Programme de colle 17

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

Cours:

Rappels sur les équations différentielles. (2ème ordre)

Chapitre 6 Intégration sur un intervalle

I Fonctions continues par morceaux *I.1 Fonctions continues par morceaux sur un segment I.2 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle*

II Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment *II.1 Fonctions en escalier et intégrale d'une fonction en escalier II.2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux II.3 Lien avec les primitives*

III Intégrales généralisées *III.1 Intégrales généralisées sur* $[a,+\infty[$ *III.2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque III.3 Intégrale généralisée de référence III.4 Propriété III.5 Manipulation ✯Changement de variables ✯Intégration par parties*

IV Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables *IV.1 Définitions IV.2 Manipulation et propriété ✯Intégrabilité en une borne*

Chapitre 7 Espaces euclidiens

I Hyperplan et produit scalaire *✯Projeté et distance à un hyperplan*

II Isométries vectorielles *II.1 Définition et caractérisation*

Techniques:

- Rappels de MPSI : équation différentielle de second ordre.
  Résolution dans le cas homogène, seconds membres particuliers, passage aux complexes. Exercices traités en cours :
  $$y''+2y'+y=4 \qquad y''-y'-2y=x+e^{2x} \qquad y''+y=\cos x+\sin 2x$$
- Démontrer qu'une intégrale converge en connaissant sa primitive.
- Intégrales généralisées de référence : $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$, $\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}$ $\int_0^1 \ln(t)dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$
- Changement de variable dans le cas d'intégrale généralisée.
  Exemple
  $$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx=\int_0^1 \sin\frac{1}{t}dt$$
  $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(2-\sin^2(t))}=\frac{1}{1+u^2}du$$
  Intégration par parties dans le cas d'intégrale généralisée. Exemple de
  $$I_n=\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}dt$$
- Intégrale absolument convergente et fonction intégrable.
- Montrer qu'une intégrale est convergente ou qu'une fonction est intégrable en utilisant des comparaisons.
- Démontrer qu'une application est un produit scalaire. Exemple de :
  - $\langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{n}P(k)Q(k)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$
  - dans $\mathbb{R}^3$:
    $$\Big\langle (x,y,z),(x',y',z')\Big\rangle = xx'+yy'+zz'+\frac{1}{2}\left(xy'+x'y+xz'+x'z+yz'+y'z\right)$$
  - $\varphi(P,Q)=\sum_{i=0}^{n}P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
  - $\langle A,B\rangle=\mathrm{Tr}(A^TB)$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. (fait dans la partie rappel sur l'algèbre linéaire, à relire).

- Fonctions de carré intégrable et produit scalaire sur les fonctions de carré intégrable. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Utilisation de l'inégalité de cauchy-schwarz.
- Montrer qu'une famille est orthonormale. Exemple de :

$$f_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad f_k : x \mapsto \cos(kx) \qquad g_k : x \mapsto \sin(kx) \text{ pour } k \in [\![1,n]\!]$$

- Procédé d'orthonormalisation. Exemple base (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ orthonormée pour $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$. Voir la fiche sur ce sujet.
- Calcul de projeté orthogonal et applications.
  Exemples :
  - projeté de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$
  - $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \left(x - a\cos x - b\sin x\right)^2 dx$
  - projeté de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

- Projection et distance à un hyperplan.
- Isométries vectorielles du plan : définition et caractérisation par la conservation du produit scalaire et par l'image d'une BON.