Programme de colle 7

Pelletier Sylvain — PSI, LMSC

Cours:

IV Lois usuelles *IV.1 Loi géométrique ⭑Loi géométrique sur ℕ IV.2 Loi de Poisson*

V Couples et suites de variables aléatoires *V.1 Généralités V.2 Variables aléatoires discrètes indépendantes ⭑Cas de deux variables ⭑Somme de deux variables de Poissons indépendantes ⭑Cas de n variables ⭑Cas d'une suite de variables V.3 Espérance V.4 Covariance ⭑Coefficient de régression linéaire ⭑Variance d'une somme*

VI Résultats asymptotiques *VI.1 Convergence de la loi binomiale vers une loi de Poisson ⭑Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares VI.2 Loi faible des grands nombres*

Chapitre 3 Suites et séries de fonctions

I Convergence d'une suite de fonctions *I.1 Mode de convergence d'une suite de fonctions ⭑Convergence simple ⭑Convergence uniforme ⭑La convergence uniforme entraîne la convergence simple ⭑Norme de la convergence uniforme ⭑Convergence uniforme sur tout segment I.2 Régularité de la limite d'une suite de fonctions ⭑Continuité de la limite d'une suite de fonctions ⭑Théorème de la double limite ⭑Intégration sur un segment ⭑Dérivation d'une limite ⭑Dérivations successives*

II Convergence d'une série de fonctions *II.1 Mode de convergence d'une série de fonctions ⭑Convergence simple et uniforme ⭑Convergence normale*

Techniques:

- Tout exercice de calcul d'espérances et de variances. En particulier variance d'une somme.
- Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson (la démonstration).
- Loi faible des grands nombres (énoncé et démonstration).
- Tout exercice de probabilité.
- Définition de la convergence simple et de la convergence uniforme. Norme associée à la convergence uniforme. Pour les exemples suivants :

$$f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n \qquad f_n : x \longmapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 2n - n^2 x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases} \qquad f_n : x \longmapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\end{cases}$$

  convergence simple, étude de la convergence uniforme.
- Limite d'une suite de fonctions et continuité. Démonstration.
- Limite d'une suite de fonctions et intégration sur un segment. Démonstration.
- Limite d'une suite de fonctions et dérivation. Démonstration.
- Montrer la convergence uniforme d'une suite de fonction (f_n) sur I :
  - en étudiant $f_n - f$ sur I et en calculant $\|f_n - f\|_\infty$,
  - ou en majorant $|f_n(x) - f(x)|$ indépendamment de x par une suite qui tends vers 0.
- Montrer qu'une suite de fonctions ne converge par uniformément sur I, en minorant $\|f_n - f\|_\infty$ par une suite de réels positifs qui ne tends pas vers 0.
- Convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions. convergence normale et uniforme sur tout segment. Exemple de :

$$\sum \frac{(-1)^n x^n}{n} \qquad \sum \frac{1}{n^2 + x} \qquad \sum \frac{e^{-nx}}{n^2} \qquad \sum (x(1-x))^n$$

- La convergence normale entraîne la convergence uniforme. Démonstration.
- Montrer la convergence normale d'une série de fonctions :
  - par calcul de $\|f_n\|_\infty$, puis preuve de la convergence de $\sum \|f_n\|_\infty$
  - ou en majorant $|f_n(x)|$ indépendamment de x par le terme général d'une série convergente.
- Montrer qu'une série ne converge par uniformément en utilisant le théorème de la double limite.

- Montrer qu'une série ne converge par normalement en minorant $\|f_n\|_\infty$ par une quantité de la forme $|f_n(x_n)|$ terme général d'une série divergente.
- Convergence normale et intégration sur un segment.
- Continuité et convergence uniforme d'une série de fonctions. Extension au cas de la convergence sur tout segment.
- Dérivation et convergence uniforme d'une série de fonctions. Extension au cas de la convergence sur tout segment et aux dérivées successives.
- Étude de la fonction $\zeta : x \longmapsto \sum \frac{1}{n^x}$: existence, continuité, dérivabilité, dérivées successives. Montrez la non convergence uniforme sur $]1, +\infty[$ par utilisation du théorème de la double limite.