Programme de colle 5

Pelletier Sylvain — PSI, LMSC

Cours:

Rappels et compléments sur les séries numériques. Série géométrique, série téléscopique, critère de comparaison des séries à termes positifs, comparaison à une intégrale, série de Riemann, critère de d'Alembert, série absolument convergente, série alternée, produit de Cauchy.

Chapitre 2 Variables aléatoires discrètes

I Variables aléatoires *I.1 Généralités I.2 Loi de probabilités I.3 Système complet d'évènements associé I.4 Fonction de répartition*

II Espérance *II.1 Définition II.2 Expression à partir de la fonction de répartition II.3 Théorème de transfert II.4 Linéarité, positivité et croissance*

III Variance *III.1 Définitions III.2 Propriétés III.3 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Thebychev ✯Inégalité de Markov ✯Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

IV Lois usuelles *IV.1 Loi géométrique ✯Loi géométrique sur $\mathbb{N}$ IV.2 Loi de Poisson*

V Couples et suites de variables aléatoires *V.1 Généralités V.2 Variables aléatoires discrètes indépendantes ✯Cas de deux variables ✯Somme de deux variables de Poissons indépendantes ✯Cas de n variables ✯Cas d'une suite de variables V.3 Espérance V.4 Covariance ✯Coefficient de régression linéaire ✯Variance d'une somme*

Techniques:

- Revoir les exercices et résultats présentés dans les transparents « rappels sur les séries numériques » :
  - les séries géométriques
  - les séries télescopiques.
    Exemples traités en cours :
    $$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$
  - les comparaisons pour les séries à termes positifs.
    Exemples traités en cours :
    $$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}(\cos^2 n)} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(\sin\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha+\arctan n}$$
  - Lien série intégrale, en particulier : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $\alpha>1$. et l'étude de la série harmonique.
    Équivalent de $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.
  - Les séries de Riemann et la règle du $n^\alpha u_n$.
  - Règle de d'Alembert (avec la démonstration). Exemple de $\displaystyle\sum_n\frac{n!}{n^n}$ et de $\displaystyle\sum_n\frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$
  - Formule de Stirling : la formule doit être parfaitement connue (pas de démonstration).
    Application à $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln(n)^n)}{n!}$
    Application à $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$.
  - Séries absolument convergente.
  - Théorème spécial des séries alternées (et sa démonstration).
    Application à $\displaystyle\sum_n(-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (utilisation indirecte par un développement asymptotique)

- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergente. (sans démonstration).
  Application à la série de terme général : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.
  Application pour montrer que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{2^n}$$

- Tout exercice sur les séries numériques, en particulier la règle du $n^\alpha u_n$, la règle de d'Alembert (avec la démonstration), la formule de Stirling, le théorème spécial des séries alternées (et sa démonstration), le produit de Cauchy de deux séries absolument convergente (sans démonstration).
- Généralités et définitions sur les variables aléatoires discrètes : loi, système complet d'événements associé, fonction de répartition. Généralité sur l'espérance et la variance, sur les couples et les suites de variables aléatoires.
- Espérance. En particulier expression à partir de la fonction de répartition (pas de démonstration).
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Thebychev : ces deux inégalités doivent être parfaitement connues ainsi que leur interprétation. Démonstration de l'inégalité de Markov. Démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Thebychev à partie de l'inégalité de Markov.
- Loi géométrique : loi, espérance et variance. (pas de démonstration pour la variance).
- Loi de Poisson : loi espérance et variance. Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson (avec la démonstration).
- Covariance et coefficient de corrélation linéaire. Démonstration de l'inégalité : $|cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$. (avec le cas d'égalité).