

Séries numériques

Rappels et compléments

Sylvain Pelletier

PSI - LMSC

Convergence d'une série

- ▶ On dit que la série $\sum u_k$ converge si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$.
- ▶ Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

Si les sommes partielles tendent vers $+\infty$ la série diverge, mais la suite des sommes partielles peut ne pas avoir de limite.

- ▶ C'est une propriété asymptotique cela ne dépend pas des premiers termes.

- ▶ Ne pas confondre la série $\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k\right)$ (= la suite des sommes partielles), et le scalaire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (= la limite des sommes partielles)

Généralités

Définition (Série)

Pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n est appelé la somme partielle d'ordre n .

- ▶ Valable pour une série de réels et de complexes. On élargira aux séries de fonctions.
- ▶ La série caractérise la suite puisque :

$$u_0 = S_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$$

Généralités

Dans le cas d'une série convergente :

- ▶ somme de la série le scalaire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$$

- ▶ reste d'ordre n de la série la valeur de :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- ▶ La suite des restes (R_n) converge vers 0.

- ▶ Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite (u_n) tends vers 0. Dans le cas contraire, on parle de **divergence grossière**.
- ▶ Une série à termes positifs converge si le terme général tends « **suffisamment vite** » vers 0,
- ▶ Une série à termes de signe quelconque converge
 - soit parce qu'elle est **absolument convergente** (ie $\sum |u_k|$ converge),
 - soit parce qu'il y a une **compensation entre les termes**. (ex : série alternée)

- ▶ $\sum \frac{1}{k^2}$ converge car le terme général tends « **suffisamment vite** » vers 0. Au contraire $\sum \frac{1}{k}$ diverge.
- ▶ $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge (série alternée).

Combinaison linéaire

- ▶ Toute **combinaison linéaire** de deux séries convergentes et convergentes.
- ▶ Si on sait que $\sum u_k$ et $\sum v_k$ converge, alors on sait que $\sum u_k + \alpha v_k$ converge avec :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \alpha v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

- ▶ **Attention :** $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \alpha v_k)$ peut converger sans que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ convergent !

- ▶ Pour les séries, on montre souvent **la convergence sans être capable de calculer la valeur de la somme !**

- ▶ Ex : en comparant à une intégrale, on montre facilement que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, mais comment prouver que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$?

Séries à termes complexes

- ▶ Pour une série à termes **complexes**, la convergence est équivalente à **la convergence de la partie réelle et de la partie imaginaire**.
- ▶ La série complexe $\sum (a_k + ib_k)$ converge si et seulement si les deux séries réelles $\sum a_k$ et $\sum b_k$ converge.
- ▶ On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + ib_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Série géométrique

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

- ▶ La série $\sum \lambda^k$ converge si et seulement si $|\lambda| < 1$.
- ▶ on a l'expression des **sommes partielles** :

$$\sum_{k=0}^n \lambda^k = \begin{cases} (n+1) & \text{si } \lambda = 1 \\ \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} & \text{si } \lambda \neq 1. \end{cases}$$

- ▶ et l'expression de la somme :

$$\text{si } |\lambda| < 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k = \frac{1}{1 - \lambda}$$

Série géométrique

- ▶ Si la série ne commence pas au premier terme, **ne pas l'oublier !**
- ▶ Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\text{somme partielle} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbr de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

- ▶ Si $|\lambda| < 1$:

$$\text{somme} = \text{premier terme} \times \frac{1}{1 - \text{raison}}$$

- ▶ C'est un des rares cas où on **calcule la valeur de la somme et on montre la convergence !**

Série télescopique

Définition

- ▶ Une série $\sum u_n$ est dite **télescopique** lorsque l'on peut trouver une suite (v_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_{n+1} - v_n$$

- ▶ les sommes partielles se calculent très facilement :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_0.$$

- ▶ Ainsi, la suite (v_n) converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Dans l'autre sens...

Soit (u_n) une suite. Alors la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Séries télescopiques

- ▶ $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$
- ▶ $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$
- ▶ $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

Chercher les simplifications en particulier pour les fractions.

- ▶ C'est un des rares cas où on a l'expression de la somme partielle et où on calcule **la limite de la somme partielle** pour montrer la convergence et obtenir la somme.

Séries à termes positifs

Soit (u_n) une suite à termes positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante.

- ▶ La suite des sommes partielles converge ou tends vers $+\infty$.
- ▶ La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

- ▶ Si la série est à termes négatifs, on étudie $\sum_k (-u_k)$,
- ▶ La série peut être à termes positifs seulement à partir d'un certain rang.

Bien vérifier que le terme général de la série est positif !

Comparaisons des séries à termes positifs

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs vérifiant :

- ▶ $u_n = o_{n \rightarrow \infty}(v_n)$ alors Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- ▶ $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

Il arrive de plus que l'on montre en plus que la série est à termes positifs (à partir d'un certain rang) en utilisant un équivalent !

- ▶ On en déduit : $u_n = o_{n \rightarrow \infty}(v_n)$ alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- ▶ Cela permet de se ramener aux séries pour lesquelles la convergence est connue (série géométrique / série de Riemann)
- ▶ On estime la vitesse à laquelle le terme général (u_n) tends vers 0.

Comparaison par majoration / minoration

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

On a alors :

- ▶ Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et :

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- ▶ Si $\sum u_n$ diverge (tends vers $+\infty$) alors $\sum v_n$ diverge (tends vers $+\infty$).

Exemple de comparaison pour les séries à termes positifs

- ▶ $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}(\cos^2 n)}$
- ▶ $\sum_{n \geq 1} \left(\sin \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$
- ▶ $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lien série intégrale

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante.

On peut alors construire :

la suite d'intégrale : $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est une suite croissante

la série $\left(\sum f(k)\right)$ qui est une série à termes positifs

- ▶ un dessin des rectangles montre que ces deux suites ont liées.
- ▶ Toujours bien avoir en tête ce lien ! Il est plus simple de retrouver la plupart des résultats que de les apprendre.

Lien série intégrale, la démonstration

- ▶ Si on veut la somme encadrée par des intégrales :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k+1}^k f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt$$

On intègre

$$\forall t \in [k, k+1], f(t) \leq f(k) \quad \forall t \in [k-1, k], f(t) \geq f(k)$$

- ▶ Si on veut l'intégrale encadrée par la somme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$$

On intègre

$$\forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

- ▶ Puis on somme ces relations.
- ▶ Dans tous les cas : refaire le dessin au brouillon et attention aux termes extrémaux.

Lien série intégrale le résultat

Soit donc f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et décroissante.
Alors la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)$ ont la même nature.

- ▶ La même nature, pas la même valeur !
- ▶ La suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc converge ou tend vers $+\infty$. La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)$ est à termes positifs.
- ▶ Dans les deux cas c'est asymptotique : on peut enlever les premières valeurs !

On verra que la série converge $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Lien série intégrale : un exemple

Étudier $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2}$.

- ▶ On a : $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t) (\ln(\ln t))^2}$ est décroissante pour $t \geq 3$.
- ▶ On calcule l'intégrale :
- ▶ Ainsi la suite $\left(\int_3^n \frac{dt}{t \ln(t) (\ln(\ln t))^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2}$ converge.

La série harmonique

$\left(\int_1^n \frac{dt}{t}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge donc $\left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}\right)$ diverge.

► Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

► ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$$

► On en déduit alors : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$

On considère $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $\alpha > 1$. Montrer la convergence, encadrer le reste R_n , en déduire un équivalent de R_n .

► Pour la convergence, on regarde :

$$\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx \text{ en posant } u = \ln(x)$$

► Pour l'encadrement, on retrouve le résultat sur le dessin pour $n \leq N$:

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \leq \int_n^N f(t) dt$$

► Il reste à calculer ces intégrales par le changement de variables puis à faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir :

$$R_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)(\ln n)^{\alpha-1}}$$

Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ (qui diverge) est donc un **repère** :

- toute série dont le terme général tends vers 0 moins vite que $\frac{1}{k}$ diverge
- toute série dont le terme général tends vers 0 plus vite que $\frac{1}{k}$ converge.

En effet : la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge

SSI la suite $\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right)$ converge

Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_k$ une série à termes réels positifs.

► Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n = o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right)$, ie $n^\alpha u_n \rightarrow 0$, alors $\sum u_k$ converge.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum u_k$ converge

► Si il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} = o_{n \rightarrow \infty} (u_n)$, ie $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$, alors $\sum u_k$ diverge.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et à partir d'un certain rang $\frac{1}{n^\alpha} \leq u_n$

► Si il existe un réel α et un réel $l \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ ie $n^\alpha u_n \rightarrow l \neq 0$, alors $\sum u_k$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La série $\sum \frac{l}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

► On calcule la limite de $(n^\alpha u_n)$ pour comparer u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ en réfléchissant comment choisir α .

► On compare (u_n) aux repères $\frac{1}{n^\alpha}$.

Exemples

► Soit $\beta > 1$. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$ est convergente.

► Série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs.

On suppose que le rapport entre deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite l lorsque n tends vers $+\infty$.

Alors :

- Si $l < 1$ la série $\sum u_k$ est **convergente**.
- Si $l > 1$ la série $\sum u_k$ **diverge grossièrement**.

Si $l = 1$ on ne peut rien dire ! (idem si il n'y a pas de limite)

Très utile si le terme général est une factorielle ou une puissance : le quotient se simplifie !

Démonstration du critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$.

- On pose $\lambda = \frac{1+l}{2}$ (entre 1 et l), si bien que $\lambda \in]l, 1[$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, donc à partir d'un certain rang n_0 : $u_{n+1} \leq \lambda u_n$
- Et par récurrence immédiate : $u_n \leq \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, pour $n \geq n_0$
- Or $\sum_n \lambda^n$ **converge** car $0 < \lambda < 1$ donc $\sum_n u_n$ converge.
- On a comparé $\sum u_n$ et la série géométrique $\sum \lambda^n$

► Idem pour $l > 1$.

► Voir les démonstrations des croissances comparées :

$$a^n = o_{n \rightarrow \infty}(n!) \quad n^\alpha = o_{n \rightarrow \infty}(n!) \quad n^\alpha = o_{n \rightarrow \infty}(a^n)$$

Exemples pour la règle de d'Alembert

Convergence de $\sum_n \frac{n!}{n^n}$

Convergence de $\sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$

Formule de Stirling

On a :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Une des rares formules à connaître par cœur !

- ▶ On verra la démonstration en exercice.
- ▶ **Utile pour les séries** : permet de donner un équivalent d'une série lorsqu'il y a des factorielles et que le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure.
- ▶ Il y a souvent des factorielles dans les séries à cause **de la formule de Taylor** !

Application de la formule de Stirling

Nature de la série : $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln(n)^n)}{n!}$

- ▶ Série à termes positifs. Clairement, le $n!$ va « l'emporter » sur $\ln(n)^n$.
- ▶ On le montre avec la formule de Stirling :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(\ln n)^n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{\ln(n)}{e^{-1}n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On regarde ensuite $n^2 u_n$:

$$n^2 u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \underbrace{\left(\frac{\ln(n)}{e^{-1}n}\right)^{n-2}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{-2}}}_{\text{constant}} \underbrace{\frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}}}_{\rightarrow 0}$$

- ▶ Ainsi, $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc la série $\sum u_n$ converge.

Comment utiliser la formule de Stirling

- ▶ On a : $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
- ▶ Donc : $(2n)! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 4^n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}$.

- ▶ On peut aussi faire :

$$(n+1)! = (n+1)n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} nn! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{n+1} e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Il est souvent plus simple d'écrire $(n+1)! = (n+1)n!$ plutôt que d'appliquer la formule « en $n+1$ ».

Applications de la formule de Stirling

Nature de la série : $\sum_{n \geq 1} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$

Série à termes positifs.

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4n\pi}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\right)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

Donc

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

la série $\sum u_n$ converge !

Stirling ou d'Alembert ?

Nature de la série : $\sum_{n \geq 1} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$ avec la règle de d'Alembert.

rapport de deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2n!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{1}{4} \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4n^2}{4n^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

Notion de famille sommable

Pour une famille dénombrable $(x_i)_{i \in I}$ de réels **positifs**, on peut associer la somme $\sum_{i \in I} x_i$: on prend une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$, et on pose :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_{\varphi(n)}$$

La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite **sommable** si cette dernière série converge.

► Cela ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait la sommation. **Faux si les termes sont de signe quelconques**

► On peut découper en paquet comme on le souhaite :

Pour tout découpage : $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ union disjointe

$$\text{on a : } \sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} x_i$$

Somme double infinie de réels positifs

On peut manipuler des **sommes doubles infinies** $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{ij}$ de réels positifs.

C'est une somme indexée sur $\mathbb{N}^2$.

► On peut sommer en ligne puis en colonne : $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij} \right)$

► Ou en colonne puis en ligne : $\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{ij} \right)$

► Ou encore en diagonale : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_{ij} \right)$

► Si les séries convergent l'une des méthodes alors elles convergeront pour les autres et on aura égalité de la valeur somme.

Somme triangle infinie de réels positifs

On peut manipuler **des sommes triangle infinies** : $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i < j} a_{i,j}$ de réels positifs.

► On peut sommer en ligne puis en colonne : $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=i+1}^{+\infty} a_{i,j} \right)$

► Ou l'inverse : $\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^j a_{i,j} \right)$

► Si les séries convergent pour une méthode alors elles convergeront pour l'autre et on aura égalité.

Dans le cas d'une famille de réels positifs, on peut manipuler les sommes de manière naturelle. La finitude de la somme valant preuve de la sommabilité.

Famille sommable de complexe

Une famille dénombrable $(x_i)_{i \in I}$ de nombres complexes est dite **sommable** si la famille $(|x_i|)_{i \in I}$ l'est.

- ▶ Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité signifie donc la convergence absolue.
- ▶ Si il existe une famille sommable de réels positifs $(y_i)_{i \in I}$ telle que :
$$\forall i \in I, |x_i| \leq y_i$$
alors la famille (x_i) est sommable.

Dans le cas d'une famille de complexes sommable, on peut manipuler les sommes de manière naturelle.

Mais il faut vérifier avant que la famille est sommable, ie faire d'abord les calcul avec $|x_i|$.

Série absolument convergente

Soit (u_n) une suite complexe, et (v_n) une suite de réels positifs.
Si $u_n = O_{n \rightarrow \infty}(v_n)$ (ie si $\left| \frac{u_n}{v_n} \right|$ est borné) et si la série à termes positifs $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

- ▶ Peut être utilisé pour des séries complexes (c'est le module).
- ▶ Permet donc d'obtenir des convergence absolue par **comparaison aux séries usuelles**.

Par exemple : si $\theta \in \mathbb{R}$, $\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ converge puisque $\frac{e^{in\theta}}{n^2} = O_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Séries absolument convergente

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\sum u_k$ la série de terme général u_n .

On dit que la série $\sum u_k$ **converge absolument** si et seulement si la série à termes réels positifs $\sum |u_k|$ converge.

- ▶ Toute série **absolument convergente est convergente**.
- ▶ On a de plus :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Valeur absolue ou module !

Toujours commencer par essayer de montrer la convergence absolue.

Séries absolument convergente

- ▶ Convergence de $\sum_n \frac{\sin(n^2)}{n^2}$

Cette série est absolument convergente car :

$$\sum_n \frac{|\sin(n^2)|}{n^2} \text{ converge par comparaison : } \frac{|\sin(n^2)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Séries alternées

Une série réelle $\sum u_k$ est dite alternée si pour tout entier naturel n , les termes u_n et u_{n+1} sont de signe contraire.

Théorème spécial des séries alternées

Une série alternées $\sum u_n$ telle que $(|u_n|)$ est une suite décroissante qui tends vers 0 est convergente.

De plus :

- ▶ On a une estimation du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$.
- ▶ On connaît le signe du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ a le signe de u_{n+1} .
- ▶ La somme a le signe du premier terme.

Séries alternées (démonstration suite)

$\sum u_k$ est alternée avec $(|u_n|)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle et $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. On a vu que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, avec (S_{2n}) décroissante.

- ▶ En étudiant les suites adjacentes, on a $|S_{2n} - S| \leq |S_{2n+1} - S_{2n}|$ ie : $|R_{2n}| \leq |u_{2n+1}|$
- ▶ idem : $|S_{2n+1} - S| \leq |S_{2n+2} - S_{2n+1}|$ ie $|R_{2n+1}| \leq |u_{2n+2}|$.
- ▶ Ainsi on trouve l'estimation du reste :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$$

Séries alternées (démonstration)

$\sum u_k$ est alternée avec $(|u_n|)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$.

On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle

▶ On a :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \rightarrow 0$$

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} \leq 0 \quad \text{car } |u_{2n+2}| \leq |u_{2n+1}|$$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0 \quad \text{car } |u_{2n+3}| \leq |u_{2n+2}|$$

▶ Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ! donc convergente et (S_n) converge, ie la série est convergente.

Résultat important puisqu'il utilise l'axiome fondamental de $\mathbb{R}$.

Séries alternées (démonstration suite)

$\sum u_k$ est alternée avec $(|u_n|)$ décroissante qui tends vers 0. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle et $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. On a vu que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, avec (S_{2n}) décroissante.

- ▶ Comme $S_0 = u_0 > 0$ alors $S_1 = u_0 + u_1 > 0$ or on a $S \in [S_1, S_0]$, ainsi $S > 0$. La somme S est donc du signe du premier terme !
- ▶ De même, $S_{2n} \geq S$, donc $R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0$ (du signe de u_{2n+1}). On vérifie aussi que $R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \geq 0$ (du signe de u_{2n+2}). Le reste d'ordre n est donc du signe u_{2n+1} (terme suivant).

▶ Le point important : les sommes partielles de rang pairs et impairs sont adjacentes ! donc la somme S est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques.

Exemples de séries alternées

La plus simple : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Nature de la série : $\sum_n (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Les résultats d'encadrement donnent un critère d'arrêt pour les algorithmes de calcul de la somme.

Produit de Cauchy

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries. On appelle **produit de Cauchy** des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k$$

- ▶ Il faut avoir repéré ces termes dans le tableau des valeurs de (u_i, v_j) .
- ▶ Comme pour le produit de deux polynômes.

Des contre exemples

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne converge pas (sinon $\sum \frac{1}{n}$ convergerait).

Les critères de comparaison ne sont valables que pour les séries à termes positifs !

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ ne converge pas. Pourtant c'est bien une série alternée, et on a bien :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

Pour le montrer, il suffit de faire :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}} \text{ série divergente}$$

La monotonie ne passe pas à l'équivalent !

Convergence du produit de Cauchy

On appelle **produit de Cauchy** la série $\sum w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k$$

- ▶ Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **absolument convergente**, alors la série $\sum w_n$ est **absolument convergente**.
- ▶ On a de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Démonstration : c'est une famille sommable donc on peut sommer les termes comme on veut !

Si on développe les deux sommes, on retrouve ce résultat facilement !

Produit de Cauchy

- ▶ Parfois l'une des suites (u_n) et (v_n) (ou les deux) ne sont définies que pour $n \geq 1$.
- ▶ Il faut alors adapter la formule.
- ▶ Sauf indication contraire, le produit de Cauchy est :

$$w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$$
 ie la somme des valeurs le long de la diagonale
- ▶ On regroupe donc les termes par valeur de la somme des indices, mais les indices i et j et n varient dans des intervalles à adapter.

Toujours refaire le schéma du tableau (avec les diagonales)

Toujours ré-écrire le produit des premiers termes pour voir le produit de Cauchy.

Le résultat du cours assure la convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

- ▶ Lorsque les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour $n \geq 1$, on pose de même :

$$\forall n \geq 2, w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{i=1}^{n-1} u_{n-i} v_i = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_{n-i}.$$

- ▶ Sur le tableau, on voit bien pourquoi la somme va de 1 à $n-1$!

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)(v_1 + v_2 + v_3 + \dots) = \underbrace{(u_1 v_1)}_{w_2} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1)}_{w_3} + \underbrace{(u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1)}_{w_4} + \dots$$

- ▶ Si les deux séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ sont absolument convergentes, alors on a de même : $\sum_{n \geq 2} w_n$ absolument convergente et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \right)$$

Exemple de produits de Cauchy

- ▶ Convergence et valeur de la série de terme général : $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

- ▶ Pour $n \geq 1$, on considère $u_n = \frac{1}{n^2}$, et pour $n \geq 0$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n}$.
- ▶ Les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ sont **absolument convergentes**.

- ▶ On écrit :

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)(v_0 + v_1 + v_2 + \dots) = \underbrace{(u_1 v_0)}_{w_1} + \underbrace{(u_1 v_1 + u_2 v_0)}_{w_2} + \underbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0)}_{w_3} + \dots$$

- ▶ Donc la série $\sum w_n$ est **absolument convergente** et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \right) = \frac{\pi^2}{6} \times 2$$

Exemple de produits de Cauchy

Pour $n \geq 2$ on pose $u_n = \frac{\ln(n)}{2^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
Montrer la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

- ▶ Pour la convergence de la série à termes positifs $\sum u_n$, on utilise par exemple **le critère de d'Alembert** :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1.$$

- ▶ Pour $\sum v_n$ c'est une série à termes négatifs avec :

$$-v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2^n n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Ainsi, $\sum v_n$ est absolument convergente.

Pour $n \geq 2$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Calculer le terme général du produit de Cauchy : $\left(\sum_{n \geq 2} a_n\right) \left(\sum_{n \geq 2} v_n\right)$

► On écrit :

$$(a_2 + a_3 + \dots)(v_2 + v_3 + \dots) \\ = \underbrace{(a_2 v_2)}_{w_4} + \underbrace{(a_2 v_3 + a_3 v_2)}_{w_5} + \underbrace{(a_2 v_4 + a_3 v_3 + a_4 v_2)}_{w_6} + \dots$$

► On utilise donc :

$$\forall n \geq 4, w_n = \sum_{(i,j) \ i+j=n} a_i v_j = \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j} v_j$$

► les séries $\sum a_n$ et $\sum v_n$ étant absolument convergentes, on peut écrire par produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n \geq 2} a_n\right) \left(\sum_{n \geq 2} v_n\right) = \sum_{n \geq 4} w_n$$

Pour $n \geq 2$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $a_n = \frac{1}{2^n}$ et $u_n = \frac{\ln(n)}{2^n}$

Calculer : $w_n = \sum_{(i,j) \ i+j=n} a_i v_j = \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j} v_j$, en fonction de (u_n) .

En déduire une relation entre $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

$$w_n = \sum_{j=2}^{n-2} \frac{1}{2^{n-j}} v_j = \frac{1}{2^n} \sum_{j=2}^{n-2} \ln \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=2}^{n-2} (\ln(j-1) - \ln(j)) \\ = -\frac{\ln(n-2)}{2^n} = -\frac{1}{4} u_{n-2} \text{ somme télescopique !}$$

$$\sum_{n \geq 4} w_n = -\frac{1}{4} \sum_{n \geq 2} u_n \\ = \left(\sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^n}\right) \left(\sum_{n \geq 2} v_n\right) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} v_n$$