Programme de colle 6

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

Chapitre 2 Variables aléatoires discrètes

I Variables aléatoires *I.1 Généralités I.2 Loi de probabilités I.3 Système complet d'évènements associé I.4 Fonction de répartition*

II Espérance *II.1 Définition II.2 Expression à partir de la fonction de répartition II.3 Théorème de transfert II.4 Linéarité, positivité et croissance*

III Variance *III.1 Définitions III.2 Propriétés III.3 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Thebychev ✯Inégalité de Markov ✯Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

IV Lois usuelles *IV.1 Loi géométrique ✯Loi géométrique sur* $\mathbb{N}$ *IV.2 Loi de Poisson*

V Couples et suites de variables aléatoires *V.1 Généralités V.2 Variables aléatoires discrètes indépendantes ✯Cas de deux variables ✯Somme de deux variables de Poissons indépendantes ✯Cas de n variables ✯Cas d'une suite de variables V.3 Espérance V.4 Covariance ✯Coefficient de régression linéaire ✯Variance d'une somme*

VI Résultats asymptotiques *VI.1 Convergence de la loi binomiale vers une loi de Poisson ✯Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares VI.2 Loi faible des grands nombres*

Chapitre 3 Suites et séries de fonctions

I Convergence d'une suite de fonctions *I.1 Mode de convergence d'une suite de fonctions ✯Convergence simple ✯Convergence uniforme ✯La convergence uniforme entraîne la convergence simple ✯Norme de la convergence uniforme ✯Convergence uniforme sur tout segment I.2 Régularité de la limite d'une suite de fonctions ✯Continuité de la limite d'une suite de fonctions*

✯Théorème de la double limite ✯Intégration sur un segment ✯Dérivation d'une limite ✯Dérivations successives

Techniques:

- Généralités et définitions sur les variables aléatoires discrètes : loi, système complet d'événements associé, fonction de répartition. Généralité sur l'espérance et la variance, sur les couples et les suites de variables aléatoires. Notion d'indépendance, d'un couple, d'une famille, d'une suite.
- Espérance. En particulier expression à partir de la fonction de répartition.
- Loi géométrique : loi, espérance et variance.
- Loi de Poisson : loi espérance et variance.
- Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson (avec la démonstration).
- Covariance et coefficient de corrélation linéaire. Démonstration de l'inégalité : $|cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$. (avec le cas d'égalité).
- Tout exercice de calcul d'espérances et de variances. En particulier variance d'une somme.
- Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson (la démonstration).
- Loi faible des grands nombres (énoncé et démonstration).
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Thebychev : ces deux inégalités doivent être parfaitement connues ainsi que leur interprétation. Démonstration de l'inégalité de Markov. Démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Thebychev à partie de l'inégalité de Markov.
- Définition de la convergence simple et de la convergence uniforme. Norme associée à la convergence uniforme. Pour les exemples suivants :

$$f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n \qquad f_n : x \longmapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 2n - n^2 x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases} \qquad f_n : x \longmapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\end{cases}$$

  convergence simple, étude de la convergence uniforme.
- Limite d'une suite de fonctions et continuité. Démonstration.
- Limite d'une suite de fonctions et intégration sur un segment. Démonstration.
- Limite d'une suite de fonctions et dérivation. Démonstration.

- Montrer la convergence uniforme d'une suite de fonction (f_n) sur I :
  - en étudiant $f_n - f$ sur I et en calculant $\|f_n - f\|_\infty$,
  - ou en majorant $|f_n(x) - f(x)|$ indépendamment de x par une suite qui tends vers 0.
- Montrer qu'une suite de fonctions ne converge par uniformément sur I, en minorant $\|f_n - f\|_\infty$ par une suite de réels positifs qui ne tends pas vers 0.