

Rappels de dénombrements

révisions

Sylvain Pelletier

LMSC - PSI

Théorème fondamental

Théorème

Soit E et F deux ensembles finis, alors E et F ont même cardinal, si et seulement si il existe une bijection ϕ de E vers F (on dit que E et F sont en bijection).

- ▶ On va donc **mettre en bijection** l'ensemble E que l'on veut dénombrer avec un ensemble F dont on connaît le cardinal en expliquant comment faire correspondre à un élément de E un et un seul élément de F .
- ▶ **Bien connaître les ensembles usuels et leur cardinal**, repérer les ensembles usuels dans les ensembles de tirages.
- ▶ Pour dénombrer, on peut toujours **identifier** l'ensemble E et $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Un ensemble E est **fini** si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $\llbracket 1, p \rrbracket$.

On admet qu'un tel p est alors unique, c'est le **cardinal** de l'ensemble E .

- ▶ On peut écrire $E = \{e_1, \dots, e_p\}$.
- ▶ Dénombrer c'est écrire **processus de construction** de l'ensemble E permettant de numéroter les éléments. Ce processus doit construire **une et une seule fois** chaque éléments. Cela peut amener à des problèmes d'**algorithmique**.
- ▶ Cela n'a rien à voir **avec le hasard**, ne suit pas l'**ordre chronologique** et dépend du **choix de la modélisation**.

Les ensembles dont on connaît le cardinal

Description	Cardinal	Utilisation
Entiers de $\llbracket a, b \rrbracket$	$b - a + 1$	1 tirage
Listes de longueurs n de $\llbracket 1, p \rrbracket$	p^n	n tirages avec remise
Listes sans répétitions de longueurs n de $\llbracket 1, p \rrbracket$	$\frac{p!}{(p-n)!}$	n tirages sans remise de $\llbracket 1, p \rrbracket$ n -arrangement de $\llbracket 1, p \rrbracket$
Permutations $\llbracket 1, p \rrbracket$	$p!$	tirages sans remise jusqu'à avoir toutes les boules,
Parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$	2^n	tirages simultanés d'un nombre quelconque de boule,
Parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments Combinaisons de k éléments	$\binom{n}{k}$ $\frac{n!}{k!(n-k)!}$	tirage « en tas » de k boules, de $\llbracket 1, n \rrbracket$

On tire des boules numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- ▶ Si on tire une seule boule, alors l'univers est $\llbracket 1, 8 \rrbracket$, son cardinal est 8.
- ▶ Si on tire 4 boules successivement avec remise, alors l'univers correspond au **4-uplets de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$** i.e. $\llbracket 1, 8 \rrbracket^4$, son cardinal est 8^4 .
- ▶ Si on tire 4 boules successivement sans remise, alors l'univers correspond au **4-arrangements de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$** , son cardinal est $\frac{8!}{(8-4)!}$.
- ▶ Si on tire 4 boules simultanément, alors l'univers correspond au **4-combinaisons de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$** , son cardinal est $\binom{8}{4}$.
- ▶ Si on tire un tas de boule quelconque (sans connaître le nombre de boule tiré), alors l'univers correspond aux **parties quelconques de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$** , cardinal 2^8 .
- ▶ Si on tire les 8 boules sans remise une à une, alors l'univers correspond **aux permutations de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$** , son cardinal est $8!$.
- ▶ Les tirages de 4 boules formant une suite strictement décroissante correspondent **aux parties à 4 éléments distincts**, il y en a donc $\binom{8}{4}$.

Exemples basiques

On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32.

- ▶ Univers ? **parties / combinaisons**
- ▶ Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de la même couleur ? (couleur signifie : trèfle, carreaux, pique ou cœur). $4 \times \binom{8}{4}$
- ▶ Combien de tirages sont constitués de quatre cartes de couleurs différentes (pas tous la même couleur) ? $\binom{32}{4} - 4\binom{8}{4}$

On tire successivement et sans remise 6 jetons dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- ▶ Univers ? **Arrangements / liste sans répétition**
- ▶ Combien de tirages contiennent une consonne au rang 2 ? $20 \times \frac{25!}{(25-5)!}$
- ▶ Combien de tirages forment une suite strictement croissante dans l'ordre alphabétique ? $\binom{26}{6}$

Procéder par complémentaire $\text{Card}(\overline{E}) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(E)$.

Union disjointe on écrit l'ensemble E sous la forme $E = A \cup B$, avec une union disjointe. On a alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

Cela correspond à une partition de l'ensemble E : on construit d'abord une partie des éléments de E , puis une autre.

Choix successifs On décompose le processus de construction en plusieurs étapes. Le nombre d'éléments construit est alors le produit du nombre de choix à chaque étape.

Cela revient à un produit cartésien.

Union non disjointe $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$.

Lemme des bergers Si chaque élément de F correspond à λ éléments de E , alors $\lambda \text{Card}(F) = \text{Card}(E)$. Ce lemme est à la limite du programme, voir la fiche.

Exemples basiques

On tire successivement avec remise 5 boules dans un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15.

- ▶ Quel est l'univers associé et son cardinal ? **listes, $\llbracket 1, 15 \rrbracket^5$**
- ▶ Combien de tirages contiennent des nombres distincts deux à deux ? $\frac{15!}{(15-5)!}$
- ▶ Combien sont formés de au moins deux « 1 » ? $15^5 - 14^5 - 5 \times 14^4$.
- ▶ Combien sont formés de deux nombres différents et deux seulement ? $\binom{15}{2}(2^5 - 2)$, ou $15 \times \left[\binom{5}{3} + \binom{5}{4} \right] \times 14$.
- ▶ Combien sont formés de cinq nombres (différents) tirés dans l'ordre croissant ? **C'est une suite strictement croissante : $\binom{15}{5}$**

Exemples basiques

- ▶ Combien existe-t-il d'anagrammes du mot abracadabra ?
 $\binom{11}{5} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2$ (places des *a*, des *b* des *r* permutation de *c* et *d*). Cela se simplifie.
- ▶ On distribue les 32 cartes d'un jeu de cartes à 4 joueurs, chacun recevant donc 8 cartes. Quel est le cardinal de l'univers associé ?
 $\binom{32}{8} \times \binom{24}{8} \times \binom{16}{8} \times \binom{8}{8}$, ce qui se simplifie.
- ▶ On dispose d'une urne contenant trois boules blanches numérotées de 1 à 3 et de deux boules noires numérotées de 4 à 5. On tire une à une successivement les cinq boules de l'urne (sans remise). Combien y a-t-il de façons d'obtenir deux boules blanches lors des deux premiers tirages ?
 $3 \times 2 \times 3 \times 2$ (choix successifs).

Les pièges

- ▶ Toujours bien vérifier que l'on compte **une et une seule fois** chaque élément ! Piège du **au moins**
 - ▶ Dans un choix successifs, le nombre de choix à l'étape 2 ne doit pas dépendre du choix fait à l'étape 1, **même si les choix faits à l'étape 2 peuvent dépendre du choix fait à l'étape 1**.
 - ▶ Autre manière de voir : **les choix successifs ne sont qu'une union disjointe !**
- ▶ Tirage de 2 cartes dans un jeu de 32 : combien de tirages avec au moins un roi ?
 - ▶ Deux lancers de dés, combien de tirage tel que $D_1 < D_2$?
 - ▶ Tirage de 6 lettres parmi les 26 lettres successivement et sans remise. Combien de tirage avec une consonne à la 4ème place ?

Tirages sans remise

On tire dans une urne avec pN boules blanches et qN boules noires, n fois sans remise. X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si B_i et $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

- ▶ Donner la loi de Y ?
- ▶ Montrer que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. En déduire $E(Y)$.
- ▶ Calculer $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ pour $i < j$.

Plusieurs modélisations possibles

- ▶ On tire (virtuellement) toutes les boules : un tirage correspond à la **place des blanches**.
- ▶ Les boules sont (virtuellement) numérotées : un tirage correspond à un **arrangements**.
- ▶ Bien sûr, on a la même probabilité à la fin.

Méthode pour utiliser les probabilités uniforme

On peut utiliser les probabilités uniforme pour calculer une probabilité d'un événement A :

- ▶ On commence par **définir l'univers** (plusieurs choix possibles) :
 - On doit être capable de donner $\text{Card}(\Omega)$.
 - L'ensemble Ω doit bien être **muni de la probabilité uniforme** dans la modélisation.
 - On doit pouvoir **exprimer l'événement A comme une partie de Ω** , dont on peut calculer le cardinal.
- ▶ On calcule alors simplement $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.
- ▶ C'est un outil puissant mais compliqué à utiliser.
- ▶ **Particulièrement utile lorsque l'on veut s'affranchir de l'ordre chronologique**. (ex : tirage sans remise).

Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis. On a :

- ▶ Si il existe une injection de E vers F , alors $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$.
- ▶ Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors toute injection de E vers F est bijective.
- ▶ Si il existe une surjection de E vers F , alors $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$.
- ▶ Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors toute surjection de E vers F est bijective.

Si deux ensembles finis ont même cardinal et $f : E \rightarrow F$ est une application alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Exercices à savoir refaire

Nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\{0, 1\}$: $2^n - 2$

Nombre de surjections de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$: $\binom{n+1}{2} n((n-1)!)$

S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments.

Montrer que $n^p = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} S_i^p$.

Nombres d'applications entre ensembles finis

Soit E et F deux ensembles finis, avec $p = \text{Card}(E)$, et $n = \text{Card}(F)$.

- ▶ L'ensemble des applications de E vers F , notée F^E est fini et :

$$\text{Card}(F^E) = (\text{Card } F)^{\text{Card } E} = n^p.$$

- ▶ On a $\frac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F .
- ▶ On a $p!$ bijections de E dans E .

Et le nombre de surjections ?

Binomiaux et dénombrements

- ▶ $\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a que l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
- ▶ $\binom{n}{1} = n$ car on compte les singletons, i.e. les éléments.
- ▶ $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ car il y a autant de parties que de complémentaires de parties.

E de cardinal n , $P_k(E)$ est l'ensemble des parties à k éléments de E .

$$P(E) = \bigcup_{k=0}^n P_k(E) \quad \text{union disjointe}$$

$$\text{Donc : } 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Propriété de Pascal

- ▶ On considère l'ensemble E des parties de $p + 1$ éléments de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.
 $\text{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- ▶ On découpe E en deux parties disjointes : l'ensemble des parties contenant $n + 1$ notée E_1 , l'ensemble des parties ne contenant pas $n + 1$ notée E_2 .
- ▶ On a clairement : $E = E_1 \cup E_2$, union disjointe. Ainsi,
 $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2)$.

On a $\text{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$ puisque l'on construit les parties à $p + 1$ éléments de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ ne contenant pas $n + 1$, donc les parties à $p + 1$ éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Propriété de Pascal

On considère l'ensemble E des parties de $p + 1$ éléments de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$. On découpe E en deux parties disjointes : l'ensemble des parties contenant $n + 1$ notée E_1 , l'ensemble des parties ne contenant pas $n + 1$ notée E_2 .

Une partie de E_1 est une partie de $p + 1$ éléments de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ contenant $n + 1$, elle est donc entièrement déterminée par la donnée d'une partie de p éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ auquel on ajoute l'élément $n + 1$. Ainsi,

$$\text{Card}(E_1) = \binom{n}{p}.$$

Propriété de Pascal

- ▶ on sait $\text{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- ▶ on a : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2)$.
- ▶ on a montré :

$$\text{Card}(E_1) = \binom{n}{p} \text{ et } \text{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$$

Ce qui donne la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$