} \\ &= \binom{3n}{k}\frac{1}{3^k}\frac{2}{3}^{3n-k} \end{aligned}$$

Ainsi : $Z \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3n, \frac{1}{3}\right)$.

Correction méthode 2 : On constate que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$. Pour cela, on peut reconnaître la fonction génératrice de X_1 :

$$G_{X_1}(t) = \left(\frac{t}{3} + \frac{2}{3}\right)^3$$

ou juste le vérifier.

Ainsi, X_1 compte le nombre de succès dans un tirage de longueur 3, X_2 compte aussi le nombre de succès dans un tirage de longueur 3, avec une expérience identique et indépendante.

On peut donc dire que $X_1 + X_2$ compte le nombre de succès dans un tirage de longueur 6. (**REM :** on peut aussi calculer la loi de $X_1 + X_2$ avec un SCE associé à X_1).

Et donc Z compte le nombre de succès dans un tirage de longueur $3n$.

Exercice 107 Soit X et Y deux VAR indépendantes et de même loi à valeurs dans N. On suppose que $Z = X + Y + 1$ suive une loi géométrique de paramètres p.

1. Donner l'espérance de X.
2. Calculer la fonction génératrice de X.
3. En déduire la loi de X.

Correction :

1. On a :

$$E(Z) = \frac{1}{p} = 2E(X) + 1$$

D'où : $E(X) = \frac{1-p}{2p}$.

2. On a :

$$G_Z(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}t^k = \frac{pt}{1-qt}$$

et d'un autre côté :

$$G_Z(t) = E(tt^Xt^Y) = tE(t^X)E(t^Y) = tG_X(t)G_y(t) = t\left(G_X(t)\right)^2$$

3. D'autre part pour $t \in]0,1[$, $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X=k)t^k \geqslant 0$
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\forall t \in]0,1[,\ G_X(t) =& \sqrt{\frac{p}{1-qt}}\\ =& \sqrt{p}(1-qt)^{-\frac{1}{2}}\\ =& \sqrt{p}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}q^nt^n \qquad \text{avec produit des nombres pairs / impairs}\end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$\forall t \in]0,1[,\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n$$

par unicité du DSE, cela donne :

$$p(X=n) = \sqrt{p}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}q^nt^n$$

REM : il faut prolonger le résultat su cours : ici on a de l'information que sur $]0,t[$ et non sur $]-r,r[$, mais le même résultat est valable.

Exercice 108 On considère X_1 et X_2 deux VAR indépendantes, suivant une loi de Bernouilli $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

Le but de cet exercice est de déterminer la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

1. Exprimer les coefficients de $(1+X)^{2n}$ de deux manières.

En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2=\binom{2n}{n}$$

2. Calculer $p(X_1=X_2)$.
3. Répondre à la question initiale.

Correction :

1. D'un côté on a la formule de Newton :

$$(1+X)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}X^k$$

De l'autre la formule du produit de deux polynômes :

$$\begin{aligned}(1+X)^{2n} =&(1+X)^n(1+X)^n\\ =&\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}X^j\right)\\ =&\sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}X^k\end{aligned}$$

En identifiant :

$$\forall k\in[\![0,2n]\!]\,,\ \binom{2n}{k}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}$$

pour $k=n$, cela donne :

$$\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}\right)^2$$

2. On a par la formule des proba totales :

$$\begin{aligned}p(X_1=X_2)&=\sum_{k=0}^{n}p(X_1=k\cap X_2=k)\\ &=\sum_{k=0}^{n}p(X_1=k)p(X_2=k)\\ &=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{i}\right)^2\\ &=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

D'autre part on constate que si $X_1\neq X_2$, alors M est diagonalisable (puisque 2 valeurs propres distinctes, lues sur la diagonale de la matrice triangulaire supérieure). D'autre part, si $X_1=X_2$, alors M n'est pas diagonalisable.
Ainsi, la propabilité de l'événement A : « M est diagonalisable » est :

$$p(A)=1-\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

Exercice 109 Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

On considère $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n variables aléatoires indépendantes de Bernouilli de paramètres $p\in]0,1[$.

On considère les variables suivantes :

$$Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$$
$$Z_n = X_i X_{i+1} \qquad \text{pour } i \in [\![1, n-1]\!]$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} Z_i$$

1. Implémenter en langage Python $S(n,p)$ et $Y(n,p)$.
2. Calculer numériquement l'espérance de Y_n pour $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$. Justifier mathématiquement.
3. Donner la loi de Y_n.
4. Donner l'espérance de Y_n et de S_n.
5. Donner la variance de Y_n et de S_n.

commentaire : mélange de deux exercices : loi du max et nbr de fois « deux succès enchaînés ». Attention, ici c'est le ma de Bernouilli donc une bernouilli. **Correction :**

1. On commence par X_i :

```
def X(p):
  """
  entrée: p = float = proba de succès
  sortie: 0 ou 1
  """
  alea = rand()
  if alea < p :
    return 0
  return 1
```

Après on fait Y. Il est important de comprendre que Y vaut 0 ou 1.

```
def Y(n,p):
  for i in range(n):
    if X(p) == 1 :
      return 1
  return 0
```

Ensuite Z (sous forme d'une liste) :

```
def Z(n,p) :
  # on commence par créer une liste des valeurs de X
  listeX = [0]*n
  for i in range(n):
    listeX[i] = X(p)
  # puis on crée la liste des Z (longueur inférieure de 1)
  listeZ = [0]* (n-1)
  for i in range(n-1):
    listeZ[i] = listeX[i] * listeX[i+1]
  return listeZ
```

Puis enfin S :

```
def S(n,p):
  listeZ = Z(n,p)
  s = 0
  for i in range(n-1):
    s += listeZ[i]
  return s
```

2. On est sur un calcul d'espérance : on fait beaucoup d'expérience et on calcule la moyenne empirique des résultats obtenus.

```
def moyenne(Nexp):
  """
  entrée: Nexp = nbr d'expérience que l'on fait
  sortie: moyenne empirique
```

```python
    """
    moyEmpirique = 0
    for exp in range(Nexp):
      moyEmpirique += Y(3, 1/2)
    return moyEmpirique / Nexp
```

Mathématiquement, il faut comprendre que Y vaut 0 ou 1.

$$\begin{aligned} p(Y=0) =& p\left(X_1=0\cap\dots\cap X_n=0\right) \\ =& p\left(X_1=0\right)\dots p\left(X_n=0\right) && \text{par indépendance} \\ =& q^n \end{aligned}$$

et donc $p(Y=1)=1-q^n$ ainsi, $E(Y)=1-q^n$.

3. Fait au dessus.
4. Pour Y_n c'est fait au-dessus. Pour S_n, on a :

$$E(Z_i)=p(Z_i=1)=p\left(X_i=1\cap X_{i+1}=1\right)=p^2 \text{ par indépendance}$$

D'où :

$$\begin{aligned} E(S_n) =& E\left(\sum_{i=1}^{n-1} Z_i\right) \\ =& \sum_{i=1}^{n-1} E\left(Z_i\right)=(n-1)p^2 \end{aligned}$$

5. Pour Y_n c'est facile :

$$V(Y_n)=p(Y=0)p(Y=1)=q^n\left(1-q^n\right)$$

Pour S_n, c'est un exercice fait durant l'année :

$$\begin{aligned} V(S_n) =& V\left(\sum_{i=1}^{n-1} Z_i\right) \\ =& \sum_{i=1}^{n-1} V\left(Z_i\right)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant(n-1)} cov(Z_i,Z_j) \end{aligned}$$

On fait rapidement, le tableau des covariance : Si $j\neq i+1$, $cov(Z_i,Z_j)=0$ car indépendance, sinon :

$$\begin{aligned} cov(Z_i,Z_{i+1}) =& E\left(Z_iZ_{i+1}\right)-E(Z_i)E(Z_{i+1}) \\ =& p\left(X_i=1\cap X_{i+1}=1\cap X_{i+2}=1\right)-p^4 \\ =& p^3-p^4=p^3q \end{aligned}$$

D'où :

$$V(S_n) = (n-1)p^2(1-p^2)+2(n-2)p^3q$$

Exercice 110 Soient $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$, $(\Omega,\mathscr{A},p)$ un espace probabilisé et $\left(A_i\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements tels que $\left(p(A_i)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ soit une suite arithmétique avec $p(A_1)=\frac{1}{2^n}$.

1. Exprimer $p(A_i)$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.
2. On considère un événement B tel que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $p(B|A_i)=\frac{1}{2^i}$. Exprimer $p(B)$.

Correction :

1. C'est une probabilité qui dépends d'un paramètre. On sait que $p(A_i)=\frac{1}{2^n}+r(i-1)$ avec $r\in\mathbb{R}$.

   On veut donc que $\sum_{i=1}^{n} p(A_i)=1$, ce qui donne :

$$\frac{n}{2^n}+r\frac{n(n-1)}{2}=1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} r =& \frac{2}{n(n-1)}\left(1-\frac{n}{2^n}\right) = \frac{2}{n(n-1)} - \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} \\ =& \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1,n]\!],\ p(A_i) =& \frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right)(i-1) \\ =& \frac{1}{2^n} + \frac{i-1}{n-1}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ =& \frac{i}{n-1}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

2. On utilise les probas totales, avec le SCE A_i :

$$\begin{aligned} p(B) =& \sum_{i=1}^{n} p(A_i) p_{A_i}(B) \\ =& \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{i-1}{n-1}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right) \\ =& \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i} + \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{2^i} \end{aligned}$$

Il faut calculer ces sommes. On sait :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i} =& \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) \\ =& 1-\frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

On sait aussi que :

$$\begin{aligned} \forall |x| \leqslant 1,\ \sum_{i=0}^{n} x^i &= \frac{1-x^n}{1-x} \\ \text{par dérivation : } \forall |x| \leqslant 1,\ \sum_{i=1}^{n} i x^{i-1} &= \frac{nx^{n-1}(1-x)+1-x^n}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

On remplace x par $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i-1}} =& 4\left(\frac{n}{2^n}+1-\frac{1}{2^n}\right) \\ =& \frac{n-1}{2^{n-2}}+4 \end{aligned}$$

On change de variables :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{2^i} =& 2\sum_{i=2}^{n}\frac{i-1}{2^{i-1}} \\ =& 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{2^{i-1}} = \frac{n-1}{2^{n-2}}+4 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p(B) =& \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{n-1}{2^{n-2}}+4\right) \\ =& \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{n-2}}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{4}{n-1}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Exercice 111 On considère deux urnes. La premier contient 4 boules noires et 2 blanches, la deuxième 2 noires et 4 blanches. On choisit une urne au hasard et on tire successivement 3 boules sans remise.

Donner la probabilité de tirer une troisième boule noire sachant que l'on a déjà tiré 2 boules noires avant.

Correction :

On note U_1 et U_2 les deux urnes.

On veut calculer :

$$p_{N_1\cap N_2}(N_3) = \frac{p(N_1\cap N_2\cap N_3)}{p(N_1\cap N_2)}$$

On calcule les deux termes avec le SCE U_1 et U_2 :

$$p(N_1\cap N_2\cap N_3) = p(U_1)p_{U_1}(N_1\cap N_2\cap N_3) + p(U_2)p_{U_2}(N_1\cap N_2\cap N_3)$$

Sachant U_1, on a :

$$\begin{aligned} p_{U_1}(N_1\cap N_2\cap N_3) =& p_{U_1}(N_1)p_{U_1\cap N_1}(N_2)p_{U_1\cap N_1\cap N_2}(N_3) \\ =& \frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} p_{U_1}(N_1\cap N_2) =& p_{U_1}(N_1)p_{U_1\cap N_1}(N_2) \\ =& \frac{4}{6}\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Même principe sachant U_2.

Exercice 112 Soit $p>0$ et X qui suit une loi géométrique de paramètre p. Soit $d\in\mathbb{N}$ On note A_d l'événement : X est multiple de d.

1. Donner $p(A_d)$.
2. Les événements A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

Correction :

1. A_d est l'union disjointe des événements $x = kd$ pour $k\in\mathbb{N}^*$. Ainsi :

$$\begin{aligned} p(A_d) =& \sum_{k=1}^{+\infty} p(X=kd) \\ =& \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{kd-1} \\ =& pq^{d-1}\frac{1}{1-q^d} \end{aligned}$$

2. On a : $A_2\cap A_3 = A_6$. Il faut ainsi regarder si $p(A_2)p(A_3) = p(A_6)$.

On a :

$$\begin{aligned} p(A_2)p(A_3) =& pq\frac{1}{1-q^2}pq^2\frac{1}{1-q^3} = \frac{p^2q^3}{(1-q)(1+q)(1-q)(1+q+q^2)} = \frac{q^3}{(1+q)(1+q+q^2)} \\ p(A_6) =& pq^5\frac{1}{1-q^6} = \frac{pq^5}{(1-q)(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)} = \frac{q^5}{(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)} \end{aligned}$$

On regarde donc l'équation :

$$\begin{aligned} p(A_2)p(A_3) = p(A_6) &\iff (1+q+q^2+q^3+q^4+q^5) = q^2(1+q)(1+q+q^2) \\ &\iff 1+q+q^2+q^3+q^4+q^5 = q^2\left(1+2q+2q^2+q^3\right) \\ &\iff 1+q+q^2+q^3+q^4+q^5 = q^2+2q^3+2q^4+q^5 \\ &\iff 1+q = q^3+q^4 \\ &\iff 1+q = q^3(1+q) \\ &\iff 1 = q^3 \iff q=1 \text{ ce qui est impossible !} \end{aligned}$$

Exercice 113 Soient X et Y deux variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi.

On suppose que la variable $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer l'espérance de X.
2. Calculez la fonction génératrice de X.
3. Donner la loi de X.

Correction :

1. avec la linéarité de l'espérance :
$$E(Z) = E(X) + E(Y) + 1$$
et donc :
$$\frac{1}{p} = 2E(X) + 1$$
ce qui donne : $E(X) = \frac{1-p}{2p}$.
2. On a :
$$\begin{aligned} \forall t \in]-1,1[,\ G_Z(t) =& \frac{pt}{1-qt} && \text{par calcul} \\ =& E\left(tt^X t^Y\right) = && t\left(G_X(t)\right)^2 \text{ par indépendance} \end{aligned}$$
On en déduit que :
$$\forall t \in [0,1[,\ G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-qt}}$$
(il faut vérifier que $G_X(t) \geqslant 0$).
3. On fait donc le DSE de $t \mapsto \sqrt{\frac{p}{1-qt}}$.
En utilisant :
$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$$
Cela donne :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(X=n) = \frac{\sqrt{p}\,(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} q^n$$

Exercice 114 Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi et indépendantes, telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$p(X_k = 0) = \frac{8}{27} \qquad p(X_k = 1) = \frac{12}{27} \qquad p(X_k = 2) = \frac{6}{27} \qquad p(X_k = 3) = \frac{1}{27}$$

On considère $Z = X_1 + \cdots + X_n$.
Donner la loi de Z.

Correction méthode 1 : Il faut passer par les fonctions génératrices :

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1,1[,\ G_Z(t) =& \left(G_{X_1}(t)\right)^n \\ =& \left(\frac{8}{27} + t\frac{12}{27} + t^2\frac{6}{27} + t^3\frac{1}{27}\right)^n \\ =& \frac{1}{(27)^n}\left(8 + 12t + 6t^2 + t^3\right)^n \\ =& \frac{1}{(27)^n}\left((t+2)^3\right)^n \\ =& \frac{1}{(27)^n}(t+2)^{3n} \\ =& \frac{1}{(27)^n}\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k} t^k 2^{3n-k} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p(Z=k) &= \frac{1}{(27)^n}\binom{3n}{k}2^{3n-k} \\ &= \binom{3n}{k}\frac{1}{3^k}\frac{2}{3}^{3n-k} \end{aligned}$$

Ainsi : $Z \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3n, \frac{1}{3}\right)$.

Correction méthode 2 : On constate que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$. Pour cela, on peut reconnaître la fonction génératrice de X_1 :

$$G_{X_1}(t) = \left(\frac{t}{3} + \frac{2}{3}\right)^3$$

ou juste le vérifier.

Ainsi, X_1 compte le nombre de succès dans un tirage de longueur 3, X_2 compte aussi le nombre de succès dans un tirage de longueur 3, avec une expérience identique et indépendante.

On peut donc dire que $X_1 + X_2$ compte le nombre de succès dans un tirage de longueur 6. (**REM :** on peut aussi calculer la loi de $X_1 + X_2$ avec un SCE associé à X_1).

Et donc Z compte le nombre de succès dans un tirage de longueur $3n$.

Exercice 115 Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables indépendantes, identiquement distribuées de loi de Bernouilli de paramètre p.

On considère la matrice aléatoire $M = (X_i X_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

1. Donnez la loi du rang et de la trace de M.
2. Quelle est la probabilité que M représente un projecteur ?

Correction :

1. Le rang R est 0 ou 1, avec :

   $$p(R=0) = q^n$$

   La trace est égale à $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
2. On a $M^2 = tr(M)M$, donc il faut $T = 0$ ou $T = 1$, ce qui donne :

   $$p\left(M \text{ est un projecteur}\right) = q^n + npq^{n-1}$$